

EKSPONENTNA IN LOGARITEMSKA FUNKCIJA

1. Rešite enačbo: $\log_8 2\sqrt{2} = x$. (5 točk)

Rešitev

1. Skupaj: 5 točk

1. način

Upoštevanje definicije logaritma, npr. $8^x = 2\sqrt{2}$ 1 točka

Poenostavitev, npr. $2^{3x} = 2^{\frac{3}{2}}$ (1+1) 2 točki

Izenačitev eksponentov $3x = \frac{3}{2}$ *1 točka

Rezultat $x = \frac{1}{2}$ 1 točka

2. način

Prehod na novo osnovo, npr. $\frac{\log_a 2\sqrt{2}}{\log_a 8} = x$ 2 točki

Rezultat $x = \frac{1}{2}$ 3 točke

(Števec, npr. $\frac{3}{2}\log_a 2$... 1 točka, imenoalec, npr. $3\log_a 2$... 1 točka.)

(Upoštevam tudi računanje s kalkulatorjem. Če kandidat napiše samo rešitev $x = \frac{1}{2}$... 0 točk, če je ob rešitvi preizkus ali utemeljitev ... 5 točk.)

2. Rešite enačbo: $\log_3 1 + \frac{x}{3} = 2$. (5 točk)

Rešitev

2. Skupaj: 5 točk

1. način

Zapis, npr. $1 + \frac{x}{3} = 3^2$ 3 točke

(Samo splošna definicija logaritma ali upoštevanje $2 = \log_3 9$... *1 točka.)

Delna ureditev (samo neznanka na eni strani enačbe) 1 točka

Rešitev $x = 24$ 1 točka

2. način

Zapis $\log_3 3 + x - \log_3 3 = 2$ 1 točka

Zapis $\log_3 3 + x = 3$ 1 točka

Upoštevanje definicije $3 + x = 3^3$ 2 točki

(Samo splošna definicija logaritma ... *1 točka.)

Rešitev enačbe $x = 24$ 1 točka

3. Izračunajte $\log \frac{a^2 b^3}{\sqrt[5]{c^2}}$, če je $\log a = 2$, $\log b = 3$ in $\log c = 5$. (6 točk)

Rešitev

3. Skupaj: 6 točk

1. način

Preoblikovanje korena v potenco 1 točka

Logaritem produkta 1 točka

Logaritem kvocienta 1 točka

Uporaba pravila za logaritem potence 1 točka

Vstavljene vrednosti 1 točka

Rezultat 11 1 točka

2. način

Izračun $a = 10^2$, $b = 10^3$, $c = 10^5$ 2 točki

(Vsaj en pravi izračun ... 1 točka.)

Izračun $a^2 b^3 = 10^{13}$ 1 točka

Izračun $\sqrt[5]{c^2} = 10^2$ 1 točka

Izračun $\frac{a^2 b^3}{\sqrt[5]{c^2}} = 10^{11}$ 1 točka

Rezultat 11 1 točka

4. Izračunajte presečišče grafa funkcije $f(x) = -\log_5 x + 1$ z abscisno osjo. V dani koordinatni sistem narišite graf te funkcije.
(6 točk)

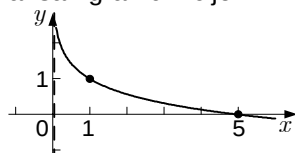
Rešitev

4. Skupaj: 6 točk

Izračunano presečišče, npr. $T(5, 0)$ 2 točki

(Le nastavek, npr. $f(x) = 0$... 1 točka.)

Narisan graf funkcije



..... 4 točke

(Osnovna funkcija $y = \log_5 x$ skozi točki $(1, 0)$ in $(5, 1)$... 1 točka, zrcaljenje ... *1 točka, premik za 1 v smeri ordinatne osi ... *1 točka, upoštevanje asimptote ... 1 točka.)

5. Rešite enačbo: $\frac{\log 20 + \log x}{\log 5x + 1} = 2$.

(6 točk)

Rešitev

5. Skupaj: 6 točk

Odpravljanje ulomka v enačbi 1 točka

Upoštevanje $\log 20 + \log x = \log 20x$ 1 točka

Upoštevanje $2\log 5x + 1 = \log 5x + 1^2$ 1 točka

Zapis $20x = 5x + 1^2$ *1 točka

Ureditev, npr. $25x^2 - 10x + 1 = 0$ 1 točka

Rešitev $x = \frac{1}{5}$ 1 točka

6. Rešite enačbo: $\log_8 x^2 - 3x = \frac{2}{3}$.

(6 točk)

Rešitev

6. Skupaj: 6 točk

Upoštevanje definicije logaritma, npr. $8^{\frac{2}{3}} = x^2 - 3x$ 1 točka

Zveza med potenco in korenem $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}$ 1 točka

Ureditev enačbe $x^2 - 3x - 4 = 0$ 1 točka

Razcep ali reševanje po formuli *1 točka

Rešitvi $x_1 = 4$ in $x_2 = -1$ (1+1) 2 točki

7. Poenostavite izraz $\log_2 a + \log_2 4a - \log_2 \sqrt{2} - \log_2 2a^2$, pri čemer je $a > 0$. (7 točk)

Rešitev

7. Skupaj: 7 točk

1. način

Zapis $\log_2 \frac{4a^2}{\sqrt{2} 2a^2}$ (*1+*1+1) 3 točke

Poenostavitev do oblike $\log_2 \frac{2}{\sqrt{2}}$ 1 točka

Upoštevanje $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_2 2$ 1 točka

Upoštevanje $\log_2 2 = 1$ 1 točka

Rezultat $\frac{1}{2}$ 1 točka

2. način

Upoštevanje $\log_2 4a = \log_2 4 + \log_2 a$ 1 točka

Upoštevanje $\log_2 4 = 2$ 1 točka

Upoštevanje $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_2 2$ 1 točka

Upoštevanje $\log_2 2a^2 = \log_2 2 + 2\log_2 a$ (1+1) 2 točki

Upoštevanje $\log_2 2 = 1$ 1 točka

Rezultat $\frac{1}{2}$ 1 točka

8. Izračunajte presečišče grafov funkcij $f(x) = 2^x$ in $g(x) = 65 \cdot 2^x - 1$. (6 točk)

Rešitev

8. Skupaj: 6 točk

Nastavek $65 \cdot 2^x - 1 = 2^x$ 2 točki

(Le zapis $f(x) = g(x)$... 1 točka.)

Ureditve, npr. $64 \cdot 2^x = 1$ 1 točka

Prehod na enaki osnovi *1 točka

Rešitev $x = -6$ 1 točka

Izračunano presečišče $P(-6, \frac{1}{64})$ 1 točka

9. Rešite enačbe:

9.1. $4^x = \frac{1}{2}$ (2)

9.2. $\log_4 x = \frac{1}{2}$ (2)

9.3. $\cos x = \frac{1}{2}$ (3)

Rešitev

9. Skupaj: 7 točk

9.1. (2 točki)

Rešitev prve enačbe $x = -\frac{1}{2}$ 2 točki

(Le zapis $2^{2x} = 2^{-1}$ ali $x \log 4 = \log \frac{1}{2}$... 1 točka.)

9.2. (2 točki)

Rešitev druge enačbe $x = 2$ 2 točki

(Le zapis $4^{\frac{1}{2}} = x$... 1 točka.)

9.3. (3 točke)

Rešitve tretje enačbe, npr. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (2+1) 3 točke

(Le $x_1 = \frac{\pi}{3}$ in $x_2 = -\frac{\pi}{3}$... 1 točka. Če kandidat ne izračuna $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, izgubi 1 točko. Če kandidat nikjer ne zapiše $k \in \mathbb{Z}$, izgubi 1 točko.)

10. Rešite enačbo: $\log_3 x + 71 + \log_3 x - 9 - \log_3 x - 1 = 2$.

(7 točk)

Rešitev

10. Skupaj: 7 točk

Preoblikovanje enačbe, npr. $\log_3 \frac{x+71}{x-1} = 2$ (1+1) 2 točki

Uporaba definicije logaritma, npr. $\frac{x+71}{x-1} = 3^2$ *1 točka

Urejena kvadratna enačba $x^2 + 53x - 630 = 0$ 1 točka

Rešitvi kvadratne enačbe $x_1 = 10$ in $x_2 = -63$ (1+1) 2 točki

(Le razcep ali poznavanje formule za rešitev ... 1 točka.)

Ugotovitev, da druga rešitev odpade *1 točka

11. Rešite enačbo: $2^{x+3} - 3 \cdot 2^{x+1} = \frac{1}{32}$.

(5 točk)

Rešitev

11. Skupaj: 5 točk

1. način

Izpostavljanje skupnega faktorja, npr. $2^{x+1} \cdot 2^2 - 3$ 1 točka

Ureditev $2^{x+1} = \frac{1}{2^5}$ (1+1) 2 točki

Rešitev enačbe $x = -6$ (*1+1) 2 točki
(Le enačenje eksponentov ... *1 točka.)

2. način

Upoštevanje $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3$ in $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ 1 točka

Ureditev $2 \cdot 2^x = \frac{1}{2^5}$ (1+1) 2 točki

Rešitev enačbe $x = -6$ (*1+1) 2 točki
(Le enačenje eksponentov ... *1 točka.)

12. Rešite enačbo: $\log_x x + 30 = 2$.

(5 točk)

Rešitev

12. Skupaj: 5 točk

Upoštevanje definicije logaritma, npr. $x^2 = x + 30$ 2 točki

Rešitvi kvadratne enačbe $x_1 = 6$ in $x_2 = -5$ (1+1) 2 točki

(Samo formula za reševanje kvadratne enačbe ali razcep ... 1 točka.)

Rešitev $x = 6$ (ali izločitev rešitve $x_2 = -5$) *1 točka

13. Izračunajte osnovo a logaritemske funkcije $f(x) = \log_a x$, katere graf poteka skozi točko

$$A \left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2} \right).$$

(6 točk)

Rešitev

13. Skupaj: 6 točk

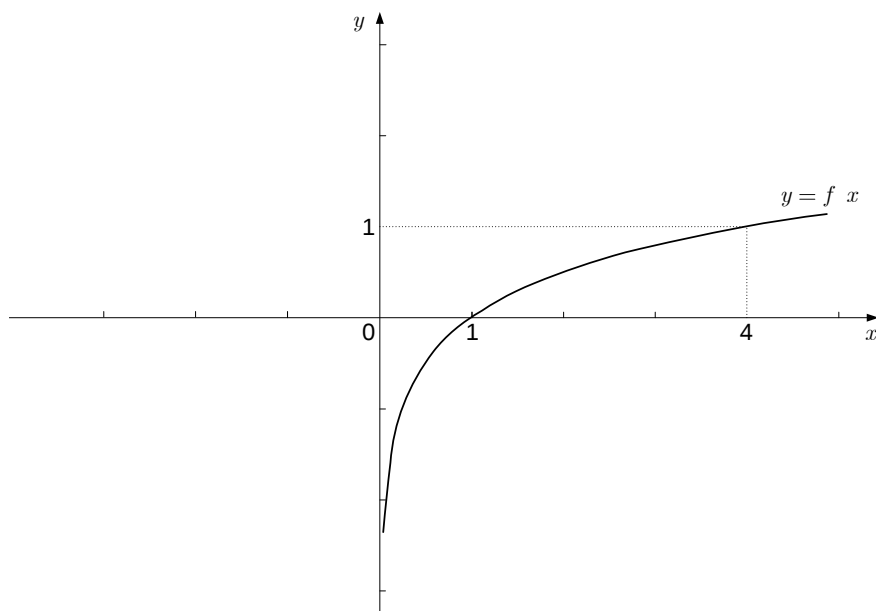
Vstavljeni koordinati, npr. $\log_a \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}$ 2 točki

(Le $f \left(\frac{1}{8} \right) = -\frac{3}{2}$... *1 točka.)

Upoštevanje definicije logaritma, npr. $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$ (*1+1) 2 točki

Rezultat $a = 4$ (*1+1) 2 točki

14. V koordinatnem sistemu je narisana graf logaritemske funkcije $f(x) = \log_a x$. Zapišite osnovo tega logaritma. V isti koordinatni sistem narišite še grafa funkcij $g(x) = \log_a x + 2$ in $h(x) = \log_a x - 1$. Grafa nedvoumno označite.



(6 točk)

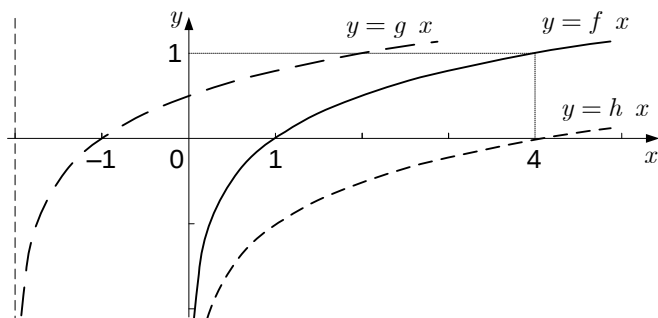
Rešitev

14. Skupaj: 6 točk

Zapisana osnova logaritma $a = 4$ 2 točki
(Le upoštevanje, da je $f(4) = 1$... 1 točka.)

Narisan graf funkcije g 2 točki
(Premik grafa za 2 v levo ... 1 točka, narisana navpična asimptota ... 1 točka.)

Narisan graf funkcije h 2 točki
(Premik grafa za 1 navzdol ... 1 točka, upoštevanje navpične asimptote ... 1 točka.)



15. Rešite enačbe:

15.1. $6 \cdot 4^x = 3$

(2)

15.2. $6 \cdot \log_4 x = 3$

(2)

15.3. $6 \cdot \sin 4x = 3$

(4)

Rešitev

15. Skupaj: 8 točk

15.1. (2 točki)

Rešitev enačbe $x = -\frac{1}{2}$ 2 točki

(Le preoblikovanje v enačbo, npr. $2^{2x} = \frac{1}{2}$... 1 točka.)

15.2. (2 točki)

Rešitev enačbe $x = 2$ 2 točki

(Le preoblikovanje v enačbo brez logaritma ... 1 točka.)

15.3. (4 točke)

Zapis ali uporaba $4x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ in $4x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (lahko tudi brez periode) (1+1) 2 točki

Rešitve enačbe $x_1 = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ in $x_2 = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (1+1) 2 točki

(Če kandidat ne zapiše $k \in \mathbb{Z}$, dobi le 1 točko od zadnjih dveh.)

16. Rešite enačbo: $\log x + 15 + \log x = 2$.

(6 točk)

Rešitev

16. Skupaj: 6 točk

Uporaba pravila za logaritem produkta 1 točka

Zapisana enačba brez logaritmov, npr. $x \cdot x + 15 = 100$ 2 točki

(Le upoštevanje, da je $\log 100 = 2$, ali uporaba definicije logaritma ... 1 točka.)

Rešitvi kvadratne enačbe -20 in 5 (1+1) 2 točki

(Le razcep izraza ali uporaba formule za reševanje kvadratne enačbe ... *1 točka.)

Ugotovitev, da je rešitev le $x = 5$ 1 točka

17. Rešite enačbo: $\log x + 2 - \log x = 1$.

(5 točk)

Rešitev

17. Skupaj: 5 točk

Preoblikovanje enačbe, npr. $\log \frac{x+2}{x} = 1$ 1 točka

Preoblikovanje v enačbo, npr. $\frac{x+2}{x} = 10$ (*1+1) 2 točki

Ureditev enačbe, npr. $9x = 2$ 1 točka

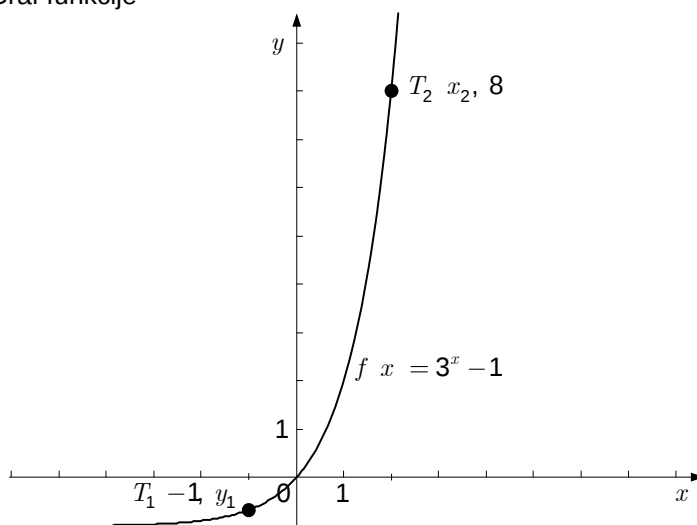
Rešitev enačbe $x = \frac{2}{9}$ 1 točka

18. Narišite graf funkcije $f: x \mapsto 3^x - 1$ in njeno asimptoto. Zapišite ničlo funkcije f in enačbo asimptote. Točki $T_1(-1, y_1)$ in $T_2(x_2, 8)$ ležita na grafu funkcije f . Izračunajte neznani koordinati y_1 in x_2 . (8 točk)

Rešitev

18. Skupaj: 8 točk

Graf funkcije



..... 3 točke

(Le graf $y = 3^x$... 1 točka, asimptota $y = -1$... 1 točka.)

Zapisana ničla $x = 0$ 1 točka

Zapisana enačba asimptote, npr. $y = -1$ 1 točka

Izračunana ordinata $y_1 = -\frac{2}{3}$ 1 točka

Izračunana abscisa $x_2 = 2$ 2 točki

(Le zapisana enačba, npr. $8 = 3^x - 1$... 1 točka.)

19. Naj bo $f: x \mapsto a \cdot 3^{x-1} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Določite števili a in b tako, da bo $f(1) = -1$ in $f(3) = -17$. Zapišite še definicijsko območje D_f in zalogo vrednosti Z_f tako dobljene funkcije. (7 točk)

Rešitev

19. Skupaj: 7 točk

Zapisani enačbi $a + b = -1$ in $9a + b = -17$ (1+1) 2 točki

Pravilna usmeritev v reševanje sistema enačb *1 točka

Rešitev sistema $a = -2$ in $b = 1$ (1+1) 2 točki

Zapisani $D_f = \mathbb{R}$ in $Z_f = (-\infty, 1)$ (1+1) 2 točki

20. Izračunajte vrednost izraza $\log_a a^2 + \log_b 1 - \log_c \frac{1}{c} + 3 \log_d \sqrt[3]{d}$, pri čemer so a, b, c in d pozitivna realna števila, različna od 1.

(6 točk)

Rešitev

20. Skupaj: 6 točk

Izračunano ali upoštevano $\log_a a^2 = 2$	1 točka
Izračunano ali upoštevano $\log_b 1 = 0$	1 točka
Izračunano ali upoštevano $\log_c \frac{1}{c} = -1$	1 točka
Izračunano $3\log_d \sqrt[3]{d} = \frac{1}{2}$	2 točki
(Upoštevanje zveze med koreni in potencami ... 1 točka.)	
Izračunan rezultat $\frac{7}{2}$	1 točka

21. Izračunajte osnovo a logaritemske funkcije $f(x) = \log_a x$, katere graf poteka skozi točko

$$A\left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2}\right).$$

točk) (6)

Rešitev

21. Skupaj: 6 točk

Vstavljeni koordinati, npr. $\log_a \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}$ 2 točki

(Le $f\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{2}$... 1 točka.)

Upoštevanje definicije logaritma, npr. $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$ (*1+1) 2 točki

Rezultat $a = 4$ (*1+1) 2 točki

22. Naj bo $\log_b a = 2$. Izračunajte vrednost izraza $\frac{1}{3}\log_b a^6 - 2\log_b \sqrt{a} + \log_b 1 - 4\log_b \frac{b}{a^3}$.

(7 točk)

Rešitev

22. Skupaj: 7 točk

1. način

Poenostavitev $\log_b a^6 = 6\log_b a$ 1 točka

Poenostavitev $\log_b \sqrt{a} = \frac{1}{2}\log_b a$ 1 točka

Upoštevanje $\log_b 1 = 0$ 1 točka

Poenostavitev $\log_b \frac{b}{a^3} = 1 - 3\log_b a$ (1+1) 2 točki

Vstavljanje $\log_b a = 2$ *1 točka

Rezultat 22 1 točka

2. način

Ugotovitev $a = b^2$ 1 točka

Upoštevanje $\log_b 1 = 0$ 1 točka

Zapis izraza $\frac{1}{3}\log_b b^{12} - 2\log_b b - 4\log_b b^{-5}$ (1+1+1) 3 točke

Rezultat 22 2 točki

(Vsaj dva pravilno izračunana člena ... 1 točka.)

23. Nalogo rešujte brez uporabe računalnika.

Rešite enačbi:

23.1. $\log_x \frac{5}{3} = -1$ (2)

23.2. $3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{9}$

(4)

Rešitev

23. Skupaj: 6 točk

23.1. (2 točki)

Preureditev ali upoštevanje definicije logaritma $x^{-1} = \frac{5}{3}$ 1 točka

Rezultat $x = \frac{3}{5}$ 1 točka

23.2. (4 točke)

Izpostavljanje skupnega faktorja, npr. $3^x + 3^{x+2} = 3^x \cdot 1 + 3^2$ 1 točka

Deljenje enačbe z 10 1 točka

Rezultat $x = -2$ 2 točki

(Le upoštevanje $\frac{1}{9} = 3^{-2}$... 1 točka.)

24. Brez uporabe računalja rešite enačbo $\log_2 x = 2 - \log_2 (x - 3)$.

(6 točk)

Rešitev

24. Skupaj: 6 točk

Ureditev $\log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2$ ali zapis oz. upoštevanje $2 = \log_2 4$ 1 točka

Zapis $\log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2$ ali $\log_2 x = \log_2 \frac{4}{x - 3}$ 1 točka

Zapis enačbe, npr. $x + x - 3 = 4$ 1 točka

Ureditev kvadratne enačbe $x^2 - 3x - 4 = 0$ 1 točka

Rešitvi $x = 4$ in $x = -1$ 1 točka

Izločitev rešitve $x = -1$ 1 točka

25. Nalogo rešite brez uporabe računalja.

Rešite enačbo $\log_2 (4 - x) + \log_2 (-4 - x) = 7$.

(5 točk)

Rešitev

25. Skupaj: 5 točk

Zapis enačbe z enim samim logaritmom, npr. $\log_2 (4 - x) \cdot (-4 - x) = 7$ 1 točka

Upoštevanje definicije logaritma, npr. $4 - x \cdot (-4 - x) = 2^7$ 1 točka

Zapisana kvadratna enačba, npr. $x^2 - 144 = 0$ 1 točka

Zapisani rešitvi enačbe $x_1 = 12$, $x_2 = -12$ 1 točka

Izločitev rešitve kvadratne enačbe $x = 12$ 1 točka

26. Eksponentna funkcija f ima predpis $f(x) = 3^x - \frac{2}{3}$.

26.1. Natančno izračunajte neznani koordinati točk $A(-3, y)$ in $B(x, \frac{25}{3})$ na grafu funkcije f .

(5)

26.2. Graf funkcije f ima vodoravno asimptoto. Zapišite njeno enačbo. Ali je funkcija f naraščajoča ali padajoča? Odgovor utemeljite.

(2)

Rešitev

26. Skupaj: 7 točk

26.1. (5 točk)

Vstavitev koordinat točke A , $y = 3^{-3} - \frac{2}{3}$ 1 točka

Izračun $y = -\frac{17}{27}$ 1 točka

Vstavitev koordinat točke B , $\frac{25}{3} = 3^x - \frac{2}{3}$ 1 točka

Ureditev enačbe, npr. $3^x = 9$ 1 točka

Rešitev $x = 2$ 1 točka

26.2. (2 točki)

Enačba asimptote $y = -\frac{2}{3}$ 1 točka

Utemeljitev, npr.: Eksponentna funkcija f je naraščajoča, ker je osnova več kot 1. 1 točka

27. Rešite enačbi brez uporabe računalja.

27.1. $2^{x-1} + 3 \cdot 2^x = \frac{7}{8}$

(3)

27.2. $\log x + 2 = 1 - \log x$

(4)

Rešitev

27. Skupaj: 7 točk

27.1. (3 točke)

Izpostavitve skupnega faktorja, npr. $2^{x-1} 1 + 6$ 1 točka

Zapis enačbe, npr. $2^{x-1} = \frac{1}{8}$ 1 točka

Rezultat: $x = -2$ 1 točka

27.2. (4 točke)

Preoblikovanje enačbe, npr. $\log x + 2 = 1 - \log x$ 1 točka

Zapis enačbe, npr. $x + 2 = 10$ 1 točka

Izračunani rešitvi kvadratne enačbe: $x_1 = -1 + \sqrt{11}$, $x_2 = -1 - \sqrt{11}$ 1 točka

Izločitev rešitve $x_2 = -1 - \sqrt{11}$ 1 točka

28. Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = \log_3(x+1) - 1$. Izračunajte ničlo, začetno vrednost in absciso točke $A(x, 1)$. Narišite graf funkcije f . Zapišite definicijsko območje in asimptoto. (7 točk)

Rešitev

28. Skupaj: 7 točk

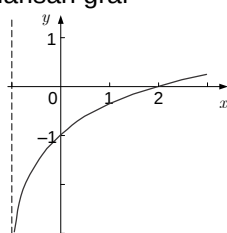
Izračunana ničla $x_1 = 2$ 2 točki

(Le zapis ali uporaba $f(x) = 0$... 1 točka.)

Izračunana začetna vrednost $f(0) = -1$ 1 točka

Izračunana abscisa točke $x_A = 8$ 1 točka

Narisan graf



..... 1 točka

Zapisano definicijsko območje $D_f = (-1, \infty)$ 1 točka

Zapisana asimptota $x = -1$ 1 točka

29. Rešite enačbe. Rezultati naj bodo točni.

- 29.1. $x^2 + 2x = 4$ (2)
- 29.2. $4^x = 2$ (1)
- 29.3. $\log_4 x = 2$ (1)
- 29.4. $4\sin x = 2$ (3)

Rešitev

29. Skupaj: 7 točk

29.1. (2 točki)

Zapisani rešitvi, npr. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$ 2 točki

(Le urejena kvadratna enačba $x^2 + 2x - 4 = 0$... 1 točka.)

29.2. (1 točka)

Zapisana rešitev $x = \frac{1}{2}$ 1 točka

29.3. (1 točka)

Zapisana rešitev $x = 16$ 1 točka

29.4. (3 točke)

Urejena enačba, npr. $\sin x = \frac{1}{2}$ 1 točka

Zapisani družini rešitev, npr. $x \in \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (1 + 1) 2 točki

(Le obe delni rešitvi $\frac{\pi}{6}$ in $\frac{5\pi}{6}$... 1 točka.

Upoštevamo tudi zapis, npr. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.)

(Če kandidat nikjer ne zapiše, da je $k \in \mathbb{Z}$, se mu odšteje 1 točka.)