

KOTNE FUNKCIJE

1. Naj bo α topi kot $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ in $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Izračunajte točni vrednosti $\sin 2\alpha$ in $\tan \alpha + \frac{\pi}{4}$.

(7 točk)

Rešitev

1. Skupaj: 7 točk

Zapis ali uporaba $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 1 točka

Izračun $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ 1 točka

Zapis ali uporaba $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ 1 točka

Rezultat $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$ 1 točka

1. način

Izračun $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ *1 točka

Vstavljeni podatki $\tan \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{-\frac{3}{4} + 1}{1 + \frac{3}{4}}$ *1 točka

Rezultat $\tan \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{7}$ 1 točka

(Za formulo $\frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}}$ kandidat ne dobi točke.)

2. način

Izračunana $\sin \alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ in $\cos \alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$ (1+1) *2 točki

Rezultat $\tan \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{7}$ 1 točka

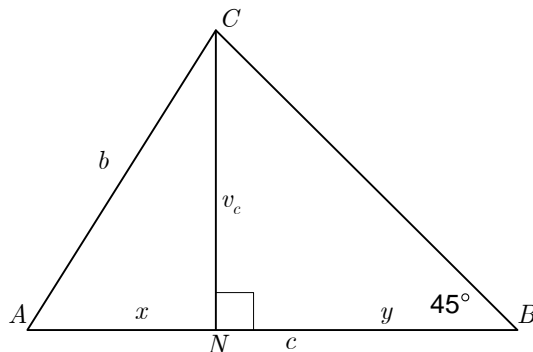
(Če kandidat izračuna napačno $\cos \alpha$ in z napačnim podatkom računa naprej vse pravilno, dobi 4 točke. Če kandidat dobi točne rezultate s kalkulatorjem, dobi vse točke, $\cos \alpha = -0,8$ oziroma $\sin 2\alpha = -0,96$.)

2. V ostrokotnem trikotniku ABC s podatki $b = 10$, $v_c = 8$ in $\beta = 45^\circ$ izračunajte natančno dolžino stranice c . Narišite skico. Pri tem je b dolžina stranice AC , c dolžina stranice AB , v_c višina na stranico c in β kot pri oglišču B . (6 točk)

Rešitev

2. Skupaj: 6 točk

Skica



..... 1 točka

1. način

Nastavek, npr. $x^2 = b^2 - v_c^2 = 36$ 1 točka

- Izračun $x = 6$ 1 točka
- Zapis, npr. $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{v_c}{y}$ ali ugotovitev, da je trikotnik BCN enakokrak 1 točka
- Izračun $y = v_c = 8$ 1 točka
- Rezultat $c = x + y = 14$ 1 točka
- 2. način**
- Izračun $a = 8\sqrt{2}$ ali $a \doteq 11,31$ 2 točki
- (Le nastavek, npr. $\sin \beta = \frac{v_c}{a}$... 1 točka.)
- Izračun $\alpha \doteq 53,13^\circ$ ali $\gamma \doteq 81,87^\circ$ 1 točka
- Rezultat $c = 14$ 2 točki
- (Le uporaba kosinusnega izreka ... 1 točka.)

3. Rešite enačbo: $\sin x + 90^\circ + \cos x = 1$. (6 točk)

Rešitev

3. Skupaj: 6 točk

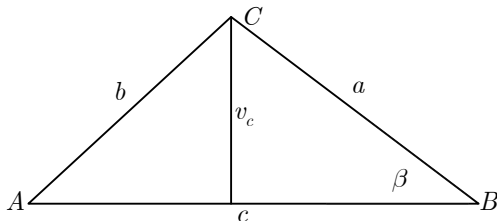
- Upoštevanje $\sin x + 90^\circ = \cos x$ 2 točki
- (Uporaba adicijskega izreka ... 1 točka.)
- Izračun $\cos x = \frac{1}{2}$ (*1+1) 2 točki
- Rešitve: $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ in $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ (1+1) 2 točki
- (Le rešitvi, npr. $x = \pm \frac{\pi}{3}$... 1 točka.)

4. V trikotniku ABC s podatki $c = |AB| = 6$ cm, $a = |BC| = 4$ cm in kotom $\beta = 35^\circ 23'$ izračunajte dolžino stranice $b = |AC|$ in v_c (višina na stranico c). Obe dolžini zapišite zaokroženo na dve mesti. Narišite skico. (7 točk)

Rešitev

4. Skupaj: 7 točk

Označena skica



- 1 točka
- Izračun, npr. $b^2 \doteq 12,866$ 2 točki
- (Le npr. kosinusni izrek ... 1 točka.)
- Pravilno zaokrožen rezultat $b \doteq 3,6$ cm 1 točka
- Zapis višine, npr. $v_c = a \sin \beta$ 2 točki
- (Le npr. definicija $\sin \beta$ ali ploščina trikotnika ... 1 točka.)
- Pravilno zaokrožen rezultat $v_c \doteq 2,3$ cm 1 točka

(Če sta rezultata pravilno zaokrožena na napačno število mest, damo od 2 točk, predvidenih za rezultata, le 1 točko. Če so vsi rezultati brez enot, odštejemo 1 točko.)

5. Rešite enačbo: $\tan^2 x + \sqrt{3} \tan x = 0$. (6 točk)

Rešitev

5. Skupaj: 6 točk

- Razcep $\tan x \tan x + \sqrt{3} = 0$ ali reševanje kvadratne enačbe 2 točki
- Zapis ali upoštevanje $\tan x = 0$ 1 točka
- Rešitve $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 1 točka
- Zapis, npr. $\tan x = -\sqrt{3}$ 1 točka
- Rešitve: $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 1 točka

6. Poenostavite izraz $\frac{\sin \frac{\pi}{2} - x - \cos^3 x}{\sin 2x + 4\pi}$, če $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. (7 točk)

Rešitev

6. Skupaj: 7 točk

- Ugotovitev $\sin \frac{\pi}{2} - x = \cos x$ 1 točka
- Ugotovitev $\sin 2x + 4\pi = \sin 2x$ 1 točka
- Uporaba zveze za sinus dvojnega kota 1 točka
- Izpostavljanje skupnega faktorja v števcu 1 točka
- Uporaba osnovne zveze $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ v kakršni koli obliki..... 1 točka
- Krajšanje..... *1 točka
- Rezultat $\frac{\sin x}{2}$ 1 točka

7. Rešite enačbo: $\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1$. (6 točk)

Rešitev

7. Skupaj: 6 točk

- Ureditev enačbe, npr. $\sin x - 2\sin^2 x = 0$ 2 točki
(Samo upoštevanje zveze $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$... 1 točka.)
- Razcep, npr. $\sin x 1 - 2\sin x = 0$ 1 točka
- Rešitve: $x_1 = k\pi; x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ (1+1+1) 3 točke
(Če kandidat nikoli ne zapiše $k \in \mathbb{Z}$, mu odštejemo 1 točko. Če zapiše le rešitve $0, \frac{\pi}{6}$ in $\frac{5\pi}{6}$, dobi le 1 točko od zadnjih 3.)

8. Rešite enačbo: $\cos x + \cos 2x = 0$. (6 točk)

Rešitev

8. Skupaj: 6 točk

- 1. način
- Faktorizacija: $2 \cos \frac{x+2x}{2} \cos \frac{x-2x}{2} = 0$ 2 točki
- $\cos \frac{3x}{2} = 0$ ali $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 1 točka
- Rešitve: $x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$ (ali enakovreden zapis)..... 1 točka
- $\cos \frac{x}{2} = 0$ ali $\cos -\frac{x}{2} = 0$ ali $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 1 točka
- Rešitve: $x_2 = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ (ali enakovreden zapis)..... 1 točka
- 2. način

Preoblikovanje v kvadratno enačbo $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ 2 točki
(Če kandidat upošteva formulo za $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, dobi 1 točko.)

Rešitvi kvadratne enačbe: $-1, \frac{1}{2}$ ali razcep 1 točka

Rešitve: $x_1 = \pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}, x_2 = \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}, x_3 = -\frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ (1+1+1) 3 točke

(Če pri rešitvah ni nikjer zapisano $k \in \mathbb{Z}$, odštejemo eno točko od točk, ki so namenjene zapisu rešitev. Za vse rešitve brez periode ... 1 točka. Ustrezne so tudi rešitve, izražene v stopinjah.)

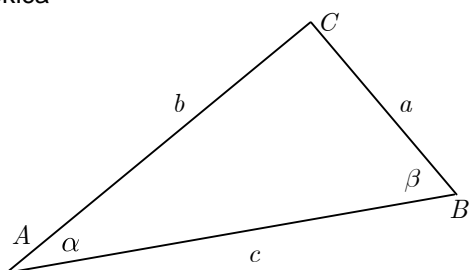
9. V pravokotnem trikotniku ABC (pravi kot je pri oglišču C) merita stranici $a = 3$ cm in $c = 6$ cm. Natančno izračunajte dolžino stranice b in velikosti kotov α in β . Narišite skico.

(6 točk)

Rešitev

9. Skupaj: 6 točk

Skica



(najmanj z oznakama a in c) 1 točka

Pitagorov izrek ali uporaba kotnih funkcij za izračun stranice b 1 točka

Izračunana stranica $b = 3\sqrt{3}$ cm ali $b = \sqrt{27}$ cm 1 točka

Rezultat $\alpha = 30^\circ$ in $\beta = 60^\circ$ (2+1) 3 točke

(Le izračun, npr. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$... 1 točka.)

10. Pokažite, da velja enakost $\frac{\sin x \cos 2x + 1}{\cos x \sin 2x} = 1$ za vsak $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. (5 točk)

Rešitev

10. Skupaj: 5 točk

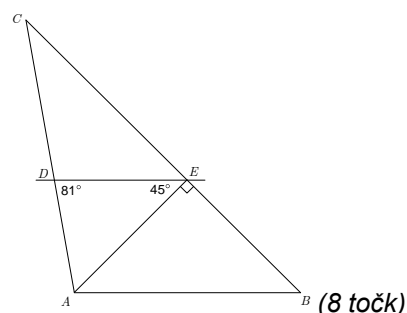
Upoštevanje $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 1 točka

Poenostavitev $\cos 2x + 1 = 2 \cos^2 x$ 3 točke

(Uporaba $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$... 1 točka, uporaba $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$... 1 točka.)

Sklep 1 točka

11. Na sliki je $DE \parallel AB$, $\sphericalangle DEA = 45^\circ$, $\sphericalangle ADE = 81^\circ$ in daljica AE višina na stranico BC trikotnika ABC . Izračunajte notranje kote α , β in γ trikotnika ABC . Izračunajte tudi dolžino stranice AB , če je $|BE| = 3\sqrt{2}$ cm.



(8 točk)

Rešitev

11. Skupaj: 8 točk

- Izračun $\alpha = 99^\circ$ (*1+1) 2 točki
- Izračun $\beta = 45^\circ$ (*1+1) 2 točki
- Izračun $\gamma = 36^\circ$ (*1+1) 2 točki
- Izračun $|AB| = 6 \text{ cm}$ (*1+1) 2 točki

12. Dana je funkcija $f(x) = \tan\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$. Zapišite definicijsko območje, izračunajte ničle in presečišče grafa z ordinatno osjo. (8 točk)

Rešitev

12. Skupaj: 8 točk

- Definicijsko območje, npr. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + \frac{3k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$ 3 točke
(Le nastavek, npr. $\cos\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$... 1 točka, zapis $x = \pi + \frac{3k\pi}{2}$... 1 točka.)
- Ničle, npr. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 3 točke
(Le nastavek, npr. $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$... 1 točka, zapis $\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6} = k\pi$... 1 točka.)
- Presečišče z ordinatno osjo $T\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 2 točki
(Upoštevanje $x = 0$... 1 točka.)

13. Rešite enačbe:

13.1. $4^x = \frac{1}{2}$ (2)

13.2. $\log_4 x = \frac{1}{2}$ (2)

13.3. $\cos x = \frac{1}{2}$ (3)

Rešitev

13. Skupaj: 7 točk

13.1. (2 točki)

- Rešitev prve enačbe $x = -\frac{1}{2}$ 2 točki
(Le zapis $2^{2x} = 2^{-1}$ ali $x \log 4 = \log \frac{1}{2}$... 1 točka.)

13.2. (2 točki)

- Rešitev druge enačbe $x = 2$ 2 točki
(Le zapis $4^{\frac{1}{2}} = x$... 1 točka.)

13.3. (3 točke)

- Rešitve tretje enačbe, npr. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (2+1) 3 točke
(Le $x_1 = \frac{\pi}{3}$ in $x_2 = -\frac{\pi}{3}$... 1 točka. Če kandidat ne izračuna $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, izgubi 1 točko. Če kandidat nikjer ne zapiše $k \in \mathbb{Z}$, izgubi 1 točko.)

14. Višina romba $ABCD$ meri 9. Kot ob osnovnici je $\sphericalangle DAB = \alpha = 30^\circ$. Izračunajte točno dolžino stranice in točno dolžino daljše diagonale romba. Narišite skico.

(8 točk)

Rešitev

14. Skupaj: 8 točk

Skica romba (kot α je manjši od β) 1 točka

Nastavek za izračun stranice, npr. $\sin \alpha = \frac{v}{a}$ 1 točka

Izračunana stranica $a = 18$ (1+1) 2 točki

1. način

Kot $\beta = 150^\circ$ 1 točka

Zapis ali uporaba kosinusnega izreka za diagonalo $|AC|$ 1 točka

Rezultat, npr. $|AC| = 18\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (*1+1) 2 točki

2. način

Ugotovitev, da diagonala razpolavlja kot 1 točka

Zapis ali uporaba definicije sinusa ali kosinusa v ustreznih pravokotnih trikotnikih 1 točka

Izračun, npr. $|AC| = \frac{v}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{9}{\sin 15^\circ}$ ali $|AC| = 2a \cos 15^\circ = 36 \cos 15^\circ$ *1 točka

Rezultat, npr. $|AC| = \frac{18}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{36}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 9\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 1 točka

15. Dana je funkcija $f(x) = \sin 3x + 4 \cos x$. Izračunajte njen odvod in dokažite enakost

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 + 2\sqrt{3}.$$

(6 točk)

Rešitev

15. Skupaj: 6 točk

Izračunan odvod $f'(x) = 3 \cos 3x - 4 \sin x$ (1+1) 2 točki

Upoštevane vrednosti $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 3 točke

(Le dve vrednosti ... 1 točka, le tri vrednosti ... 2 točki.)

Preverjena enakost 1 točka

16. Točke $A(0, 0)$, $B(7, 0)$, $C(3, 3)$ so oglišča trikotnika. Narišite točke v koordinatni sistem.

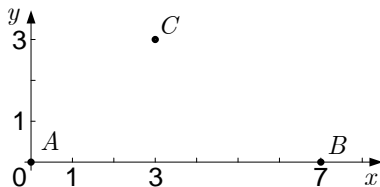
Izračunajte dolžino stranice $a = |BC|$, velikost kota $\beta = \sphericalangle ABC$ in skalarni produkt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Dolžino stranice in skalarni produkt izračunajte natančno, kot pa zaokrožite na minute. (7 točk)

Rešitev

16. Skupaj: 7 točk

Narisane vse točke



..... 1 točka

Izračunana dolžina stranice $a = 5$ 1 točka

Izračunan kot $\beta = 36^\circ 52'$ 2 točki

(Le vrednost kotne funkcije, npr. $\tan \beta = \frac{3}{4}$ ali $\cos \beta = \frac{4}{5}$, ali smerni koeficient $k_{BC} = -\frac{3}{4}$... 1 točka.)

1. način

Izračunan skalarni produkt $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \varphi = 21$ 3 točke
 (Obe dolžini vektorjev $|\vec{AB}| = 7$ in $|\vec{AC}| = \sqrt{18}$... 1 točka, zapisan ali upoštevan kot 45° med vektorjema ... 1 točka.)

2. način

Izračunan skalarni produkt $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7, 0 \cdot 3, 3 = 21$ 3 točke
 (Zapisana vektorja $\vec{AB} = 7, 0$ in $\vec{AC} = 3, 3$... 1 točka, uporaba formule za skalarni produkt ... 1 točka.)

3. način

Izračunan skalarni produkt $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot \text{proj}_{\vec{AB}} \vec{AC} = 21$ 3 točke
 (Izračunana dolžina $|\vec{AB}| = 7$... 1 točka, izračunana $\text{proj}_{\vec{AB}} \vec{AC} = 3$... 1 točka.)

17. Naj bo $\sin 2x \neq 0$. Poenostavite izraz $\frac{\sin \frac{\pi}{2} - x - \cos^3 x}{\sin 2x}$ in ga zapišite kot enočlenik. (6 točk)

Rešitev

17. Skupaj: 6 točk

- Zapis ali uporaba formule za sinus dvojnega kota 1 točka
- Zapis ali uporaba enakosti $\sin \frac{\pi}{2} - x = \cos x$ 2 točki
 (Uporaba adicijskega izreka ... 1 točka.)
- Izpostavljanje skupnega faktorja v števcu 1 točka
- Uporaba osnovne zveze $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ v kakršni koli obliki *1 točka
- Rezultat $\frac{\sin x}{2}$ 1 točka

18. Pokažite, da je za vsak x vrednost izraza $\sin 2x + 2 \sin^2 x - \frac{\pi}{4}$ enaka 1. (5 točk)

Rešitev

18. Skupaj: 5 točk

- Upoštevana zveza $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 1 točka
- Upoštevan adicijski izrek $\sin x - \frac{\pi}{4} = \sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}$ 1 točka
- Upoštevani vrednosti $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 1 točka
- Rezultat, npr. vrednost izraza je 1 2 točki
 (Pravilno kvadriranje ... *1 točka, uporabljena zveza $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$... 1 točka.)

19. Izračunajte vse ničle funkcije $f x = \tan x - 1$ in presečišče njenega grafa z ordinatno osjo. (6 točk)

Rešitev

19. Skupaj: 6 točk

- Zapisana enačba, npr. $\tan x - 1 = 0$ 1 točka
- Rešitve, npr. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (1+1+1) 3 točke
- Zapisano ali upoštevano, da je v presečišču z ordinatno osjo $x = 0$ 1 točka
- Presečišče $T 0, -1$ 1 točka

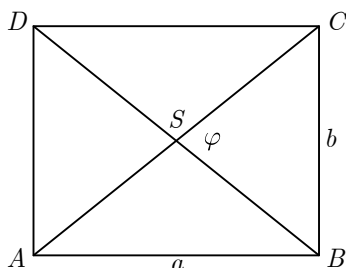
20. Diagonali pravokotnika $ABCD$ se sekata v točki S . Stranica $|AB| = a = 10$ cm, kot $\sphericalangle BSC = \varphi = 40^\circ$. Izračunajte obseg pravokotnika. Rezultat zaokrožite na tri mesta. Narišite skico.

(6 točk)

Rešitev

20. Skupaj: 6 točk

Skica



- 1 točka
 Pravilno ugotovljen kot v pravokotnem trikotniku, npr. $\sphericalangle BAC = 20^\circ$ 1 točka
 Izračun dolžine stranice b , npr. $b = a \tan 20^\circ \doteq 3,64$ cm (*1+1) 2 točki
 Rezultat $o = 27,3$ cm (*1+1) 2 točki

21. Rešite enačbo: $\sin \pi - x + \cos^2 x = 1$.

(8 točk)

Rešitev

21. Skupaj: 8 točk

- Upoštevanje $\sin \pi - x = \sin x$ 2 točki
 (Le uporaba adicijskega izreka ... 1 točka.)
 Uporaba $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 1 točka
 Upoštevanje $\sin x = 0$ in $\sin x = 1$ (*1+1) 2 točki
 Rešitve: $x_1 = k\pi$ in $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (1+1+1) 3 točke
 (Če kandidat pravilno reši enačbi $\sin x = 0$ in $\sin x = -1$, dobi 2 točki od zadnjih treh.)

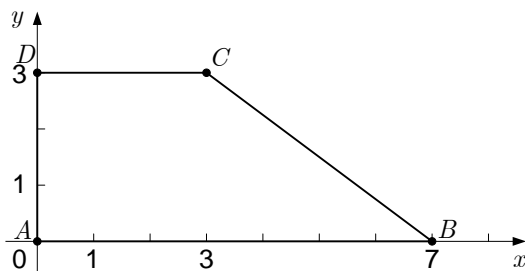
22. Točke $A 0, 0$, $B 7, 0$, $C 3, 3$ in $D 0, 3$ so oglišča trapeza. Narišite ga v dani koordinatni sistem. Izračunajte dolžino stranice $b = |BC|$, skalarni produkt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ in velikost kota $\beta = \sphericalangle ABC$. Dolžino stranice in skalarni produkt izračunajte natančno, kot β pa zapišite zaokroženo na minute.

(7 točk)

Rešitev

22. Skupaj: 7 točk

Skica z vsemi štirimi točkami



- 1 točka
 Izračunana dolžina $b = 5$ 2 točki
 (Samo formula za izračun dolžine ... 1 točka.)
 Skalarni produkt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 21$ 2 točki
 (Le uporaba formule za skalarni produkt ... *1 točka.)

Izračunan kot $\beta \doteq 36^\circ 52'$ 2 točki
 (Le izračunana vrednost kotne funkcije kota β ... *1 točka.)

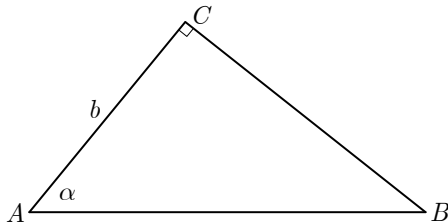
23. V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom pri oglišču C meri kateta $b = |AC| = 7$ cm, kot pri oglišču A pa $\alpha = 51^\circ$. Izračunajte ploščino tega trikotnika. Narišite skico.

(6 točk)

Rešitev

23. Skupaj: 6 točk

Narisana skica z vpisanimi podatki



Izračunana stranica a ali stranica c ali višina v_c 1 točka
 Izračunana stranica a ali stranica c ali višina v_c 2 točki

(Samo $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ ali $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ ali $\sin \alpha = \frac{v_c}{b}$... 1 točka.)

Ploščina, npr. $S = 30,25498$ cm² 3 točke
 (Formula za ploščino trikotnika ... 1 točka, vstavljeni podatki v formulo za ploščino ... *1 točka.)

24. Rešite enačbe:

24.1. $6 \cdot 4^x = 3$ (2)

24.2. $6 \cdot \log_4 x = 3$ (2)

24.3. $6 \cdot \sin 4x = 3$ (4)

Rešitev

24. Skupaj: 8 točk

24.1. (2 točki)

Rešitev enačbe $x = -\frac{1}{2}$ 2 točki

(Le preoblikovanje v enačbo, npr. $2^{2x} = \frac{1}{2}$... 1 točka.)

24.2. (2 točki)

Rešitev enačbe $x = 2$ 2 točki

(Le preoblikovanje v enačbo brez logaritma ... 1 točka.)

24.3. (4 točke)

Zapis ali uporaba $4x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ in $4x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (lahko tudi brez periode) (1+1) 2 točki

Rešitve enačbe $x_1 = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ in $x_2 = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (1+1) 2 točki

(Če kandidat ne zapiše $k \in \mathbb{Z}$, dobi le 1 točko od zadnjih dveh.)

25. V enakokrakem trikotniku meri višina na osnovnico $v_c = 5$ cm, kot α ob osnovnici pa 52° .

Izračunajte dolžini osnovnice in kraka ter ploščino tega trikotnika. Rezultate zaokrožite na 3 mesta. (6 točk)

Rešitev

25. Skupaj: 6 točk

- Izračunana stranica $a \doteq 6,35$ cm (6,34509) (*1+1) 2 točki
 Izračunana stranica $c \doteq 7,81$ cm (7,81286) (*1+1) 2 točki
 Izračunana ploščina $S \doteq 19,5$ cm² (19,53214) (*1+1) 2 točki

(Če kandidat v rezultatih ne zapiše nobene enote, v celoti izgubi 1 točko. Kandidat, ki ima vse rezultate pravilno zaokrožene na napačno število mest, izgubi v celoti 1 točko.)

26. Izračunajte ničle funkcije $f(x) = 2\cos x - 1$ in narišite njen graf. (8 točk)

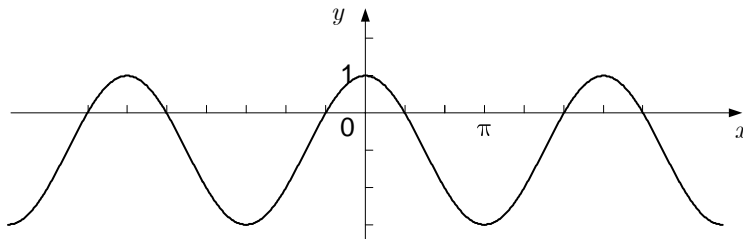
Rešitev

26. Skupaj: 8 točk

- Ugotovitev ali upoštevanje $2\cos x - 1 = 0$ 1 točka
 Ugotovitev $\cos x = \frac{1}{2}$ 1 točka
 Rešitve enačbe, npr. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (1+1+1) 3 točke

(Le rešitev $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$... 2 točki.)

Narisan graf



..... (1+1+1) 3 točke

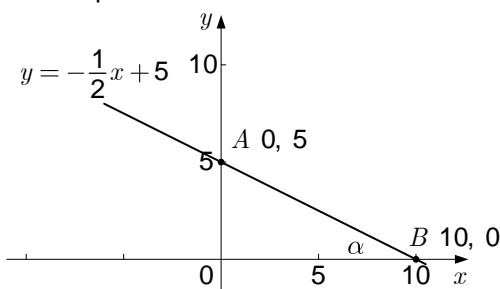
(Če kandidat nariše graf na intervalu, krajšem od 2π , izgubi 1 točko.)

27. V danem koordinatnem sistemu označite točki $A(0, 5)$ in $B(10, 0)$ ter skozi njiju narišite premico. Napišite enačbo te premice in izračunajte kot $\sphericalangle ABO$ (O je izhodišče koordinatnega sistema). Rezultat zaokrožite na kotne minute. (6 točk)

Rešitev

27. Skupaj: 6 točk

Narisana premica



..... 1 točka

- Enačba premice, npr. $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$ ali $y = -\frac{1}{2}x + 5$ ali $x + 2y - 10 = 0$ 3 točke

(Vsak pravilni neničelni člen v enačbi poševne premice ... 1 točka, le splošna enačba premice ... 1 točka.)

Naj bo α velikost $\sphericalangle ABO$.

Izračunana velikost $\alpha \doteq 26^\circ 34'$ 2 točki
 (Le izračun, npr. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ali $\tan 180^\circ - \alpha = -\frac{1}{2}$... *1 točka.)

28. Dana je funkcija $f(x) = 2\sin x - 1$. Izračunajte ničle te funkcije in narišite njen graf v dani koordinatni sistem. (8 točk)

Rešitev

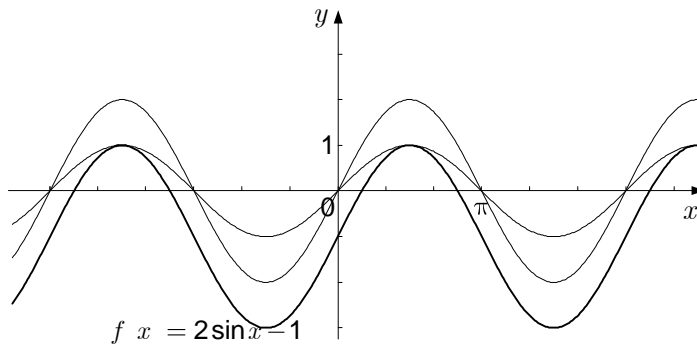
28. Skupaj: 8 točk

Nastavek za računanje ničel, npr. $2\sin x - 1 = 0$ 1 točka

Ureditev enačbe $\sin x = \frac{1}{2}$ 1 točka

Zapisane ničle, npr. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (1+1+1) 3 točke

Narisan graf funkcije f



..... (1+1+1) 3 točke

29. Rešite enačbo: $\cos \frac{\pi}{2} - x + \sin x - 1 = 0$. (7 točk)

Rešitev

29. Skupaj: 7 točk

Ugotovitev $\cos \frac{\pi}{2} - x = \sin x$ 2 točki

(Le pravilna uporaba adicijskega izreka ... 1 točka.)

Poenostavitev, npr. $2\sin x = 1$ 1 točka

$\sin x = \frac{1}{2}$ 1 točka

Rešitve: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (1+1+1) 3 točke

30. Izračunajte ničle funkcij $f(x) = \sin \frac{x}{3}$ in $g(x) = 2\sin \frac{x}{3} + 1$. (7 točk)

Rešitev

30. Skupaj: 7 točk

Zapisana enačba $\frac{x}{3} = k\pi$ 2 točki

(Samo $\sin \frac{x}{3} = 0$... 1 točka.)

Zapisane ničle $x = 3k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 1 točka

Zapisana enačba $\sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ 1 točka

Zapis ali upoštevanje $\frac{x}{3} = -\frac{\pi}{6}$ in $\frac{x}{3} = \frac{7\pi}{6}$ 1 točka

Zapisane ničle, npr. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 6k\pi$ in $x_2 = \frac{7\pi}{2} + 6k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (1+1) 2 točki

(Če kandidat nikjer ne zapiše $k \in \mathbb{Z}$, izgubi 1 točko pri rešitvah.)

31. V enakokrakem trikotniku meri osnovnica 16 cm, krak pa 10 cm. Izračunajte obseg, višino na osnovnico in ploščino trikotnika ter kot ob osnovnici na desetinko stopinje natančno. (6 točk)

Rešitev

31. Skupaj: 6 točk

Izračunan obseg $o = 36$ cm 1 točka
 Izračunana višina $v = 6$ cm 1 točka
 Izračunana ploščina $S = 48$ cm² (*1+1) 2 točki
 Izračunana kotna funkcija, npr. $\cos \alpha = \frac{8}{10}$ *1 točka
 Izračunan kot $\alpha = 36,9^\circ$ 1 točka

(Če kandidat nikjer ne zapiše niti enot za dolžino niti enot za ploščino, izgubi v celoti 1 točko.)

32. Kota α in β sta ostrata. Vemo, da je $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ in $\sin \beta = \frac{4}{5}$. Izračunajte $\sin \alpha + \beta$ na dva načina:

32.1. z računalom, tako da najprej izračunate kota α in β , rezultat pa zaokrožite na dve decimaliki;

(3)

32.2. brez računalna, ne da bi računali kota α in β , rezultat pa naj bo točen.

(5)

Rešitev

32. Skupaj: 8 točk

32.1. (3 točke)

Izračunana kota, npr. $\alpha \doteq 11,54^\circ$ in $\beta \doteq 53,13^\circ$ (1+1) 2 točki
 Izračunan $\sin \alpha + \beta \doteq 0,90$ 1 točka

32.2. (5 točk)

Uporaba zveze $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 1 točka
 Izračunana $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ in $\cos \beta = \frac{3}{5}$ (1+1) 2 točki
 Izračunan $\sin \alpha + \beta = \frac{3 + 8\sqrt{6}}{25}$ 2 točki

(Le uporaba adicijskega izreka ... 1 točka.)

33. Rešite enačbo: $2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0$. (8 točk)

Rešitev

33. Skupaj: 8 točk

Uporaba zveze $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 1 točka
 Ureditvev enačbe, npr. $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ 1 točka
 Ugotovitev $\sin x = -1$ in $\sin x = -\frac{1}{2}$ (1+1) 2 točki

(Le razcep $2\sin x + 1$ $\sin x + 1$ ali uporaba formule za kvadratno enačbo ... 1 točka.)

Zapisane rešitve, npr. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$;

$k \in \mathbb{Z}$ (1+1+1+1) 4 točke
(Le vse tri partikularne rešitve ... 2 točki, le dve partikularni rešitvi ... 1 točka.)

34. V enakokrakem trikotniku ABC meri osnovnica $|AB| = c = 10$ in kot ob vrhu C meri 78° .
Izračunajte kota ob osnovnici in dolžino kraka. Narišite skico. (5 točk)

Rešitev

34. Skupaj: 5 točk

Skica enakokrakega trikotnika z vpisanimi oznakami (vsaj stranica c in tej stranici nasprotni kot) 1 točka

Izračunana kota ob osnovnici $\alpha = \beta = 51^\circ$ 2 točki
(Le zapis ali uporaba $\alpha = \beta$... 1 točka.)

Izračunan krak, npr. $a \doteq 7,9451$ 2 točki
(Le pravilna uporaba kotnih funkcij v trikotniku ... 1 točka.)

35. Dana je funkcija $f(x) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - 2$. Zapišite presečišče grafa funkcije f z ordinatno osjo in izračunajte ničle te funkcije. (8 točk)

Rešitev

35. Skupaj: 8 točk

Zapisano presečišče z ordinatno osjo, npr. $N(0, -1)$ 2 točki
(Le vstavev $x = 0$... 1 točka.)

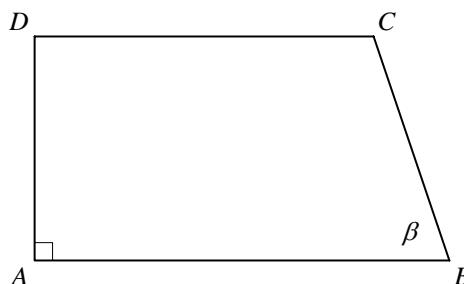
Zapis ali upoštevanje $f(x) = 0$ 1 točka

Zapisana enačba $\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = 1$ 1 točka

Zapis ali upoštevanje, da je $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ 1 točka

Zapisane rešitve, npr. $x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (1+1+*1) 3 točke

36. Na sliki je narisani štirikotnik $ABCD$. $|AB| = 11$, $|AD| = 6$, $|DC| = 9$, stranica AB je vzporedna s CD , kot $\sphericalangle BAD = 90^\circ$. Kako se imenuje tak štirikotnik? Izračunajte natančno dolžino stranice BC in kot $\sphericalangle ABC = \beta$ na desetinko stopinje.



(5 točk)

Rešitev

36. Skupaj: 5 točk

Štirikotnik je trapez. 1 točka

Dolžina, npr. $|BC| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ 2 točki
(Uporaba Pitagorovega izreka v pravokotnem trikotniku ... 1 točka.)

Izračunan kot $\beta \doteq 71,6^\circ$ 2 točki
 (Uporaba kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku ... 1 točka.)

37. Nalogo rešite brez uporabe računalna.

Z uporabo zvez med kotnimi funkcijami izračunajte natančno vrednost izraza $\sin 2x$, če je

$\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ in $x \in \pi, \frac{3\pi}{2}$. (6 točk)

Rešitev

8. Skupaj: 6 točk

Zapis ali uporaba $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 1 točka

Zapis ali uporaba zveze $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 1 točka

Izračun $\sin^2 x = \frac{4}{9}$ 1 točka

Upoštevanje $\sin x = -\frac{2}{3}$ 2 točki

(Le rešitev $\sin x = \frac{2}{3}$ ali $\sin x = \pm \frac{2}{3}$... 1 točka.)

Rezultat $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ 1 točka

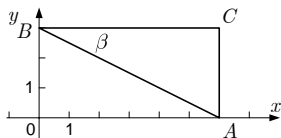
38. V dani koordinatni sistem narišite točke $A(6, 0)$, $B(0, 3)$ in $C(6, 3)$. Natančno izračunajte obseg in ploščino trikotnika ABC . Na stotinko stopinje natančno izračunajte velikost kota $\beta \sphericalangle ABC$.

(8 točk)

Rešitev

38. Skupaj: 8 točk

Narisane točke A, B, C



..... 1 točka

Zapis ali upoštevanje $a = |BC| = 6$, $b = |AC| = 3$ 1 točka

Izračunana stranica $c = |AB| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 1 točka

Izračunan obseg, npr. $o = 9 + 3\sqrt{5}$ 1 točka

Izračunana ploščina, npr. $S = \frac{ab}{2} = 9$ 2 točki

(Le uporaba formule za ploščino ... 1 točka.)

Izračunan kot $\beta \doteq 26,57^\circ$ 2 točki

(Le nastavek, npr. $\tan \beta = \frac{1}{2}$... *1 točka.)

39. Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = 2 \sin x - 1$.

39.1. V dani koordinatni sistem narišite graf funkcije f . (3)

39.2. Izračunajte odvod $f'(x)$. (2)

39.3. Izračunajte nedoločeni integral $\int f(x) dx$. (3)

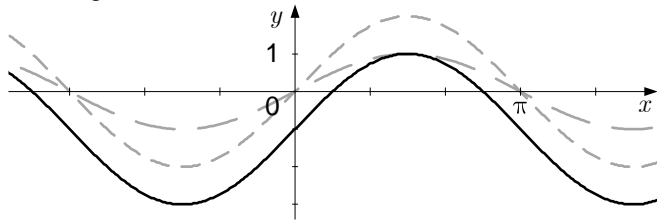
Rešitev

39. Skupaj: 8 točk

39.1. (3 točke)

1. način

Narisan graf

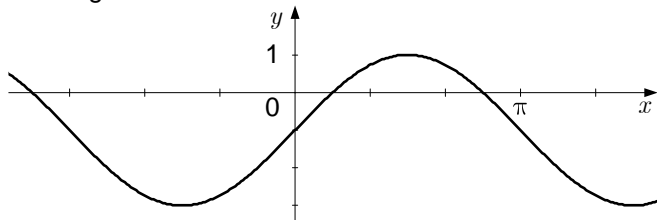


..... 3 točke

(Graf funkcije s predpisom $\sin x$... 1 točka, graf funkcije s predpisom $2 \sin x$... 1 točka, graf funkcije s predpisom $2 \sin x - 1$... 1 točka.)

2. način

Narisan graf



..... 3 točke

(Le izračunane ničle $x_1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$... 1 točka. Le izračunane abscise ekstremov

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$x_{\max} = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

... 1 točka. Zadoščajo izračunane ničle in abscise ekstremov na eni

$$x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

periodi funkcije.)

39.2. (2 točki)

Izračunan odvod $f' x = 2 \cos x$ (1 + 1) 2 točki

(Odvod vsakega člena 1 točka.)

39.3. (3 točke)

Izračunan nedoločeni integral, npr.

$$\int 2 \sin x - 1 dx = -2 \cos x - x + C \text{ (tudi brez } C \text{)} \dots\dots\dots (1 + 1 + 1) 3 \text{ točke}$$

40. Poenostavite izraza.

40.1. $\frac{\cos 2x - 1}{\sin 2x}$

(4)

40.2. $\cos x + 30^\circ - \sin x - 60^\circ + \sin 180^\circ - x$

(4)

Rešitev

40. Skupaj: 8 točk

40.1. (4 točke)

Ugotovitev $\cos 2x - 1 = -2 \sin^2 x$ 2 točki

(Le zapis ali uporaba $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$... 1 točka.)

Zapis ali uporaba $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 1 točka

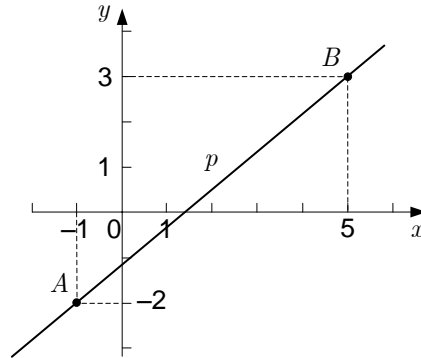
Rezultat: $-\tan x$ 1 točka

40.2. (4 točke)

Uporaba adicijskega izreka: $\cos x + 30^\circ = \cos x \cos 30^\circ - \sin x \sin 30^\circ$ 1 točka

- Uporaba adicijskega izreka: $\sin x - 60^\circ = \sin x \cos 60^\circ - \cos x \sin 60^\circ$ 1 točka
 Zapis ali upoštevanje: $\sin 180^\circ - x = \sin x$ 1 točka
 Rezultat, npr. $\sqrt{3} \cos x$ 1 točka

41. Premica p na sliki poteka skozi točki A in B .



Zapišite enačbo premice v katerikoli izmed znanih oblik. Izračunajte velikost ostrega kota, ki ga premica določa z abscisno osjo. Rezultat zaokrožite na stotinko stopinje.

(6 točk)

Rešitev

41. Skupaj: 6 točk

Zapis ali upoštevanje $A -1, -2$ in $B 5, 3$ 1 točka

Izračun smernega koeficienta premice $k = \frac{5}{6}$ 2 točki

(Le zapis ali uporaba formule za izračun smernega koeficienta ali nastavitev sistema za k in n ... *1 točka.)

Zapis premice, npr. $y = \frac{5}{6}x - \frac{7}{6}$ 1 točka

Nastavitev enakosti, npr. $\tan \varphi = \frac{5}{6}$ *1 točka

Izračunan kot $\varphi = 39,81^\circ$ 1 točka

42. Rešite enačbe. Rezultati naj bodo točni.

42.1.

$$x^2 + 2x = 4$$

(2)

42.2.

$$4^x = 2$$

(1)

42.3.

$$\log_4 x = 2$$

(1)

42.4.

$$4 \sin x = 2$$

(3)

Rešitev

42. Skupaj: 7 točk

42.1. (2 točki)

Zapisani rešitvi, npr. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$ 2 točki

(Le urejena kvadratna enačba $x^2 + 2x - 4 = 0$... 1 točka.)

42.2. (1 točka)

Zapisana rešitev $x = \frac{1}{2}$ 1 točka

42.3. (1 točka)

Zapisana rešitev $x = 16$ 1 točka

42.4. (3 točke)

Urejena enačba, npr. $\sin x = \frac{1}{2}$ 1 točka

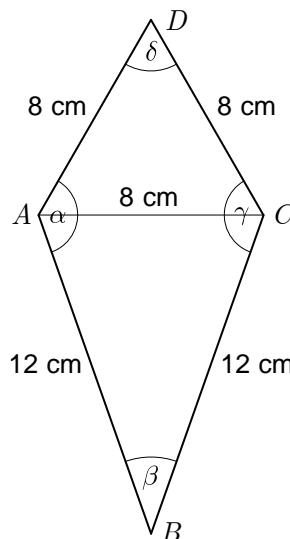
Zapisani družini rešitev, npr. $x \in \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}$ (1 + 1) 2 točki

(Le obe delni rešitvi $\frac{\pi}{6}$ in $\frac{5\pi}{6}$... 1 točka.)

Upoštevamo tudi zapis, npr. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}.$)

(Če kandidat nikjer ne zapiše, da je $k \in \mathbb{Z}$, se mu odšteje 1 točka.)

43. Izračunajte velikosti notranjih kotov štirikotnika $ABCD$ in dolžino diagonale $f = |BD|$.



(8 točk)

Rešitev

43. Skupaj: 8 točk

Ugotovitev $\delta = \sphericalangle ADC = 60^\circ$ 1 točka

Izračunan kot, npr. $\beta \doteq 38,9424^\circ \doteq 38^\circ 57'$ 2 točki

(Le uporaba definicije kotnih funkcij, npr. $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$, ali kosinusnega izreka, npr. $\cos \beta = \frac{7}{9}$... 1 točka.)

Izračun, npr. $\alpha = \gamma \doteq 130,5288^\circ \doteq 130^\circ 32'$ 3 točke

(Le zapis ali uporaba $\alpha = \gamma$... *1 točka, le postopek za izračun kota α , npr.

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ ali uporaba kosinusnega izreka ... *1 točka.)

Izračunana dolžina diagonale, npr. $f = 4\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$ cm $\doteq 18,2419$ cm 2 točki

(Le postopek, npr. uporaba kosinusnega izreka ali dvakratna uporaba Pitagorovega izreka ... *1 točka.)

(Če kandidat v nalogi dosledno opušča vse enote (stopinje in centimetre), se mu v celoti odšteje 1 točka.)