

POLINOMI

1. Za katera realna števila x so $2x$, $1-x$, x^2 prvi trije členi geometrijskega zaporedja? (6 točk)

Rešitev

1. Skupaj: 6 točk

Zapis ali uporaba definicije geometrijskega zaporedja 1 točka

Nastavljena enačba, npr. $\frac{1-x}{2x} = \frac{x^2}{1-x}$ ali $1-x^2 = 2x^3$ ali sistem 1 točka

Urejena enačba $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ *1 točka

1. način

Razcep $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = (2x - 1)(x^2 + 1)$ (1+1) 2 točki

Rešitev $x = \frac{1}{2}$ 1 točka

2. način

Preizkušanje enega izmed možnih racionalnih kandidatov $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ s Hornerjevim algoritmom

ali z vstavljanjem 1 točka

Ugotovitev rešitve $x = \frac{1}{2}$ 1 točka

Ugotovitev, da ni drugih realnih rešitev (zadošča že pravilen razcep ali zapisani faktor (količnik) $x^2 + 1$) 1 točka

2. Določite število a tako, da bo ostanek pri deljenju polinoma $p(x) = x^3 - 2x + a$ s polinomom $q(x) = x - 3$ enak 4. Zapišite količnik $k(x)$ pri tem deljenju. (6 točk)

Rešitev

2. Skupaj: 6 točk

1. način

Izračunan ostanek $a + 21$ 3 točke
(Vsak korak deljenja po 1 točko oz. zapisani koeficienti polinoma v Hornerjevi shemi ... 1 točka, vstavitve vrednosti 3 ... 1 točka.)

Izračunano število $a = -17$ 2 točki
(Le zapisana ali upoštevana enačba $a + 21 = 4$... *1 točka.)

Zapisan količnik $k(x) = x^2 + 3x + 7$ 1 točka

2. način

Ugotovitev, da je $p(3) = 4$ 2 točki

Izračunano število $a = -17$ 2 točki
(Le zapis enačbe, npr. $3^3 - 6 + a = 4$... 1 točka.)

Zapisan količnik $k(x) = x^2 + 3x + 7$ (*1+1) 2 točki

3. Preverite, da je število 2 dvojna ničla polinoma $p(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 32x + 40$. Poiščite še preostali dve (kompleksni) ničli. (7 točk)

Rešitev

3. Skupaj: 7 točk

Preverjanje, da je število 2 ničla polinoma $p(x)$ (*1+1) 2 točki

Preverjanje, da je število 2 dvojna ničla polinoma $p(x)$ (*1+1) 2 točki

Ugotovitev ali upoštevanje $x^2 + 2x + 10 = 0$ 1 točka

Izračun, npr. $x_{3,4} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$ 2 točki

(Le izračun $\sqrt{-36} = \pm 6i$, zadošča tudi le $+6i$... 1 točka.)

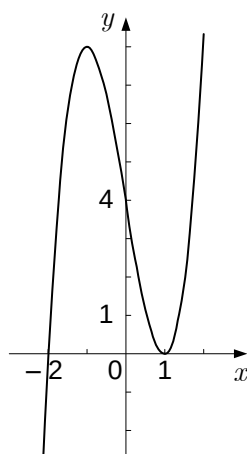
4. Dan je polinom $p(x) = 10x^3 - 19x^2 + ax + 4$. Določite realno število a tako, da bo število 2 ničla tega polinoma. Nato poiščite še preostali ničli polinoma p . (7 točk)

Rešitev

4. Skupaj: 7 točk

Izračunano število $a = -4$ 3 točke
 (Izračun $p(2) = 2a + 8$ ali deljenje z $x - 2$ ali Hornerjev algoritem ... 1 točka, zapisana enačba za izračun števila a , npr. $2a + 8 = 0$... *1 točka.)
 Zapisana kvadratna enačba, npr. $10x^2 + x - 2 = 0$ (*1+1) 2 točki
 Izračunani ničli $-\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{5}$ (1+1) 2 točki
 (Le razcep izraza ali uporaba formule za reševanje kvadratne enačbe ... *1 točka.)

5. Zapišite polinom tretje stopnje, katerega graf je narisani v koordinatnem sistemu.



(6 točk)

Rešitev

5. Skupaj: 6 točk

1. način

Nastavek ali uporaba zapisa $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ 1 točka
 Upoštevanje ničel -2 in 1 , npr. $x - 1^2 x + 2$ (1+1) 2 točki
 Upoštevanje $p(0) = 4$ 1 točka
 Izračun $a = 2$ 1 točka
 Zapis polinoma, npr. $p(x) = 2(x - 1)^2 x + 2$ 1 točka

2. način

Nastavek $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 1 točka
 Upoštevanje ničel -2 in 1 1 točka
 Upoštevanje npr. $p(0) = 4$ 1 točka
 Upoštevanje dvojnosti ničle 1 (npr. s Hornerjevim algoritmom ali z odvodom) 1 točka
 Izračun koeficientov $a = 2$, $b = 0$, $c = -6$ in $d = 4$ 1 točka
 Zapis polinoma, npr. $p(x) = 2x^3 - 6x + 4$ 1 točka

6. Pokažite, da je število -4 ena od ničel polinoma $p(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8$. Poiščite preostali dve ničli polinoma p . Zapišite presečišče N grafa polinoma p z ordinatno osjo. Točka T leži na grafu polinoma p in ima absciso -1 . Zapišite točko T . (7 točk)

Rešitev

6. Skupaj: 7 točk

- Preverjeno, da je število -4 ničla polinoma p (*1+1) 2 točki
 Zapis ali upoštevanje enačbe, npr. $x^2 + 2x + 2 = 0$ *1 točka
 Izračunana korena enačbe $-1 \pm i$ ali utemeljitev, da polinom nima drugih realnih
 ničel..... (*1+1) 2 točki
 Zapisana točka N 0,8 1 točka
 Zapisana točka T $-1,3$ 1 točka

7. Rešite te štiri enačbe v množici realnih števil. Rešitve naj bodo zapisane točno.

- 7.1. $2x - 1 = 0$ (1)
 7.2. $2x^2 - 1 = 0$ (2)
 7.3. $2x^3 - 1 = 0$ (1)
 7.4. $2x^4 - 1 = 0$ (2)

Rešitev

7. Skupaj: 6 točk

7.1. (1 točka)

Rešitev enačbe, npr. $x = \frac{1}{2}$ 1 točka

7.2. (2 točki)

Rešitvi, npr. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (1+1) 2 točki

7.3. (1 točka)

Rešitev, npr. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 1 točka

7.4. (2 točki)

Rešitvi, npr. $x_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ (1+1) 2 točki

8. Dana je funkcija $f(x) = \frac{5}{x^2 - 4}$. Zapišite njeno definicijsko območje D_f . Izračunajte $f(-3)$ in $f\left(\frac{3}{2}\right)$. Za kateri vrednosti spremenljivke x ima funkcija vrednost 5? Vsi rezultati naj bodo točni.

(7 točk)

Rešitev

8. Skupaj: 7 točk

- Zapisano, npr. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ 2 točki
 (Le zapis ali upoštevanje npr. $x^2 - 4 \neq 0$... 1 točka.)
 Izračunana vrednost $f(-3) = 1$ 1 točka
 Izračunana vrednost $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{20}{7}$ 1 točka
 Nastavek enačbe $5 = \frac{5}{x^2 - 4}$ 1 točka

Izračunani vrednosti $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$ 2 točki
(Le enačba, npr. $x^2 = 5$... 1 točka.)

9. Število 2 je dvakratna ničla polinoma $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 15x^2 + ax - 12$. Izračunajte koeficient a in preostali ničli polinoma p . (8 točk)

Rešitev

9. Skupaj: 8 točk

Izračunano: $p(2) = 2a - 64$ (lahko s Hornerjevim algoritmom)..... 1 točka
Upoštevano ali zapisano, da je $p(2) = 0$ *1 točka
Izračunan koeficient $a = 32$ 1 točka
Izračunan ali uporabljen količnik $k(x) = 2x^2 + 5x - 3$ (*1 + 1) 2 točki
Upoštevanje: $2x^2 + 5x - 3 = 0$ 1 točka
Izračunani ničli: $x_3 = -3$ in $x_4 = \frac{1}{2}$ (1 + 1) 2 točki

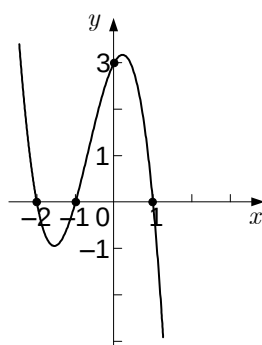
10. Rešite neenačbo $2x^2 - x - 1 < 3x - x^2$. (5 točk)

Rešitev

10. Skupaj: 5 točk

Ureditev neenačbe, npr. $2x^3 - x^2 - 3x < 0$ 1 točka
Izračunani koreni $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ in $x_3 = \frac{3}{2}$ ali razcep izraza..... 2 točki
(Le dva korena ali dva faktorja ... *1 točka.)
Rešitev, npr. $x \in -\infty, -1 \cup 0, \frac{3}{2}$ (1+1) 2 točki
(*1 točko dobi kandidat za pravilno zapisano unijo odprtih intervalov s sicer napačno izračunanimi koreni ali za unijo zaprtih ali polzaprtih intervalov s pravilno izračunanimi koreni.
Če kandidat pravilno reši svojo, sicer napačno neenačbo, dobi le *1 točko.)
(Reševanje z uporabo enačbe točkujemo analogno.)

11. Na sliki je graf polinoma $p(x)$ tretje stopnje, ki ima ničle $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ in $x_3 = 1$.



11.1. Odgovorite na spodnja vprašanja:

Ali je vodilni koeficient polinoma $p(x)$ pozitiven ali negativen? _____

Ali je prosti člen polinoma $p(x)$ pozitiven ali negativen? _____

Koliko realnih rešitev ima enačba $p(x) = 0$? _____

Zapišite ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ s polinomom $q(x) = x^2 - 1$. _____

(4)

11.2. Zapišite predpis polinoma p , če njegov graf seka ordinatno os v točki $T(0, 3)$.

(4)

Rešitev

11. Skupaj: 8 točk

11.1. (4 točke)

Negativen 1 točka

Pozitiven 1 točka

Tri 1 točka

Ničelni polinom oz. $o(x) = 0$ (Zadošča zapis: 0.) 1 točka

11.2. (4 točke)

1. način

Zapis ali uporaba $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ 1 točka

Zapis ali upoštevanje $p(0) = 3$ *1 točka

Izračunan $a = -\frac{3}{2}$ 1 točka

Zapisan predpis, npr. $p(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 2x^2 + x - 1$ 1 točka

2. način

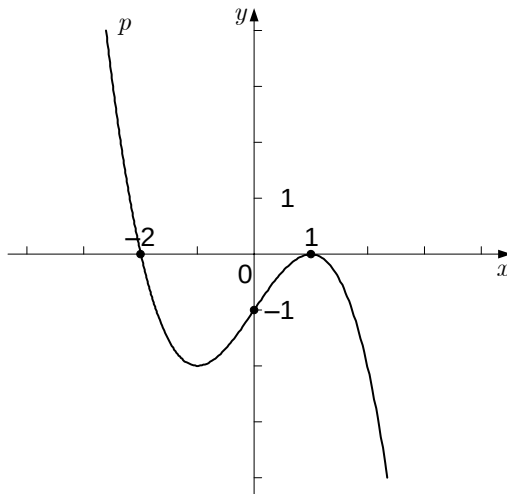
Zapis ali uporaba $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 1 točka

Nastavljen sistem štirih enačb s štirimi neznankami 1 točka

Zapisan predpis, npr. $p(x) = -\frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ 2 točki

(Pravilna le dva koeficienta ... 1 točka.)

12. Na sliki je graf polinoma p tretje stopnje.



12.1. Zapišite predpis polinoma p v faktorizirani obliki (ničelni obliki).

(5)

12.2. V dani koordinatni sistem narišite graf polinoma $s(x) = p(x) + 1$.

(1)

Rešitev

12. Skupaj: 6 točk

12.1. (5 točk)

Zapis nastavka $p(x) = a(x + 2)(x - 1)^2$ 2 točki

(Le upoštevanje ničel in njihovih stopenj v faktorizirani obliki ... 1 točka.)

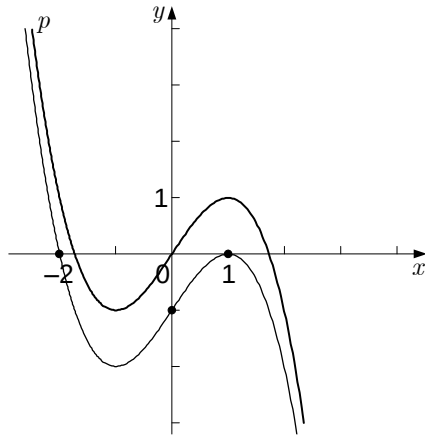
Uporaba pogoja $p(0) = -1$ *1 točka

Ugotovitev, da je $a = -\frac{1}{2}$ 1 točka

Zapis $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ 1 točka

12.2. (1 točka)

Narisan premaknjen graf



..... 1 točka