PRIPRAVA NA MATURO – OSNOVNA RAVEN

MATEMATIKA

V GIMNAZIJI

ZBIRKA NALOG

Dušan Kavka

Modrijan

MATEMATIKA V GIMNAZIJI

Zbirka nalog

Avtor
Dušan Kavka

Recenzenti
Darka Hvastja
Gregor Pavlič
Marina Rugelj

Urednici
Andreja Nagode, Špela Fortuna

Lektorica
Renata Vrčkovnik

Ilustracije
Darko Simeršek

Oprema in oblikovanje
Gorazd Rogelj

Računalniški prelom
Goran Čurčič

Izdala in založila Modrijan založba, d. o. o.
Za založbo Branimir Nešović
Natisnila Tiskarna Hren
Naklada 1500 izvodov
Ljubljana 2011
Peta izdaja

© Modrijan založba, d. o. o.

CIP – Katložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.3)(076.2)

KAVKA, Dušan
Matematika v gimnaziji : zbirka nalog : priprava na maturo – osnovna raven / Dušan Kavka ; [ilustracije Darko Simeršek]. – 5. izd. – Ljubljana : Modrijan, 2011

ISBN 978-961-241-143-5
254833152

www.modrijan.si

VSEBINA

NAPOTKI ZA UPORABO ZBIRKE IN REŠEVANJE NALOG

Zbirka nalog vsebuje učno snov in naloge le na osnovni zahtevnostni ravni gimnazijske matematike in je namenjena ponavljanju in utrjevanju učne snovi in nalog v vseh letnikih gimnazije kot:

- priprava na pisna in ustna preverjanja znanj,
- priprava na popravne izpite,
- priprava na osnovno raven splošne mature in
- osnovno gradivo za slušatelje maturitetnega tečaja.

Temelj vsebine zbirke je učni načrt za matematiko v gimnaziji in maturitetni izpitni katalog za splošno maturo. Zato je, podobno kot v predmetnem izpitnem katalogu za matematiko, učna snov razdeljena na 28 poglavij in zapisana tako, da se posamezna poglavja nadgrajujejo. V vsakem poglavju je teoretični del razložen v skladu s katalogom znanj, od lažje snovi k težji, razumevanje snovi pa je olajšano zaradi primerno izbranih zgledov. Po vsakem sklopu teoretičnega dela je rešenih nekaj tipskih zgledov, ki so izbrani tako, da skorajda v celoti pokrijejo vse minimalne cilje znanj danega poglavja. Za pridobitev minimalnega znanja snovi je že lahko dovolj, če za posamezno poglavje bralec pozna celotno teorijo in zna samostojno rešiti zglede. Dijaki, ki imajo več vrzeli v znanju, ki želijo pridobiti več znanj in seveda boljšo oceno, bodo reševali naloge, ki sledijo na koncu vsakega poglavja. Te si sledijo od lažjih k težjim oz. od enostavnih k sestavljenim. Na koncu so dodane rešitve nalog.

Da bi bil uspeh dijakov na splošni maturi boljši, bi jih rad opozoril na nekaj temeljnih pravil reševanja nalog. Ker pri večini maturitetnih nalog način reševanja ni predpisan, lahko rešujemo po katerem koli matematično pravilnem postopku. Pomembno je, da je pot do rezultata jasno in korektno predstavljena, z vmesnimi računi in sklepi. Če je naloga postavljena kot vprašanje, odgovorimo (rezultat zapišemo) s celim stavkom. Če smo nalogo rešili grafično, pravilnost rešitve praviloma potrdimo tudi računsko. Pri rezultatih nalog pazimo predvsem na to, da so zapisani vidno in v skladu z zahtevami iz besedila naloge.

Pri reševanju nalog moramo paziti, da navodilo »Rezultat naj bo zapisan v natančni obliki« ali »Natančno izračunajte ...« pomeni, da moramo zapisati le cela števila, okrajšane ulomke, korene, konstante (npr. p, *e*) in krajše izraze, v katerih lahko nastopajo preproste funkcije. Pri tem morajo biti rezultati nalog primerno poenostavljeni (npr. okrajšani, delno korenjeni ...). Če je v besedilu naloge predpisana natančnost, rezultat primerno zaokrožimo in ga zapišemo v decimalni obliki, pri tem bodimo pozorni na razliko med navodiloma »Na tri mesta natančno ...« in »Na tri decimalke natančno ...«. Vmesne rezultate vedno računamo natančneje, sicer bo končni rezultat premalo natančen. Če so podatki izraženi v merskih enotah, moramo tudi končne rezultate nalog zapisati z merskimi enotami v skladu z navodilom naloge.

Pri nalogah, ki zahtevajo »Izračunajte presečišče ...«, »Zapišite oglišča ...«, »Zapišite teme funkcije ...«, rezultate zapisujemo kot točke – z obema koordinatama $T(x, y)$.

Kote v geometrijskih nalogah praviloma izrazimo v stopinjah in minutah ali v stopinjah in stotinkah stopinje, vrednosti kotnih funkcij pa natančno ali pa na štiri decimalna mesta, glede na navodilo naloge. Pri reševanju trigonometričnih enačb praviloma izrazimo kote v radianih v natančni obliki.

Pri reševanju geometrijskih nalog si vedno pomagamo s skico, tudi če to v besedilu naloge ni zahtevano. Skica mora ustrezati glavnim lastnostim geometrijskega objekta, ki ga predstavlja. Na njej morajo biti označene vse pomembnejše točke (oglišča, krajišča vseh narisanih geometrijskih objektov) ter vse količine, ki v nalogi nastopajo kot podatki ali kot delni in končni rezultati.

Posebno pomembna je skica pri konstrukcijskih nalogah. Te naloge rešujemo s šestilom (za risanje krožnic in krožnih lokov, prenašanje razdalj) in z ravnilom (za risanje premic ali daljic skozi dve dani ali prej konstruirani točki). Pri konstrukcijskih nalogah moramo poiskati vse neskladne rešitve.

Pri reševanju enačb moramo poiskati vse rešitve v dani številski množici. Pri tem smo pazljivejši pri postopkih, ki dane enačbe ne prevedejo v ekvivalentno obliko (kvadriranje, korenjenje, absolutna vrednost, antilogaritmiranje ...), saj lahko pridobimo napačno rešitev ali pa nekaj rešitev izgubimo. Zato naredimo preizkus. Podobno velja za reševanje neenačb.

Če neenačbo rešujemo z grafom ustrezne funkcije, je dovolj natančno narisati graf le v bližini ničel, tako da so lepo razvidna območja pozitivnosti in negativnosti. Druge dele grafa, ki so za reševanje neenačbe manj pomembni, lahko narišemo tudi bolj približno.

Za risanje grafov funkcij in krivulj je koordinatni sistem ponavadi že dan, pazimo le, da krivuljo oz. graf funkcije narišemo v območju, ki je označeno na koordinatnem sistemu. Pri risanju grafov funkcij in krivulj moramo natančno narisati presečišča z obema osema, črtkano vodoravne in navpične asimptote (obvezno za eksponentno in logaritemsko funkcijo, kotni funkciji tangens in kotangens in racionalne funkcije), maksimume in minimume (obvezno pri funkcijah sinus in kosinus), temena (pri kvadratni funkciji) ... Navedene značilnosti ponavadi predhodno izračunamo. Pri tem ničle in pole pišemo kot števila – samo s koordinato x (pri polinomih in racionalnih funkcijah zapišemo tudi stopnjo ničle oz. pola), teme kvadratne funkcije pa kot točke – z obema koordinatama. Če znamo krivulje in grafe funkcij narisati natančno s primerno izvedenimi premiki in raztegi, omenjeni računi niso potrebni, razen če naloga to izrecno zahteva, vendar pa ob nalogi priporočam kratek komentar.

Definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcij, območja naraščanja in padanja funkcije praviloma zapišemo z intervali, lahko pa tudi uporabimo znake $<, >, =, \leq, \geq, \neq$.

Na koncu bi se rad vsem delavcem in sodelavcem založbe Modrijan zahvalil za razumevanje, vzpodbudo, nasvete, pomoč in kvalitetno izvedeno delo ter domačim za izredno dolgo potrpežljivost.

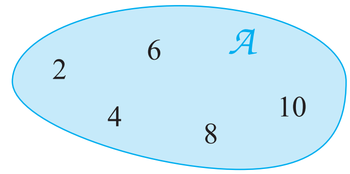
Vsem dijakom, profesorjem in inštruktorjem, ki boste kot pomoč pri matematiki uporabili to knjigo, pa želim veliko uspeha.

Dušan Kavka

1. MNOŽICE

Množico lahko podamo tako,

- da njene elemente naštejemo, npr. $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,
- da njene elemente s kako skupno lastnostjo enolično določimo, npr. $\mathcal{A} = \{2n;\ n \in \mathbb{N},\ n \leq 5\}$,
- da množico grafično predstavimo.



Moč množice $\mathcal{A}$ s končno mnogo elementi **je enaka številu elementov** $\boldsymbol{n}$ množice $\mathcal{A}$: $m(\mathcal{A}) = n$.

Množico vseh elementov, ki nas v danem primeru podrobneje zanimajo, imenujemo **univerzalna množica** $\mathcal{U}$.
Prazna množica $\varnothing$ je množica, ki nima nobenega elementa.

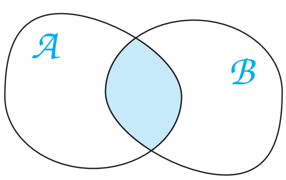
Operacije z množicami

Množica $\mathcal{A}$ **je podmnožica množice** $\mathcal{B}$, če je vsak element množice $\mathcal{A}$ tudi element množice $\mathcal{B}$.
Oznaka: $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$

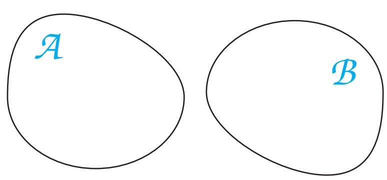
Množici $\mathcal{A}$ **in** $\mathcal{B}$ **sta enaki** natanko takrat, ko je množica $\mathcal{A}$ podmnožica množice $\mathcal{B}$ in množica $\mathcal{B}$ podmnožica množice $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subset \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subset \mathcal{A})$.

Presek množic $\mathcal{A}$ **in** $\mathcal{B}$ je množica vseh tistih elementov, ki so v množici $\mathcal{A}$ in v množici $\mathcal{B}$:
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{e;\ (e \in \mathcal{A}) \wedge (e \in \mathcal{B})\}$.

Množici $\mathcal{A}$ **in** $\mathcal{B}$ **sta disjunktni (tuji)**, če je njun presek prazna množica.



Presek množic

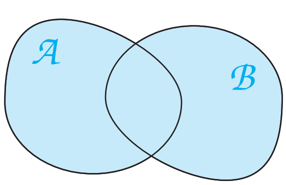


Disjunktni množici

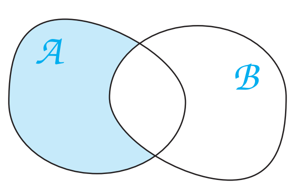
Unija množic $\mathcal{A}$ **in** $\mathcal{B}$ je množica vseh tistih elementov, ki so v množici $\mathcal{A}$ ali v množici $\mathcal{B}$:
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{e;\ (e \in \mathcal{A}) \vee (e \in \mathcal{B})\}$.

Moč unije netujih končnih množic $\mathcal{A}$ **in** $\mathcal{B}$ dobimo tako, da seštejemo moči obeh množic in odštejemo moč preseka, saj smo elemente preseka pri seštevanju šteli dvakrat: $m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

Razlika množic $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ je množica vseh tistih elementov, ki so v množici $\mathcal{A}$ in niso v množici $\mathcal{B}$:
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{e;\ (e \in \mathcal{A}) \wedge (e \notin \mathcal{B})\}$.



Unija množic



Razlika množic

1. Podani sta množici $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N};\ 10 < n < 20\}$ in $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N};\ 9 \leq n \leq 15\}$. Na dva različna načina zapišimo množice $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$.

Zapišemo:
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{11, 12, 13, 14, 15\} = \{n \in \mathbb{N};\ 11 \leq n \leq 15\}$
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\} = \{n \in \mathbb{N};\ 9 \leq n \leq 19\}$
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{16, 17, 18, 19\} = \{n \in \mathbb{N};\ 16 \leq n \leq 19\}$
$\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{9, 10\} = \{n \in \mathbb{N};\ 9 \leq n \leq 10\}$

2. Množica $\mathcal{A}$ je množica naravnih števil, ki delijo število 20, množica $\mathcal{B}$ je množica naravnih števil, manjših od 20, ki so deljiva s 4. Na dva različna načina zapišimo množice $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ in $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Zapišemo:
$\mathcal{A} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} = \{n \in \mathbb{N};\ n \mid 20\}$
$\mathcal{B} = \{4, 8, 12, 16\} = \{n \in \mathbb{N};\ (n < 20) \wedge (4 \mid n)\}$
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 16, 20\} = \{n \in \mathbb{N};\ (n \mid 20) \vee (n < 20 \wedge 4 \mid n)\}$
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{4\} = \{n \in \mathbb{N};\ (n \mid 20) \wedge (n < 20 \wedge 4 \mid n)\}$

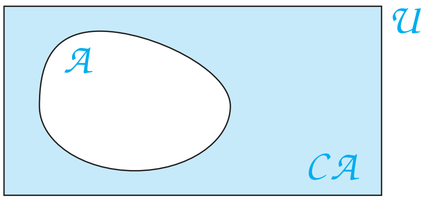
3. Množica $\mathcal{A}$ je množica vseh naravnih števil, ki so manjša ali enaka 100 in deljiva s 5, množica $\mathcal{B}$ je množica vseh naravnih števil, ki so manjša ali enaka 100 in deljiva s 4.

a) Zapišimo elemente množice $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

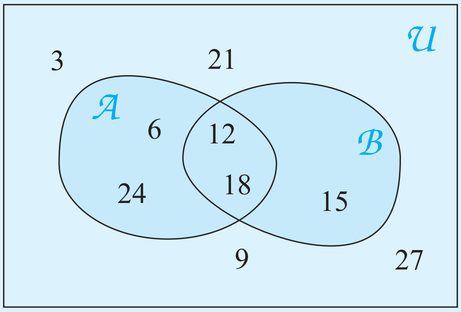
b) Izračunajmo, kolikšne so moči množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Ker so v $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ naravna števila manjša ali enaka 100, ki so deljiva s 5 in deljiva s 4, so torej deljiva s $5 \cdot 4 = 20$. Zapišemo $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{20, 40, 60, 80, 100\}$.
Ker je $100 : 5 = 20$ in $100 : 4 = 25$, je moč množice $\mathcal{A}$ enaka $m(\mathcal{A}) = 20$ in moč množice $\mathcal{B}$ enaka $m(\mathcal{B}) = 25$. Izračunamo še $m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 20 + 25 - 5 = 40$.

Naj bo množica $\mathcal{A}$ podmnožica univerzalne množice $\mathcal{U}$. **Komplement množice $\mathcal{A}$ glede na univerzalno množico $\mathcal{U}$** je množica elementov, ki so v množici $\mathcal{U}$ in niso v množici $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}^c = \{e;\ (e \in \mathcal{U}) \wedge (e \notin \mathcal{A})\}$.



Na sliki je dana univerzalna množica $\mathcal{U}$ in njeni podmnožici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišimo elemente množic $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^c$ in $\mathcal{B}^c$.



Iz diagrama preberemo in zapišemo:
$\mathcal{U} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27\}$
$\mathcal{A} = \{6, 12, 18, 24\}$
$\mathcal{B} = \{12, 15, 18\}$
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{12, 18\}$
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{6, 12, 15, 18, 24\}$
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{6, 24\}$
$\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{15\}$
$\mathcal{A}^c = \{3, 9, 15, 21, 27\}$
$\mathcal{B}^c = \{3, 6, 9, 21, 24, 27\}$

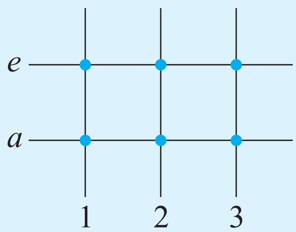
Kartezični produkt nepraznih množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ je množica vseh urejenih parov (a, b), kjer je prvi element para iz množice $\mathcal{A}$ in drugi element para iz množice $\mathcal{B}$: $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a, b); (a \in \mathcal{A}) \wedge (b \in \mathcal{B})\}$.

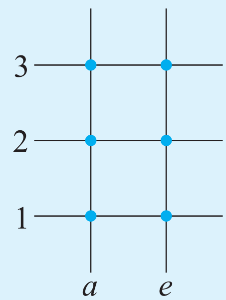
Če ima množica $\mathcal{A}$ m elementov in množica $\mathcal{B}$ n elementov, potem ima kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ mn elementov.

Kartezični produkt lahko grafično predstavimo s šahovnico ali točkami mreže.

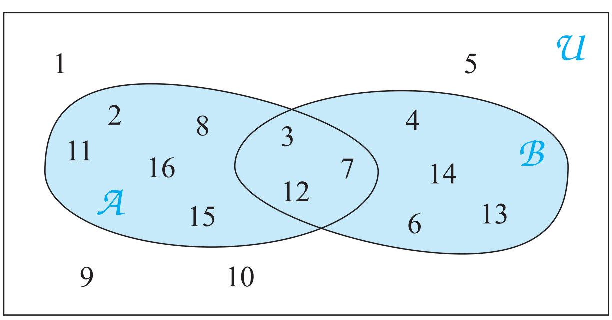
Za množici $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ in $\mathcal{B} = \{a, e\}$ zapišimo kartezična produkta $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ ter ju grafično predstavimo.

Zapišimo $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(1, a), (1, e), (2, a), (2, e), (3, a), (3, e)\}$ in $\mathcal{B} \times \mathcal{A} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (e, 1), (e, 2), (e, 3)\}$ in ju grafično predstavimo.





1. Na sliki so grafično predstavljene univerzalna množica $\mathcal{U}$ in njeni podmnožici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Zapišite njihove elemente in elemente množic $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A}^c$ in $\mathcal{B}^c$.



2. Naj bo $\mathcal{A}$ množica prvih deset črk slovenske abecede in $\mathcal{B}$ množica samoglasnikov slovenske abecede. Zapišite elemente množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ in elemente množic $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$.

3. Zapišite elemente množic:
a) $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N}; 5n - 1 = 9\}$
b) $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{Z}; n^2 = 25\}$
c) $\mathcal{C} = \{n \in \mathbb{Z}^-; n + 7 > 1\}$
č) $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N}; -3 < n < 3\}$
d) $\mathcal{E} = \{5k - 3; k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq 4\}$

4. Množica $\mathcal{A}$ je množica vseh celih števil, katerih kvadrat je manjši od 4. Zapišite elemente množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

5. Dani sta množici $\mathcal{A} = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ in $\mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
a) Zapišite $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.
b) Množica $\mathcal{C}$ je množica z najmanjšo močjo, za katero sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ njeni podmnožici. Zapišite elemente množice $\mathcal{C}$.
c) Množica $\mathcal{D}$ je najmočnejša podmnožica množice $\mathcal{C}$, ki je disjunktna z množico $\mathcal{B}$. Zapišite elemente množice $\mathcal{D}$.

6. Naj bo $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ univerzalna množica ter $\mathcal{A} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ in $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N}; n < 6\}$ njeni podmnožici. Zapišite elemente spodnjih množic in njihove moči.
a) $\mathcal{B}^c$
b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$
c) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$
č) $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$

7. Naj bo $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ univerzalna množica in množica $\mathcal{A}$ množica tistih naravnih števil, ki so manjša od 10. Množici $\mathcal{A}$ in komplement množice $\mathcal{A}$ zapišite na dva različna načina.

8. Dani sta množici $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ in $\mathcal{B} = \{1, 3, 5, 7\}$. Zapišite elemente množic $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ in $C = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

9. Množica $\mathcal{A}$ je množica vseh sodih naravnih števil. Ugotovite, ali velja:
a) $\varnothing \subset \mathcal{A}$
b) $\{2, 4, 10, 40\} \subset \mathcal{A}$
c) $\mathcal{A} \subset \varnothing$
č) $\mathcal{A} \subset \{2, 4, 6, 8, 10 \ldots\}$

10. Dani sta množici $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, 2\}$ in $\mathcal{B} = \{-1, 1\}$.
a) Izračunajte $m(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ in $m(\mathcal{B} \times \mathcal{B})$.
b) Zapišite kartezične produkte $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.
c) Ali je $(1, -1) = (-1, 1)$? Kaj pa $\{-1, 1\} = \{1, -1\}$?
č) Ali velja $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$?

11. Naj bo $\mathcal{U} = \{n \in \mathbb{N}; n < 16\}$ univerzalna množica. Množica $\mathcal{A}$ je množica števil iz $\mathcal{U}$, ki so večkratniki števila 4, množica $\mathcal{B}$ je množica števil iz $\mathcal{U}$, ki delijo število 12. Zapišite elemente množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$.

12. Elementi množice $\mathcal{A}$ so tista naravna števila, ki so delitelji števila 48, elementi množice $\mathcal{B}$ pa so tista praštevila, ki nastopajo v praštevilskem razcepu števila 48.
a) Na dva različna načina zapišite množico $\mathcal{A}$.
b) Zapišite elemente množice $\mathcal{B}$.
c) Ali je $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$?
č) Zapišite $\mathcal{B} \times \{a, b\}$ in ga predstavite s šahovnico ali točkami mreže.
d) Ali je $(a, 2) \in \mathcal{B} \times \{a, b\}$?

13. Množica $\mathcal{A}$ je množica naravnih števil, ki delijo število 60, množica $\mathcal{B}$ pa je podana z $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{Z}; 25 \leq n^2 < 81\}$. Zapišite elemente množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. Ali sta množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ disjunktni?

14. Naj bo $\mathcal{U} = \{n \in \mathbb{N}; n \leq 15\}$ univerzalna množica ter $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ njeni podmnožici. Zapišite elemente množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, če je množica $\mathcal{A}$ množica tistih števil iz $\mathcal{U}$, ki so večkratniki števila 5, množica $\mathcal{B}$ pa množica tistih števil iz $\mathcal{U}$, ki so deljiva z vsaj enim od števil 2 ali 3.

15. Dana je univerzalna množica $\mathcal{U} = \{k \in \mathbb{Z}; -5 < k < 5\}$.
a) Zapišite elemente množic $\mathcal{A} = \{2k + 1; k \in \mathbb{Z}; -3 < k < 2\}$ in $\mathcal{B} = \{3k - 2, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 2\}$.
b) Zapišite še elemente množic $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^c$.

16. Dane so množice celih števil $\mathcal{A} = \{x; x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $\mathcal{B} = \{x; 1 + \frac{x}{3} = \frac{(x+1)}{2}\}$, $C = \{x; x^3 + x^2 - 4x = 4\}$. Zapišite njihove elemente in elemente množic $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup C)$ in $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap C$.

17. Zapišite množice:
a) $\mathcal{A}$ vseh sodih celih števil,
b) $\mathcal{B}$ vseh lihih celih števil,
c) C vseh večkratnikov števila 6,
č) $\mathcal{D}$ vseh celih števil, ki dajo pri deljenju s 6 ostanek 1.

18. Množica $\mathcal{A}$ je množica vseh naravnih števil, ki so manjša od 50 in deljiva s 3, množica $\mathcal{B}$ je množica vseh naravnih števil, ki so manjša od 50 in deljiva z 2.
a) Zapišimo elemente množice $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.
b) Izračunajmo, kolikšne so moči množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

19. Koliko je vseh naravnih števil, ki so manjša ali enaka 1000 in so:
a) deljiva s 5,
b) deljiva s 7,
c) deljiva z vsaj enim od števil 5 ali 7?

20. Naj bo univerzalna množica $\mathcal{U}$ množica vseh trimestnih naravnih števil. Izračunajte, koliko elementov imajo množice:
a) $\mathcal{A} = \{n \in \mathcal{U}; 16 \mid n\}$,
b) $\mathcal{B} = \{n \in \mathcal{U}; 24 \mid n\}$,
c) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

21. Naj bo množica naravnih števil univerzalna množica. Zapišite elemente naslednjih množic in zapišite moči množic s končno mnogo elementi.
a) $\mathcal{A} = \{\text{večkratniki števila } 5\}$
b) $\mathcal{B} = \{\text{delitelji števila } 50\}$
c) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$
č) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$

22. Naj bosta $\mathcal{A} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}, x + y = 1\}$ in $\mathcal{B} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$ podmnožici ravnine.

a) Ugotovite, katere od danih točk $T(1, 1)$, $P(-1, 1)$, $Q(0, 1)$ in $R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pripadajo množici $\mathcal{A}$ in katere množici $\mathcal{B}$.

b) V množici $\mathcal{A}$ poiščite tiste točke, ki ležijo na abscisni osi.

c) V množici $\mathcal{B}$ poiščite tiste točke, ki ležijo na ordinatni osi.

č) Zapišite presek množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

23. V restavraciji s hitro prehrano ponujajo pet vrst hrane in tri vrste brezalkoholnih pijač: čevapčiče ($č$), ražnjiče (r), hrenovke (h), mini pice (p), vegetarijanske omlete (o), kokakolo (k), sok (s) in vodo (v).

a) Na koliko različnih načinov se lahko prehranjujemo v dani restavraciji, če vedno najprej izberemo eno jed in nato eno pijačo?

b) Zapišite vse različne izbire.

24. Janez je opravil anketo med 65 dijaki neke šole. Izvedel je, da jih 30 obiskuje filmski abonma, 38 dramski abonma, 14 pa nobenega od njiju. Koliko dijakov obiskuje vsaj en abonma in koliko dijakov oba abonmaja?

25. Ob vpisu v 1. letnik jih je 58 od 126 dijakov navedlo, da se redno ukvarjajo vsaj s športom, 34 dijakov pa vsaj z glasbo. Izračunajte, koliko dijakov se ne ukvarja z nobeno od teh dveh dejavnosti, če se jih z obema dejavnostma ukvarja 11.

26. Na turistični agenciji so želeli predvideti, koliko ljudi bi med poletnimi počitnicami potovalo po Sloveniji ali v tujino. S telefonsko anketo so izvedeli, da 237 ljudi načrtuje potovanje vsaj po Sloveniji, 379 ljudi načrtuje potovanje vsaj v tujino, 41 ljudi bo potovalo tako po Sloveniji kot tudi v tujino. Vendar 108 ljudi ne bo potovalo nikamor. Koliko ljudi so izpraševali v telefonski anketi?

27. V 1. letniku gimnazije je bilo ob koncu šolskega leta 85 deklet in 42 fantov. Razred je izdelalo 119 dijakov, od tega 79 deklet. Koliko fantov ni izdelalo razreda?

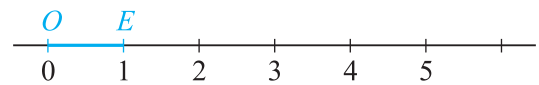
28. Ob spremljanju prehranjevalnih navad prebivalcev nekega kraja so ugotavljali njihovo maso in količino holesterola v krvi. Ugotovili so, da ima 131 ljudi zmerno maso, 91 ljudi pa je predebelih. Ob tem so tudi ugotovili, da ima kar 112 ljudi prekomerno količino holesterola v krvi, od tega 45 ljudi z zmerno maso. Koliko ljudi s prekomerno maso nima povišanega holesterola v krvi?

2. NARAVNA ŠTEVILA

Naravna števila so števila, s katerimi štejemo. Množico naravnih števil označimo s črko $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 ...\}$.

Število 1 je naravno število. Vsako naravno število n ima svojega naslednika $n + 1$. Zato ni največjega naravnega števila in je naravnih števil neskončno mnogo.

Naravna števila si predstavimo na (vodoravni) premici. Na njej si izberemo dve različni točki. Levo točko označimo z O, kar predstavlja število 0, desno pa z E, kar predstavlja število 1.



Nato daljico (enoto) od O do E nanašamo od E desno in postopoma dobivamo točke, ki predstavljajo števila 2, 3, 4 ... Taki premici pravimo **številska premica**. Točka O je **izhodišče** številske premice.

Vsa naravna števila ležijo na poltraku z izhodiščem v točki O, ki ga imenujemo **pozitivni poltrak** številske premice.

Osnovni računski operaciji v množici naravnih števil sta **seštevanje** in **množenje**.

1. **Seštevanje**: Poljubnima naravnima številoma a in b priredimo **vsoto** $a + b$.
2. **Množenje**: Poljubnima naravnima številoma a in b priredimo **produkt** $a \cdot b$.

Za poljubna naravna števila a, b in c veljajo naslednje lastnosti osnovnih **računskih operacij**:

1. $a + b = b + a$	komutativnost seštevanja ali zakon o zamenjavi
2. $(a + b) + \mathrm{c} = a + (b + \mathrm{c})$	asociativnost seštevanja ali zakon o združevanju
3. $a \cdot b = b \cdot a$	komutativnost množenja ali zakon o zamenjavi
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	asociativnost množenja ali zakon o združevanju
5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	distributivnostni ali razčlenitveni zakon
6. $1 \cdot a = a \cdot 1$	1 je nevtralni element za množenje

Če imamo v številskih izrazih več členov, potem pri izračunu vrednosti izraza ob upoštevanju zgornjih računskih zakonov pazimo na vrstni red operacij: najprej odpravimo oklepaje, nato množimo in nazadnje seštevamo.

1. Izračunajmo $37 \cdot 43 + 37 \cdot 57$ na dva različna načina.

Lahko izračunamo $37 \cdot 43 + 37 \cdot 57 = 1591 + 2109 = 3700$ ali pa izpostavimo 37 in zapišemo $37 \cdot 43 + 37 \cdot 57 = 37(43 + 57) = 37 \cdot 100 = 3700$.

2. Izračunajmo $(2 + 3 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 3 + 10) + 12 \cdot (6 + 4 \cdot (21 + 37))$.

Pri izračunu vrednosti izraza pazimo na vrstni red operacij:

$$(2 + 3 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 3 + 10) + 12 \cdot (6 + 4 \cdot (21 + 37)) =$$
$$= (2 + 12)(21 + 10) + 12(6 + 4 \cdot 58) =$$
$$= 14 \cdot 31 + 12 \cdot 238 =$$
$$= 434 + 2856 = 3290$$

Potence z naravnimi eksponenti

Naj bo a poljubno število in n naravno število.

Produkt n enakih števil $a \cdot a \cdot a \ldots a$ krajše zapišemo kot a^n.

Izraz $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n}$ imenujemo **potenca števila *a***.

Število a je **osnova**, število n pa **eksponent** potence.

1. Z uporabo definicije potence pisno izračunajmo $6^2 + 2^6 + 1^3$.

$6^2 + 2^6 + 1^3 = 6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 36 + 64 + 1 = 101$

2. Zapišimo kot potence in z uporabo kalkulatorja izračunajmo $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 3^3 + 3^4 + 4^4 = 2 \cdot 27 + 81 + 256 = 391$

3. Izračunajmo $3^1 \cdot 5 + 5 \cdot 4^3 + 3^3 \cdot 2^4 + (3 + 4)^2$.

$3^1 \cdot 5 + 5 \cdot 4^3 + 3^3 \cdot 2^4 + (3 + 4)^2 = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 64 + 27 \cdot 16 + 7^2 = 15 + 320 + 432 + 49 = 816$

4. Zapišimo kot potence $a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a + 5 \cdot a \cdot a + 4 \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a$.

$a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a + 5 \cdot a \cdot a + 4 \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a = a^3 + a^5 + 5a^2 + 4a^2 + a^3 = a^5 + 2a^3 + 9a^2$

Če sta a in b poljubni števili, m in n pa naravni števili, za **računanje s potencami z naravnimi eksponenti veljajo naslednja pravila**:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ — Potenci z enako osnovo zmnožimo tako, da osnovo ohranimo, eksponenta pa seštejemo.
2. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ — Produkt števil potenciramo tako, da potenciramo posamezna faktorja in ju potem zmnožimo.
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ — Potenco potenciramo tako, da osnovo ohranimo, eksponenta pa zmnožimo.

1. Izračunajmo $a^2 \cdot a^4 + (a^2)^3$.

$a^2 \cdot a^4 + (a^2)^3 = a^{2+4} + a^{2 \cdot 3} = a^6 + a^6 = 2a^6$

2. Poenostavimo $x^3 \cdot x \cdot x^2 + (y^3)^2 + (x + y)(x + y)^2(x + y)^3$.

$x^3 \cdot x \cdot x^2 + (y^3)^2 + (x + y)(x + y)^2(x + y)^3 = x^6 + y^6 + (x + y)^6$

3. Poenostavimo $2^8 + 2^7 + 2^6$.

$2^8 + 2^7 + 2^6 = 2^2 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^6 + 2^6 = 2^6 \cdot (2^2 + 2 + 1) = 7 \cdot 2^6$

4. Izraz $9 \cdot 72^2$ zapišimo v obliki $2^n \cdot 3^m$, pri čemer sta m in n naravni števili.

Zapišimo $9 \cdot 72^2 = 3^2 \cdot (9 \cdot 8)^2 = 3^2 \cdot (3^2 \cdot 2^3)^2 = 3^2 \cdot 3^4 \cdot 2^6 = 2^6 \cdot 3^6$.

5. Zmnožimo $6a^4b^3 \cdot 8ab^4$.

$6a^4b^3 \cdot 8ab^4 = 6 \cdot 8a^{4+1}b^{3+4} = 48a^5b^7$

6. Zmnožimo $2a^3 \cdot (2a^2)^4$.

$2a^3 \cdot (2a^2)^4 = 2a^3 \cdot 2^4 a^{2 \cdot 4} = 2^{1+4} \cdot a^{3+8} = 2^5 a^{11} = 32a^{11}$

7. Poenostavimo $(2a^2b^3)^3 \cdot (3ab^2)^2$.

$(2a^2b^3)^3 \cdot (3ab^2)^2 = 2^3 a^{2 \cdot 3} b^{3 \cdot 3} \cdot 3^2 a^{1 \cdot 2} b^{2 \cdot 2} = 8a^6b^9 \cdot 9a^2b^4 = 72a^8b^{13}$

8. Izraz $10 \cdot 8^3 + 3 \cdot 4^5$ zapišimo v obliki potence z osnovo 2.

$10 \cdot 8^3 + 3 \cdot 4^5 = 10 \cdot (2^3)^3 + 3 \cdot (2^2)^5 = 10 \cdot 2^9 + 3 \cdot 2^{10} = 10 \cdot 2^9 + 3 \cdot 2 \cdot 2^9 = 16 \cdot 2^9 = 2^4 \cdot 2^9 = 2^{13}$

9. Brez uporabe kalkulatorja izračunajmo $(2 \cdot 10^2)^3 \cdot (5 \cdot 10^3)^4$.

$(2 \cdot 10^2)^3 \cdot (5 \cdot 10^3)^4 = 2^3 \cdot 10^6 \cdot 5^4 \cdot 10^{12} = 5 \cdot 5^3 \cdot 2^3 \cdot 10^{12+6} = 5 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 10^{18} = 5 \cdot 10^3 \cdot 10^{18} = 5 \cdot 10^{21}$

10. Izpostavimo skupni faktor $2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} + 2^n$.

$2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} + 2^n = 2^n \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^n \cdot 2 + 2^n = 2^n(2^2 + 3 \cdot 2 + 1) = 11 \cdot 2^n$

Vsako naravno število *a* lahko na en sam način zapišemo v **številskem sestavu z osnovo 10 (desetiški sestav)**: $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$.

Zapis števila a skrajšamo v obliko $a = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$.

Tu so a_i števke, ki jih izbiramo med 0, 1, 2 ... 9, in je $a_n \neq 0$. Ta zapis števila a imenujemo **desetiški zapis**. Za število a pravimo, da ima natančno $n + 1$ mest.

Število 1957 je sestavljeno iz 1 tisočice, 9 stotic, 5 desetic in 7 enic in ga lahko zapišemo

$1957 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$.

Deljivost naravnih števil

Števila b, $2b$, $3b$, $4b$ ... so **večkratniki naravnega števila *b***. Vsak večkratnik naravnega števila b lahko zapišemo v obliki $k \cdot b$, pri čemer je k naravno število.

1. Števila 5, 10, 15, 20, 25 ... so večkratniki števila 5. Množica vseh večkratnikov števila 5 je $\{5k; k \in \mathbb{N}\}$.

2. Soda naravna števila so večkratniki števila 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ...

Množico sodih naravnih števil lahko zapišemo v obliki $\{2k; k \in \mathbb{N}\}$.

3. Liha naravna števila so naravna števila, ki niso večkratniki števila 2: 1, 3, 5, 7, 9, 13 ...

Množico lihih naravnih števil lahko zapišemo v obliki $\{2k - 1; k \in \mathbb{N}\}$.

4. Ugotovimo, ali je število $2^{2005} + 2^{2006} + 2^{2007}$ večkratnik števila 7.

Ker je $2^{2005} + 2^{2006} + 2^{2007} = 2^{2005} \cdot (1 + 2 + 2^2) = 7 \cdot 2^{2005}$, je dano število res večkratnik števila 7.

Naravno **število b deli** naravno **število a** (v znakih $b \mid a$) natanko takrat, ko je število a **večkratnik** števila b.

Torej $b \mid a$ natanko takrat, ko obstaja tako naravno število k, da je $a = k \cdot b$.

Velja tudi: $a : b = k \Leftrightarrow a = k \cdot b$.

Za deljivosti naravnih števil a, b in c veljajo naslednje osnovne **lastnosti**:

1. $a \mid a$ refleksivnost
2. Če $a \mid b$ in $b \mid a$, potem je $a = b$. antisimetričnost
3. Če $a \mid b$ in $b \mid c$, potem $a \mid c$. tranzitivnost

Poleg teh osnovnih lastnosti velja še: Če $a \mid b$ in $a \mid c$, potem $a \mid (b + c)$.

1. Zapišimo vse delitelje števila 66.

Iz zapisa $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ lahko zapišemo vse delitelje števila 66: 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66.

2. Dane so množice $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N}; 1 < n \le 6\}$, $\mathcal{B} = \{2n; n \in \mathbb{N} \wedge n < 6\}$ in $C = \{n \in \mathbb{N}; n \mid 16\}$. Zapišimo elemente množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, C, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \setminus C$ tako, da naštejemo njihove elemente.

Zapišemo $\mathcal{A} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{B} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{2, 4, 6\}$, $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \setminus C = \{6\}$.

3. Ugotovimo, ali za poljubno naravno število n velja $25 \mid (3^{n+2} + 5 \cdot 3^{n+1} + 3^n)$.

Ker je $3^{n+2} + 5 \cdot 3^{n+1} + 3^n = 3^n(3^2 + 5 \cdot 3 + 1) = 25 \cdot 3^n$, število 25 deli dani izraz.

Osnovni izrek o deljenju: Za poljubni naravni števili a in b ($a > b$) obstajata natanko določeni števili $k \in \mathbb{N}$ in $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tako da je $a = k \cdot b + r$; $0 \le r < b$.

Število $\boldsymbol{k}$ imenujemo **količnik**, število $\boldsymbol{r}$ pa **ostanek** pri deljenju števila a (**deljenec**) s številom b (**delitelj**).

Če je ostanek pri deljenju števila a s številom b enak 0 ($r = 0$), potem število b **deli** število a.

1. Pri deljenju števila 39 s številom 7 dobimo količnik 5 in ostanek 4. To zapišemo v obliki $39 = 5 \cdot 7 + 4$.

2. Pri deljenju števila a s 15 dobimo količnik 13 in ostanek 6. Z osnovnim izrekom o deljenju poiščimo število a.

Zapišemo $a = 13 \cdot 15 + 6 = 201$.

3. Pri deljenju števila a s številom 24 dobimo ostanek 19. Izračunajmo, kolikšen je ostanek pri deljenju števila a s številom 8.

Zapišimo $a = k \cdot 24 + 19 = k \cdot 3 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 3 = (3k + 2) \cdot 8 + 3$. Ostanek pri deljenju števila a s številom 8 je 3.

4. Za slavnostno prireditev so v mestni dvorani razporedili 423 stolov v 16 enako številčnih vrst. Koliko stolov je v vsaki vrsti in koliko stolov je preostalo za dodatno sedemnajsto vrsto?

Ker je $423 = 26 \cdot 16 + 7$, je v vsaki vrsti 26 stolov, v sedemnajsti vrsti pa 7 stolov.

5. Zapišimo množico $\mathcal{A}$ vseh celih števil, ki so deljiva s 4, in množico $\mathcal{B}$ vseh celih števil, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 3.

Uporabimo osnovni izrek o deljenju in zapišemo $\mathcal{A} = \{4k; k \in \mathbb{Z}\}$ in $\mathcal{B} = \{4k + 3; k \in \mathbb{Z}\}$.

Kriteriji za deljivost:

1. Število je deljivo z **10** natanko takrat, ko je **enica 0**.
2. Število je deljivo z **2 (5)** natanko takrat, ko je **enica** deljiva z **2 (5)**.
3. Število je deljivo s **3 (9)** natanko takrat, ko je **vsota števk** tega števila deljiva s **3 (9)**.
4. Število je deljivo s **4 (25)** natanko takrat, ko je **4 (25)** deljivo dvomestno število, ki ga tvorita v istem vrstnem redu **zadnji dve števki** prvotnega števila.
5. Število je deljivo s **6** natanko takrat, ko je deljivo z **2** in s **3**.

1. S katerimi od zgornjih števil je deljivo število 762 553 561 296?

Dano število je deljivo z 2, ker so njegove enice deljive z 2, deljivo s 3, ker je vsota njegovih števk $7 + 6 + 2 + 5 + 5 + 3 + 5 + 6 + 1 + 2 + 9 + 6 = 57$ deljiva s 3, in deljivo s 4, ker je število 96 deljivo s 4.

2. Za katero števko a bo število $3581a$ deljivo s 3 in za katero števko a bo deljivo s 6?

Po kriteriju deljivosti s 3 mora biti za število $3581a$ vsota števk $3 + 5 + 8 + 1 + a = 17 + a$ deljiva s 3. Od tod je a lahko 1 ali 4 ali 7. Število $3581a$ bo za $a = 4$ deljivo s 6.

3. Za katero števko b bo število $1357b2$ deljivo s 4?

Po kriteriju za deljivost s 4 bo število $1357b2$ deljivo s 4 natanko takrat, ko bo s 4 deljivo število $b2$. V tem primeru pa je b lahko ena izmed števk 1, 3, 5, 7 ali 9.

Naravna števila, ki so večja od 1 in so deljiva le s številom 1 in s samim seboj, imenujemo **praštevila**. **Naravna števila**, ki imajo več kot dva delitelja, imenujemo **sestavljena števila**. Število 1 ni ne praštevilo ne sestavljeno število. Vsako **sestavljeno število** a se da na **en sam način** zapisati kot **produkt praštevil (prafaktorjev)**, če vrstnega reda členov v produktu ne upoštevamo:

$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ ($p_1, p_2 \dots p_n$ so praštevila, $k_1, k_2 \dots k_n$ so naravna števila).

1. Števili 72 in 495 zapišimo kot produkt praštevil.

$$72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$495 = 3 \cdot 165 = 3 \cdot 3 \cdot 55 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

2. Poiščimo, s katerimi potencami števila 2 in s katerimi potencami števila 3 je deljivo število 288.

Ker je $288 = 2 \cdot 144 = 2 \cdot 2 \cdot 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 36 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3^2$,
je število 288 deljivo z 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ ter s 3 in $3^2 = 9$.

Največji skupni delitelj $\boldsymbol{D(a, b)}$ števil a in b je največje od števil, **ki delijo** števili a in b.

Če je največji skupni delitelj dveh števil 1, sta števili **tuji**.

Največji skupni delitelj števil a in b lahko izračunamo kot produkt skupnih prafaktorjev iz razcepa števil a in b. Za eksponent posameznega prafaktorja vzamemo iz danega razcepa manjšega od eksponentov tega praštevila.

Najmanjši skupni večkratnik $\boldsymbol{v(a, b)}$ števil a in b je najmanjše od števil, ki **so deljiva** s številoma a in b.

Najmanjši skupni večkratnik števil a in b dobimo kot produkt vseh prafaktorjev iz razcepa števil a in b. Za eksponent pri posameznem praštevilu vzamemo iz danega razcepa večjega od eksponentov tega praštevila.

Zveza med največjim skupnim deliteljem in najmanjšim skupnim večkratnikom števil a in b:

$D(a, b) \cdot v(a, b) = a \cdot b$.

1. Poiščimo največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik števil 216 in 180.

Najprej števili zapišimo kot produkt praštevil.
$216 = 2 \cdot 108 = 2 \cdot 2 \cdot 54 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 27 = 2^3 \cdot 3^3$
$180 = 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2^2 \cdot 3 \cdot 15 = 2^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Od tod je $D(216, 180) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ in $v(216, 180) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1080$.

2. Poiščimo največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik števil 60, 198 in 252.

Najprej števili zapišimo kot produkt praštevil.
$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
$198 = 2 \cdot 99 = 2 \cdot 3 \cdot 33 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$
$252 = 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2^2 \cdot 3 \cdot 21 = 2^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Od tod je $D(60, 198, 252) = 2 \cdot 3 = 6$ in $v(60, 198, 252) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 13\,860$.

3. Dvorišče pravokotne oblike z merami 700 cm in 455 cm bi radi stikoma tlakovali s kvadratnimi betonskimi ploščami. Kolikšna je največja mogoča mera betonskih plošč, da jih ne bi bilo treba rezati?

Zapišimo $700 = 2 \cdot 350 = 2 \cdot 2 \cdot 175 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, $455 = 5 \cdot 91 = 5 \cdot 7 \cdot 13$. Da plošč ne bi bilo treba rezati, mora biti mera stranice kvadratnih plošč delitelj obeh števil 700 in 455. Mera največje kvadratne plošče je potem enaka največjemu skupnemu delitelju števil 700 in 455, to je $5 \cdot 7 = 35$ cm.

4. Na vzdržljivostnem teku najboljši tekmovalec porabi za en krog 40 minut, najslabši tekmovalec pa 72 minut. Po kolikih krogih najboljšega tekmovalca bosta oba tekmovalca prvič hkrati zaključila krog, če oba tekmovalca tečeta enakomerno? Koliko krogov je v tem času opravil slabši tekmovalec?

Ker je $72 = 2^3 \cdot 3^2$ in $40 = 2^3 \cdot 5$, bosta oba tekmovalca zopet prvič hkrati zaključila krog po $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ minutah (najmanjši skupni večkratnik). V tem času je najboljši tekmovalec opravil $360 : 40 = 9$ krogov, najslabši pa $360 : 72 = 5$ krogov.

1. Izračunajte.
a) $6 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot (10 + 8 \cdot 15) + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 9$
b) $2 + 3 \cdot (4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (12 + 8 \cdot 2))$

2. Katero število dobimo, če številu 18 prištejemo 13, dobljeno vsoto pomnožimo s 7 in produktu prištejemo trikratnik števila 18?

3. Petkratniku števila 39 prištejemo dvakratnik števila 57 in dobljeno vsoto množimo z 9. Katero število dobimo?

4. Pri izdelavi zunanjega ometa hiše so najprej štirje delavci delali sedem dni po 9 ur na dan, nato so se jim pridružili še trije delavci in skupaj so v naslednjih petih dneh končali delo, saj so delali po 10 ur na dan. Koliko delovnih ur so potrebovali za izdelavo zunanjega ometa hiše?

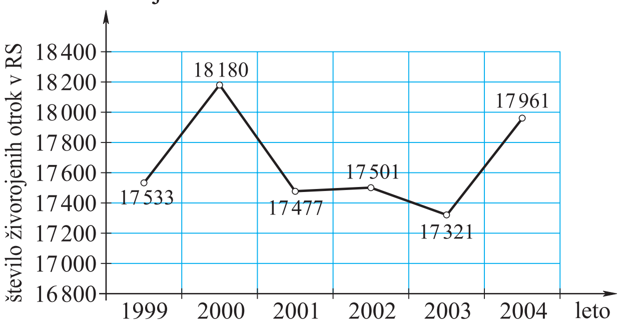
5. Marko in Tine varčujeta že štiri leta. Marko je prvo leto privarčeval 220 EUR in varčuje tako, da vsako leto privarčuje dvakrat toliko denarja kot prejšnje leto. Tine je prvo leto privarčeval 430 EUR in varčuje tako, da vsako leto privarčuje 300 EUR več kot prejšnje leto. Kdo je privarčeval več denarja? Kdo pa bo privarčeval več denarja, če varčujeta še eno leto?

6. Diagram prikazuje število živorojenih otrok v Republiki Sloveniji v obdobju od leta 1999 do 2004 (vir: Statistični urad RS).

a) Izračunajte, koliko otrok več je bilo rojenih v letu 2004 kot v letu 2003.

b) Zapišite, v katerem letu je bilo največ živorojenih otrok in v katerem letu najmanj. Koliko je znašala ta razlika?

c) Izračunajte, koliko je bilo v tem obdobju vseh živorojenih otrok.



7. Živa je priprave na smučarsko sezono začela s tekom. V ponedeljek je pretekla 2 km, v torek 300 metrov več kot v ponedeljek, v sredo 200 metrov več kot v torek, v četrtek dvakrat toliko kot v torek, v petek trikrat toliko kot v ponedeljek, v soboto in nedeljo pa skupaj 100 m več kot v sredo. Koliko metrov je Živa pretekla v celem tednu?

8. Pri obisku kmetijske zadruge so nam povedali, da se ukvarjajo z intenzivno pridelavo jabolk. Jabolka so v sadovnjaku posajena v 25 vrstah, ki so dolge 140 m. Drevesa so posajena 2 m narazen in vsako drevo v povprečju na leto obrodi 13 kg jabolk. Izračunajte, koliko ton jabolk pridelajo na leto?

9. Izračunajte.

a) $(3 \cdot 2)^3 + 2 \cdot 3^3 + 3^3 \cdot 2^3 + (3 + 2)^3$

b) $3 \cdot 2^3 + 4 \cdot (5 \cdot 7 + 3 \cdot 7^2 + 5 \cdot (3^3 + 1^6 \cdot 2^5))$

10. Poenostavite.

a) $x \cdot x^2 + 3x^3 + x^2 + 2x^2 + x \cdot x + x \cdot x \cdot x$

b) $x^2 \cdot x^4 + x \cdot x^5 + 6x$

c) $(2a^5) \cdot (3a^3) + (a^2)^4$

č) $x^2 \cdot x \cdot x^4 + x^3 \cdot x^4 + (2x^3)^4 + (2 + x)^7$

d) $2^3 \cdot 2^4 + 2^2 \cdot 2^5 + (2^2)^4$

11. Izračunajte.

a) $(2x^2)^4 \cdot (2^4 \cdot x^6)$

b) $(a^2b^3)^2 \cdot (ab^2)^3$

c) $(3xy^2)^2 \cdot (x^2y)^3$

č) $3(ab^3)^3 \cdot (3a^2b^3)^2$

d) $(8a^2b)^2 \cdot (2a^2b^3)^3$

e) $(9x^3y)^2 \cdot (2x^2y^3)^3 \cdot (6xy^4)$

12. Dana izraza zapišite v obliki $2^n \cdot 3^m$, pri čemer sta m in n naravni števili.

a) $3 \cdot 8^2 \cdot 24^3$

b) $4 \cdot 48 \cdot 18^3$

13. Brez uporabe kalkulatorja pisno izračunajte $(5 \cdot 10^3)^2 \cdot (4 \cdot 10^4)^3 \cdot 20$.

14. Izraz $(4x^2y^3)^2 \cdot (2xy^2)^3 \cdot (2x^2y)$ zapišite v obliki $2^k \cdot x^m y^n$, pri čemer so k, m in n naravna števila.

15. Izraz $5 \cdot 8^3 + 6 \cdot 16^2 + 3 \cdot 4^5$ zapišite v obliki $k \cdot 2^n$, pri čemer sta k in n naravni števili.

16. Pokažite, da je število $3^{15} + 2 \cdot 3^{17} + 3^{19}$ deljivo s 100.

17. Izpostavite skupni faktor $3^{n+2} + 5 \cdot 3^{n+1} + 2 \cdot 3^n$.

18. S katerimi izmed števil 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 in 25 je deljivo število 203 082 000 564?

19. Za katere števke a je naravno število $3431a$ deljivo:

a) z 2,

b) s 3,

c) s 4,

č) s 5,

d) s 6,

e) z 9?

20. Za katere števke a je naravno število $412a3$ deljivo:

a) s 3,

b) z 9,

c) s 6?

21. Naj bo $U = \{n \in \mathbb{N};\ n \leq 30\}$ univerzalna množica in $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N};\ 3 \mid n\}$ ter $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N};\ n \mid 30\}$ njeni podmnožici. Zapišite elemente množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$.

22. Dane so množice $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N};\ n \leq 8\}$, $\mathcal{B} = \{2n - 1;\ n \in \mathbb{N},\ n < 5\}$ in $\mathcal{C} = \{n \in \mathbb{N};\ n \mid 15\}$. Zapišite elemente množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \setminus \mathcal{C}$.

23. Naj bo $U = \{n \in \mathbb{N}; n < 20\}$ univerzalna množica in $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N}; 3 \mid n\}$ ter $\mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N}; (2 \mid n) \vee (5 \mid n)\}$ njeni podmnožici. Zapišite elemente množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$.

24. Množica $\mathcal{A}$ je množica večkratnikov števila 4, množica $\mathcal{B}$ pa je množica večkratnikov števila 6.
a) Vsaj na dva različna načina zapišite množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.
b) Zapišite množici $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ter ju opišite s povedjo.

25. Naj bo $\mathcal{A} = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{B} = \{3n; n \in \mathbb{N}\}$.
a) Zapišite $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.
b) Na več načinov zapišite $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

26. Ugotovite, ali za vsako naravno število n velja:
a) $13 \mid (7^n + 4 \cdot 7^{n+1} + 7^{n+2})$
b) $15 \mid (6^{n+2} + 6^{n+1} + 3 \cdot 6^n)$

27. Naj bo n poljubno liho naravno število.
a) Pokažite, da je kvadrat števila n tudi liho število.
b) Kolikšen je ostanek pri deljenju števila n^2 s 4?

28. Pokažite, da velja: Če je naravno število b večkratnik števila 12 in število 8 deli število c, potem je število $2b + 3c$ večkratnik števila 24.

29. V garaži pravokotne oblike s širino 435 cm smo na tla stikoma položili 1131 keramičnih ploščic kvadratne oblike s stranico 15 cm. Kolikšna je dolžina garaže, če plošč ni bilo treba rezati?

30. Zapišite množico vseh:
a) sodih naravnih števil,
b) lihih naravnih števil,
c) večkratnikov števila 9,
č) naravnih števil, ki dajo pri deljenju z 9 ostanek 5.

31. Če število n delimo z 9, dobimo količnik 10 in ostanek 6. Ob pomoči osnovnega izreka o deljenju izračunajte število n. Kolikšen je ostanek pri deljenju števila n s 23?

32. Katero je najmanjše in katero največje naravno število, ki dasta pri deljenju z 8 količnik 12?

33. Če število a delimo s 36, dobimo ostanek 25. Z računom ugotovite, kolikšen je ostanek pri deljenju števila a z 9.

34. Profesor želi dijake nekega oddelka razdeliti v skupine po pet dijakov. Naredi pet skupin, a mu štirje dijaki ostanejo.
a) Koliko dijakov je v razredu?
b) Koliko bi bilo skupin, če bi dijake razdelil v skupine po sedem, in koliko dijakov bi mu pri tej razdelitvi ostalo?

35. Če obrtnik dnevno proizvodnjo srajc pakira po 20 srajc v zavitek, mu 7 srajc ostane, če pa jih pakira po 15 srajc v zavitek, naredi 5 zavitkov več in mu ostaneta le 2 srajci. Kolikšna je obrtnikova dnevna proizvodnja srajc?

36. V dvomestnem številu so desetice za 4 večje od enic. Če število delite z vsoto njegovih števk, dobite količnik 6 in ostanek 11. Izračunajte to število.

37. Spodnja števila zapišite kot produkt praštevil.

a) 90	č) 528
b) 184	d) 1575
c) 432	

38. Število 135 zapišite kot produkt praštevil. S katerimi večkratniki števila 5 je deljivo število 135?

39. Število 448 zapišite kot produkt praštevil. S katerimi potencami števila 2 je deljivo število 448?

40. Elementi množice $\mathcal{A}$ so tista praštevila, ki nastopajo v praštevilskem razcepu števila 120, elementi množice $\mathcal{B}$ so vsa naravna števila, ki delijo število 120, elementi množice C so tista praštevila, ki nastopajo v razcepu števila 75, elementi množice $\mathcal{D}$ pa so vsa naravna števila, ki so delitelji števila 75.
a) Zapišite elemente množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, C in $\mathcal{D}$.
b) Ali je $C \subset \mathcal{A}$? Ali je $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$?

41. Poiščite največji skupni delitelj D in najmanjši skupni večkratnik v danih števil.

a) 108, 144	č) 3150, 1620
b) 88, 105	d) 120, 360, 84
c) 616, 560	e) 180, 195, 285

42. Zapišite največje štiri skupne delitelje števil 576 in 1296.

43. Množica $\mathcal{A}$ je množica tistih naravnih števil, s katerimi je deljivo število 48, množica $\mathcal{B}$ je množica tistih naravnih števil, za katera je število 24 njihov večkratnik, množica $\mathcal{C}$ pa je množica naravnih števil n, za katera je $n \cdot k = 54$, $k \in \mathbb{N}$.

a) Zapišite elemente množic $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$.

b) Zapišite največji element množice $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ in ga poimenujte.

44. Poiščite naravni števili a in b, za kateri je $D(a, b) = 7$ in $a + b = 28$.

45. Poiščite naravni števili a in b, za kateri je $D(a, b) = 3$ in $ab = 54$.

46. Poiščite naravni števili a in b, za kateri je:

a) $D(a, b) = 4$ in $v(a, b) = 16$,

b) $D(a, b) = 4$ in $v(a, b) = 48$.

47. Katero število dobite, če produkt števil 432 in 1056 delite z njunim najmanjšim skupnim večkratnikom?

48. Produkt števil 1012 in 588 delite z njunim največjim skupnim deliteljem, dobljeni količnik pa potem delite še z najmanjšim skupnim večkratnikom števil 1012 in 588. Katero število dobite?

49. Produkt dveh naravnih števil a in b je 1734, njun najmanjši skupni večkratnik pa 102. Poiščite števili a in b.

50. Obhodni čas Merkurja okoli Sonca je 88 dni, obhodni čas Venere pa 224 dni. Po kolikih dneh bosta Merkur in Venera zopet prvič v istem položaju?

51. Med krajema A in B vozi direktni potniški vlak, ki za eno krožno vožnjo iz kraja A v kraj B in nazaj potrebuje 2 uri in pol. Med krajema A in B vozi tudi avtobus, ki za eno krožno vožnjo iz kraja A v kraj B in nazaj potrebuje $3\frac{1}{3}$ ure. Iz postaje v kraju A sta vlak in avtobus hkrati odpeljala ob 4.40. Ob kateri uri bosta zopet hkrati odpeljala iz postaje kraja A?

52. Torto z maso 936 g in pladenj kremnih rezin z maso 216 dkg bi radi razrezali na kose z enakimi masami. Kolikšna je lahko največja masa posameznega kosa?

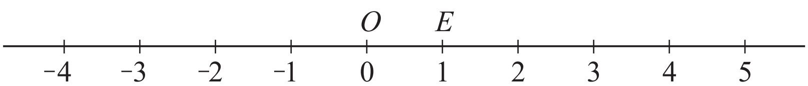
53. V živalskem vrtu bodo prostor v obliki enakokrakega trapeza z dolžinami osnovnic 144 dm in 108 dm ter dolžino krakov 96 dm ogradili z žično ograjo, ki jo prodajajo v ploščah različnih dolžin. Kolikšna mora biti najdaljša dolžina plošče, da plošč ne bo treba rezati?

3. CELA ŠTEVILA

Množico celih števil dobimo tako, da množico **naravnih števil** razširimo s številom 0 (**nič**) in **negativnimi celimi števili** $-1, -2, -3, -4 \ldots$ Množico celih števil označimo s črko $\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$.

Množica naravnih števil je podmnožica množice celih števil: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Število $-n$ imenujemo **nasprotno število** k naravnemu številu n. Če točko na številski premici, ki predstavlja število n, prezrcalimo čez izhodišče, dobljena točka predstavlja število $-n$. Množico celih števil lahko predstavimo na številski premici.

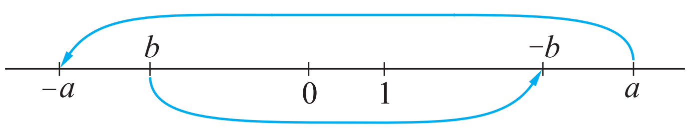


Računske operacije v množici celih števil:

1. **Seštevanje**: Poljubnima celima številoma a in b priredimo **vsoto** $a + b$.
2. **Odštevanje**: Za poljubni celi števili a in b priredimo **razliko števil** $a - b = a + (-b)$.
3. **Množenje**: Poljubnima celima številoma a in b priredimo **produkt** $a \cdot b$.

Za računanje s celimi števili a, b in c veljajo **naslednje lastnosti**:

1. $a + b = b + a$ komutativnost seštevanja ali zakon o zamenjavi
2. $(a + b) + \mathrm{c} = a + (b + \mathrm{c})$ asociativnost seštevanja ali zakon o združevanju
3. $a + 0 = a$ 0 je nevtralni element za seštevanje
4. Vsako celo število a ima natanko eno **nasprotno** celo število $-a$, tako da je $a + (-a) = 0$.



5. $a \cdot b = b \cdot a$ komutativnost množenja ali zakon o zamenjavi
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ asociativnost množenja ali zakon o združevanju
7. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ distributivnostni ali razčlenitveni zakon
8. $1 \cdot a = a \cdot 1$ 1 je nevtralni element za množenje

Če imamo v številskih izrazih več členov, potem pri izračunu vrednosti izraza ob upoštevanju zgornjih računskih zakonov pazimo na vrstni red operacij. Najprej odpravimo oklepaje, nato množimo in zatem seštevamo in odštevamo. Ko odpravljamo oklepaje, pazimo na predznake, saj minus pred oklepajem pri odpravljanju oklepajev spremeni predznake vsem členom v oklepaju.

1. Izračunajmo.

a) $21 + (-9) - (-2) - (5 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 8) - (-9) \cdot (-3) =$
$= 21 - 9 + 2 - (-20 + 12 - 24) - 27 = 14 - (-32) - 27 =$
$= 14 + 32 - 27 = 19$

b) $(-8)^2 - 3 \cdot (3 \cdot (-4) \cdot (-6) + 6 \cdot (-1)^5 \cdot (24 - 4 \cdot (-2)^3)) =$
$= 64 - 3 \cdot (3 \cdot 24 + 6 \cdot (-1) \cdot (24 - 4 \cdot (-8))) =$
$= 64 - 3 \cdot (72 - 6 \cdot (24 + 32)) = 64 - 3 \cdot (72 - 6 \cdot 56) =$
$= 64 - 3 \cdot (72 - 336) = 64 - 3 \cdot (-264) = 64 + 792 = 856$

2. V izrazu $(-2^3)^4 - 16^3 + (-4^2)^3 - (-8^2)^2$ odpravimo oklepaje in rezultat zapišimo kot potenco števila 2.

$(-2^3)^4 - 16^3 + (-4^2)^3 - (-8^2)^2 = 2^{12} - 16^3 - 4^6 - 8^4 =$

$= 2^{12} - (2^4)^3 - (2^2)^6 - (2^3)^4 = 2^{12} - 2^{12} - 2^{12} - 2^{12} = -2 \cdot 2^{12} = -2^{13}$

3. Poenostavimo $(-a)^3 \cdot (-ab^2)^2$.

$(-a)^3 \cdot (-ab^2)^2 = -a^3 \cdot a^2b^4 = -a^5b^4$

4. Izraz $(-3x^2y^3)^3 \cdot (-9x^2)^2(-x^2y)^3$ zapišimo v obliki $3^kx^ny^m$, pri čemer so k, n in m naravna števila.

$(-3x^2y^3)^3 \cdot (-9x^2)^2(-x^2y)^3 =$

$= -3^3x^6y^9 \cdot 9^2x^4 \cdot (-x^6y^3) = 3^3x^6y^9 \cdot (3^2)^2x^4 \cdot x^6y^3 =$

$= 3^7x^{16}y^{12}$

Deljivost celih števil: Celo **število b ($b \neq 0$) deli število a** (v znakih $b \mid a$) natanko takrat, ko obstaja tako celo število k, da je $a = k \cdot b$. Torej $b \mid a \Leftrightarrow a = k \cdot b$ oz. $a : b = k \Leftrightarrow a = k \cdot b$; $a, b, k, \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Pazimo: s številom 0 ne moremo deliti.

Število 0 je deljivo z vsakim od 0 različnim celim številom.

Za poljubna od nič različna cela števila a, b in c veljajo enake **lastnosti deljivosti**, kot smo jih zapisali pri deljivosti naravnih števil.

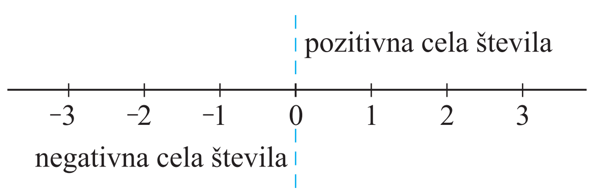
Brez uporabe kalkulatorja ugotovimo, ali velja: $10 \mid (3 \cdot 5^8 + 4 \cdot 5^9 - 5^{10})$.

Ker je $3 \cdot 5^8 + 4 \cdot 5^9 - 5^{10} = 5^8(3 + 4 \cdot 5 - 5^2) = -2 \cdot 5^8 = -2 \cdot 5 \cdot 5^7 = -10 \cdot 5^7$, število 10 deli dano število.

Urejenost celih števil

Naravnim številom pravimo tudi **pozitivna cela števila**. Pozitivno število a zapišemo: $a > 0$.

Negativna cela števila so števila oblike $-n$, pri čemer je n naravno število. Negativno število a zapišemo: $a < 0$. Vsako od 0 različno celo število je bodisi pozitivno bodisi negativno. Število 0 ni ne pozitivno ne negativno. Na številski premici ležijo točke, ki predstavljajo **pozitivna cela števila**, **desno od 0**, točke, ki predstavljajo **negativna cela števila**, **pa levo od 0**.



Število ***a* je nenegativno** (v znakih $a \geq 0$), če je večje ali enako 0.

Število ***a* je večje od števila *b*** (v znakih $a > b$) natanko takrat, ko je $a - b$ **pozitivno število**:

$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

Na številski premici leži točka, ki predstavlja **število *a***, ki **je večje od *b***, **desno glede** na točko, ki predstavlja **število *b***.

Prav tako je število ***a* večje ali enako** številu ***b*** (v znakih $a \geq b$) natanko takrat, ko je $a - b$ **nenegativno število**:

$a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$.

Zapisa $a > b$ in $b < a$ sta enakovredna, prav tako tudi zapisa $a \geq b$ in $b \leq a$.

1. Na številski premici predstavimo množici $A = \{n \in \mathbb{Z}; -2 \leq n < 4\}$ in $B = \{n \in \mathbb{N}; n \leq 7\}$ ter zapišimo elemente množic $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ in $B \setminus A$.

$A \cap B = \{1, 2, 3\}$
$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A \setminus B = \{-2, -1, 0\}$
$B \setminus A = \{4, 5, 6, 7\}$

2. Števila $(-1)^5, -2^4, (-2)^4, 4^2, 2^3, 3^2, (-7)^3, 6^3, 2 \cdot (-2)^3$ in $3(-5)$ uredimo po velikosti od najmanjšega do največjega.

Ko izračunamo $-1, -16, 16, 16, 8, 9, -343, 216, -16$ in -15, lahko zapišemo
$(-7)^3 < 2 \cdot (-2)^3 = -2^4 < 3(-5) < (-1)^5 < 2^3 < 3^2 < 4^2 =$
$= (-2)^4 < 6^3$.

Izrazi

Algebrski izraz (krajše **izraz**) je zapis, ki je smiselno sestavljen iz števil, spremenljivk, znakov za računske operacije in oklepajev. Z izrazi računamo tako, da najprej izvedemo operacije v oklepajih oz. postopoma odpravljamo oklepaje. Pri tem upoštevamo vrstni red operacij (najprej množimo in delimo, nato seštevamo in odštevamo) in pazimo na predznake posameznih členov, saj pri odpravljanju oklepaja minus pred oklepajem spremeni predznak členom v oklepaju.

Pri **razširjanju izrazov (odpravljanju oklepajev)** in računanju vrednosti izrazov si pomagamo s pravili za računanje s celimi števili in nekaterimi formulami.

1. Odpravimo oklepaje.
   a) $(2x + 3)(x + 1) = 2x^2 + 2x + 3x + 3 = 2x^2 + 5x + 3$
   b) $(3a - 4)(2a + 5) = 6a^2 + 15a - 8a - 20 = 6a^2 + 7a - 20$
   c) $(4y^2 - 1)(y - 4) = 4y^3 - 16y^2 - y + 4$
   č) $(2a)^3 + 4a(a^2 - 2) + a^2 \cdot a^3 + 2^4 a = 8a^3 + 4a^3 - 8a + a^5 + 16a = a^5 + 12a^3 + 8a$

2. Za $x = -3$, $y = 5$ in $z = -2$ izračunajmo vrednost izraza $(x - 2y)(y - 3z) - z^3$.

Spremenljivke nadomestimo z njihovimi danimi vrednostmi in izračunamo
$(-3 - 2 \cdot 5)(5 - 3 \cdot (-2)) - (-2)^3 =$
$= (-13) \cdot 11 + 8 = -143 + 8 = -135$.

3. Izpostavimo skupni faktor.
   a) $3x^3 + 6xy = 3x(x^2 + 2y)$
   b) $4a + 4a^2 - 8a^3 = 4a(1 + a - 2a^2)$
   c) $27a^6 b - 18a^4 b^3 - 3a^2 b = 3a^2 b(9a^4 - 6a^2 b^2 - 1)$
   č) $a(b + 1) - b(b + 1) = (b + 1)(a - b)$
   d) $x(3x - 2y) + y(2y - 3x) = x(3x - 2y) - y(3x - 2y) = (3x - 2y)(x - y)$
   e) $a^3 + 3a^2 + 4a + 12 = a^2(a + 3) + 4(a + 3) = (a + 3)(a^2 + 4)$
   f) $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$

I. **Kvadrat vsote** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ in **kvadrat razlike** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

1. Izračunajmo.

a) $(a+6)^2 = a^2 + 2 \cdot 6a + 6^2 = a^2 + 12a + 36$
b) $(x+2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$
c) $(2x-5y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$
č) $(3+ab)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot ab + (ab)^2 = 9 + 6ab + a^2b^2$
d) $(x^2-1)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 = x^4 - 2x^2 + 1$
e) $(a^2-5b)^2 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 5b + (5b)^2 = a^4 - 10a^2b + 25b^2$

2. Zapišimo kot kvadrat.

a) $a^2 + 10a + 25 = (a+5)^2$
b) $x^2 - 8xy + 16y^2 = (x-4y)^2$
c) $9x^2 + 12xy + 4y^2 = (3x+2y)^2$
č) $z^4 - 14z^2 + 49 = (z^2-7)^2$

II. **Kub vsote** $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ in **kub razlike** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Potencirajmo.

a) $(a+4)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 4 + 3 \cdot a \cdot 4^2 + 4^3 = a^3 + 12a^2 + 48a + 64$
b) $(a-1)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot 1 + 3a \cdot 1^2 - 1^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$
c) $(a+2b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 2b + 3 \cdot a \cdot (2b)^2 + (2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$
č) $(3x-y)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2y + 3 \cdot 3x \cdot y^2 - y^3 = 27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3$
d) $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = 8x^3 - 12x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
e) $(1+4n^2)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 4n^2 + 3 \cdot 1 \cdot (4n^2)^2 + (4n^2)^3 = 1 + 12n^2 + 48n^4 + 64n^6$

III. **Razstavljanje razlike kvadratov** $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

1. Zmnožimo.

a) $(x-5)(x+5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$
b) $(3a-7b)(3a+7b) = (3a)^2 - (7b)^2 = 9a^2 - 49b^2$
c) $(1-9a)(1+9a) = 1^2 - (9a)^2 = 1 - 81a^2$
č) $(4u-5v^2)(4u+5v^2) = (4u)^2 - (5v^2)^2 = 14u^2 - 25v^4$

2. Razstavimo.

a) $a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$
b) $x^2 - 25y^2 = (x-5y)(x+5y)$
c) $1 - 49a^2 = (1-7a)(1+7a)$
č) $a^4 - 81b^4 = (a^2-9b^2)(a^2+9b^2) = (a-3b)(a+3b)(a^2+9b^2)$

IV. **Razstavljanje** nekaterih **tričlenikov – Viètovo pravilo** $a^2 + (m + n)ab + mnb^2 = (a + mb)(a + nb)$.

1. Zmnožimo.

a) $(a + 3)(a + 2) = a^2 + 2a + 3a + 2 \cdot 3 = a^2 + 5a + 6$

b) $(a - 2)(a - 3) = a^2 - 3a - 2a + (-2)(-3) = a^2 - 5a + 6$

c) $(a - 3)(a + 2) = a^2 + 2a - 3a + (-3) \cdot 2 = a^2 - a - 6$

č) $(a - 1)(a - 6) = a^2 - 6a - 1a + (-1)(-6) = a^2 - 7a + 6$

2. Razstavimo po Viètovem pravilu.

a) $a^2 + 7a + 12 = a^2 + (3 + 4)a + 3 \cdot 4 = (a + 3)(a + 4)$

b) $x^2 + 10x + 9 = x^2 + (1 + 9)x + 1 \cdot 9 = (x + 1)(x + 9)$

c) $a^2 + a - 6 = a^2 + (3 - 2)a + 3 \cdot (-2) = (a + 3)(a - 2)$

č) $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$

d) $a^2 - 4ab - 12b^2 = (a + 2b)(a - 6b)$

e) $a^2 - ab - 6b^2 = (a + 2b)(a - 3b)$

f) $8a - 15 - a^2 = -(a^2 - 8a + 15) = -(a - 3)(a - 5)$

V. **Razstavljanje vsote kubov** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ in **razlike kubov** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Razstavimo.

a) $a^3 - 8 = a^3 - 2^3 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$

b) $64 + x^3 = 4^3 + x^3 = (4 + x)(16 - 4x + x^2)$

c) $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

č) $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

d) $125a^3 + 64b^3 = (5a)^3 + (4b)^3 = (5a + 4b)(25a^2 + 20ab + 16b^2)$

e) $a^3b^3 - 27 = (ab)^3 - 3^3 = (ab - 3)(a^2b^2 + 3ab + 9)$

VI. **Razstavljanje razlike *n*-tih potenc** $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$; $n \in \mathbb{N}$.

1. Razstavimo.

a) $a^4 - 1 = (a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1) = (a - 1)(a^2(a + 1) + a + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$

ali $a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$

b) $x^5 - 32 = x^5 - 2^5 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

2. Izpostavite skupni faktor in razstavite.

a) $9a^3 - 81a = 9a(a^2 - 9) = 9a(a - 3)(a + 3)$

b) $3a^4 + 30a^3 + 72a^2 = 3a^2(a^2 + 10a + 24) = 3a^2 (a + 4)(a + 6)$

c) $2x^3y + 6x^2y^2 - 36xy^3 = 2xy(x^2 + 3xy - 18y^2) = 2xy(x - 3y)(x + 6y)$

č) $4x^4 - 108x = 4x(x^3 - 27) = 4x(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

d) $270a^4b^2 + 80ab^5 = 10ab^2(27a^3 + 8b^3) = 10ab^2(3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$

e) $4x^5 + 8x^4 + 16x^3 + 32x^2 = 4x^2(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) = 4x^2(x^2(x + 2) + 4(x + 2)) = 4x^2(x + 2)(x^2 + 4)$

3. Zapišimo vse delitelje izraza $n^3 - 5n^2 + 4n$.

Izraz razstavimo $n^3 - 5n^2 + 4n = n(n^2 - 5n + 4) = n(n - 1)(n - 4)$ in zapišemo njegove delitelje: $1, n, n - 1, n - 4, n(n - 1), n(n - 4), (n - 1)(n - 4), n(n - 1)(n - 4)$.

4. Pokažimo, da za $a \neq 3$ velja $(a - 3) \mid (a^4 + 2a^3 - 15a^2)$.

Ker je $a^4 + 2a^3 - 15a^2 = a^2(a^2 + 2a - 15) = a^2(a - 3)(a + 5)$, $a - 3$ deli dani izraz.

5. Poiščimo največji skupni delitelj D in najmanjši skupni večkratnik v izrazov $a^2 - 9$ in $a^2 - 6a + 9$.

Izraza razstavimo $a^2 - 9 = (a - 3)(a + 3)$ in $a^2 - 6a + 9 = (a + 3)(a + 3) = (a + 3)^2$ in zapišemo $D = a - 3$ ter $v = (a - 3)(a + 3)^2$.

6. Odpravimo oklepaje in razstavimo.

a) $(x - 2)^2 + (x - 3)(x + 3) - (-x)^2 = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 9 - x^2 = x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$

b) $(x - 5)^3 - 5(x - 4)(x - 1) + 145 = x^3 - 15x^2 + 75x - 125 - 5(x^2 - 5x + 4) + 145 =$
$= x^3 - 15x^2 + 75x - 125 - 5x^2 + 25x - 20 + 145 = x^3 - 20x^2 + 100x = x(x^2 - 20x + 100) = x(x - 10)^2$

7. Dan je izraz $1 + (n - 3)(n + 4) - (n - 4)^2$.

a) Poenostavimo dani izraz.
$1 + (n - 3)(n + 4) - (n - 4)^2 = 1 + n^2 + 4n - 3n - 12 - (n^2 - 8n + 16) = 1 + n^2 + n - 12 - n^2 + 8n - 16 =$
$= 9n - 27 = 9(n - 3)$

b) Pokažimo, da je za poljubno liho celo število vrednost izraza deljiva z 18.
Zapišimo $n = 2k - 1$; $k \in \mathbb{Z}$ in vstavimo v dani izraz $9(n - 3) = 9(2k - 1 - 3) = 9(2k - 4) = 18(k - 2)$.

1. Izračunajte.

a) $2 \cdot (-3 - 7 \cdot (-4)) - (-2 - (-3) \cdot (-2)) - 42$

b) $(-3)(-6) + (-2) \cdot (3 \cdot 5 - 5 \cdot (-2) \cdot$
$\cdot (4 - 7 \cdot (-3))) - (-19)$

c) $3 \cdot (-2 - (-5 + 2 \cdot 3)) - (-2)^4 - 11 \cdot 2 +$
$+ (-3) \cdot (-1)^5$

č) $11 - (5 - (-2)^2 \cdot 2 - (-3^2 + 2 \cdot 5) -$
$- (-1)^4 \cdot (-3)) \cdot 4$

2. Katero število dobimo, če od trikratnika števila 81 odštejemo petkratnik števila 17, dobljeno razliko množimo s 6 in produktu prištejemo 113?

3. K produktu števila 7 in razlike števil 237 in 323 prištejemo dvakratnik števila –97 in od vsote odštejemo nasprotno število števila 256. Katero število dobimo?

4. Sedemkratniku števila 19 prištejemo dvakratnik števila 73, vsoto množimo s 5 in od produkta odštejemo desetkratnik števila 139. Dobljeno število je osnova potence z eksponentom 4. Kolikšna je vrednost potence?

5. Koliko dobimo, če produktu števil 13 in 31 prištejemo trikratnik števila 85 in od vsote odštejemo 666, dobljena razlika pa je osnova potence z eksponentom 3?

6. Številski izraz $6 \cdot 16^2 + 5 \cdot (-8)^3 + 3 \cdot (-4)^5$ zapišite v obliki potence z osnovo 2.

7. Izraz $3^9 \cdot 2^{11} - 3^{11} \cdot 2^9 - 6^9$ zapišite v obliki $k \cdot 6^n$, pri čemer je k celo število in n naravno število.

8. Brez uporabe kalkulatorja ugotovite, ali $7 \mid (3 \cdot (-9)^6 + 5 \cdot (-27)^4 + (-81)^3)$.

9. Poenostavite izraz $((-x)^2)^3 \cdot (-x)^4 \cdot (-x)$ in izračunajte njegovo vrednost za $x = 2$.

10. Izračunajte.
a) $a^4(-a)^2 + (-a^2)^3 + (-(-a)^2)^3$
b) $(-a^4b)^2 \cdot (-2a^3b^2)^3$
c) $(3xy^2)^2 \cdot (-2x^2y)^3$
č) $(-2)^2 \cdot (a^2b)^3 \cdot (-3ab^3)^4$

11. Izraz $(2xy^2)^3 \cdot (x^2y^3) \cdot (-3x^3y)^2$ zapišite v obliki $2^k \cdot 3^m \cdot x^n \cdot y^t$, pri čemer so k, m, n in t naravna števila.

12. Ali je zapisani račun
$(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^n \cdot (-2)^{n+1} =$
$= 2^2 \cdot (-2^3) \cdot 2^n \cdot (-2^{n+1}) = 2^{2+3+n+n+1} = 2^{6+2n}$
pravilen? Če ni, odpravite napake.

13. Izpostavite skupni faktor.
a) $3^{n+2} + 5 \cdot 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n$; $n \in \mathbb{N}$
b) $5^n - 4 \cdot 5^{n+1} - 5^{n+2}$; $n \in \mathbb{N}$

14. Ugotovite, ali za vsako naravno število $n > 2$ velja:
a) $6 \mid (7^n + 4 \cdot 7^{n-1} + 7^{n+2})$,
b) $5 \mid (6^{n+2} + 6^{n-1} + 3 \cdot 6^n)$.

15. Na številski premici predstavite množici $\mathcal{A} = \{m \in \mathbb{Z}; -4 < m \leq 6\}$ in $\mathcal{B} = \{m \in \mathbb{Z}^-; m > -5\}$ ter zapišite elemente množic $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$.

16. Dana so števila 3^1, -2, 33, 0, -1, -99, -10^2, $(-9)^2$, $(-4)(-2)^3$. Izračunajte vrednosti potenc, k vsem številom zapišite nasprotna števila in dobljena števila uredite od večjega k manjšemu.

17. Števila $(-3)^2$, $(-1)^6$, $(-2)^3$, -2^4, -3^2, $(-6)^3$, $(-10)^3$ in $(-3)^3$ uredite po velikosti od najmanjšega do največjega.

18. Odpravite oklepaje.
a) $(x + 3)(3x + 2)$
b) $(2a - 4)(3a - 5)$
c) $(u^2 - 4)(u - 9)$
č) $x(-x)^2(-x)^3 + (-2x)^3 - 3x(x^2 - 1) - (-x^2)^3$

19. Izpostavite skupni faktor.
a) $4x^3 - xy^2$
b) $6a^3 + a^2 - 6a$
c) $2a^4b + 6a^3b^2 - 4a^2b^3$
č) $x(x - 2) + 3(x - 2)$
d) $a(a - b) + 2b(b - a)$
e) $x^3 + x^2 + x + 1$
f) $a^3 - 4a^2 + 4a - 16$

20. Potencirajte.
a) $(x + 1)^2$
b) $(a - 3)^2$
c) $(2 - b)^2$
č) $(3x + y)^2$
d) $(x - 2y)^2$
e) $(2x + 5y)^2$
f) $(1 - 2ab)^2$
g) $(a^2 - 4b)^2$
h) $(a + 3b^2c)^2$

21. Zapišite kot kvadrat dvočlenika.
a) $a^2 + 8a + 16$
b) $x^2 - 2x + 1$
c) $z^2 - 10z + 25$
č) $1 + 6xy + 9x^2y^2$

22. Potencirajte.
a) $(x + 1)^3$
b) $(x + 3y)^3$
c) $(u - 2v)^3$
č) $(1 + 4a)^3$
d) $(5a + 2b)^3$
e) $(4x - y)^3$
f) $(2x - 3y)^3$
g) $(5x + yz^2)^3$
h) $(3a - 2b^2)^3$

23. Dan je izraz $(5x - y)^3$.
a) V izrazu odpravite oklepaje.
b) Za $x = -2$ in $y = -3$ izračunajte vrednost izraza.

24. Razstavite.
a) $x^2 - 4$
b) $a^2 - 1$
c) $b^2 - 36c^2$
č) $4x^2 - 49y^2$
d) $(a + b)^2 - 9$
e) $25 - (x - y)^2$

25. Razstavite.
a) $x^2 + 3x + 2$
b) $a^2 - 10a + 24$
c) $x^2 - x - 2$
č) $a^2 - 2a - 24$
d) $1 - 12b + 20b^2$
e) $20 - a - a^2$
f) $16 - 15x - x^2$
g) $x^2 - 4xy - 21y^2$
h) $x^2 - 16xy + 15y^2$
i) $x^4 + 3x^2 - 4$

26. Dan je izraz $a^2 - ab - 12b^2$.
a) Razstavite izraz.
b) Za $a = -5$ in $b = 3$ izračunajte vrednost izraza.

27. Razstavite.
a) $a^3 - 27$
b) $x^3 + 1$
c) $a^3 + 8b^3$
č) $27x^3 - 64y^3$
d) $1 - a^3b^3$
e) $125x^3 + y^3$
f) $a^5 - 1$
g) $128 - x^7$

28. Izpostavite skupni faktor in razstavite.

a) $4x^4 - 64x^2$
b) $5a - 125a^3$
c) $a^4 + 12a^3 + 32a^2$
č) $b^3 - 13b^2 + 30b$

29. Razstavite.

a) $x^4y + 5x^3y^2 - 6x^2y^3$
b) $2x^3y^2 - 10x^2y^3 + 12xy^4$
c) $12x^3y^3 + 11x^4y^2 - x^5y$
č) $3x^4y - 21x^3y^2 + 36x^2y^3$
d) $x^4 - 13x^2 + 36$
e) $x^4 + 5x^2 - 36$
f) $a^4b - 27ab^4$
g) $16a^4 + 128ab^3$
h) $4a^6b - 256a^3b^4$
i) $125ab^5 + 27a^4b^2$
j) $a^4 + a^3 - 9a^2 - 9a$
k) $4x^4 - 4x^2y^2 + x^2 - y^2$
l) $64y^5 - 2x^5$

30. Pokažite, ali velja.

a) $(a - 7) \mid (a^4 - 2a^3 - 35a^2)$; $a \neq 7$
b) $(n - 6) \mid (n^3 - 19n^2 - 42n)$; $n \neq 6$
c) $(5x + 1) \mid (25x^4 - 25x^2y^2 - x^2 + y^2)$

31. Poiščite največji skupni delitelj D in najmanjši skupni večkratnik v danih izrazov:

a) $a^2 - 16$ in $a^2 + 3a - 28$
b) $a^2 + 8a + 16$ in $a^3 + 64$
c) $4a^3 - 4a$ in $8a^5 - 8a^2$
č) $16x^4 - 16x^2$ in $4x^4 + 4x$

32. Dana sta izraza $A = 3x^2 + 12x - 96$ in $B = 1000 - x^3$. Izraza razstavite v množici celih števil in za $x = 10$ izračunajte njuno vrednost.

33. Izraz $16n^2 + 8n + 25$; $n \in \mathbb{Z}$ zapišite v obliki $(an + b)^2 + c$, pri čemer so a, b in c pozitivna cela števila. Kolikšna je lahko najmanjša vrednost danega izraza?

34. Poenostavite izraze in rezultate razstavite.

a) $(2x - 1)^2 + (1 - x)(1 + x) - x(2x - 1)$
b) $2x - 1 + (2 - x)^3 - (x + 1)^2 + x(x - 3)(x - 5)$
c) $(x + 3)^3 - (x - 1)^3 + x(x + 1)(x - 2) - 4(3x + 7)$

35. Dan je izraz
$(n + 3)(n - 4) - (n - 4)^2 - (1 - n)(1 + n) + 11$.

a) Poenostavite izraz in rezultat razstavite.
b) Izračunajte vrednost izraza za $n = 5$.
c) Za katera cela števila bo vrednost izraza 0?

36. Pokažite, da se da izraz $(x + 5)^3 - 10^2 - x(x - 5)^2$ zapisati kot kvadrat.

37. a) Dani izraz $(-2a)^3 + (2a - 3b)^3 - (-3b)^3$ poenostavite.
b) Za $a = 3$ in $b = -4$ izračunajte vrednost zgornjega izraza.

38. Pokažite, da je za poljubni celi števili a in b vrednost izraza $(4a + b)^2 + (b - 3a)^2 + b(8a - b)$ nenegativno celo število.

39. Dan je izraz $(n + 4)^3 - n^2(n - 4) + (-4)^3$, pri čemer je n poljubno naravno število.

a) Skrčite izraz in razstavite.
b) Ali je za poljubno naravno število n vrednost izraza sestavljeno število ali praštevilo?
c) Kolikšen je ostanek pri deljenju vrednosti izraza pri poljubnem n s številom 16?

40. Dan je izraz $(4n + 3)(n - 2) - (n - 3)^2 - 13n$.

a) Skrčite izraz in razstavite.
b) Pokažite, da je za poljubno liho število n vrednost danega izraza večkratnik števila 12.

4. RACIONALNA ŠTEVILA

Ulomek je izraz oblike $\frac{m}{n}$ (je **rezultat deljenja** $m : n$), pri čemer sta $\boldsymbol{m}$ **(števec ulomka) in** $\boldsymbol{n}$ **(imenovalec ulomka) celi števili** in je **imenovalec različen od 0** ($n \neq 0$).

Ulomka $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$ **in** $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$ **sta enaka natanko takrat, ko je** $\boldsymbol{m \cdot q = n \cdot p}$**.**

1. Ali veljata naslednji enakosti $\frac{3}{5} = \frac{4}{6}$ in $\frac{15}{18} = \frac{20}{24}$?

Ker je $3 \cdot 6 = 18$ in $4 \cdot 5 = 20$, prva enakost ne velja.
Ker je $15 \cdot 24 = 360$ in $18 \cdot 20 = 360$, druga enakost velja.

2. Za kateri x bosta ulomka $\frac{x}{56}$ in $\frac{28}{32}$ enaka?

Iz $x \cdot 32 = 36 \cdot 28$ zapišemo $x = (36 \cdot 28) : 32 = 49$.

Števec in imenovalec ulomka smemo **pomnožiti** z istim od **nič različnim številom (rečemo, da smo ulomek razširili)**; dobimo ulomek, ki je enak prvotnemu ulomku: $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$; $k \neq 0$.

Števec in imenovalec ulomka smemo **deliti** z istim od **nič različnim številom (rečemo, da smo ulomek krajšali);** dobimo ulomek, ki je enak prvotnemu ulomku: $\frac{km}{kn} = \frac{m}{n}$; $k \neq 0$.

Ulomek $\frac{m}{n}$ je **okrajšan**, če sta **števec in imenovalec tuji števili**: $D(m, n) = 1$.

Vsak ulomek zapišemo tako, da je imenovalec naravno število.

Z ulomkom lahko zapišemo poljubno celo število: $m = \frac{m}{1}$; $m \in \mathbb{Z}$.

Nasprotni ulomek k ulomku $\frac{m}{n}$ je $-\frac{m}{n}$. To zapišemo: $\frac{-m}{n} = -\frac{m}{n}$.

1. Ulomke $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, 2, $-\frac{3}{10}$ razširimo na ulomke z imenovalcem 100.

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100}$

$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{20}{100}$

$2 = \frac{2 \cdot 100}{100} = \frac{200}{100}$

$-\frac{3}{10} = -\frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 10} = -\frac{30}{100}$

2. Ulomke $\frac{x}{x-2}$, $\frac{x+1}{x+2}$, 3, $\frac{2}{2-x}$ razširimo na ulomke z imenovalcem $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$.

$\frac{x}{x-2} = \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x+2)}{x^2-4}$

$\frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2-4}$

$3 = \frac{3(x^2-4)}{x^2-4}$

$\frac{2}{2-x} = \frac{2}{-(x-2)} = \frac{-2(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2(x+2)}{x^2-4}$

3. Okrajšajmo ulomke $\frac{48}{64}$, $\frac{72}{90}$, $\frac{216}{108}$ in $\frac{44}{39}$.

$\frac{48}{64} = \frac{16 \cdot 3}{16 \cdot 4} = \frac{3}{4}$

$\frac{72}{90} = \frac{18 \cdot 4}{18 \cdot 5} = \frac{4}{5}$

$\frac{216}{108} = \frac{2 \cdot 108}{108} = \frac{2}{1} = 2$

Ulomek $\frac{44}{39} = \frac{4 \cdot 11}{3 \cdot 13}$ je že okrajšan.

4. Okrajšajmo ulomke $\frac{4a^3b^4}{8a^5b^3}$, $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$, $\frac{x+2}{x^3+8}$, $\frac{2x^2+6x}{2x^2+4x-6}$, $\frac{x+4}{x+8}$.

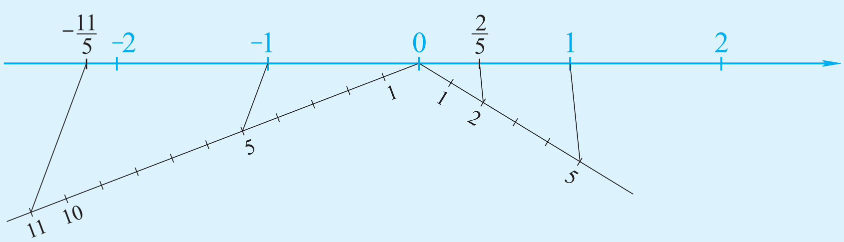
$$\frac{4a^3b^4}{8a^5b^3} = \frac{b}{2a^2} \qquad \frac{x+2}{x^3+8} = \frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{1}{x^2-2x+4}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1} \qquad \frac{2x^2+6x}{2x^2+4x-6} = \frac{2x(x+3)}{2(x+3)(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

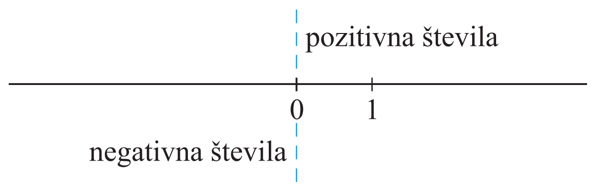
Ulomek $\frac{x+4}{x+8}$ je že okrajšan.

Na številski premici dobimo točko, ki predstavlja ulomek $\frac{m}{n}$ tako, da enoto razdelimo na n enakih delov in potem m takih delov nanesemo desno od 0, če je $m > 0$, oz. levo od 0, če je $m < 0$.

Na številski premici poiščite točki, ki predstavljata števili $\frac{2}{5}$ in $-\frac{11}{5}$.



Ulomek $\frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ je **pozitiven** ($\frac{m}{n} > 0$), če je $m > 0$, in **negativen** ($\frac{m}{n} < 0$), če je $m < 0$. Vsak od 0 različen ulomek je bodisi pozitiven bodisi negativen. Točke, ki predstavljajo pozitivne ulomke, ležijo na številski premici desno od 0, točke, ki predstavljajo negativne ulomke, pa ležijo na številski premici levo od 0.



Vsota in **produkt pozitivnih** ulomkov **sta pozitivna ulomka**.

Ulomek $\frac{m}{n}$ **je nenegativen** (v znakih $\frac{m}{n} \geq 0$), če je število m večje ali enako 0.

Ulomek $\frac{m}{n}$ **je večji od ulomka** $\frac{p}{q}$ (v znakih $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$) natanko takrat, ko je $\frac{m}{n} - \frac{p}{q}$ **pozitiven ulomek**:

$\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{m}{n} - \frac{p}{q} > 0$.

Na številski premici leži točka, ki predstavlja **ulomek** $\frac{m}{n}$, ki je večji od ulomka $\frac{p}{q}$, **desno glede** na točko, ki predstavlja **ulomek** $\frac{p}{q}$.

Prav tako je ulomek $\frac{m}{n}$ **večji ali enak ulomku** $\frac{p}{q}$ (v znakih $\frac{m}{n} \geq \frac{p}{q}$) natanko takrat, ko je $\frac{m}{n} - \frac{p}{q}$ **nenegativen ulomek**: $\frac{m}{n} \geq \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{m}{n} - \frac{p}{q} \geq 0$.

Zapisa $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ in $\frac{p}{q} < \frac{s}{t}$ lahko združimo v zapis $\frac{m}{n} < \frac{p}{q} < \frac{s}{t}$ oz. iz zapisov $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ in $\frac{p}{q} \leq \frac{s}{t}$ zapišemo $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \leq \frac{s}{t}$.

1. Primerjajmo ulomka $\frac{5}{8}$ in $\frac{7}{5}$ ter njuna nasprotna ulomka.

Ker je $\frac{7}{5} - \frac{5}{8} = \frac{56 - 25}{40} = \frac{21}{40} > 0$, je $\frac{7}{5} > \frac{5}{8}$.

Zapišimo nasprotna ulomka $-(\frac{7}{5}) = -\frac{7}{5}$ in $-(\frac{5}{8}) = -\frac{5}{8}$.

Iz $-\frac{7}{5} - (-\frac{5}{8}) = -\frac{7}{5} + \frac{5}{8} = \frac{-56 + 25}{40} = -\frac{21}{40} < 0$ dobimo $-\frac{7}{5} < -\frac{5}{8}$.

2. Ulomke $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, -\frac{3}{8}$ uredimo po velikosti od najmanjšega do največjega.

Najprej ulomke po vrsti zapišimo kot ulomke z imenovalci 24: $\frac{6}{24}, \frac{8}{24}, -\frac{12}{24}, -\frac{8}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}, -\frac{9}{24}$,

nato lahko zapišemo $-\frac{1}{2} < -\frac{3}{8} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{5}{6} < \frac{7}{8}$.

Računanje z ulomki

Z ulomki lahko računamo.

I. **Seštevamo in odštevamo** tako, da ulomke **razširimo na skupni imenovalec** in potem števca seštejemo oz. odštejemo: $\frac{m}{n} \pm \frac{p}{q} = \frac{mq \pm np}{nq}$.

1. Izračunajmo.

a) $3\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - 4\frac{1}{6} = \frac{15}{4} + \frac{2}{3} - \frac{25}{6} = \frac{45 + 8 - 50}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

b) $5\frac{2}{3} - 2 - 2\frac{1}{3} - (2\frac{2}{5} - (1 - 1\frac{2}{5})) = \frac{17}{3} - \frac{6}{3} - \frac{7}{3} - (\frac{12}{5} - (\frac{5}{5} - \frac{7}{5})) = \frac{4}{3} - (\frac{12}{5} - (-\frac{2}{5})) = \frac{4}{3} - \frac{14}{5} =$

$= \frac{20 - 42}{15} = \frac{-22}{15} = -1\frac{7}{15}$

2. Poenostavimo.

a) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-3} + \frac{9}{x^2 - 3x} = \frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-3} + \frac{9}{x(x-3)} = \frac{(x+3)(x-3) - x^2 + 9}{x(x-3)} = \frac{x^2 - 9 - x^2 + 9}{x(x-3)} = \frac{0}{x(x-3)} = 0$

b) $\frac{x-1}{x^2 - 2x} - \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x-1}{x(x-2)} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x-1)(x+2) - x^2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 + 2x - x - 2 - x^2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x(x+2)}$

c) $\frac{x}{x^2 - 2x} + \frac{x+1}{2-x} = \frac{x}{x(x-2)} + \frac{x+1}{-(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{1-(x+1)}{x-2} = -\frac{x}{x-2}$

č) $\frac{1}{a - 5a^2} + \frac{25a - 15}{1 - 25a^2} = \frac{1}{a(1-5a)} + \frac{25a - 15}{(1-5a)(1+5a)} = \frac{1 + 5a + a(25a - 15)}{a(1-5a)(1+5a)} = \frac{1 + 5a + 25a^2 - 15a}{a(1-5a)(1+5a)} =$

$= \frac{1 - 10a + 25a^2}{a(1-5a)(1+5a)} = \frac{(1-5a)^2}{a(1-5a)(1+5a)} = \frac{1-5a}{a(1+5a)}$

II. **Množimo** tako, da zmnožimo imenovalca in števca med seboj: $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$.

1. Izračunajmo.

a) $1\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - 1\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} - \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{24 - 25 + 8}{20} = \frac{7}{20}$

b) $(1\frac{3}{5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}) \cdot (-2\frac{1}{4}) - \frac{1}{5} \cdot (-\frac{5}{4}) = (\frac{8}{5} - \frac{3}{5}) \cdot (-\frac{9}{4}) + \frac{1}{4} = 1 \cdot (-\frac{9}{4}) + \frac{1}{4} = -\frac{9}{4} + \frac{1}{4} = -2$

c) $(\frac{3}{2} - 1\frac{1}{5} \cdot (1 + 1\frac{1}{2})) \cdot (\frac{3}{4} - \frac{2}{3}) \cdot \frac{4}{5} = (\frac{3}{2} - \frac{6}{5} \cdot (\frac{2}{2} + \frac{3}{2})) \cdot (\frac{9-8}{12}) \cdot \frac{4}{5} = (\frac{3}{2} - \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2}) \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{5} =$

$= (\frac{3}{2} - \frac{6}{2}) \cdot \frac{1}{15} = (-\frac{3}{2}) \cdot (\frac{1}{15}) = -\frac{1}{10}$

2. Poenostavimo.

a) $\frac{x^2-1}{x^2-x-2}\cdot(x-2)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}\cdot\frac{x-2}{1}=x-1$

b) $\frac{x}{3}\cdot\frac{15}{x+4}-(2x-2)\cdot\frac{2}{x+4}=\frac{5x}{x+4}-\frac{2(2x-2)}{x+4}=\frac{5x-2(2x-2)}{x+4}=\frac{5x-4x+4}{x+4}=\frac{x+4}{x+4}=1$

c) $(\frac{a+4}{a-2}-\frac{2}{a})\cdot\frac{a^2}{a^3-8}=(\frac{a(a+4)-2(a-2)}{a(a-2)})\cdot\frac{a^2}{(a-2)(a^2+2a+4)}=\frac{a^2+4a-2a+4}{a(a-2)}\cdot\frac{a^2}{(a-2)(a^2-2a+4)}=$

$=\frac{a^2+2a+4}{a-2}\cdot\frac{a}{(a-2)(a^2+2a+4)}=\frac{a}{(a-2)^2}$

III. Za vsak **od nič različni ulomek** $\frac{m}{n}$ $(m\neq 0)$ je $\frac{n}{m}$ tudi ulomek in je $\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=1$. Ulomek $\frac{n}{m}$ **imenujemo obratni (inverzni) ulomek** ulomka $\frac{m}{n}$ in zapišemo $\frac{n}{m}=(\frac{m}{n})^{-1}$.

Ulomek $\frac{m}{n}$ **delimo** z ulomkom $\frac{p}{q}$ $(p\neq 0)$ tako, da ulomek $\frac{m}{n}$ **pomnožimo z obratno vrednostjo ulomka** $\frac{p}{q}$:
$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot(\frac{p}{q})^{-1}=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$.

1. K ulomkom $\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{2}$ in 3 zapišimo obratne ulomke.

Zapišemo $(\frac{2}{3})^{-1}=\frac{3}{2}$, $(-\frac{5}{4})^{-1}=-\frac{4}{5}$, $(\frac{1}{2})^{-1}=2$ in $3^{-1}=\frac{1}{3}$.

2. Izračunajmo.

a) $4\frac{2}{3}:2\frac{2}{9}-2:1\frac{1}{4}=\frac{14}{3}:\frac{20}{9}-\frac{2}{1}:\frac{5}{4}=\frac{14}{3}\cdot\frac{9}{20}-\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{5}=\frac{21}{10}-\frac{8}{5}=\frac{21-16}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

b) $(\frac{4}{5}-1\frac{1}{5}:\frac{2}{3}):(-1\frac{4}{5})=(\frac{4}{5}-\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{2}):(-\frac{9}{5})=(\frac{4}{5}-\frac{9}{5})(-\frac{5}{9})=-1\cdot(-\frac{5}{9})=\frac{5}{9}$

c) $((\frac{24}{7})^{-1}:\frac{1}{8}+3\frac{1}{2}):(\frac{2}{3}-4^{-1})=(\frac{7}{24}\cdot\frac{8}{1}+\frac{7}{2}):(\frac{2}{3}-\frac{1}{4})=(\frac{7}{3}+\frac{7}{2}):(\frac{8-3}{12})=(\frac{14+21}{6}):(\frac{5}{12})=$

$=\frac{35}{6}\cdot\frac{12}{5}=14$

3. Poenostavimo.

a) $\frac{x^2+4x}{x^2-16}:\frac{x}{x^2-x-12}=\frac{x(x+4)}{(x-4)(x+4)}:\frac{x}{(x-4)(x+3)}=\frac{x(x+4)}{(x-4)(x+4)}\cdot\frac{(x-4)(x+3)}{x}=x+3$

b) $(2^{-1}-a^{-1}):(\frac{a^2+4}{2a}-2)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{a}):(\frac{a^2+4-4a}{2a})=\frac{a-2}{2a}:\frac{a^2-4a+4}{2a}=\frac{a-2}{2a}\cdot\frac{2a}{a^2-4a+a}=$

$=\frac{a-2}{2a}\cdot\frac{2a}{(a-2)^2}=\frac{1}{a-2}$

c) $(\frac{a}{a^2-9}-\frac{a-3}{a^2+3a}):\frac{2a-3}{a^2-3a}=(\frac{a}{(a-3)(a+3)}-\frac{a-3}{a(a+3)})\cdot\frac{a^2-3a}{2a-3}=\frac{a^2-(a-3)^2}{a(a-3)(a+3)}\cdot\frac{a(a-3)}{2a-3}=$

$=\frac{a^2-a^2+6a-9}{(a+3)}\cdot\frac{1}{2a-3}=\frac{3(2a-3)}{a+3}\cdot\frac{1}{2a-3}=\frac{3}{a+3}$

Enaki ulomki so različni zapisi za isto **racionalno število**. **Množica racionalnih števil** je množica **vseh okrajšanih ulomkov**: $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n};\, m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}, D(m,n)=1\}$.

Zveze **med številskimi množicami**: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

Med poljubnima racionalnima številoma obstaja vsaj še eno racionalno število. Zato rečemo, da je **množica racionalnih števil gosta** na številski premici.

Racionalna števila lahko **seštevamo**, **odštevamo**, **množimo in delimo** (z od 0 različnim racionalnim številom), rezultat je vedno racionalno število. Za **računanje z racionalnimi števili** veljajo **enake lastnosti računskih operacij** kot za računanje s celimi števili. Poleg tega za poljubna racionalna števila velja še:

1. K vsakemu od 0 različnemu racionalnemu številu a obstaja **obratno število** $a^{-1} \in \mathbb{Q}$, tako da je $a \cdot a^{-1} = 1$.
2. Racionalno število ***a*** **delimo z od 0 različnim** racionalnim številom ***b*** tako, da število ***a*** **pomnožimo z obratnim številom** $\boldsymbol{b^{-1}}$: $a : b = \frac{a}{b} = ab^{-1}$; $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$. Torej je $\frac{a}{b} = a : b = c \Leftrightarrow a = bc$.
3. V sorazmerju racionalnih števil je produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov.
   $a : b = c : d \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc;\ b, d \neq 0$

1. Primerjajmo ulomka $\frac{5}{8}$ in $\frac{7}{5}$ ter njuna inverzna ulomka.

Ker je $\frac{7}{5} - \frac{5}{8} = \frac{56-25}{40} = \frac{21}{40} > 0$, je $\frac{7}{5} > \frac{5}{8}$.

Zapišimo obratna ulomka $(\frac{7}{5})^{-1} = \frac{5}{7}$ in $(\frac{5}{8})^{-1} = \frac{8}{5}$. Iz $\frac{5}{7} - \frac{8}{5} = \frac{25-56}{36} = -\frac{21}{35} < 0$ dobimo $\frac{5}{7} < \frac{8}{5}$.

2. Iz sorazmerja $3 : 28 = x : 7$ poiščimo racionalno število x.

Zapišimo $21 = 28x$ in od tod izračunajmo $x = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$.

Potence s celimi eksponenti

Naj bo a **neničelno racionalno število**, n pa poljubno **naravno število**. **Definicijo potence s celimi eksponenti dobimo tako**, da:

definicijo potence z naravnim eksponentom $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$

razširimo še za eksponent 0: $a^0 = 1$

in negativne cele eksponente: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

1. Izračunajmo.

a) $2^{-3} \cdot (\frac{1}{4})^{-2} = \frac{1}{2^3} \cdot 4^2 = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$

b) $(\frac{4}{3})^0 + (2 \cdot 9^{-1} - 3^{-2})^{-2} = 1 + (\frac{2}{9} - \frac{1}{9})^{-2} = 1 + (\frac{1}{9})^{-2} = 1 + 81 = 82$

2. V vsakdanjem življenju velikokrat uporabljamo potence števila 10.

Potenca št. 10	**Ime**	**Oznaka**	**Potenca št. 10**	**Ime**	**Oznaka**
10^{12}	tera	T	10^{-1}	deci	d
10^{9}	giga	G	10^{-2}	centi	c
10^{6}	mega	M	10^{-3}	mili	m
10^{3}	kilo	k	10^{-6}	mikro	m
10^{2}	hekto	h	10^{-9}	nano	n
10	deka	da	10^{-12}	piko	p

Če sta a in b poljubni neničelni racionalni števili, m in n pa celi števili, **za računanje** s potencami s celimi eksponenti **veljajo pravila**:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
5. $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

1. Številski izraz $(\frac{1}{2})^{-6} \cdot 4^{-1} \cdot (\frac{3}{4})^3$ zapišimo kot produkt potenc z osnovama 2 in 3.

$(\frac{1}{2})^{-6} \cdot 4^{-1} \cdot (\frac{3}{4})^3 = (2^{-1})^{-6} \cdot (2^2)^{-1} \cdot (3 \cdot 2^{-2})^3 = 2^6 \cdot 2^{-2} \cdot 3^3 \cdot 2^{-6} = 2^{-2} \cdot 3^3$

2. Izračunajmo.

a) $(3^{-2} - (\frac{3}{4})^{-2}) : (2 - (\frac{1}{5})^{-1}) = (\frac{1}{3^2} - \frac{4^2}{3^2}) : (2 - 5) = (\frac{1}{9} - \frac{16}{9}) : (-3) = -\frac{15}{9} \cdot (-\frac{1}{3}) = \frac{5}{9}$

b) $\dfrac{2^{-2} + 5 \cdot (\frac{1}{2})^0}{3 - (\frac{2}{3})^{-2}} = (\frac{1}{4} + 5) : (3 - \frac{9}{4}) = \frac{21}{4} : (\frac{12-9}{4}) = \frac{21}{4} : \frac{3}{4} = \frac{21}{4} \cdot \frac{4}{3} = 7$

3. Poenostavimo.

a) $(8x^4y^3) : (2x^3y^5) = 4x^{4-3}y^{3-5} = 4xy^{-2}$

b) $2^{-4}x^{-2}y^{-3} \cdot 2^5x^{-2}y^4 = 2^{-4+5}x^{-2-2}y^{-3+4} = 2x^{-4}y$

c) $(3^{-3}ab^{-3}) : (3^2a^{-2}b) = 3^{-3-2}a^{1-(-2)}b^{-3-1} = 3^{-5}a^3b^{-4}$

č) $(x^{-1}y)^{-3} \cdot (x^2y^{-3})^4 = x^3y^{-3}x^8y^{-12} = x^{3+8}y^{-3+(-12)} = x^{11}y^{-15}$

d) $(x^{-1}y)^2 \cdot (x^2y^{-2})^{-2} : (x^{-1}y)^{-3} = x^{-2}y^2 \cdot x^{-4}y^4 : x^3y^{-3} = x^{-2+(-4)-3}y^{2+4-(-3)} = x^{-9}y^9$

e) $(\frac{1}{4}x^{-4}y^{-3})^2 \cdot (\frac{x^{-3}}{4y^2})^{-3} = (4^{-1}x^{-4}y^{-3})^2 \cdot (x^{-3} \cdot 4^{-1}y^{-2})^{-3} = 4^{-2}x^{-8}y^{-6} \cdot x^9 \cdot 4^3y^6 = 4x$

4. Izraz $(3^{-2}a^3b^{-3}) : (9^2a^{-3}b^{-4})$ zapišimo v obliki $3^k \cdot a^mb^n$, pri čemer so k, n in m cela števila.

Zapišemo $(3^{-2}a^3b^{-3}) : (9^2a^{-3}b^{-4}) = (3^{-2}a^3b^{-3}) : ((3^2)^2a^{-3}b^{-4}) = (3^{-2}a^3b^{-3}) : (3^4a^{-3}b^{-4}) =$
$= 3^{-2-4}a^{3-(-3)}b^{-3-(-4)} = 3^{-6}a^6b$

Decimalna števila

Decimalno število $a_na_{n-1} \ldots a_1a_0, c_1c_2 \ldots c_m$, pri čemer so a_i, c_j števke izmed 0, 1, 2 ... 9, je okrajšava za zapis $a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_110 + a_0 + c_110^{-1} + c_210^{-2} + \ldots + c_m10^{-m}$. Števke, ki so za **decimalno vejico**, so **decimalke**.

Vsako **racionalno število** (ulomek) lahko zapišemo bodisi kot **končno decimalno število** bodisi kot **neskončno** (za decimalni zapis potrebujemo neskončno mest) **periodično decimalno število**.

Ulomke, ki jih lahko zapišemo z ulomki, katerih **imenovalec je potenca števila 10**, imenujemo **desetiški ulomki**. Decimalni zapis **desetiškega ulomka** je **končno decimalno število**, decimalni zapis **nedesetiškega ulomka** pa je **periodično decimalno število**.

1. S kalkulatorjem poiščimo decimalni zapis ulomkov $\frac{13}{20}$ in $\frac{1}{12}$.

Izračunamo $\frac{13}{20} = 0{\cdot}65$ in $\frac{1}{12} = 0{\cdot}8333333\ ... = 0{\cdot}8\overline{3}$.

2. Decimalna števila $0{\cdot}2$, $-0{\cdot}25$, $3{\cdot}125$ in $0{\cdot}\overline{3}$ zapišimo z ulomkom.

Prva tri decimalna števila zapišemo z desetiškimi ulomki:

$0{\cdot}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $-0{\cdot}25 = -\frac{25}{100} = -\frac{1}{4}$, $3{\cdot}125 = 3\,\frac{125}{1000} = 3\,\frac{1}{8}$.

Pri zapisu periodičnega decimalnega števila $0{\cdot}\overline{3}$ uporabimo naslednji postopek:

zapišimo $x = 0{\cdot}\overline{3}$ in nato enakost na obeh straneh množimo z 10,

$10x = 3{\cdot}\overline{3}$, od zgornje enakosti odštejemo spodnjo,

$9x = 3$, delimo z 9 obe strani enakosti in okrajšamo,

$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

3. Zapišimo z ulomkom $0{\cdot}\overline{27}$.

$x = 0{\cdot}\overline{27} \quad / \cdot 100$

$100x = 27{\cdot}\overline{27}$

$99x = 27$

$x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$

4. Na številski premici poiščimo točko, ki predstavlja število $0{\cdot}1\overline{6}$.

Najprej poiščemo ulomek, katerega decimalni zapis je $0{\cdot}1\overline{6}$.

$x = 0{\cdot}1\overline{6} \quad / \cdot 10$

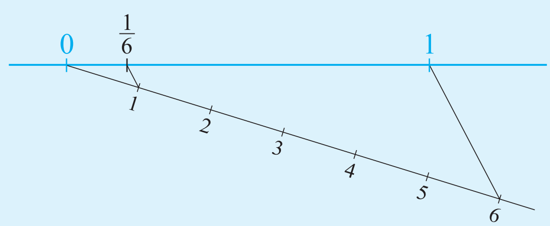
$10x = 1{\cdot}\overline{6} \quad / \cdot 10$

$100x = 16{\cdot}\overline{6}$

$90x = 15$

$x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

Ker je $0{\cdot}1\overline{6} = \frac{1}{6}$, lahko narišemo.



5. Zapišimo z ulomki in izračunajmo.

$0{\cdot}5^{-12} \cdot 4^{-1} \cdot 0{\cdot}25^{5} = (\frac{1}{2})^{-12} \cdot (2^2)^{-1} \cdot (\frac{1}{4})^{5} = (2^{-1})^{-12} \cdot 2^{-2}\,(2^{-2})^{5} = 2^{12} \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-10} = 2^{0} = 1$

6. Zapišimo izraz $18 \cdot (-0{\cdot}75) \cdot 0{\cdot}\overline{2} + 0{\cdot}2^{-1} : 9$ z ulomki in izračunajmo.

Najprej zapišemo $0{\cdot}\overline{2}$ z ulomkom.

$x = 0{\cdot}\overline{2} \quad / \cdot 10$

$10x = 2{\cdot}\overline{2}$

$9x = 2$

$x = \frac{2}{9}$

Izračunamo $18 \cdot (-0{\cdot}75) \cdot 0{\cdot}\overline{2} + 0{\cdot}2^{-1} : 9 = \frac{18}{1} \cdot (-\frac{3}{4}) \cdot \frac{2}{9} + (\frac{1}{5})^{-1} \cdot \frac{1}{9} = -3 + \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{9} = -3 + \frac{5}{9} = \frac{-27+5}{9} = -\frac{22}{9}$

Reševanje enačb

Enačba je vsak zapis oblike $I(x) = J(x)$, pri čemer sta $I(x)$, $J(x)$ poljubna izraza, x pa neznanka (včasih neznanko označimo tudi s črkami t, z ...). **Rešitev enačbe** je množica tistih števil, za katera je vrednost izraza na levi strani enaka vrednosti izraza na desni. **Enačbi sta enakovredni (ekvivalentni)**, če imata **isto množico rešitev**.

Pri reševanju enačb si pomagamo z naslednjimi pravili:

1. Če enačbi **na obeh straneh prištejemo (odštejemo) isto število (izraz)**, dobimo enakovredno enačbo:
   $a = b \quad \Leftrightarrow \quad a + c = b + c.$
2. Če enačbo **na obeh straneh množimo (delimo) z od 0 različnim številom (izrazom)**, dobimo enakovredno enačbo: $a = b \quad \Leftrightarrow \quad ac = bc;\ c \neq 0.$
3. Enačbe, v katerih ima neznanka vsaj v enem členu eksponent večji od 1 in se dajo **razstaviti** (razcepiti) na faktorje, imenujemo **razcepne enačbe**. Za njihovo reševanje uporabimo naslednjo lastnost racionalnih števil:
   Produkt racionalnih števil je enak 0 natanko takrat, ko je vsaj en faktor v produktu enak 0:
   $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a_1 = 0) \vee (a_2 = 0) \vee \ldots \vee (a_n = 0).$

1. Rešimo enačbi.

a) $(x - 3)^2 - (x + 1)^2 = 3(x - 1)$

$x^2 - 6x + 9 - (x^2 + 2x + 1) = 3x - 3$

$x^2 - 6x + 9 - x^2 - 2x - 1 = 3x - 3$

$-6x - 2x - 3x = -3 - 9 + 1$

$-11x = -11$

$x = 1$

b) $\frac{2x-1}{3} - \frac{5}{6} = 1 + \frac{x-1}{2} \quad / \cdot 6$

$2(2x - 1) - 5 = 6 + 3(x - 1)$

$4x - 2 - 5 = 6 + 3x - 3$

$4x - 3x = 6 - 3 + 2 + 5$

$x = 10$

2. Rešimo racionalno enačbo.

$\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2 - x} = \frac{9}{2x - 2}$

Najprej razstavimo imenovalce ulomkov $\frac{4}{x} + \frac{5}{x(x-1)} = \frac{9}{2(x-1)}$ in izločimo rešitve enačbe: $x \neq 0$, $x \neq 1$.

Nato enačbo rešimo po opisanih postopkih.

$4 \cdot 2 \cdot (x - 1) + 5 \cdot 2 = 9x$

$8x - 8 + 10 = 9x$

$8x - 9x = 8 - 10$

$-x = -2$

$x = 2$

3. Rešimo razcepno enačbo.

$(x - 5)^2 + 13 = 1 - (x - 5)(x + 5)$

$x^2 - 10x + 25 + 13 = 1 - (x^2 - 25)$

$x^2 - 10x + 38 = 1 - x^2 + 25$

$2x^2 - 10x + 12 = 0$

$2(x^2 - 5x + 6) = 0$

$2(x - 2)(x - 3) = 0$

$x_1 = 2,\ x_2 = 3$

4. Manjše trgovsko podjetje ima v mestu tri prodajalne. V prejšnjem mesecu je prva prodajalna k skupnemu dobičku prispevala $\frac{2}{5}$ skupnega dobička, druga 1400 EUR manj kot prva, tretja pa $\frac{1}{4}$ skupnega dobička. Izračunajmo, koliko dobička je prispevala posamezna prodajalna.

Označimo z x skupni dobiček, prva prodajalna je prispevala $\frac{2x}{5}$ dobička, druga $\frac{2x}{5} - 140\,000$ in tretja $\frac{x}{4}$.

Zapišemo enačbo $\frac{2x}{5} + \frac{2x}{5} - 1400 + \frac{x}{4} = x$ in jo rešimo.

$8x + 8x - 28\,000 + 5x = 20x$

$21x - 20x = 28\,000$

$x = 28\,000$ EUR

Prva prodajalna je k skupnemu dobičku prispevala $\frac{2}{5} \cdot 28\,000 = 11\,200$ EUR,

druga $11\,200 - 1400 = 9800$ EUR in tretja $\frac{1}{4} \cdot 28\,000 = 7000$ EUR.

Sistemi linearnih enačb

Če imamo dve enačbi z dvema neznankama $\boldsymbol{ax + by = c}$ in $\boldsymbol{dx + ey = f}$, rečemo, da imamo **sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama**. Pri tem sta ***x* in *y* neznanki**, realna števila a, b, c, d, e in f pa **koeficienti sistema enačb**. **Rešitev** sistema enačb je množica vseh urejenih parov realnih števil (x, y), ki zadoščajo obema enačbama.

Načini reševanja sistema dveh enačb z dvema neznankama:

Zamenjalni način	**Način nasprotnih koeficientov**	**Grafični način**
Iz ene enačbe izrazimo eno od neznank in jo nadomestimo v drugi enačbi. Tako dobimo linearno enačbo z eno neznanko, ki jo že znamo rešiti.	Eno ali obe enačbi pomnožimo s takima številoma, da dobimo pri eni od neznank nasprotna koeficienta. Nato enačbi seštejemo in dobimo linearno enačbo z eno neznanko, ki jo že znamo rešiti.	Ta način reševanja sistemov dveh enačb z dvema neznankama in geometrijski pomen sistemov dveh enačb z dvema neznankama sta razložena v poglavju Linearna funkcija.

1. Rešimo sistem enačb $x + 2y = 6$ in $2x - y = 2$ na dva načina.

a) Zamenjalni način:

Iz prve enačbe izrazimo npr. x: $x = -2y + 6$ in vstavimo v drugo enačbo $2(-2y + 6) - y = 2$.

Od tod je $y = 2$.

Če to vrednost vstavimo v eno od enačb, dobimo še $x = 2$.

b) Način nasprotnih koeficientov:

Prvo enačbo pomnožimo z -2 in dobimo $-2x - 4y = -12$.

Zapišemo sistem
$$\begin{aligned} -2x - 4y &= -12 \\ 2x - y &= 2, \end{aligned}$$
seštejemo in dobimo $-5y = -10$.

Od tod je $y = 2$. Če to vrednost vstavimo v eno od enačb, dobimo še $x = 2$.

2. Sistem enačb $x - 2y = 4$ in $3x + y = 5$ rešimo z zamenjalnim načinom.

Iz prve enačbe izrazimo $x = 2y + 4$ in vstavimo v drugo enačbo $3(2y + 4) + y = 5$ ter izračunamo y.

$6y + 12 + y = 5$

$7y = -7$

$y = -1$

Nato še izračunamo $x = 2y + 4 = 2(-1) + 4 = 2$.

3. Sistem enačb $3x + 2y = 12$ in $6x - 5y = -3$ rešimo z uporabo metode nasprotnih koeficientov.

Prvo enačbo množimo z -2,

$-6x - 4y = -24$,

drugo prepišemo $\quad 6x - 5y = -3$

in ju seštejemo $\quad -9y = -27$

ter dobimo $\quad y = 3$.

Nadomestimo y s 3 v prvi enačbi in izračunamo x.

$3x + 2 \cdot 3 = 12$

$3x = 6$

$x = 2$

4. Vsota dveh števil je 14, dvakratnik prvega števila je za 4 večji od drugega števila. Izračunajmo iskani števili.

Označimo prvo število z x in drugo z y ter zapišimo enačbi $x + y = 14$ in $2x - y = 4$.

Če enačbi seštejemo, dobimo $3x = 18$ in od tod $x = 6$.

Vstavimo $x = 6$ v prvo enačbo $6 + y = 14$ ter izračunamo $y = 14 - 6 = 8$.

Iskani števili sta 6 in 8.

Tri enačbe s tremi neznankami $\boldsymbol{ax + by + cz = d}$, $\boldsymbol{ex + fy + gz = h}$ in $\boldsymbol{kx + ly + pz = r}$ tvorijo **sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami**. Rešitev takega sistema je množica vseh urejenih trojic realnih števil (x, y, z), ki zadoščajo vsem trem enačbam.

Z zamenjalnim načinom rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami.

$x - y + z = 1$

$x + y + z = -1$

$2x - 2y - z = 5$

Iz prve enačbe izrazimo $z = 1 - x + y$ in ta zapis uporabimo pri drugih dveh enačbah.

$x + y + 1 - x + y = -1$

$2x - 2y - (1 - x + y) = 5$

Dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama.

$$\begin{aligned} 2y &= -2 \\ 3x - 3y &= 6 \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo $y = -1$, vstavimo to vrednost v drugo enačbo $3x - 3(-1) = 6$ in dobimo $x = 1$.

Iz $z = 1 - x + y$ dobimo $z = 1 - 1 - 1 = -1$.

Razmerja, deleži, odstotki

Količini x in y sta:

1. **premo sorazmerni**, če pri dvakratnem, trikratnem, štirikratnem ... povečanju količine x sledi dvakratno, trikratno, štirikratno povečanje količine y. Torej:
   Količini y in x sta **premo sorazmerni**, če je njun **kvocient** $\boldsymbol{\frac{y}{x}}$ vseskozi enak **konstanti** $\boldsymbol{k}$: $\frac{y}{x} = k$ oz. $y = kx$.
2. **obratno sorazmerni**, če pri dvakratnem, trikratnem, štirikratnem ... povečanju količine x sledi zmanjšanje količine y na polovico, tretjino, četrtino ... prejšnje vrednosti. Torej:
   Količini y in x sta **obratno sorazmerni**, če je njun **produkt** $\boldsymbol{y \cdot x}$ vseskozi enak **konstanti** $\boldsymbol{k}$: $yx = k$ oz. $y = \frac{k}{x}$.

1. Avtomobil porabi za 240 prevoženih kilometrov 20,4 litra goriva. Koliko porabi pri 310 prevoženih kilometrih?

V tej nalogi sta dani količini premo sorazmerni, saj pri večji prevoženi razdalji avto porabi več goriva.

240 km ... 20,4 litra

310 km ... x litrov

$x \cdot 240 = 310 \cdot 20{,}4$

$x = \frac{310 \cdot 20{,}4}{240} = 26{,}35$ litra

Avtomobil za 310 prevoženih kilometrov porabi 26,35 litra goriva.

2. Gradbeno podjetje lahko pri gradnji avtoceste opravi neko delo s 5 tovornjaki v 12 urah. V kolikšnem času lahko isto delo opravi z 9 tovornjaki?

V tej nalogi sta dani količini obratno sorazmerni, saj večje število tovornjakov hitreje opravi isto delo.

5 tovornjakov ... 12 ur

9 tovornjakov ... x ur

$5 \cdot 12 = 9 \cdot x$

$x = \frac{5 \cdot 12}{9} = 6\frac{2}{3}$ ure = 6 ur 40 minut

Z 9 tovornjaki lahko podjetje isto delo opravi v 6 urah in 40 minutah.

Pri primerjanju nastopajočih količin si večkrat pomagamo z razmerjem (kvocientom) teh števil. Število, s katerim primerjamo druga števila, imenujemo **osnova** in ga označimo z $\boldsymbol{o}$, del te osnove ali pa drugo število pa **delež** in ga označimo z $\boldsymbol{d}$.

Relativni delež $\boldsymbol{r}$ **je kvocient med deležem in osnovo**: $r = \frac{d}{o}$.

Relativni delež lahko zapišemo z ulomkom:

$r = \frac{p}{100}$, ki ga preberemo: $\boldsymbol{r}$ je $\boldsymbol{p}$ **odstotkov** (procentov) in označimo $p\,\%$. Torej velja: $d = o \cdot r = o \cdot \frac{p}{100}$.

$r = \frac{q}{1000}$, ki ga preberemo: $\boldsymbol{r}$ je $\boldsymbol{q}$ **promilov** in označimo $q\,‰$. Torej velja: $d = o \cdot r = o \cdot \frac{q}{1000}$.

1. Cena minute pogovora z mobilnim telefonom je stala 0,25 EUR, nato se je povečala za 4 %.
Za koliko evrov se je povečala cena ene minute pogovora in koliko evrov stane zdaj?

$o = 0{,}25$ EUR

$p = 4\,\%$

$d = o \cdot p = 0{,}25 \cdot \frac{4}{100} = 0{,}01$ EUR

Cena minute pogovora se je povečala za 0,01 evra, tako po novem stane 0,26 EUR.

2. Cena 1 litra kurilnega olja se je zmanjšala z 0˙78 EUR na 0˙75 EUR. Za koliko odstotkov se je pocenilo kurilno olje?

$o = 0˙78$ EUR

$d = 0˙78$ EUR $-$ $0˙75$ EUR $= 0˙03$ EUR

$p = \frac{d \cdot 100}{o} = \frac{0{,}03 \cdot 100}{0{,}78} = 3˙85\ \%$

Kurilno olje se je pocenilo za 3˙85 %.

3. Cena izdelka skupaj z 20 % davkom na dodano vrednost znaša 102 evra. Koliko evrov znaša cena izdelka brez davka na dodano vrednost?

$d = 102$ EUR

$p = 100\ \% + 20\ \% = 120\ \%$

$o = \frac{d \cdot 100}{p} = \frac{102 \cdot 100}{120} = 85$ EUR

Cena izdelka brez davka na dodano vrednost znaša 85 evrov.

4. Pri nakupu blaga so nam priznali 8 % popust. Tako smo za blago plačali 68˙08 evra. Koliko evrov je znašala cena blaga brez popusta?

$d = 68˙08$ EUR

$p = 100\ \% - 8\ \% = 92\ \%$

$o = \frac{d \cdot 100}{p} = \frac{68{,}08 \cdot 100}{92} = 74$ EUR

Cena blaga brez popusta je znašala 74 evrov.

5. Avtomobilsko gorivo se je najprej podražilo za 6 %, nato pa še za 5 %. Za koliko odstotkov se je podražilo avtomobilsko gorivo?

$p_1 = 100\ \% + 6\ \% = 106\ \%$

$p_2 = 100\ \% + 5\ \% = 105\ \%$

$p = \frac{106 \cdot 105}{100} = 111˙3\ \% = 100\ \% + 11˙3\ \%$

Avtomobilsko gorivo se je podražilo za 11˙3 %.

6. Cena grama zlata se je najprej zmanjšala za 4 %, nato pa še za 7 %. Za koliko odstotkov se je skupno zmanjšala cena zlata?

$p_1 = 100\ \% - 4\ \% = 96\ \%$

$p_2 = 100\ \% - 7\ \% = 93\ \%$

$p = \frac{96 \cdot 93}{100} = 89˙28\ \% = 100\ \% - 10˙72\ \%$

Cena grama zlata se je skupno zmanjšala za 10˙72 %.

7. V 60 litrov 75 % alkohola vlijemo 30 litrov 90 % alkohola. Koliko odstotkov alkohola je v dobljeni raztopini?

V 60 litrih 75 % alkohola je $\frac{60 \cdot 75}{100} = 45$ litrov čistega alkohola.

V 30 litrih 90 % alkohola je $\frac{30 \cdot 90}{100} = 27$ litrov čistega alkohola.

Skupaj je $d = 45\ \mathrm{l} + 27\ \mathrm{l} = 72\ \mathrm{l}$ čistega alkohola v $o = 60\ \mathrm{l} + 30\ \mathrm{l} = 90\ \mathrm{l}$ raztopine.

$p = \frac{d \cdot 100}{o} = \frac{72 \cdot 100}{90} = 80\ \%$

V raztopini je 80 % alkohola.

1. Na številski premici poiščite točke, ki predstavljajo števila $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{5}$, $-\frac{5}{6}$ in $0{\cdot}\overline{6}$.

2. Primerjajte dane pare ulomkov, nato zapišite nasprotne in obratne ulomke ter jih primerjajte.

a) $\frac{3}{7}, \frac{4}{9}$

b) $\frac{-5}{6}, -\frac{7}{5}$

c) $\frac{3}{4}, -\frac{1}{9}$

3. Ulomke $-\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{13}{8}, -\frac{11}{12}, \frac{11}{6}, 1\frac{7}{12}$ uredite po velikosti od najmanjšega do največjega.

4. Za $a = 1\frac{5}{6}$ in $b = \frac{2}{9}$ izračunajte.

a) $2a - b$

b) ab

c) $a : b$

č) $3a : (1 + b)$

5. Pokažite, da med poljubnima racionalnima številoma a in b ($a < b$) obstaja vsaj še eno racionalno število.

6. Pisno izračunajte.

a) $2\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 3\frac{2}{3} + 1\frac{1}{6}$

b) $1\frac{3}{4} - \frac{1}{5} - (1\frac{1}{2} - \frac{5}{8} - (1 - \frac{3}{10}))$

c) $2\frac{1}{3} - \frac{3}{7} \cdot (1\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \cdot 2\frac{1}{2})$

č) $((\frac{2}{3})^{-1} - \frac{3}{4})^{-1}$

d) $(3\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + 1\frac{1}{3} : 1\frac{1}{9}) : (1\frac{1}{2})^{-1} + (-4) : 5$

e) $2 : (\frac{2}{9} - 1\frac{1}{3}) - 1\frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{3} - \frac{6}{7} : \frac{9}{14}) + 45^{-1}$

f) $\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{5} - \frac{3}{5} : \frac{4}{15} - 5^{-1} + \frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{16}} - 4 \cdot (-\frac{2}{5})$

7. Pri igri na srečo smo dobili 12 540 EUR. Odločili smo se, da bomo $\frac{1}{10}$ tega zneska namenili v dobrodelne namene, od preostanka pa moramo plačati $\frac{1}{5}$ davka. Koliko denarja nam še ostane po plačilu davka?

8. Šestnajst velikih plastenk barve prelijemo v manjše pločevinke, ki držijo po $\frac{2}{3}$ litra. Koliko pločevink lahko napolnimo z barvo, če velike plastenke držijo po $4\frac{1}{2}$ litra?

9. Za sodelovanje na kvizu so podelili zlato, srebrno in bronasto priznanje. Vsem dobitnikom priznanj so razdelili denarne nagrade: $\frac{1}{2}$ celotnega zneska so v enakem znesku namenili 12 dobitnikom bronastih priznanj, $\frac{1}{3}$ celotnega zneska so v enakem znesku namenili 8 dobitnikom srebrnega priznanja, preostanek denarja pa so v enakem znesku razdeli štirim dobitnikom zlatih priznanj. Koliko je bilo dobitnikov priznanj in kolikšen del denarja je vsak dobil?

10. Zemljišče je sestavljeno iz dveh pravokotnih parcel v obliki črke T. Širina pokončne parcele je $20\frac{4}{5}$ m, višina pa $28\frac{3}{4}$ m. Širina ležeče parcele je $25\frac{1}{3}$ m, višina pa $13\frac{1}{2}$ m. Izračunajte površino in obseg zemljišča.

11. Okrajšajte dane ulomke.

a) $\frac{a^2 - ab}{ab - b^2}$

b) $\frac{a - 1}{1 - a^2}$

c) $\frac{8 - 2a^2}{2a^2 - 4a}$

č) $\frac{4a^2 - 8a - 12}{2a^2 - 18}$

d) $\frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}$

e) $\frac{x^3y - 9xy}{x^5y - 27x^2y}$

f) $\frac{2x^3y^2 - 2x^2y^3}{4x^4 + 4x^3y - 8x^2y^2}$

g) $\frac{3x^2y - 9xy + 27y}{x^3y + 27y}$

h) $\frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

12. Poenostavite.

a) $\frac{2a - 2}{2a - 6} - \frac{a + 3}{3a - 9}$

b) $\frac{a - 1}{a^2 - 2a} - \frac{a}{a^2 - 4}$

c) $\frac{a - 2}{a^2 - a} - \frac{2a}{1 - a^2}$

č) $\frac{4x}{4x^2 - 1} + \frac{2x + 1}{3 - 6x} + \frac{2x - 1}{4x + 2}$

d) $\frac{2x + 4}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^3 + x^2 + x}$

e) $x^{-1} - \frac{x - 9}{x^2 - 9} + \frac{3}{3x - x^2}$

f) $\frac{a^2 + 3a}{a^2 + 5a + 6} - \frac{2a - 4}{4 - a^2} - \frac{3(a - 1)}{2a - 4}$

g) $\frac{a - 2}{a^3 + 2a^2 + 4a + 8} + \frac{1}{a^2 + 6a + 8}$

13. Pokažite, da je vrednost izraza

$$\frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy-y^2} + \frac{xy^2-2y^3}{x^3-3x^2y+2xy^2}$$

neodvisna od vrednosti spremenljivk x in y.

14. Poenostavite.

a) $xy \cdot (x \cdot y^{-1} - 3^0) \cdot (\frac{x-y}{x})^{-1}$

b) $\frac{x-2}{x+1} \cdot (\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x^2-4})$

c) $(\frac{x+2}{x^2-x-6} - \frac{9}{x^2-9}) \cdot (x+3)$

č) $(\frac{a-2}{a} - \frac{2-a}{a^2-a}) \cdot (1-a^{-1})$

d) $(\frac{1}{a^2} - 2^{-2}) \cdot (a+2)^{-1}$

e) $\frac{a^3-4a}{4-4a+a^2} : \frac{a^4+8a}{a^3-8}$

f) $\frac{x^2-1}{x^3-3x^2-9x+27} : \frac{x^2+4x+3}{x^2-6x+9}$

g) $(\frac{x+2}{x-1} + x^{-1}) : (x^2+3x-1)$

h) $(\frac{x-1}{x^2+x-6} + \frac{x+2}{x^2-4}) : \frac{x+1}{5} + (x+5) \cdot (x+3)^{-1}$

i) $\frac{1-a^{-2}}{a} \cdot \frac{a^2}{1+a^{-1}}$

j) $\frac{x-2}{x+1} : \frac{1-2x^{-1}}{1-x^{-2}}$

k) $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{ab^{-1}-a^{-1}b} : (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})^{-1}$

l) $\frac{x^{2n+1}+x^{2n}-2x^{2n-1}}{x^{2n-1}-x^{2n}}$

15. Skrčite izraz $(\frac{10x+20}{x^3+8} + \frac{12}{x^2-2x+4}) : \frac{11}{5}$.

16. Poenostavite izraz $(\frac{x-4}{x^2-1} + x \cdot (x+1)^{-1}) : \frac{x-2}{x+1}$ in za $x = -3$ izračunajte njegovo vrednost.

17. Izračunajte.

a) $(6 - 4 \cdot (\frac{5}{16})^0)^{-2}$

b) $(3 \cdot (\frac{2}{3})^{-2} + 4^{-1}) : ((\frac{1}{2})^{-1} + 5)$

18. Koliko je $a^{-1}b^{-2} + a^{-2}b^{-1}$ za $a = \frac{2}{3}$ in $b = -\frac{3}{2}$?

19. Števila 4^{-1}, $(-2)^3$, -2^{-3}, $(-2)^{-3}$, $(-13)^0$, $(\frac{1}{4})^{-2}$, $(-3)^{-2}$ uredite po velikosti od najmanjšega do največjega.

20. Izračunajte.

a) $(a^{-3}b^8) \cdot (a^{-1}b^{-2})$

b) $(9 \cdot 2^{-4} \cdot a^6b^4) : (18a^{-3}b^5)$

c) $(\frac{4}{5}x^5y^{-3}) : (\frac{8}{15}x^{-3}y^2)$

č) $(\frac{5}{24}a^3b^{-5}) : (-2\frac{1}{12} \cdot \frac{b}{a})$

d) $(2^{-4}ab^{-1}) \cdot (\frac{1}{8}a^{-2}b)^{-1}$

e) $(-a^{-1})^{-6} + ((-a)^{-2})^{-3} - (-a^{-2})^{-3}$

f) $(3a^{-2}b)^2 \cdot (9a^3b^{-3})^{-2} : (3ab^{-1})^{-3}$

g) $(\frac{2 \cdot 3^{-1}}{x^{-3}y})^3 \cdot (\frac{18x^4}{y^{-5}})^2$

h) $4^{x-1} - 4^{x+2} + 3 \cdot 4^{x+1}$

21. Številski izraz $\frac{3^{-10} \cdot 7^{-5} \cdot (\frac{1}{9})^{-2}}{(\frac{1}{21})^8 \cdot 49}$ zapišite kot potence z osnovama 3 in 7 ter izračunajte njegovo vrednost.

22. Izraz $(2a^{-1}b^2)^2 \cdot (4ab^{-3})^{-2} : (2a^{-1}b)^{-3}$ zapišite v obliki $2^k \cdot 3^l \cdot a^m b^n$, pri čemer so k, l, n in m cela števila.

23. Poenostavite izraz $(\frac{b^{-1}}{4a^{-2}})^{-2} \cdot (a^2b^{-1})^3 : (\frac{2b^{-2}}{a^{-1}})^2$ in rezultat zapišite v obliki $2^k a^n b^m$; $k, n, m \in \mathbb{Z}$.

24. Dane izraze zapišite z ulomkom in razstavite na produkt.

a) $ab^{-1} - a^{-1}b$

b) $b^{-2} - 2a^{-1}b^{-1} - 3a^{-2}$

c) $y^{-2} + 3(xy)^{-1} - 12x^{-2}$

č) $a^{-3} - b^{-3}$

25. Preverite, ali za vsako naravno število $m > 1$ velja $3 \mid (5^{m-1} - 3 \cdot 5^{m-2} - 5^{m+1})$.

26. Zapišite z ulomkom.

a) $1{\cdot}75$

b) $0{\cdot}0\dot{2}$

c) $3{\cdot}\overline{2}$

č) $0{\cdot}\overline{64}$

d) $3{\cdot}0\overline{2}$

27. V danih številskih izrazih vsa števila zapišite kot potence z osnovo 2 ali 5 in pisno izračunajte.

a) $(\frac{1}{5})^5 \cdot 0{\cdot}5^{-2} \cdot 25^3$

b) $0{\cdot}04^{-2} \cdot 125^2 : 0{\cdot}2^{-6}$

28. Zapišite z ulomki in pisno izračunajte.

a) $20 \cdot 0.2 \cdot (-0.75) + 0.25 : 0.125$

b) $1.25 \cdot (\frac{3}{4})^{-1} - 0.\overline{3} - 3 \cdot 0.9^{-1}$

c) $(0.25 \cdot 0.\overline{3} - 1.5^{-1}) : (0.25 - 1) + 0.5^{-1} \cdot 3^{-2}$

č) $7^0 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1} \cdot (\frac{3}{2})^{-2} - 0.\overline{63} \cdot \frac{22}{21} + 3^{-1}$

d) $\frac{5}{9} \cdot 0.1\overline{3} + 4^2 \cdot 3^{-1} \cdot 5^0 \cdot (\frac{3}{2})^{-2} - (-\frac{2}{3})^2$

29. Izračunajte $\dfrac{(\frac{2}{3})^{-3} \cdot 2{,}5^0 + 2^{-4}}{(-0{,}4)^{-2} - (\frac{4}{5})^{-1}}$.

30. Izraz $-0.5 \cdot (a^{-2}b)^3 \cdot (-0.375)^{-1}a^6b^{-1}$ zapišite v obliki $2^k \cdot 3^l \cdot a^m b^n$, pri čemer so k, l, n in m cela števila.

31. Za $a = -0.25$ in $b = \frac{3}{5}$ pisno izračunajte vrednost izraza $(\frac{80ab}{a^{-1}})^3 - 9a^{-1} \cdot \frac{1}{b^2}$.

32. Kolikšna je vrednost izraza $\dfrac{a^2b^3}{3 \cdot 10^9} - (b \cdot 10^{-7})^3$ za $a = 3 \cdot 10^{-6}$ in $b = 4 \cdot 10^8$?

33. Poenostavite izraz $(a - b)^{-1} \cdot \dfrac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}}$ in za $a = 2^{-4}$ in $b = (-2)^3$ izračunajte njegovo vrednost.

34. Rešite enačbe.

a) $(x + 3)(3x - 1) - (x + 2)(2x - 1) = (x + 2)^2$

b) $(5x - 1)^2 - (3x - 1)^2 = (4x - 3)(4x + 3)$

c) $(x + 1)^3 - x^2(x + 3) = 7$

č) $(x + 2)^3 - (x - 1)^2 = x^2(x + 5)$

d) $(x - 2)^3 - (x + 2)^3 = (1 - 3x)(1 + 4x)$

35. Rešite razcepne enačbe.

a) $(x - 2)^2 + (x - 1)(x + 4) = x$

b) $(x - 6)(x + 6) - (1 - x)^2 = x(2 - x) - 12$

c) $(x + 2)^3 - x(x^2 + 12) = 8(1 - 3x)$

č) $x^3 - (x - 1)^3 + 9 = 2x(x + 2)$

d) $x^4 - x(x - 2)^3 = 5x^2(x - 2) + 16x$

e) $2 + (1 + 2x)^3 - (2x^{-1})^{-3} \cdot 0.5^{-6} = 9x^2$

36. Rešite enačbe.

a) $\frac{4 + x}{8} = 2 - \frac{3 - 4x}{5}$

b) $\frac{3 - 2x}{3} - \frac{x + 1}{2} = 1 - \frac{5x - 1}{6}$

c) $x - \frac{2x + 3}{5} - 2^{-1} = 1 + \frac{x - 1}{10}$

č) $\frac{1}{4}(\frac{x}{2} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8}(2 + \frac{2}{3}x) = 0$

37. Rešite enačbe.

a) $\frac{x + 3}{2(x - 2)} + \frac{x}{x - 2} = \frac{3x - 1}{2(x + 2)}$

b) $\frac{x}{x - 4} - \frac{x - 3}{x - 2} = \frac{13}{x^2 - 6x + 8}$

c) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x - 1} = \frac{4x}{4x^2 - 1}$

č) $\frac{1 - x}{x + 2} + \frac{x}{x - 4} = \frac{8 - 5x}{x^2 - 2x - 8}$

d) $\frac{2 - x}{x + 3} + \frac{x}{x - 2} - \frac{17}{x^2 + x - 6} = 0$

e) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2 - x} = \frac{5}{3x - 3}$

38. Pokažite, da je število $x = 15$ rešitev enačbe $\dfrac{x + 5}{x^2 - 5x} - \dfrac{x - 5}{2x^2 - 10x} = \dfrac{x + 25}{2x^2 - 50}$.

39. Pokažite, da enačba $\dfrac{x + 3}{2x^2 - 6x} + \dfrac{1}{6x} = \dfrac{x + 3}{3x^2 - 9x}$ nima rešitve.

40. Dane so množice celih števil $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 + 2x = 15\}$, $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R};\ 3 - \frac{x}{3} = \frac{4x - 8}{2}\}$, $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R};\ x^3 - x^2 = 9x - 9\}$. Zapišite njihove elemente in elemente množic $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ in $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$.

41. Če število n pomnožimo s 14 in od produkta odštejemo 9, razliko delimo s 3 in od količnika odštejemo 7, dobimo štirikratnik števila n. Izračunajte število n.

42. Števec ulomka je za 5 manjši od imenovalca. Če števec in imenovalec povečamo za 4, dobimo ulomek z vrednostjo $\frac{3}{4}$. Kateri ulomek je to?

43. Janez se je odločil, da bo 5 dni zaporedoma vsak dan tekel. Prvi dan je pretekel 2000 m, vsak naslednji dan pa x metrov več kot prejšnji dan. Koliko metrov je pretekel peti dan, če je skupaj pretekel 14 kilometrov?

44. Iz dveh krajev, ki sta drug od drugega oddaljena 132 km, sta hkrati krenila drug proti drugemu dva avtomobila s povprečnima hitrostma 75 km/h in 90 km/h. Po kolikšnem času se bosta srečala?

45. Bratje Janez, Miha in Andrej so zbirali avtomobilčke. Janez je zbral polovico vseh avtomobilov, Miha eno šestino, Andrej pa 12 avtomobilov manj kot Janez. Koliko avtomobilov je zbral vsak?

46. Organizator teniškega turnirja se je odločil, da bodo med najboljše štiri tekmovalce razdelili denarne nagrade. Sredstva za nagrade je zbral v posebnem denarnem skladu. Prvi tekmovalec bo dobil $\frac{2}{3}$, drugi $\frac{1}{6}$, tretji $\frac{3}{24}$ vseh sredstev sklada, četrti pa iz sklada dobi 200 EUR. Izračunajte, koliko evrov nagrade dobi vsak od prvih treh tekmovalcev in koliko sredstev je bilo zbranih v denarnem skladu.

47. Trgovec je kupil 50 kg jagod. Od tega je 30 kg jagod prodal po $\frac{1}{4}$ višji ceni od nakupne, preostalih 20 kg pa po 1˙20 evra višji ceni za kilogram od nakupne. Kolikšna je bila nakupna cena za kilogram jagod, če je imel pri tem 69 evrov dobička?

48. Organizator izletov v turistični agenciji se je odločil, da bo za 28 EUR po osebi organiziral izlet v zabaviščni park. Pri določitvi cene za eno osebo je upošteval, da stroški najema avtobusa za 54 oseb in organizacije izleta skupaj znašajo 320 EUR, vstopnica v zabaviščni park pa 20 EUR po osebi. Pomagajte organizatorju izleta in izračunajte:
a) Najmanj koliko oseb se mora udeležitei izleta, da bo imela agencija pokrite stroške izleta?
b) Kolikšen bo dobiček agencije pri polni zasedenosti avtobusa?

49. Petra bo čez pet let trikrat starejša, kot je bila pred petimi leti. Koliko je stara sedaj?

50. Koliko sta stari Jana in Tina, če je starost Tine $\frac{2}{3}$ starosti Jane in je vsota njunih starosti 30?

51. Dolžina igrišča ima obliko pravokotnika, v katerem je dolžina za 8 m daljša od širine. Če dolžino povečamo za 2 m, širino pa za 1 m, se površina igrišča poveča za 46 m^2. Kolikšne so mere igrišča?

52. Rešite sistem enačb.
a) $x + 2y - 1 = 0,\ 2x - y = -3$
b) $3x + 2y = -2,\ 4x + 5y = -12$
c) $2x + y = 7,\ -4x - 2y = 5$
č) $\frac{x}{3} - 2y = 4,\ \frac{x}{2} - y = 2$
d) $x - \frac{5y}{4} = \frac{1}{2},\ \frac{x}{2} + \frac{3y}{4} = 3$

53. Za kateri racionalni števili A in B je:
a) $\frac{x+2}{x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$
b) $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

54. Izračunajte števili, katerih vsota je 122, razlika pa 86.

55. Če od števila a odštejemo dvakratnik števila b, dobimo 4. Vsota števila b in dvakratnika števila a pa je 58. Zapišite enačbi in izračunajte števili a in b.

56. Dvomestno število n ima desetice za 2 večje od enic. Če to število delite z vsoto njegovih števk, dobite količnik 6 in ostanek 1. Z uporabo osnovnega izreka o deljenju izračunajte n.

57. Vsota dveh števil je 531. Če večje število delimo z manjšim številom, dobimo kvocient 6 in ostanek 20. Izračunajte iskani števili.

58. Imenovalec ulomka je za 700 večji od števca. Ko ulomek okrajšamo, dobimo $\frac{3}{7}$. S katerim številom smo krajšali ulomek?

59. Število osebnih vozil in število preostalih vozil, ki se dnevno vozijo po avtocestah je v razmerju 15 : 4. V nekem časovnem obdobju smo na avtocesti našteli 88 vozil, ki niso osebna. Koliko osebnih vozil se je v tem času vozilo po avtocesti?

60. En zvitek žice je daljši od drugega za 54 m. Če od obeh zvitkov žice odrežemo po 12 m, je daljši zvitek žice štirikrat daljši od krajšega zvitka. Koliko merijo zvitki žice?

61. Na dveh policah je skupaj 72 knjig. Če bi iz prve police prestavili 6 knjig na drugo polico, bi na prvi polici bilo dvakrat več knjig kot na drugi. Koliko knjig je na posamezni polici?

62. V tovarni imajo dva različna stroja za mletje moke. Če delata oba stroja neprekinjeno, v enem delovnem dnevu (16 urah) skupaj zmeljeta 3360 kg moke. V včerajšnjem delovnem dnevu sta oba stroja skupaj zmlela le 3090 kg moke, saj drugi stroj zaradi okvare ni deloval 3 ure. Koliko kilogramov moke zmelje posamezni stroj na uro?

63. Miha je kupil 7 oken in 5 balkonskih vrat ter plačal 3030 EUR. Marko je v isti trgovini kupil 9 oken in 4 balkonska vrata in plačal 3240 EUR. Izračunajte ceno posameznega okna in ceno balkonskih vrat.

64. Pri plovbi z ladjo v smeri rečnega toka smo za razdaljo med krajema A in B potrebovali 6 ur, pri plovbi proti rečnemu toku pa smo potrebovali 9 ur. Kolikšna je hitrost rečnega toka, če je hitrost ladje v mirni vodi 18 km/h?

65. Rešite sistem enačb.
a) $x + y + z = 1,\ x - y + 2z = 4,\ 2x - 3y - z = 4$
b) $2x + 2y + z = 2,\ x + 2y + z = 1,\ 3x - 3y - 2z = 2$
c) $3x - 3y + z = 2,\ 2x + y - 2z = 7,\ x - 2y + z = -1$
č) $4x + y - 2z = 2,\ 3x - 2y + z = 3,\ x + 2y - z = 5$

66. Trije bratje imajo skupaj 58 let. Koliko let ima vsak, če je $\frac{3}{4}$ let najmlajšega enako $\frac{2}{3}$ let srednjega oz. enako $\frac{1}{2}$ let najstarejšega?

67. Za 2˙5 kg banan smo plačali 4˙50 EUR. Koliko bi plačali za 2 kg banan?

68. Dobra strojepiska v 5 minutah natipka 140 besed. V kolikšnem času natipka 630 besed?

69. Razdalja med krajema A in B, ki je v naravi 100 km, je na zemljevidu 25 cm. Kolikšna je razdalja med krajema A in C na zemljevidu, če je v naravi razdalja med njima 40 km?

70. Avto, ki ima v rezervoarju 35 litrov goriva, porabi 9˙8 litra na 100 km mestne vožnje in 6˙8 litra na 100 km pa avtocesti. Koliko kilometrov še lahko prevozimo z avtomobilom po avtocesti, če smo najprej naredili 120 km po mestu?

71. Z 8˙5 litra goriva lahko z avtomobilom prevozimo 100 kilometrov. Koliko kilometrov lahko prevozimo z avtomobilom z enako količino goriva, če se je zaradi preobremenjenosti avtomobila povprečna poraba avtomobila na 100 prevoženih kilometrov povečala za 1 liter?

72. S sušenjem orehov izgubimo $\frac{1}{4}$ njihove mase. Iz kolikšne mase svežih orehov smo po sušenju dobili 3 kg suhih orehov?

73. Energijska vrednost 1 dcl znane gazirane pijače znaša 45 kJ (kilo joulov). Kolikšno energijsko vrednost smo pridobili, če smo popili celo pločevinko te pijače, ki drži 0˙33 litra?

74. Energijska vrednost 100 g mlečne čokolade je 2408 kJ.
a) Kolikšna je energijska vrednost vrstice take čokolade, ki ima maso 15 gramov?
b) Odraslo dekle, ki opravlja dnevno le umska in lažja fizična dela, porabi dnevno približno 8000 kJ. Kolikšen odstotek potrebne dnevne energijske vrednosti pridobi z zaužitjem 10 dkg mlečne čokolade?

75. V tovarno je pripeljal tovornjak s polno cisterno kurilnega olja, ki ima prostornino 14 000 litrov. Kurilno olje bodo prečrpali v tovarniški rezervoar.
a) Na minuto natančno izračunajte čas praznjenja cisterne, če je zmogljivost črpalke 180 litrov na minuto.
b) Ker je praznjenje cisterne potekalo prepočasi, so čez pol ure začeli prazniti cisterno še z dodatno enako zmogljivo črpalko. Za koliko minut so skrajšali praznjenje cisterne?

76. V tkalnici blaga opravi neko delo 6 strojev v 16 urah. V kolikšnem času bi isto delo opravilo 8 strojev?

77. Šest delavcev, ki dela po 8 ur na dan, neko delo opravi v 15 dneh. Koliko ur na dan mora delati 8 delavcev, da bi bilo isto delo opravljeno v 10 dneh, če vsi delavci delajo enakomerno?

78. Pet obiralcev sadja obere 15 dreves v 8 urah. V kolikšnem času obere 6 obiralcev sadja 12 dreves?

79. Marko bi sam tlakoval dvorišče v 10 urah, Vinko pa sam v 6 urah. V kolikšnem času bo delo opravljeno, če bosta delala oba skupaj?

80. Prvi delavec opravi neko delo v 8 urah, drugi delavec pa isto delo v 4 urah. Izračunajte, ob kateri uri bo delo opravljeno, če začne prvi delavec delati ob 8.00, drugi pa ob 10.00.

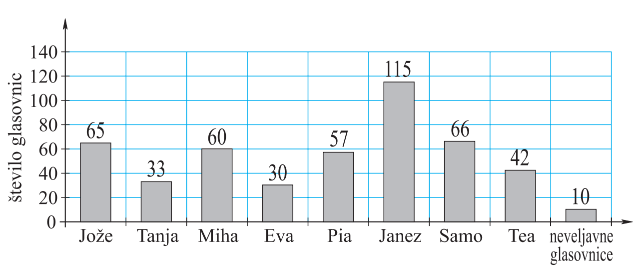
81. Trije gozdarji očistijo $\frac{3}{4}$ gozda v 40 urah.
a) V kolikšnem času bi isto delo opravilo 5 gozdarjev?
b) V kolikšnem času bi celoten gozd očistilo 5 gozdarjev?

82. V trgovini smo nabrali blago v vrednosti 286 EUR. Nato so nam priznali 4 % gotovinski popust. Koliko evrov smo plačali pri blagajni?

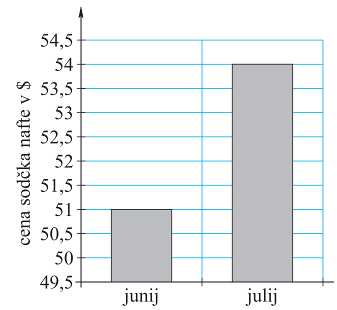
83. Cena vozne karte se je podražila s 35 EUR na 37˙38 EUR. Koliko odstotna je bila podražitev?

84. Na posezonskem znižanju tkanin se je cena puloverja znižala z 68 EUR na 62˙90 EUR. Koliko odstotna je bila pocenitev?

85. Spodnji grafikon prikazuje rezultate volitev (število prejetih glasov posameznega kandidata) za predsednika šolske dijaške skupnosti. Zapišite ime zmagovalca in izračunajte, kolikšen odstotek vseh glasov je dobil.

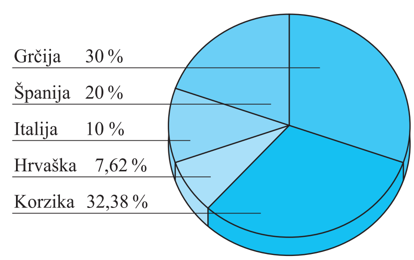


86. V časopisu so objavili naslednji grafikon, pod katerim je pisalo: Velika rast cene sodčka nafte.



Izračunajte, za koliko odstotkov je cena sodčka nafte resnično porasla.

87. S spodnjim frekvenčnim kolačem so prikazani deleži odgovorov dijakov na vprašanje, kam si želijo na maturantsko strokovno ekskurzijo. Izračunajte število posameznih odgovorov, če je odgovor Hrvaška izbralo 16 dijakov. Koliko je bilo vseh anketirancev?



88. Cena izdelka je 200 EUR. Najprej so jo znižali za 5 %. Izračunajte ceno izdelka. Nato so na razprodaji ceno izdelka znižali za četrtino. Kolikšna je bila cena izdelka po tej pocenitvi? Nato so ceno zvišali za 10 %. Kolikšna je cena izdelka po zadnji podražitvi? Kolikšno je skupno znižanje cene izdelka v evrih? Za koliko odstotkov se je po vseh spremembah zmanjšala prvotna cena?

89. Cena para čevljev po 12 % podražitvi je 89˙60 EUR. Kolikšna je bila cena para čevljev pred podražitvijo?

90. Po dveh podražitvah po 20 % stane pulover 93˙60 evrov. Koliko je stal pulover pred obema podražitvama?

91. Cena moške srajce po 15 % podražitvi je 46 EUR.
a) Kolikšna je bila cena srajce pred podražitvijo?
b) Koliko odstotna bi morala biti pocenitev moške srajce, da bi bila cena enaka kot pred podražitvijo?

92. Cena para čevljev po 22 % pocenitvi je 62'40 EUR. Kolikšna je bila cena tega para čevljev pred pocenitvijo?

93. Ob kulturnem prazniku je knjigarna ceno leksikona znižala za 10 %. Znižana cena leksikona je 100 EUR. Janez je izračunal, da cena leksikona brez popusta znaša 110 EUR. Ugotovite, ali je Janez izračunal pravilno.

94. Cena izdelka po 30-odstotni podražitvi znaša 455 EUR. Izračunajte prvotno ceno izdelka. Za koliko evrov je ta cena višja od cene, ki bi jo dobili, če bi prvotno ceno povečali le za 25 %?

95. Cena avtomobila z 8'5 % davkom na dodano vrednost je bila 39 602 EUR. Kolikšna je cena tega avtomobila danes, ko je davek na dodano vrednost 20 %?

96. Športna majica se je v maju podražila za 15 %, nato pa še v juniju za 8 %. Tako je po obeh podražitvah stala 74'52 EUR.
a) Koliko je stala majica pred obema podražitvama?
b) Koliko odstotna bi morala biti pocenitev, da bi majica stala toliko kot pred podražitvama?

97. Tovarna avtomobilov proizvede letno 20 % enoprostorcev, od tega jih je 40 % sive barve. Kolikšen odstotek vseh letno proizvedenih avtomobilov te tovarne je enoprostorcev sive barve?

98. Na sestanku upokojenskega športnega društva so ugotovili, da 65 % članov redno samo balina, 45 % igra samo pikado, 4 člani pa igrajo pikado in balinajo. Koliko članov je v športnem društvu? Koliko članov društva igra samo pikado in koliko jih samo balina?

99. Blago se je podražilo dvakrat zaporedoma po 20 %. Koliko odstotna je bila skupna podražitev?

100. Blago se je pocenilo dvakrat zaporedoma po 25 %. Koliko odstotna je bila skupna pocenitev?

101. Izdelek je stal x evrov. Trgovec ga je najprej pocenil za 20 %, nato pa dvakrat zaporedoma podražil za 10 %. Za koliko odstotkov je končna cena nižja od prvotne cene?

102. Aleš je posodil Boštjanu 1250 EUR, ob tem sta se dogovorila za 6 % obresti. Koliko evrov mora Boštjan vrniti Alešu?

103. Jure je v začetku leta vložil v banko 2000 evrov. Banka obrestuje vloge po 3 % letni obrestni meri z letnim pripisom obresti. Izračunajte, koliko denarja bo imel Jure po enem letu varčevanja in koliko po štirih letih varčevanja.

104. V razredu s 30 učenci je 80 % učencev opravilo angleško bralno značko, 60 % nemško bralno značko, 4 pa nobene bralne značke. Izračunajte, koliko učencev je opravilo obe bralni znački.

105. V podjetju je 10 % zaposlenih mlajših od 25 let, polovica je starih med 25 in 40 let, tretjina med 40 in 50 let, 10 zaposlenih pa je starejših od 50 let. Izračunajte, koliko ljudi je zaposlenih v podjetju.

106. Najboljši trije na šahovskem turnirju dobijo denarne nagrade. Drugi dobi 25 % manj od prvega, tretji pa dve tretjini drugega. Koliko denarja dobi vsak, če skupaj dobijo 1350 evrov?

107. Sošolci Jure, Žan in Nejc so za sodelovanje v kvizu pridobili nagrado 210 evrov. Dogovorili so se, da Žan dobi 35 % celotne nagrade, ostanek pa si Jure in Nejc razdelita v razmerju 2 : 3. Izračunajte zneske, ki jih dobi vsak od sošolcev.

108. V letu 2002 sta tovarni orodja A in B izdelali enako število izdelkov, in sicer vsaka po 1 000 000. Potem je tovarna A vsako leto povečala proizvodnjo za 12 %, tovarna B pa za 120 000 izdelkov.
a) Koliko izdelkov bosta v letih 2003, 2004 in 2005 izdelali posamezni tovarni in koliko skupaj? Rezultate vpišite v spodnjo tabelo.

	tovarna A	tovarna B
leto 2002		
leto 2003		
leto 2004		
leto 2005		
skupaj leta od 2002 do 2005		

b) Za koliko odstotkov je bila v letu 2005 proizvodnja tovarne A večja od proizvodnje tovarne B?

c) Za koliko odstotkov je bila v letih od 2002 do 2005 skupna proizvodnja tovarne *A* večja od proizvodnje tovarne *B*?

109. Prva zlitina ima 40 % bakra, druga pa 32 %. S koliko kilogrami prve zlitine je treba zmešati 5 kg druge zlitine, da bi dobili 35 % zlitino bakra?

110. Če pomešamo vročo vodo s temperaturo 76 °C in hladno vodo s temperaturo 12 °C, dobimo 96 litrov vode s temperaturo 40 °C. Koliko litrov vroče vode smo vzeli?

111. V morski vodi je 4˙5 % soli. Koliko sladke vode je treba priliti v 40 litrov morske vode, da bi dobili 2 % raztopino soli?

112. Ena vrsta dušikove kisline ima 30 % koncentracijo, druga 55 %. Koliko litrov posamezne kisline je treba zmešati, da dobimo 25 litrov 50 % kisline?

113. Števili a in b sta v razmerju $a : b = 5 : 7$. Če število a zvečamo za 25 %, število b pa zmanjšamo za 25, je dobljeno prvo število za 16 večje od dobljenega drugega števila. Izračunajte števili a in b.

5. REALNA ŠTEVILA

Števila, katerih decimalni zapis ima neskončno decimalk, imenujemo **neskončna decimalna števila**. Mednje lahko štejemo tudi števila, katerih zapis je končen (saj jim lahko na koncu dodamo neskončno ničel). Čeprav je množica racionalnih števil na številski premici gosta, saj je med dvema racionalnima številoma neskončno racionalnih števil, pa so na številski premici tudi točke, ki ne predstavljajo racionalnih števil. Ker vsako **racionalno število** (ulomek) zapišemo bodisi kot **končno decimalno število** bodisi kot **neskončno periodično decimalno število**, točke na številski premici, ki ne predstavljajo racionalnih števil, predstavljajo tista števila, katerih zapis je neskončen in neperiodičen. **Števila**, **katerih** decimalni zapis je **neskončen neperiodičen**, imenujemo **iracionalna števila**.

Zato **definiramo**: množica **realnih števil** $\mathbb{R}$ je množica **vseh neskončnih decimalnih števil**. Množica **realnih števil** $\mathbb{R}$ je množica **vseh racionalnih in iracionalnih števil**.

Zapišimo nekaj iracionalnih števil: π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e ...

Zveze med številskimi množicami: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Množico realnih števil ponazorimo na številski premici. To je premica, opremljena s koordinatnim sistemom, ki jo imenujemo tudi **realna os**. **Vsaki točki** $\boldsymbol{A}$ na številski premici pripada **natanko eno realno število** $\boldsymbol{x}$, ki ga imenujemo **koordinata točke** $\boldsymbol{A}$, in to zapišemo $A(x)$. Velja tudi obratno. Vsakemu **realnemu številu** $\boldsymbol{x}$ pripada **natanko ena točka na številski premici**, katere koordinata je ravno to število.

V množici realnih števil so **seštevanje**, **odštevanje**, **množenje in deljenje** tako definirane računske operacije, da se na racionalnih številih ujemajo z znanimi operacijami.

Za računanje z realnimi števili a, b in c veljajo **naslednje lastnosti**:

1. $a + b = b + a$ (komutativnost seštevanja ali zakon o zamenjavi)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativnost seštevanja ali zakon o združevanju)
3. $a + 0 = a$ (0 je nevtralni element za seštevanje)
4. K vsakemu realnemu številu a obstaja natanko eno **nasprotno** celo število $-a$, tako da je $a + (-a) = 0$.
5. $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativnost množenja ali zakon o zamenjavi)
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativnost množenja ali zakon o združevanju)
7. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivnostni ali razčlenitveni zakon)
8. $1 \cdot a = a$ (1 je nevtralni element za množenje)

K vsakemu neničelnemu realnemu številu a obstaja **obratno število** $a^{-1} \in \mathbb{R}$, tako da je $a \cdot a^{-1} = 1$; $a \neq 0$.

Z neničelnim realnim številom **delimo** tako, da **pomnožimo z njegovim obratnim številom**:
$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$; $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

V praksi velikokrat računamo s približnimi vrednostmi (**približki**), saj bodisi točnih vrednosti ne poznamo bodisi žepna računala računajo z natančnostjo le na določeno število decimalnih mest. Zato decimalna števila pogosto **zaokrožujemo** in pri tem upoštevamo: če je prva opuščena števka 0, 1, 2, 3 ali 4, ostanejo števke, ki smo jih obdržali, **nespremenjene**, sicer pa **zadnji števki**, ki smo jo obdržali, **prištejemo 1**.

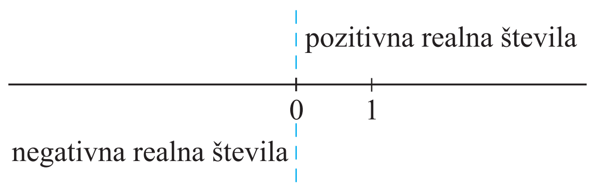
Število 2˙503571 zaokroženo na:

šest mest je 2˙50357
pet mest je 2˙5036
štiri mesta je 2˙504
tri mesta je 2˙50
dve mesti je 2˙5

Urejenost v množici realnih števil

Množico realnih števil lahko zapišemo kot unijo treh paroma disjunktnih podmnožic: množice pozitivnih realnih števil $\mathbb{R}^+$, množice negativnih realnih števil $\mathbb{R}^-$ in števila 0: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$.

Točka na številski premici **predstavlja pozitivno realno število** ($a > 0$) natanko takrat, ko leži na številski premici **desno od 0**, **in negativno realno število** ($a < 0$) natanko takrat, ko leži na številski premici **levo od 0**.



Število ***a* je nenegativno** (v znakih $a \geq 0$), če je večje ali enako 0.

Število ***a* je večje od števila *b*** ($a > b$) natanko takrat, ko je ***a* − *b* pozitivno število**: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

Na številski premici leži točka, ki predstavlja **število *a***, ki je **večje od *b***, **desno glede** na točko, ki predstavlja **število *b***.

Prav tako je število ***a* večje ali enako številu *b* (*a* ≥ *b*)** natanko takrat, ko je ***a* − *b* nenegativno število**:

$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

Vsota in produkt pozitivnih realnih števil sta pozitivni realni števili. Če je število *a* pozitivno, potem je obratno število a^{-1} tudi pozitivno.

Zapisa $a > b$ in $b < a$ sta enakovredna, prav tako tudi zapisa $a \geq b$ in $b \leq a$. Zapisa $a < b$ in $b < c$ lahko združimo v zapis $a < b < c$ oz. iz zapisov $a \leq b$ in $b \leq c$ zapišemo $a \leq b \leq c$.

Če je $a < b$ in $c < d$, potem je $a + c < b + d$. Iz $a < b$ sledi $a + c < b + c$.

Če je $a < b$ in $c > 0$, potem je $ac < bc$, če pa je $a < b$ in $c < 0$, potem je $ac > bc$.

Za števili a in b velja: $3 < a < 5$ in $2 < b < 4$. Ocenimo $a + b$ in $a \cdot b$.

Neenakosti po straneh seštejemo $3 + 2 < a + b < 5 + 4$ in dobimo oceno za vsoto $5 < a + b < 9$.
Ker so vsa števila pozitivna, lahko zapišemo $3 \cdot 2 < a \cdot b < 5 \cdot 4$ in dobimo oceno za produkt $6 < a \cdot b < 20$.

Intervali

Intervali so podmnožice realnih števil.

Odprti interval od a do b je množica realnih števil med a in b: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$.

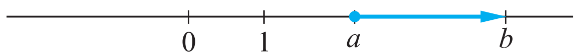
Odprti interval ponazorimo z daljico ab brez krajišč.

Zaprti interval od a do b je množica realnih števil med a in b, vključno z a in b: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$.

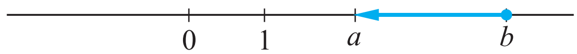
Zaprti interval ponazorimo z daljico ab, vključno s krajiščema.

Podobno definiramo še intervale:

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

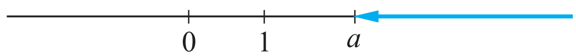


$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

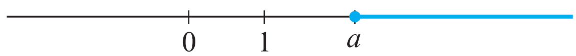


in intervale – poltrake:

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$



$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$



$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$

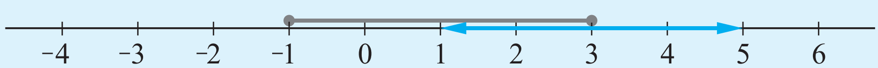
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$

Množico realnih števil lahko zapišemo kot interval: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

1. Množico pozitivnih realnih števil in množico negativnih realnih števil zapišemo z intervaloma: $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ in $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$.

2. Na številski premici narišimo množici števil, ki predstavljata intervala $[-1, 3]$ in $(1, 5)$ in z intervalom zapišimo $[-1, 3] \cup (1, 5)$ ter $[-1, 3] \cap (1, 5)$.

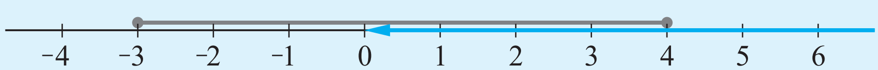
   Narišemo sliko



   in zapišemo $[-1, 3] \cup (1, 5) = [-1, 5)$ ter $[-1, 3] \cap (1, 5) = (1, 3]$.

3. Na številski premici narišimo množici števil, ki predstavljata intervala $[-3, 4]$ in $(0, \infty)$ in z intervalom zapišimo $[-3, 4] \cup (0, \infty)$, $[-3, 4] \cap (0, \infty)$ ter $(0, \infty) - [-3, 4]$.

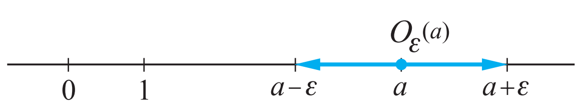
   Narišemo sliko



   in zapišemo $[-3, 4] \cup (0, \infty) = [-3, \infty)$, $[-3, 4] \cap (0, \infty) = (0, 4]$ ter $(0, \infty) - [-3, 4] = (4, \infty)$.

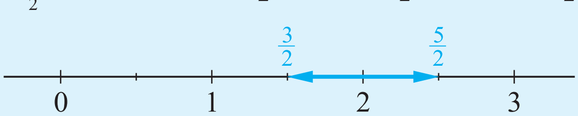
Odprti interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ imenujemo ε – **okolica točke** $\boldsymbol{a}$ in ga označimo $O_\varepsilon(a)$:

$O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$



Kot primer zapišimo $O_{\frac{1}{2}}(2)$ in ga predstavimo na številski premici.

$O_{\frac{1}{2}}(2) = \{x \in \mathbb{R}, 2 - \frac{1}{2} < x < 2 + \frac{1}{2}\} = \{x \in \mathbb{R}, \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}\} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$



Reševanje neenačb

Neenačba je vsak zapis oblike $I(x) < J(x)$, pri čemer sta $I(x)$, $J(x)$ poljubna izraza in x neznanka (včasih tudi t, z ...). **Rešitev neenačbe** je množica tistih števil, za katere je vrednost izraza na levi strani manjša od vrednosti izraza na desni.

Neenačbi sta enakovredni (ekvivalentni), če imata isto množico rešitev.

Pri reševanju neenačb si pomagamo z naslednjimi pravili:

1. Če neenačbi **na obeh straneh prištejemo (odštejemo) isto število (izraz)**, dobimo enakovredno neenačbo:
   $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$.
2. a) Če neenačbo na obeh straneh **množimo (delimo) s pozitivnim številom (izrazom)**, dobimo enakovredno neenačbo:
   $a < b;\ c > 0 \Leftrightarrow ac < bc$.

   b) Če neenačbo na obeh straneh **množimo (delimo) z negativnim številom (izrazom)**, **moramo znak neenakosti obrniti**, da dobimo enakovredno neenačbo:
   $a < b;\ c < 0 \Leftrightarrow ac > bc$.
3. **Če je** $a < b$ **in** $c < d$, **potem je** $a + c < b + d$.

1. Rešimo neenačbi in rešitvi zapišimo z intervalom ter ju predstavimo na številski premici.

a) $(x - 2)^2 - x(x - 7) < x + 8$

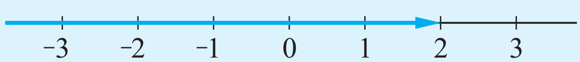
$x^2 - 4x + 4 - x^2 + 7x < x + 8$

$-4x + 7x - x < 8 - 4$

$2x < 4 \quad / :2$

$x < 2$

Rešitev zapišemo z intervalom $x \in (-\infty, 2)$ ter jo predstavimo na številski premici.



b) $\frac{x}{2} - \frac{2x - 3}{3} \leq 3 + 5 \cdot \frac{x}{6} \quad / \cdot 6$

$3x - 2(2x - 3) \leq 18 + 5x$

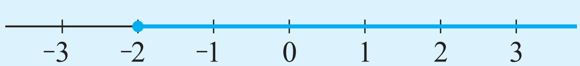
$3x - 4x + 6 \leq 18 + 5x$

$3x - 4x - 5x \leq 18 - 6$

$-6x \leq 12 \quad / :(-6)$

$x \geq -2$

Rešitev zapišemo z intervalom $x \in [-2, \infty)$ ter jo predstavimo na številski premici.



2. Rešimo sistem neenačb $1 + \frac{x}{2} < x - 1 < 5$.

Najprej zapišimo neenačbi $1 + \frac{x}{2} < x - 1$ in $x - 1 < 5$ ter ju rešimo.

Iz $1 + \frac{x}{2} < x - 1$ dobimo $-\frac{x}{2} < -2$ in od tod dobimo rešitev $x > 4$ oz. interval $(4, \infty)$.

Iz $x - 1 < 5$ dobimo rešitev $x < 6$ oz. interval $(-\infty, 6)$.

Rešitev sistema je množica realnih števil, ki zadošča obema neenačbama, to je presek danih intervalov.

Rešitev sistema neenačb je $4 < x < 6$ oz. interval $x \in (4, 6)$.

Absolutna vrednost

Absolutna vrednost realnega števila a je definirana kot $|a| = \begin{cases} a; \ a \geq 0 \\ -a; \ a < 0 \end{cases}$

Geometrijski pomen absolutne vrednosti: Na številski premici je $|a|$ **oddaljenost točke**, ki predstavlja število $\boldsymbol{a}$, **od izhodišča koordinatnega sistema**, $|a - b|$ pa **razdalja med točkama**, ki predstavljata števili $\boldsymbol{a}$ **in** $\boldsymbol{b}$.

1. Izračunajmo absolutne vrednosti števil $3, -3, -0{\cdot}1, \sqrt{2}$ in $-\sqrt{3}$.

Zapišemo $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|-0{\cdot}1| = 0{\cdot}1$, $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

2. Izračunajmo razdalje med točkami, ki predstavljajo števila 2 in 7, 3 in -4 ter -7 in -5.

Izračunamo $|2 - 7| = |-5| = 5$, $|3 - (-4)| = |3 + 4| = 7$ in $|-7 - (-5)| = |-7 + 5| = |-2| = 2$.

Lastnosti absolutne vrednosti realnega števila:

1. $|a| \geq 0$ — Absolutna vrednost je vedno nenegativno realno število.
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ — Absolutna vrednost je enaka 0 natanko takrat, ko je $a = 0$.
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ — Absolutna vrednost produkta je enaka produktu absolutnih vrednosti.
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ — Absolutna vrednost vsote je manjša ali enaka vsoti absolutnih vrednosti (trikotniška neenakost).

1. Izračunajmo $|-4| - |6| \cdot |-2{\cdot}5| + |3 \cdot 8 - 1| - |2 - |-5||$.

$|-4| - |6| \cdot |-2{\cdot}5| + |3 \cdot 8 - 1| - |2 - |-5|| = 4 - 6 \cdot 2{\cdot}5 + |24 - 1| - |2 - 5| = 4 - 15 + |23| - |-3| =$
$= 4 - 15 + 23 - 3 = 9$.

2. Poenostavimo izraz $a + 2 + |a - 2|$.

V skladu z definicijo absolutne vrednosti realnega števila sta možni dve rešitvi.

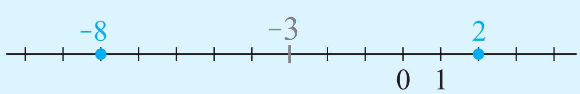
1. Za $a \geq 2$ je vrednost izraza $a - 2$ nenegativno število in je $|a - 2| = a - 2$ ter zato:
   $a + 2 + |a - 2| = a + 2 + a - 2 = 2a$.
2. Za $a < 2$ je vrednost izraza $a - 2$ negativno število in je $|a - 2| = -(a - 2) = -a + 2$ ter zato:
   $a + 2 + |a - 2| = a + 2 - a + 2 = 4$.

3. Rešimo enačbo $|x + 3| = 5$.

I. način: Z odpravljanjem absolutne vrednosti (obravnavanjem) pridobimo dve enačbi.

1. $x + 3 = 5$ z rešitvijo $x = 2$
2. $x + 3 = -5$ z rešitvijo $x = -8$

II. način: S pomočjo geometrijskega pomena absolutne vrednosti realnega števila enačbo preoblikujemo v enačbo $|x - (-3)| = 5$ ter na številski premici poiščemo točki, ki sta za 5 oddaljeni od -3.



4. Rešimo neenačbo $|4 - x| < 1$.

Neenačbo najprej preoblikujemo z $|4 - x| = |-1 \cdot (x - 4)| = |-1| \cdot |x - 4| = |x - 4|$ v enakovredno neenačbo $|x - 4| < 1$.

I. način: Z odpravljanjem absolutne vrednosti (obravnavanjem) pridobimo dve neenačbi.

1. Za $x \geq 4$ lahko zapišemo $x - 4 < 1$ z rešitvijo $x < 5$ oz. $4 \leq x < 5$.
2. Za $x < 4$ lahko zapišemo $-(x - 4) < 1$,

   jo preoblikujemo v $-x + 4 < 1$

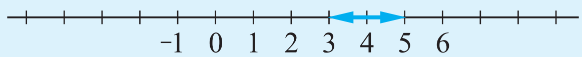
   $-x < 1 - 4$

   $-x < -3 \quad / \cdot (-1)$

   in dobimo rešitev $x > 3$ oz. $3 < x < 4$.

   Zapišemo še celotno rešitev neenačbe $3 < x < 5$ ali z intervalom $x \in (3, 5)$.

II. način: S pomočjo geometrijskega pomena absolutne vrednosti realnega števila je rešitev neenačbe $|x - 4| < 1$ množica vseh realnih števil, katerih točke na številski premici so manj kot za 1 oddaljene od 4.



III. način: Neenačbo z absolutno vrednostjo $|4 - x| < 1$ pretvorimo v enakovreden sistem neenačb $-1 < 4 - x < 1$, ki ga rešimo s preoblikovanjem v neenačbi $-1 < 4 - x$ in $4 - x < 1$ z rešitvama $x < 5$ in $x > 3$.
Rešitev neenačbe $|4 - x| < 1$ je $3 < x < 5$ oz. $x \in (3, 5)$.

Koreni

Definicija korenov poljubne stopnje:

I. Če je ***n*** **(korenski eksponent) sodo naravno število** in ***a*** **nenegativno realno število**, potem je $\sqrt[n]{a}$ (n-ti koren števila a) tisto **nenegativno realno število**, za katerega je $(\sqrt[n]{a})^n = a$, oz. nenegativno rešitev enačbe $x^n = a$ označimo z $x = \sqrt[n]{a}$.

II. Če je ***n*** **(korenski eksponent) liho naravno število** in ***a*** **poljubno realno število**, potem je $\sqrt[n]{a}$ (n-ti koren števila a) tisto **realno število**, za katerega je $(\sqrt[n]{a})^n = a$, oz. rešitev enačbe $x^n = a$ označimo z $x = \sqrt[n]{a}$.

Za lihe korenske eksponente *n* je $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Dogovor: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$, $\sqrt[1]{a} = a$.

Ker v praksi največkrat uporabljamo **kvadratni in kubični koren**, posebej zapišimo njuni definiciji.

Za poljubno **nenegativno** realno število a je $\sqrt{a}$ tako **nenegativno** realno število x, da je $x^2 = a$.
Torej: $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a;\ a, x \geq 0$.

Za **poljubno** realno število a je $\sqrt[3]{a}$ tako realno število x, da je $x^3 = $ a.
Torej: $\sqrt[3]{a} = x \Leftrightarrow x^3 = a;\ a, x \in \mathbb{R}$.

Izračunajmo naslednje korene.

1. $\sqrt{64} = 8$, ker je $8^2 = 64$.
2. $\sqrt[3]{27} = 3$, ker je $3^3 = 27$.
3. $\sqrt[4]{16} = 2$, ker je $2^4 = 16$.
4. $\sqrt{0} = 0$, ker je $0^2 = 0$.
5. $\sqrt[3]{-8} = -2$, ker je $(-2)^3 = -8$.
6. $\sqrt{-25}$ ni realno število.
7. $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$
8. $(\sqrt{-5})^2$ ni realno število, saj $\sqrt{-5}$ ni realno število.
9. $\sqrt[3]{-1} = -1$, ker je $(-1)^3 = -1$.

Za poljubna naravna števila n, m in r veljajo naslednja **pravila za računanje s koreni**:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$
3. $\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Opomba: Pri sodih korenskih eksponentih morata biti $a, b \geq 0$.

1. Delno korenimo $\sqrt{8}$ in $\sqrt[3]{16}$.

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

2. Izračunajmo $\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$.

$\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{75} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} - \sqrt{25 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = \sqrt{3}$

3. Izračunajmo $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{(-4)^2}$.

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{(-4)^2} =$

$= (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 - \sqrt{16} = 3 - 2\sqrt{6} + 2 + 2 - 3 - 4 = -2\sqrt{6}$

4. Racionalizirajmo imenovalca $\frac{3}{\sqrt{6}}$ in $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

$\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \dfrac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2} = \dfrac{2(3-2\sqrt{2})}{2} = 3 - \sqrt{2}$

5. Za $a \geq 0$ delno korenimo $\sqrt{a^3}$.

$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$

6. Izraz $\sqrt{a^3} + \sqrt[3]{a^4}$ delno korenimo in zapišimo produkt.

$\sqrt{a^3} + \sqrt[3]{a^4} = a\sqrt{a} + a\sqrt[3]{a} = a(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a})$

7. Izračunajmo $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{27}$.

$\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^2 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3} = 3 \cdot \sqrt[4]{3}$

8. Izračunajmo $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}} : \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}}$.

$\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}} : \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^{-2}} : \sqrt[6]{(2^{-2})2 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^{3+(-2)} : 2^{-4+1}} = \sqrt[6]{2^{1-(-3)}} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

9. Za pozitivno število a lahko izraz $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a}}$ poenostavimo.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2 \cdot a} = \sqrt[6]{a^6} = a$

10. Naj bo $a, b > 0$. Poenostavimo.

a) $\dfrac{\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{2a^2b}}}{\sqrt[3]{2ab^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^3 \cdot 2a^2b}{2^2a^2b^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{a^3}{2b^3}}$

b) $\sqrt{ab \cdot \sqrt[3]{a^2b}} : \sqrt[3]{ab^2 \cdot \sqrt[4]{a^3b^3}} = \sqrt[12]{a^6b^6 \cdot a^4b^2} : \sqrt[12]{a^4b^8 \cdot a^3b^3} = \sqrt[12]{a^{10}b^8 : a^7b^{11}} = \sqrt[12]{a^3b^{-3}} = \sqrt[4]{ab^{-1}}$

Enačbe s koreni

Enačbe s koreni so enačbe, v katerih nastopa vsaj en člen s korenom poljubne stopnje. Rešitev enačbe je množica tistih realnih števil, za katere je vrednost izraza na levi strani enačbe enaka vrednosti izraza na desni. Te enačbe rešujemo tako, da najprej prenesemo člene s koreni na svojo stran, nato pa vsako stran enačbe posebej potenciramo z istim eksponentom. Z večkratno ponovitvijo tega postopka dobimo enačbo brez korenov, ki jo z že znanimi postopki rešimo. Vendar enačba brez korenov ni enakovredna prvotni enačbi, saj smo s potenciranjem kakšno rešitev pridobili. Zato na koncu vedno napravimo preizkus.

1. Ugotovimo, ali sta enačbi $x^2 = 25$ in $x = \sqrt{25}$ enakovredni.

Iz $x^2 = 25$ lahko zapišemo $x^2 - 25 = 0$ in razstavimo $(x - 5)(x + 5) = 0$ ter zapišemo rešitvi $x_1 = 5$ in $x_2 = -5$.
Iz $x = \sqrt{25}$ pa dobimo rešitev $x = 5$.
Ker enačbi nimata iste množice rešitev, nista enakovredni.

2. Rešimo enačbo $\sqrt{3x - 5} + 1 = x - 2$.

Člen s korenom vedno pustimo samega na eni strani enačbe $\sqrt{3x - 5} = x - 3 \;/\; ^2$,
posamezno stran enačbe kvadriramo $3x - 5 = x^2 - 6x + 9$,
vse člene prenesemo na eno stran $x^2 - 9x + 14 = 0$,
enačbo razstavimo $(x - 2)(x - 7) = 0$
in zapišemo rešitvi $x_1 = 2$ in $x_2 = 7$.

Obvezno napravimo preizkus:
I. Ker je leva stran enačbe $\sqrt{3 \cdot 2 - 5} + 1 = \sqrt{1} + 1 = 1 + 1 = 2$ in desna stran $2 - 2 = 0$, število $x = 2$ ni rešitev dane enačbe.
II. Ker je leva stran enačbe $\sqrt{3 \cdot 7 - 5} + 1 = \sqrt{16} + 1 = 4 + 1 = 5$ in desna stran $7 - 2 = 5$, je število $x = 7$ rešitev dane enačbe.

3. Rešimo enačbo $\sqrt[3]{2x^3 + 8} - x = 0$.

Enačbo preoblikujemo v $\sqrt[3]{2x^3 + 8} = x \;/\; ^3$
$2x^3 + 8 = x^3$
$x^3 = -8$
Ker je eksponent liho število, lahko zapišemo rešitev enačbe $x = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Potence z racionalnimi eksponenti

Za poljubno pozitivno realno število a, naravno število n in celo število m definiramo potenco z racionalnim eksponentom: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

1. Zapišimo s korenom $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$ in $a^{\frac{3}{4}}$.

Zapišemo $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ in $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$.

2. Izračunajmo $8^{\frac{2}{3}}$ in $(\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}}$.

Pišemo $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ in $(\frac{1}{9})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{(\frac{1}{9})^{-1}} = \sqrt{9} = 3$.

Če sta a in b poljubni pozitivni realni števili, m in p celi števili ter n in q naravni števili, **za računanje s potencami z racionalnimi eksponenti veljajo že znana pravila**:

1. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
2. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
3. $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$
4. $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$
5. $(\frac{a}{b})^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

1. Na dva različna načina izračunajmo $4^{\frac{3}{2}}$.

$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{64} = 8$ in $4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^{2\cdot\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

2. Za $a > 0$ poenostavimo $(a^{-\frac{3}{5}})^2 \cdot (a^{\frac{2}{5}})^3$.

$(a^{-\frac{3}{5}})^2 \cdot (a^{\frac{2}{5}})^3 = a^{-\frac{3}{5}\cdot 2} \cdot a^{\frac{2}{5}\cdot 3} = a^{-\frac{6}{5}+\frac{6}{5}} = a^0 = 1$

3. Za $a > 0$ poenostavimo $(a^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}})^3 : \sqrt[4]{a^{-3}}$.

$(a^{-\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}})^3 : \sqrt[4]{a^{-3}} = a^{-\frac{2}{3}\cdot 3} \cdot a^{\frac{3}{4}\cdot 3} : a^{-\frac{3}{4}} = a^{-2+\frac{9}{4}-(-\frac{3}{4})} = a^1 = a$

4. Vsa števila zapišimo kot potence z osnovo 2 in natančno izračunajmo $8^{\frac{4}{3}} + 0{,}25^{-\frac{1}{2}}$.

$8^{\frac{4}{3}} + 0{,}25^{-\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} + (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} = 2^{3\cdot\frac{4}{3}} + (2^{-2})^{-\frac{1}{2}} = 2^4 + 2^{(-2)(-\frac{1}{2})} = 16 + 2^1 = 18$

5. Pisno izračunajmo $16^{-\frac{1}{2}} - 0{,}25^{1{,}5}$.

$16^{-\frac{1}{2}} - 0{,}25^{1{,}5} = (2^4)^{-\frac{1}{2}} - (\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}} = 2^{4(-\frac{1}{2})} - 2^{-2\cdot\frac{3}{2}} = 2^{-2} - 2^{-3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$

6. Pisno izračunajmo $(8 \cdot 3)^{\frac{5}{6}} \cdot (2 \cdot 3)^{-\frac{1}{3}} : (3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}})$.

$(8 \cdot 3)^{\frac{5}{6}} \cdot (2 \cdot 3)^{-\frac{1}{3}} : (3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}) = (2^3 \cdot 3)^{\frac{5}{6}} \cdot (2 \cdot 3)^{-\frac{1}{3}} : (3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}) = 2^{3\cdot\frac{5}{6}} \cdot 3^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} : (3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}}) =$

$= 2^{\frac{5}{2}-\frac{1}{3}-\frac{7}{6}} \cdot 3^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{15-2-7}{6}} \cdot 3^{\frac{5-2-3}{6}} = 2^1 \cdot 3^0 = 2$

7. Pisno izračunajmo $\dfrac{108^{-\frac{1}{3}} \cdot 9^{1,5}}{\sqrt[3]{0,25}}$.

$$\frac{108^{-\frac{1}{3}} \cdot 9^{1,5}}{\sqrt[3]{0,25}} = (4 \cdot 27)^{-\frac{1}{3}} \cdot (3^2)^{\frac{3}{2}} : (\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{3}} = (2^2 \cdot 3^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^3 : (2^{-2})^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^{-1} \cdot 3^3 : 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}-(-\frac{2}{3})} \cdot 3^{-1+3} =$$
$$= 2^0 \cdot 3^2 = 9$$

8. Naj bo $a > 0$. Poenostavimo dani izraz.

$$\frac{\sqrt[3]{6^4}}{6^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{6^{\frac{4}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{1}{3}}(1-2a)}{a^{\frac{1}{3}}} = 6^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} - (1-2a) = 6^1 - 1 + 2a = 5 + 2a$$

1. Dano število 1·5654798 zaokrožite na:
a) 4 mesta,
b) 2 mesti.

2. Dano število 23·7354792 zaokrožite na:
a) 4 decimalna mesta,
b) 3 decimalna mesta.

3. Za $a = 4{\cdot}378$ in $b = 0{\cdot}93$ izračunajte $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ in $a : b$ ter rezultate zaokrožite na tri mesta.

4. Za števili a in b velja: $-2 < a < 6$ in $-3 < b < 4$. Ocenite $a + b$, $a - b$ in $a \cdot b$.

5. Dane množice zapišite z intervali.
a) $A = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 3\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R}; 1 \le x \le 4\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x \le 2\}$
č) $D = \{x \in \mathbb{R}; x < 5\}$
d) $E = \{x \in \mathbb{R}; 2 \le x\}$

6. Zapišite presek in unijo danih intervalov.
a) $(-2, 1)$ in $(-1, 4)$
b) $[-4, -1]$ in $[-3, 2]$
c) $[1, 2]$ in $(-1, 1)$
č) $(-2, \infty)$ in $[-5, 5]$
d) $(-\infty, 4]$ in $(2, 6)$

7. Dana sta intervala $(-3, 3)$ in $[-1, 5]$. Z intervali zapišite naslednje množice.
a) $A = (-3, 3) \cap [-1, 5]$
b) $B = (-3, 3) \cup [-1, 5]$
c) $C = [-1, 5] - (-3, 3)$
č) $D = \mathbb{R}^+ - [-1, 5]$
d) $E = \mathbb{R} - (-3, 3)$
e) $F = D \cap E$

8. Rešite neenačbe ter rešitve predstavite na številski premici in jih zapišite z intervalom.
a) $x < 1 - \frac{2x - 14}{2}$
b) $2 - \frac{1 - x}{3} < \frac{3 + 5x}{2}$
c) $(3x - 1)^2 \le 1 - 3 \cdot (2 - 3x^2)$

9. Za katere vrednosti x je neenakost $3x + \frac{3}{2} \ge 2 - \frac{x}{4}$ pravilna?

10. Rešite neenačbe ter rešitve zapišite z intervalom.
a) $3x - \frac{x - 1}{2} \le \frac{1}{2} - 2x$
b) $0{\cdot}3 - \frac{4x - 2}{5} < \frac{3x}{10}$
c) $(\frac{x}{2} - \frac{2}{3})^2 - (\frac{x}{2} + \frac{1}{3})^2 \ge 1\frac{1}{3}$
č) $(x - 2)^3 - (x + 2)^3 < 2(1 - 2x)(1 + 3x)$

11. Množica A je množica rešitev neenačbe $10 - 4x > 3(1 - x)$, množica B je množica rešitev neenačbe $3{\cdot}5 + \frac{x}{4} < 2x$. Rešite neenačbi, zapišite množici A in B ter $A \cap B$.

12. Rešite sisteme neenačb.
a) $6 - 2x > 3(x - 3)$ in $0{\cdot}5 - \frac{x}{2} < x$
b) $\frac{4x - 3}{5} - 0{\cdot}1 > \frac{x}{2}$ in $\frac{4 - x}{2} > \frac{x}{3}$
c) $x - \frac{2 - x}{3} > \frac{5x - 2}{4}$ in $\frac{3x - 2}{4} - 0{\cdot}2\, x \le 2 - \frac{x}{5}$

13. Rešite sistem neenačb $3 - x \le \frac{x}{2} + 3 < \frac{11}{2} - 2x$.

14. Dana je enačba $2(x-a)=3(1-x)$, pri čemer je x neznanka in a poljubno realno število.

a) Rešite enačbo.
b) Za katera realna števila a bodo rešitve enačbe večje od 5?

15. Dana je neenačba $-\frac{2}{3}x-\frac{m}{12}\geq\frac{5m}{4}$, pri čemer je x neznanka in m poljubno realno število.

a) Rešite neenačbo.
b) Za katero realno število m bo $x\leq 1$ rešitev neenačbe?

16. Pisno izračunajte
$\left||-1|-|-9|\right|+|2\cdot(-6)|+\left|5-|-1|\right|$.

17. Za $a=-\frac{1}{2}$ in $b=\frac{2}{3}$ izračunajte vrednost izraza
$\frac{a|b|-b|a|}{|a|-|b|}$.

18. Izračunajte vrednost izraza $\frac{a|a-b|-b|a+b|}{|a-b|-|a+b|}$, če je:

a) $a=-1$ in $b=-3$
b) $a=-\frac{1}{2}$ in $b=-\frac{2}{3}$

19. Za $x=1-\sqrt{2}$ izračunajte vrednost izraza $\left||x|-1\right|$.

20. Pisno izračunajte.

a) $\left|(-3)^3+|-15|\right|+\left|12-\sqrt{5}\right|$
b) $\left|-2-|7-9|\right|+\left|-2\sqrt{6}\right|+\left|3-\sqrt{6}\right|+\left|\sqrt{6}-3\right|$
c) $\left||-2|-|5-8|-3^0\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|-\left|\sqrt{3}-3\right|$

21. Izračunajte razdaljo med točkama, ki ju predstavljata dani števili.

a) 7, 4
b) −1, 5
c) −3, −12

22. Poenostavimo izraz $a+|a-3|$.

23. Glede na predznak realnega števila $a\neq 0$ poenostavimo izraz $\frac{|a|+1}{|a|}+\frac{|a|-1}{a}$.

24. Rešite enačbe.

a) $|x|=5$
b) $|-2x|=6$
c) $|3x|=-9$
č) $|x-1|-2=0$
d) $|3-x|=1$
e) $|3x+2|=\frac{1}{3}$
f) $|x+2|=|x-2|$
g) $|2x-1|=x$
h) $x-|x+1|=0$
i) $|5-2x|=|3x+2|$
j) $\left|\frac{x}{x-3}\right|=\frac{1}{2}$

25. Rešite neenačbe in rešitev zapišite z intervalom.

a) $|x-3|<4$
b) $|x+2|\leq 3$
c) $|4-3x|<1$
č) $|2x-1|>3$
d) $|3-x|>1$
e) $|1+4x|\geq 3$

26. Na številski premici narišite množico točk A, ki so od točke s koordinato 2 oddaljene manj kot za 3, in dano množico opišite z neenačbo in intervalom.

27. Na številski premici narišite množico točk B, ki so za več kot za 3 oddaljene od točke s koordinato −1, in dano množico opišite z neenačbo in intervali.

28. Naj bo množica A množica realnih števil, ki so večja od −4 in manjša ali enaka 2, množica B pa množica realnih števil, ki so večja ali enaka −2 in manjša od 5, in množica C množica realnih števil, ki so od števila 1 oddaljena kvečjemu za 3.

a) Dane množice opišite z neenačbami in intervali ter jih predstavite na številski premici.
b) Zapišite presek in unijo množic A in B.
c) Ali je $C\subset A$ in ali je $C\subset B$?

29. Izračunajte.

a) $\sqrt{72\cdot 18}+\sqrt{45\cdot 5}$
b) $\sqrt[3]{25\cdot 36\cdot 240}$

30. Delno korenite.

a) $2\sqrt{98}-\sqrt{50}$
b) $\sqrt{125}+\sqrt{180}-5\sqrt{20}$
c) $\sqrt{27}+2^{-1}\cdot\sqrt{192}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{108}$
č) $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{192}$

31. V množici realnih števil razstavite dane izraze.

a) x^2-9
b) x^2-2
c) x^2+3
č) x^2-18
d) x^3+x^2-3x-3
e) $x^3+2x^2-5x-10$

32. Rešite enačbi.

a) $x^2 - 5 = 0$ b) $x^3 - x^2 + 2 = 2x$

33. Natančno izračunajte vrednosti izrazov.

a) $(\sqrt{15} - \sqrt{6})(\sqrt{10} + 2)$

b) $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 - \sqrt{32}$

c) $\sqrt{200} - (\sqrt{10} + \sqrt{5})^2$

č) $\sqrt{864} - (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$

d) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{96}$

e) $(\sqrt[3]{-16})^3 + (\sqrt[3]{-5})^2 \cdot \sqrt[3]{-5}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{640}}{\sqrt[3]{2700 \cdot 10^2}}$

34. Natančno izračunajte vrednost izraza

$\sqrt{\frac{2}{(-3)^2} \cdot ((\frac{5}{6})^{-1} + 5^{-1}) : 2\frac{1}{7}}$.

35. Izračunajte.

a) $\sqrt{2{,}56 \cdot 10^{-2}} + 2 \cdot \sqrt[3]{0{,}008}$

b) $\sqrt[3]{0{,}09 \cdot 300} + 5 \cdot \sqrt{0{,}16}$

36. Izraz $(2 - \sqrt{3})^3$ zapišite v obliki $m + n\sqrt{3}$, pri čemer sta m in n celi števili.

37. Ugotovite, ali je vrednost izraza $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) - \sqrt{84}$ celo število.

38. Racionalizirajte imenovalce.

a) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ č) $\frac{7}{3 - \sqrt{2}}$

b) $\sqrt{\frac{4}{3}}$ d) $\frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3}$ e) $\frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}$

39. Ugotovite, ali velja $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$.

40. Izračunajte $B : A$ in $\frac{B^2}{A}$, če je $A = \sqrt{2}$ in $B = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

41. Delno korenite, racionalizirajte imenovalec in natančno izračunajte.

a) $\sqrt{27} - 2^{-1} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{48} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{-8}{27}} + \frac{3}{\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{8} + \sqrt{32} + 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{-27}{8}} - \frac{12}{\sqrt{2}} + 3^{-1} \cdot \sqrt{18}$

42. Racionalizirajte imenovalec in izračunajte

$(1 - \sqrt{3})^2 - \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3} - 1}$.

43. Poiščite natančno vrednost izraza

$7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} - (2 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{32}$.

44. Dan je izraz $\frac{a}{\sqrt{a}} - \frac{2a - 2}{\sqrt{a} + 1}$, pri čemer je a poljubno od 0 različno realno število.

a) Poenostavite dani izraz.

b) Za $a = 4^{-1}$ izračunajte vrednost danega izraza.

45. Rešite enačbe.

a) $\sqrt{x + 2} = x$

b) $x - 1 = \sqrt{x + 1}$

c) $8 - 2\sqrt{2x + 3} = 6$

č) $\sqrt{7x + 1} = 2\sqrt{x + 4}$

d) $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{1 - 4x^2} = 0$

e) $\sqrt{5x - 6} \cdot \sqrt{5x + 6} = 8$

f) $\sqrt{6 + x} \cdot \sqrt{6 - x} = x$

46. Poiščite vsa realna števila x, ki zadoščajo enačbi

$\sqrt{x} = 5 - \frac{4}{\sqrt{x}}$.

47. Rešite enačbe.

a) $\sqrt[3]{3x^3 - 101} = -5$

b) $x - \sqrt[3]{x^3 - x - 2} = 0$

c) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{x + 1}} = 1$

č) $\sqrt[3]{5 + \sqrt{x^2 + 5}} = 2$

d) $\sqrt{x + 5} - 1 = \sqrt{x}$

e) $\sqrt{x} = \sqrt{x + 7} - 1$

48. Zapišite elemente množic A, B, C in D ter $B \cap D$.

a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ |x - 1| = 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}^-;\ |x - 3| < 2\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 2 = 0\}$

č) $D = \{x \in \mathbb{R};\ \sqrt{4x - 3} - x = 0\}$

49. Izračunajte.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ d) $\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt{2}}$

b) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[12]{5}$ e) $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{27}} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[3]{9}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[4]{8}$ f) $\sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}} : \sqrt[6]{4 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}}$

č) $\sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[3]{3}}$

50. Za nenegativni realni števili a in b natančno pisno izračunajte.

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^5}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^9}} : \sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}}$

č) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a} : \sqrt[3]{\sqrt{a}}$

d) $\sqrt[3]{2a^{-1}b} \cdot \sqrt[4]{4a^2b^{-2}}$

e) $\sqrt[3]{ab^2 \cdot \sqrt{a^{-1}b}} : \sqrt[6]{a^{-2}\sqrt{b}}$

f) $\sqrt{\dfrac{2a\sqrt[3]{2b}}{b\sqrt{2ab}}} : \sqrt[12]{2a^{-1}b}$

g) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{ab^2}} \cdot \sqrt{8\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{2b^2\sqrt{2a}}}$

51. Za $a = \sqrt{3}$ in $b = \sqrt{2}$ natančno izračunajte vrednost izraza $\sqrt{\dfrac{a^4 b}{\sqrt{81b^2}}} + \sqrt{\dfrac{(ab)^5}{\sqrt{6}}}$.

52. Poenostavite izraz $\dfrac{\sqrt{3b^{-1}} \cdot \sqrt[4]{9ab}}{\sqrt[4]{a^{-1}b^3}}$ in za $a = 196$ in $b = 7$ izračunajte njegovo vrednost.

53. Natančno pisno izračunajte.

a) $5^0 - \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{5}{9}\right)^{-1}$

b) $0{,}25^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} + 3^{-3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

c) $2 \cdot 3^{-2} + 4^0 \cdot (-2)^2 \cdot \left(\frac{36}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{4}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$

č) $\sqrt{9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{0{\cdot}5} + \sqrt{81} \cdot 0{,}027^{-\frac{2}{3}}$

d) $0{,}04^{-\frac{1}{2}} + 8^{\frac{2}{3}} - \sqrt{16^{\frac{1}{4}} - 13^0}$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0{\cdot}81)^{-0{\cdot}5}$

54. Poenostavite.

a) $\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-4}$

b) $\left(a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{-2} \cdot a \cdot \sqrt[3]{a}$

c) $\left(a^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{a^{-4}}\right)^{-0{,}8} : \left(a\sqrt[3]{a}\right)$

55. Natančno izračunajte vrednost izrazov, tako da vsa števila zapišete kot potence z osnovama 2 in 3 in racionalnim eksponentom.

a) $\dfrac{16^{-0{,}75}}{24^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{9}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{0{,}125}}{48^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{27}}$

56. Pokažite, da je

$$\left(\frac{(-3)^0}{5}\right)^{-2} \cdot 7^{\frac{1}{2}} + \frac{75}{2 - \sqrt{7}} + 2 \cdot 0{,}008^{-\frac{2}{3}} = 0.$$

57. Poenostavite izraz $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3a\sqrt{b}} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot b^{-\frac{1}{3}}}{9 \cdot \left(a^2 b^{-\frac{1}{2}}\right)^3}$ do oblike $3^k \cdot a^m \cdot b^n$, pri čemer so k, m in n racionalna števila.

58. Dan je izraz $\left(a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} : (ab)^{\frac{3}{4}}$.

a) Poenostavite izraz v obliko $a^p b^r$, pri čemer sta p in r racionalni števili.

b) Za $a = \frac{1}{16}$ in $b = 2$ izračunajte vrednost izraza.

59. Poiščite tako realno število x, da bo

$$\frac{\sqrt{9} \cdot 4^{\frac{1}{2}} \cdot (-3)^{-1}}{(-8)^{\frac{1}{3}}} = x \cdot 100^{-\frac{3}{2}}.$$

60. Poenostavite izraz $\dfrac{\left(x^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) \cdot \sqrt{x\sqrt{x}}}{y\sqrt{y} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot y\right)^{-\frac{3}{2}}}$ in za $x = 9$ ter $y = 2$ izračunajte njegovo vrednost.

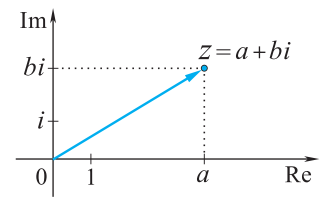
61. Pokažite, da velja $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} - 3a^{\frac{2}{3}}} \cdot (1 - 3a^{-1}) = a^{-1}$.

6. KOMPLEKSNA ŠTEVILA

Množica kompleksnih števil je množica vseh števil oblike $\boldsymbol{z = a + bi}$, pri čemer sta $\boldsymbol{a}$ **in** $\boldsymbol{b}$ **realni števili** in $\boldsymbol{i}$ **imaginarna enota**, za katero velja $\boldsymbol{i^2 = -1}$: $C = \{z = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R} \text{ in } i^2 = -1\}$.

Število $\boldsymbol{a}$ **je realna komponenta**, število $\boldsymbol{b}$ **pa imaginarna komponenta** kompleksnega števila z: $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.
Zveze med številskimi množicami $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

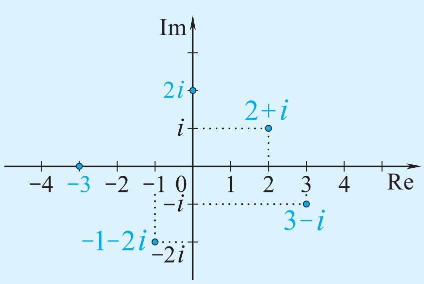
Geometrijska upodobitev kompleksnih števil: Kompleksna števila ponazorimo s točkami ali krajevnimi vektorji teh točk v kompleksni ravnini, ki jo določata pravokotni premici. **Vodoravna premica** je **realna os** z **enoto 1**, **navpična os** je **imaginarna os** z **enoto** $\boldsymbol{i}$. Tako točke na **abscisni osi** predstavljajo **realna števila** (imaginarna komponenta je 0), točke na **ordinatni osi** pa **imaginarna števila** (realna komponenta je 0).



1. Za dana kompleksna števila $3 + 4i$, $-2 + i$, 3, $-2i$ zapišimo realno in imaginarno komponento.

$\operatorname{Re}(3 + 4i) = 3$, $\operatorname{Im}(3 + 4i) = 4$
$\operatorname{Re}(-2 + i) = -2$, $\operatorname{Im}(-2 + i) = 1$
$\operatorname{Re}(3) = 3$, $\operatorname{Im}(3) = 0$
$\operatorname{Re}(-2i) = 0$, $\operatorname{Im}(-2i) = -2$

2. V kompleksni ravnini narišimo točke, ki predstavljajo kompleksna števila $2 + i$, $-1 - 2i$, $2i$, -3, $3 - i$.



3. Poiščimo kompleksno število z, za katerega je $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = -3$ in $2\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 9$.

Zapišimo $z = a + bi$ in iz zgornjih enakosti zapišemo sistem dveh enačb z dvema neznankama $a + b = -3$ in $2a - b = 9$.
Enačbi seštejemo in dobimo $3a = 6$ oz. $a = 2$ ter iz prve enačbe še $b = -3 - a = -3 - 2 = -5$.
Iskano kompleksno število je $z = 2 - 5i$.

Računanje s kompleksnimi števili

Seštevanje in odštevanje: Če je $z = a + bi$ in $w = c + di$, potem je $z \pm w = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$.

Množenje: Če je $z = a + bi$ in $w = c + di$, potem je $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

1. Za $z = 5 - 6i$ in $w = -2 + i$ izračunajmo $z + w$ in $z - w$.

$z + w = 5 - 6i + (-2 + i) = 5 - 6i - 2 + i = 3 - 5i$ in $z - w = 5 - 6i - (-2 + i) = 5 - 6i + 2 - i = 7 - 7i$

2. Izračunajmo $3 - 5i - (2 + i - (1 - 3i))$.

$3 - 5i - (2 + i - (1 - 3i)) = 3 - 5i - (2 + i - 1 + 3i) = 3 - 5i - (1 + 4i) = 3 - 5i - 1 - 4i = 2 - 9i.$

3. Zmnožimo.

a) $(1 + i)(2 + 3i) = 2 + 3i - 2i - 3i^2 = 2 + 5i - 3 = -1 + 5i$

b) $(3 - 2i)(4 + i) = 12 + 3i - 8i - 2i^2 = 12 - 5i + 2 = 14 - 5i$

c) $(5 - 4i)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4i + (4i)^2 = 25 - 40i - 16 = 9 - 40i$

č) $(2 - i\sqrt{3})(2 + i\sqrt{3}) = 4 - (i\sqrt{3})^2 = 4 - i^2 \cdot 3 = 4 + 3 = 7$

4. Izračunajmo $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$.

$i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = i - 1 - i \cdot i^2 + (i^2)^2 + i \cdot i^4 + i^2 \cdot i^4 + i^3 \cdot i^4 + i^4 \cdot i^4 =$
$= i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 = 0.$

5. Izračunajmo $(3 + i)^3 + i^{13}$.

$(3 + i)^3 + i^{13} = 3^3 + 3 \cdot 3^3 \cdot i + 3 \cdot 3 \cdot i^2 + i^3 + i^{12+1} = 27 + 27i - 9 - i + i = 18 + 27i.$

6. V množici kompleksnih števil razstavimo izraz $x^2 + 1$.

Izraz preoblikujemo v $x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x + i)(x - i)$.

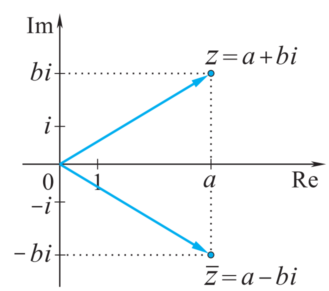
7. V množici kompleksnih števil rešimo enačbo $x^2 + 9 = 0$.

Enačbo preoblikujemo v $x^2 - 9i^2 = 0$, razstavimo $(x - 3i)(x + 3i) = 0$ in zapišemo rešitvi $x_1 = 3i$ ter $x_2 = -3i$.

Konjugiranje

Vsakemu kompleksnemu številu $z = a + bi$ lahko priredimo **konjugirano kompleksno število** $\bar{z} = a - bi$.

Geometrijski pomen: V kompleksni ravnini dobimo **sliko števila $\bar{z}$ z zrcaljenjem števila z čez realno os**.



Lastnosti konjugiranja:

1. $\bar{\bar{z}} = z$ — Konjugirana vrednost konjugiranega števila je enaka prvotnemu številu.
2. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ — Konjugirana vrednost vsote (razlike) je enaka vsoti (razliki) konjugiranih vrednosti.
3. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ — Konjugirana vrednost produkta je enaka produktu konjugiranih vrednosti.

Za poljubno kompleksno število z velja: $\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

1. K številom $3 + 2i$, $5 - 3i$, 2, $-4i$ zapišimo konjugirana števila.

$\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$, $\overline{5 - 3i} = 5 + 3i$, $\overline{2} = 2$, $\overline{-4i} = 4i$

2. Za $z = 7 - i$ izračunajmo $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$, $(\bar{z})^2$ in $z \cdot \bar{z}$.

$z + \bar{z} = 7 - i + 7 + i = 14$
$z - \bar{z} = 7 - i - (7 + i) = 7 - i - 7 - i = -2i$
$(\bar{z})^2 = (\overline{7 - i})^2 = (7 + i)^2 = 49 + 14i + i^2 = 49 + 14i - 1 = 48 + 14i$
$z \cdot \bar{z} = (7 - i)(7 + i) = 49 - i^2 = 49 + 1 = 50$

3. Poiščimo kompleksno število z, za katero je $z + \bar{z} = -2$ in $z - \bar{z} = 6i$.

Zapišimo $z = a + bi$ in nato iz prve enakosti $a + bi + a - bi = -2$ oz. iz $2a = -2$ dobimo $a = -1$.
Iz druge enakosti zapišemo $a + bi - (a - bi) = 6i$, dobimo $2bi = 6i$ in rešitev $b = 3$.
Iskano število je $z = -1 + 3i$.

4. Izračunajmo $6 + i + (\overline{1 - 2i}) - 5 \cdot i^{11} + (1 + i)(\overline{1 + 2i})$.

$6 + i + (\overline{1 - 2i}) - 5 \cdot i^{11} + (1 + i)(\overline{1 + 2i}) = 6 + i + 1 + 2i - 5 \cdot i^3 + (1 + i)(1 - 2i) =$
$= 7 + 3i + 5i + 1 - 2i + i - 2i^2 = 8 + 7i + 2 = 10 + 7i$

Deljenje kompleksnih števil: $z : w = \frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$; $w \neq 0$.

Za računanje s kompleksnimi števili veljajo **enaki osnovni računski zakoni** kot za računanje z realnimi števili.

1. K številu $z = 4 + i$ poiščimo obratno število z^{-1}.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{4+i} = \frac{4-i}{(4+i)(4-i)} = \frac{4-i}{16+1} = \frac{4-i}{17} = \frac{4}{17} - \frac{i}{17}$$

2. Delimo $\frac{2+4i}{1-i}$.

$$\frac{2+4i}{1-i} = \frac{(2+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+4i+4i^2}{1-i^2} = \frac{2+6i-4}{1+1} = \frac{-2+6i}{2} = \frac{2(-1+3i)}{2} = -1 + 3i$$

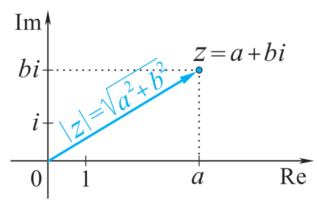
3. Številu $\frac{2+i}{1+i} - i^{-2} + 2^{-1} \cdot (\overline{1 + 3i})$ poiščimo $\operatorname{Re} z$ in $\operatorname{Im} z$.

Izračunamo $\frac{2+i}{1+i} - i^{-2} + 2^{-1} \cdot (\overline{1 + 3i}) = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{2}(1 - 3i) =$
$= \frac{2-2i+i-i^2}{1+1} - \frac{1}{-1} + \frac{1}{2} - \frac{3i}{2} = \frac{3-i}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{3i}{2} = 3 - 2i$

in zapišemo $\operatorname{Re} z = 3$ in $\operatorname{Im} z = -2$.

Absolutna vrednost

Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + bi$ je $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Geometrijski pomen: Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + bi$ je enaka **oddaljenosti točke z od izhodišča**.

Lastnosti absolutne vrednosti kompleksnega števila:

1. $\lvert z\rvert \geq 0$	Absolutna vrednost kompleksnega števila je nenegativno realno število.
2. $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	Absolutna vrednost je enaka 0 natanko takrat, ko je $a = 0$.
3. $\lvert z \cdot w\rvert = \lvert z\rvert \cdot \lvert w\rvert$	Absolutna vrednost produkta je enaka produktu absolutnih vrednosti.
4. $\left\lvert \frac{z}{w} \right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}$; $w \neq 0$	Absolutna vrednost količnika je enaka količniku absolutnih vrednosti.
5. $\lvert z + w\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert w\rvert$	Absolutna vrednost vsote je manjša ali enaka vsoti absolutnih vrednosti (trikotniška neenakost).

1. Izračunajmo absolutne vrednosti kompleksnih števil $12 - 5i$, $-1 - \sqrt{3}\,i$, -5 in $4i$.

$$\lvert 12 - 5i\rvert = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

$$\lvert -1 - \sqrt{3}\,i\rvert = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lvert -5\rvert = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\lvert 4i\rvert = \sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$$

2. Za $z = 3 - 4i$ izračunajmo $z + \bar{z}$, $z \cdot \bar{z}$, $\lvert z\rvert$, z^3, z^{-1} in $\frac{z}{\bar{z}}$.

$$z + \bar{z} = 3 - 4i + 3 + 4i = 6$$

$$z \cdot \bar{z} = (3 - 4i)(3 + 4i) = 9 - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\lvert z\rvert = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$z^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot 4i + 3 \cdot 3 \cdot (4i)^2 - (4i)^3 = 27 - 108i - 144 + 64i = -117 - 44i$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3 - 4i} = \frac{3 + 4i}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 + 4i}{9 + 16} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{3 - 4i}{3 + 4i} = \frac{(3 - 4i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{9 - 2 \cdot 3 \cdot 4i + (4i)^2}{9 + 16} = \frac{9 - 24i - 16}{25} = -\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$$

3. Poiščimo kompleksno število z, za katerega je $\lvert z\rvert - \bar{z} = 4 + 8i$.

Zapišemo $z = a + bi$ in vstavimo v enačbo $\sqrt{a^2 + b^2} - (a - bi) = 4 + 8i$.

Ker je realni del kompleksnega števila na levi strani enačbe enak realnemu delu na desni strani, lahko zapišemo $\sqrt{a^2 + b^2} - a = 4$.

Enako velja za imaginarna dela na obeh straneh enačbe, zato je $bi = 8i$ in od tod $b = 8$.

Vstavimo za $b = 8$ v prvo enačbo $\sqrt{a^2 + 8^2} - a = 4$ in jo s preoblikovanjem v $\sqrt{a^2 + 8^2} = a + 4$ in kvadriranjem $a^2 + 64 = a^2 + 8a + 16$ rešimo $a = 6$.

Iskano kompleksno število je $z = 6 + 8i$.

Napravimo preizkus $\lvert z\rvert - \bar{z} = \lvert 6 + 8i\rvert - \overline{6 + 8i} = \sqrt{36 + 64} - (6 - 8i) = 10 - 6 + 8i = 4 + 8i$.

1. Za dana kompleksna števila $9 - 3i$, $3 + i$, $-6 - 2i$, 1, $-10i$ zapišite realno in imaginarno komponento.

2. V kompleksni ravnini narišite točke, ki predstavljajo kompleksna števila $5 + 2i$, $1 - 3i$, $2i$, 2, 2˙5 $-2i$, $-4i$, -4, $-1 - i$.

3. Poiščite kompleksno število z, za katerega je $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 5$ in $\mathrm{Re}\, z - 2 \cdot \mathrm{Im}\, z = -16$.

4. Zapišite kompleksno število z, za katerega velja $3 \cdot \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 10$, $2 \cdot \mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z = 5$, in ga predstavite s točko v kompleksni ravnini.

5. Dani sta kompleksni števili $z_1 = 4 + i$ in $z_2 = -2 - 5i$. Točki T_1 in T_2 v kompleksni ravnini predstavljata števili z_1 in z_2, točka T_3 pa je razpolovišče daljice T_1T_2. Izračunajte kompleksno število z_3, ki ga predstavlja točka T_3, in točke T_1, T_2 in T_3 narišite v kompleksni ravnini.

6. Izračunajte.
a) $3 + 2i - 1 - 4i - (3 - 2i)$
b) $1 - i - (3 - 2i - (-2i) + 4 - 5i)$

7. Pokažite, da je vrednost številskega izraza $7 - 6i - (4 - 5i - (-6 + i)) + 3 - 2i$ imaginarno število.

8. Dani sta kompleksni števili $z = 3 + i$ in $w = 1 - 2i$. V kompleksni ravnini ponazorite račune in rezultate računsko preverite.
a) $z + w$ b) $2z$ c) $-3w$

9. Poiščite realni števili x in y, da bo veljalo:
a) $2x + (y + 2)i = 6 - 3i$,
b) $2x + y + (x + y)i = 3 + i$.

10. Za $z = 7 + 5i$ in $w = 7 - 3i$ izračunajte $z + w$, $z - w$, z^2 in $z \cdot w$.

11. Izračunajte.
a) $(3 + 5i)(3 - i)$
b) $(\frac{1}{2} + 4i)(4 + \frac{1}{2}i)$
c) $(\sqrt{3} + 3i)(2\sqrt{3} - i)$
č) $(3 - i)^2$
d) $(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i)^2$
e) $(1 + 2i)^3$

12. Za $x = 2i$ izračunajte vrednost izraza $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4$.

13. Izračunajte.
a) $i^4 + 2i(3 - i) + (2 + i)^2$
b) $(1 + 2i)^2 + (1 - 3i)^2 + i^5$
c) $(3 - i)^2 - (2 + 2i)(1 - 2i) + i^{10}$
č) $(2i)^3 + (2i)^4 + 2^{-3}(4i)^2 - \frac{1}{9}(3i)^5$

14. Dano je kompleksno število $z = (2 - 3i)^3$. Izračunajte z in zapišite $\operatorname{Im} z$.

15. Izračunajte $(1 + i)^5$.

16. Naj bo $z = (2 + i)(x - 3i) - 2i$. Izračunajte, za katero vrednost realnega števila x je število z realno.

17. Zapišite vsa realna števila a, za katera je $(a - i)^3$ realno število.

18. Izraz razstavite v množici kompleksnih števil.
a) $x^2 - 4$
b) $a^2 + b^2$
c) $9x^2 - 100$
č) $16x^2 + 1$
d) $0{\cdot}25x^2 + 1$
e) $x^2 - 3$
f) $a^3 + 3a$
g) $x^3 + x^2 + 4x + 4$
h) $x^3 + x^2 + 3x + 3$
i) $x^4 - 5x^2 - 36$

19. V množici kompleksnih števil rešite enačbe.
a) $x^2 - 25 = 0$
b) $x^2 + 25 = 0$
c) $0{\cdot}36x^2 + 1 = 0$
č) $x^3 + 16x = 0$
d) $x^2 + 6 = 0$
e) $x^2 + 8 = 0$
f) $x^3 + x^2 + 9x + 9 = 0$
g) $x^3 - x^2 + 18x = 18$

20. Za $z = 5 - 3i$ izračunajte $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$, $z \cdot \bar{z}$ in $(\bar{z})^2$.

21. Za $z = -5 + 2i$ in $w = 3 - 4i$ izračunajte $z + 2w$, $\overline{z - w}$, $\bar{z} - w^2$ in $z \cdot \overline{w} - 4z^2$.

22. Izračunajte.
a) $3 - i + \overline{5 - 7i} - 4i^{19} + (1 - 3i)(\overline{1 - 2i})$
b) $\overline{4 + 3i} + (\overline{2i})^3 + (\overline{2 - i})(4 - 6i)$

23. Poiščite kompleksno število z, za katerega velja $z + \bar{z} = 10$ in $z - \bar{z} = 14i$.

24. Za kompleksna števila z velja $\bar{z} - z = 8i$ in $z \cdot \bar{z} = 41$. Poiščite ta števila.

25. Zapišite kompleksno število z, za katero velja $2z - \bar{z} = 2 - 12i$.

26. Zapišite vsa kompleksna števila z, za katera velja $z^2 = 11 - 4\bar{z}$.

27. Izračunajte realno število x tako, da bo tudi število $z = (3i)^3 + 2xi^2 + (x + 2)i + \overline{1 + i}$ realno.

28. K številu $z = 1 - 2i$ poiščite obratno število.

29. Delite.
a) $\frac{7 + i}{1 - i}$
b) $\frac{23 + 11i}{5 - i}$
c) $\frac{3 - i}{i}$
č) $\frac{4 + 3i}{3 + i}$

30. Število $z = \frac{20 - 10i}{3 - i}$ zapišite v obliki $z = a + bi$, pri čemer sta a in b realni števili. Nato v kompleksni ravnini narišite točko, ki predstavlja število z.

31. Za število $z = 2 + i$ izračunajte vrednosti izrazov.
a) $\frac{z + \bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$ b) $\frac{2z + 3\bar{z}}{z \cdot -\bar{z}}$
c) $\frac{2z}{z + \bar{z}}$

32. Pokažite, da je vrednost številskega izraza $\frac{3 + i}{1 + i} + \frac{3 - i}{1 - i}$ realno število.

33. Zapišite $\operatorname{Re} z$ in $\operatorname{Im} z$, če je $z = (i^2 - i^3) \cdot i^{17} - i^{-3}$.

34. Dani sta kompleksni števili $z_1 = 2 - 3i$ in $z_2 = \frac{1}{2} + i$. Natančno izračunajte $z_1 + 3\overline{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$ in $z_1 : z_2$.

35. Izračunajte.
a) $(2 - 6i)^2 - (\overline{3 + 2i}) + \frac{6 - 2i}{1 - i}$
b) $(-1 + 2i)^2 + \frac{11 + 10i}{4 - i} + i^{39}$

36. Dano je kompleksno število $z = (2 - i)^2 + 13 \cdot \frac{1 + i}{3 + 2i} - i^{15}$. Izračunajte z in zapišite $\operatorname{Im} z$.

37. Za katero realno število a bo vrednost števila $z = \frac{a + i}{2 + 3i}$ enaka $1 - i$?

38. Izračunajte oddaljenost točk, ki predstavljajo dana kompleksna števila, od koordinatnega izhodišča.
a) $4 - 3i$ č) $-3 - 6i$
b) $1 - \mathrm{i}$ d) $-2 + 2i\sqrt{2}$
c) $-24 + 7i$

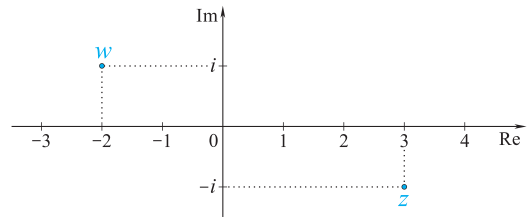
39. Za katero realno število a bo absolutna vrednost števila $z = a + 6i$ enaka $2\sqrt{10}$?

40. Dani sta kompleksni števili $z_1 = 13 + 9i$ in $z_2 = 4 - 3i$. Natančno izračunajte $\overline{z_2}$, $|z_1|$ in $\frac{z_1}{z_2}$.

41. Dano je kompleksno število $z = 2 + i$. Izračunajte kompleksno število $w = |z|^2 - z^2 + z^{-1}$ in ga zapišite v obliki $w = a + bi$, pri čemer sta a in b realni števili.

42. Dano je kompleksno število $z = 8 - 6i$. Izračunajte vrednost izraza $z^2 + 3|z| - i\bar{z}$.

43. Na sliki sta dani števili z in w.



a) Zapišite števili z in w in v isti koordinatni sistem narišite točki, ki predstavljata števili $\bar{z}$ in $\overline{w}$.
b) Izračunajte razdaljo med točkama z in w.
c) Izračunajte $z \cdot w + \frac{z}{\overline{w}}$.

44. Dano je kompleksno število $z = (2 + i)^{-2}$. Izračunajte $|z|$.

45. Z računom ugotovite, ali velja $\left|\frac{2i}{1 - i\sqrt{3}}\right| = 1$.

46. Za $z = 2 - 3i$ izračunajte vrednost izraza $z \cdot \bar{z} + i^{98} - |z|^2 : z$.

47. Izračunajte.
a) $3i^{19} + |1 - i\sqrt{5}| + \frac{13 - 13i}{2 + 3i} - (4 - 5i)(2 + i) - -(\overline{\sqrt{6} - i})$
b) $\frac{2 + 4i}{1 + i} + \mathrm{i}^{18} + 5 \cdot (1 - 2i)^{-1} + |12 + 5i| + (\overline{1 - i})$

48. Zapišite vsa kompleksna števila z, za katera je $|z| = 5$ in $\operatorname{Im} z = -3$.

49. Za kateri kompleksni števili z je $z - 26 - 2i + |z + 1|^2 = \bar{z}$?

50. Rešitvi enačbe $x^2 + 16 = 0$ sta oglišči kvadrata s središčem v koordinatnem izhodišču. Rešite enačbo, zapišite vsa štiri oglišča kvadrata in izračunajte dolžino stranice kvadrata.

7. OSNOVE GEOMETRIJE

Osnovni geometrijski pojmi

Veljajo oznake:

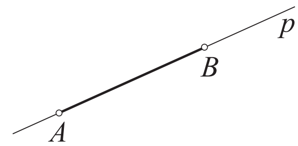
točke označujemo z velikimi tiskanimi črkami A, B, C ...

premice z malimi tiskanimi črkami p, q, r, s ...

kote z znakom $\sphericalangle ABC$ (točka B je vrh kota)

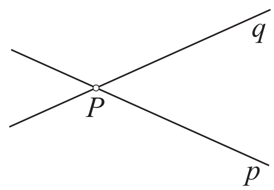
velikosti kotov z malimi grškimi črkami α, β, γ, δ, ϕ ...

ravnine z velikimi grškimi črkami Π, Φ, Ω ...

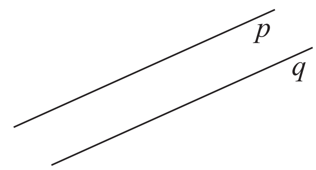


Skozi **dve različni točki** A in B **poteka natanko ena premica** p (A, $B \in p$).

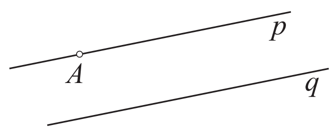
Če imata dve **premici** p in q **skupno natanko eno točko** P, rečemo, da **se sekata**. Točka ***P*** **je presečišče** premic.



Premici p in q sta **vzporedni** ($p \parallel q$), če ležita v isti ravnini in **bodisi nimata skupne točke bodisi sovpadata** (imata skupne vse točke).

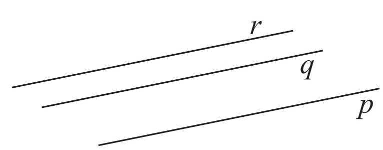


K dani **premici** p skozi dano točko A **obstaja natanko ena vzporednica** q (aksiom o vzporednosti).



Vedno velja $p \parallel q$. Če je premica p vzporedna premici q, potem je tudi premica q vzporedna premici p.

Če je premica ***p*** **vzporedna premici** ***q*** in **premica** ***q*** **vzporedna premici** ***r***, potem je **premica** ***p*** **vzporedna premici** ***r***.



Osnovna enota za **merjenje razdalj** je 1 m.

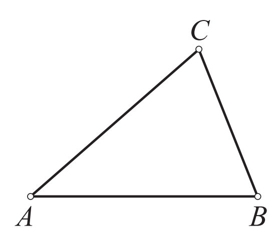
Izpeljane enote so: 1 dm, 1 cm, 1 mm ...

Velja: 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.

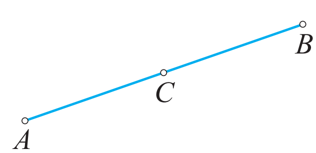
Razdaljo med poljubnima točkama A in B označimo z $\boldsymbol{d(A, B)}$.

Lastnosti razdalje:

1. Razdalja med točkama je nenegativno realno število: $d(A, B) \geq 0$.
   Razdalja dveh točk **je 0** natanko takrat, ko **točki sovpadata**:
   $d(A, B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B$.
2. Razdalja **med točkama** ***A*** **in** ***B*** je enaka razdalji **med točkama** ***B*** **in** ***A***: $d(A, B) = d(B, A)$.
3. Za razdaljo velja **trikotniška neenakost**: $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

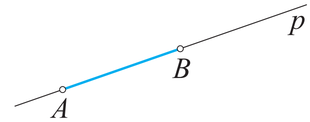


Točka ***C*** **leži na premici med točkama** ***A*** **in** ***B*** natanko takrat, ko je $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$.

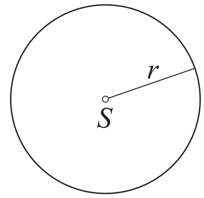


Če sta A in B različni točki ravnine, potem je **daljica** ***AB*** (ali **zveznica točk** ***A*** **in** ***B***) **množica točk**, ki ležijo **med točkama** ***A*** **in** ***B***, **vključno s točkama** ***A*** **in** ***B***. **Dolžina daljice** ***AB*** je enaka **razdalji med točkama** ***A*** **in** ***B***: $|AB| = d(A, B)$.

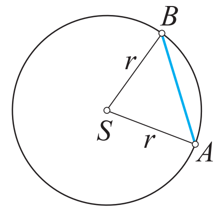
Nosilka daljice ***AB*** je premica p, na kateri leži daljica ***AB***.



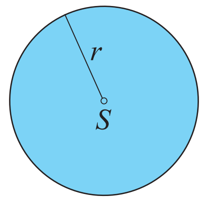
Naj bo S poljubna točka v ravnini in r pozitivno realno število. **Krožnica s središčem** ***S*** **in polmerom** ***r*** je množica točk v ravnini, ki so za r oddaljene od točke S.



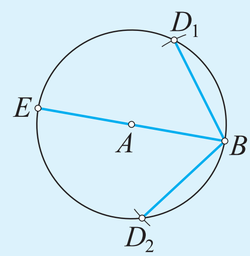
Zveznico dveh točk na krožnici imenujemo **tetiva**.



Tetiva skozi središče je **premer** krožnice. **Krog s središčem** ***S*** **in polmerom** ***r*** je množica vseh točk v ravnini, ki so kvečjemu za r oddaljene od točke S.



V ravnini sta dani točki A in B, za kateri velja $d(A, B) = 2$ cm. Načrtajmo krožnico, ki ima središče v točki A in gre skozi točko B, tetivo BD z dolžino 2 cm in tetivo BE, ki gre skozi točko A. Ocenimo razdaljo $d(D, E)$.



Najprej v ravnini izberemo poljubni točki A in B, za kateri je $d(A, B) = 2$ cm. S šestilom načrtamo krožnico, ki ima središče v točki A in gre skozi točko B.

Nato šestilo z istim lokom (2 cm) zapičimo v točko B in narišemo loka tako, da sekata dano krožnico (imamo dve različni možnosti). Presečišči označimo s točkama D_1 in D_2 in načrtajmo tetivi BD_1 in BD_2.

Tetiva BE je premer krožnice.

Zapišimo trikotniško neenakost $d(E, B) \leq d(E, D_1) + d(D_1, B)$ in izrazimo $d(E, B) - d(D_1, B) \leq d(E, D_1)$.

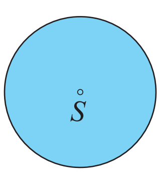
Vstavimo podatke $d(E, D_1) \geq d(E, B) - d(D_1, B) \geq 4 - 2 = 2$.

Ker sta točki D_1 in E na krožnici, je razdalja med njima manjša ali enaka premeru krožnice: $d(D_1, E) \leq 4$.

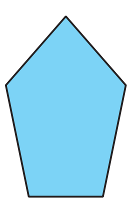
Zapišemo oceno $2 \leq d(D_1, E) \leq 4$.

Množica točk je **konveksna**, če hkrati s poljubnima svojima točkama A in B vsebuje tudi daljico AB.

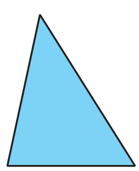
Primeri konveksnih množic in nekonveksnih množic.



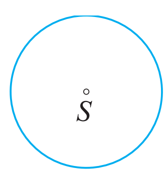
krog



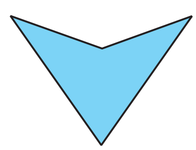
petkotnik



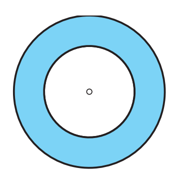
trikotnik



krožnica



štirikotnik

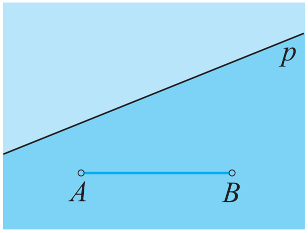


krožni kolobar

Vsaka točka O na premici p razdeli premico na dve disjunktni množici (presek je prazna množica). Unijo vsake od teh množic in točke O imenujemo **poltrak** ***h*** **z izhodiščem v točki** ***O***.

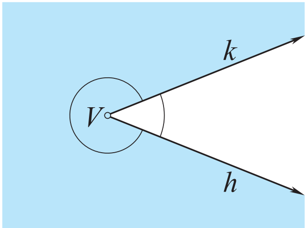
poltraka h in k

Vsaka premica p v ravnini razdeli ravnino na dve **neprazni**, **disjunktni**, **konveksni množici**, ki ju imenujemo **polravnini** ali **bregova premice**. Premica p je **rob** polravnin. **Točki A in B sta na istem bregu premice p**, če daljica AB ne seka premice p.



Dva poltraka h in k s skupnim izhodiščem V razdelita ravnino na dve množici – **kota**. Točko V imenujemo **vrh kota**, **poltraka** h in k pa **kraka kota**.

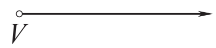
Navadno z lokom označimo kot, ki nas v danem primeru zanima.



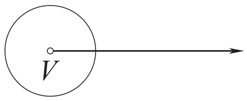
Če se poltraka h in k s skupnim izhodiščem prekrivata, določata dva kota: **polni kot** ali **ničelni kot**.

Če se poltraka h in k s skupnim izhodiščem dopolnjujeta v premico, določata **iztegnjeni kot**.

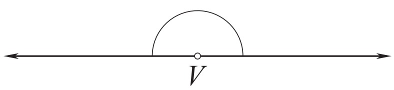
Kota, ki imata skupen vrh in en krak, imenujemo **sosednja kota**.



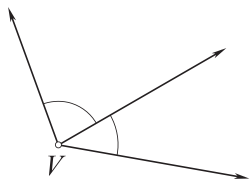
ničelni kot



polni kot



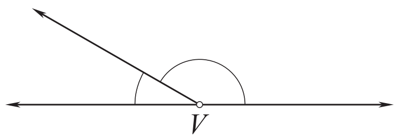
iztegnjeni kot



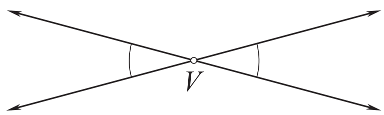
sosednja kota

Kota, pri katerih se en par krakov dopolnjuje v premico, drugi krak pa je skupen, imenujemo **sokota**.

Kota, pri katerih se oba para krakov dopolnjujeta v premici, imenujemo **sovršna kota**.



sokota

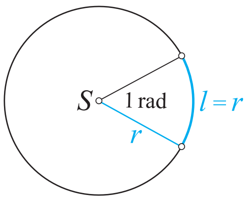


sovršna kota

Za **merjenje kotov** uporabljamo dve osnovni enoti:

I. **1 kotna stopinja**: $1°$ je določena tako, da **polni kot meri** $360°$.
   Manjši enoti: 1 kotna minuta: $1'$ $(60' = 1°)$
   1 kotna sekunda: $1''$ $(60'' = 1')$

II. **1 radian**: 1 radian je središčni kot, pri katerem je dolžina krožnega loka enaka polmeru kroga.



Polni kot meri **2π radianov**, iztegnjeni kot pa π **radianov**.

Kote v radianih (če je mogoče) zapisujemo v natančni obliki, npr. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ ...

1. Kot $\alpha = 39{\cdot}7431^\circ$ zapišimo v stopinjah, minutah in sekundah, kot $\beta = 42^\circ 28' 11''$ pa v stopinjah na štiri decimalke natančno.

Za pretvorbo $\alpha = 39{\cdot}7431^\circ$ v stopinje, minute in sekunde na kalkulatorju uporabimo tipki {2^{nd}F} in {D°M'S}
ter dobimo $\alpha = 39^\circ 44' 35''$ (preverite na svojem kalkulatorju).
Z večkratno uporabo tipke {D°M'S} vnesemo velikost kota β v kalkulator, nato pa z uporabo tipk {2^{nd}F} in {D°M'S} dobimo rezultat $\beta = 42{\cdot}4697^\circ$.

2. Kot $\alpha = 53^\circ 21'$ in kot $\beta = 75^\circ$ zapišimo v radianih, kota $\gamma = 0{\cdot}7435$ in $\delta = \frac{3\pi}{5}$ pa v stopinjah in minutah.

Z uporabo formule $\alpha = \frac{\alpha^{(\circ)} \cdot \pi}{180^\circ}$ (ali tipk kalkulatorja {2^{nd}F} in {DRG}) dobimo $\alpha = 0{\cdot}9311$ in $\beta = \frac{5\pi}{12}$.

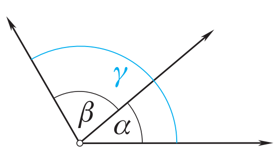
Z uporabo formule $\alpha^{(\circ)} = \frac{\alpha^{(RAD)} \cdot 180^\circ}{\pi}$ ali tipk kalkulatorja {2^{nd}F} in {DRG} (na začetku moramo imeti kalkulator nastavljen na delo v radianih) dobimo $\gamma = 42^\circ 36'$ in $\delta = 108^\circ$ (pri tem pazimo na zaokroževanje, npr. $30''$ se zaokroži navzgor).

3. Izračunajmo vsoto in razliko danih parov kotov.
a) $\alpha = 47^\circ 35'$, $\beta = 29^\circ 48'$
b) $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $\delta = \frac{\pi}{4}$

Izračunamo $\alpha + \beta = 77^\circ 23'$ in $\alpha - \beta = 17^\circ 47'$.

Zapišemo $\gamma + \delta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + 3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$ in $\gamma - \delta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$.

Lastnosti merjenja kotov:
1. Vsakemu kotu pripada nenegativno realno število – **velikost ali mera kota**. **Ničelni kot meri 0**.
2. Kota sta **skladna** natanko takrat, ko imata **enako velikost**.
3. **Velikost unije sosednjih kotov** je enaka **vsoti velikosti obeh kotov**.



$\gamma = \alpha + \beta$

Iztegnjeni kot meri **180°**. Pravi kot je skladen svojemu sokotu. **Pravi kot** meri **90°**.

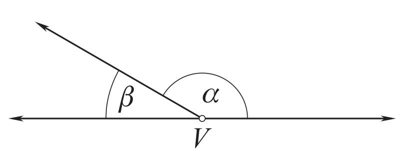
Kot α je **oster**, če je $\alpha <$ **90°**. Kot α je **top**, če je **90°** $< \alpha <$ **180°**.

Kota α in β sta **komplementarna**, če je $\alpha + \beta =$ **90°**.

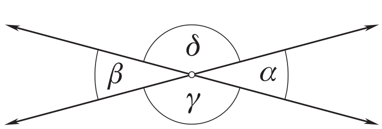
Kota α in β sta **suplementarna**, če je $\alpha + \beta =$ **180°**.

Sokota α in β sta suplementarna.

Sovršna kota α in β sta skladna, prav tako γ in δ.



$\alpha + \beta = 180^\circ$



$\alpha = \beta$
$\gamma = \delta$

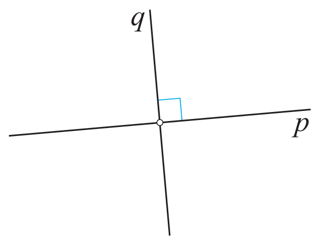
1. Kotu $\alpha = 63°41'$ poiščimo velikosti komplementarnega kota β in suplementarnega kota γ.

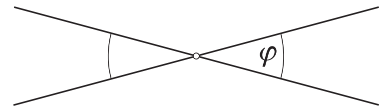
   Izračunamo $\beta = 90° - \alpha = 26°19'$ in $\gamma = 180° - \alpha = 116°19'$.

2. Kotu $\alpha = \frac{\pi}{6}$ poiščimo velikost komplementarnega kota β in velikost suplementarnega kota γ.

   Izračunamo $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - \pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ in $\gamma = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Dve sekajoči se premici določata štiri kote (dva para sovršnih kotov). **Kot med premicama**, ki se sekata, je po dogovoru manjši od teh kotov.



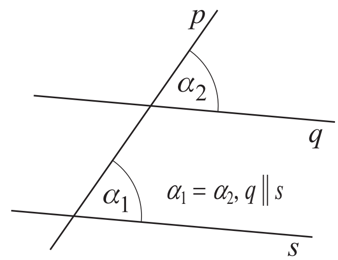


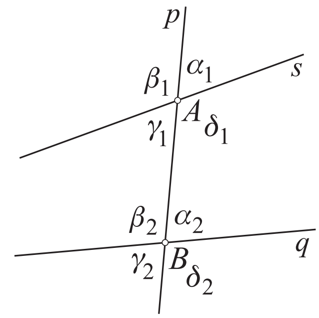
kot med premicama

Premici p in q sta **pravokotni** ($p \perp q$), če je kot med njima pravi kot.

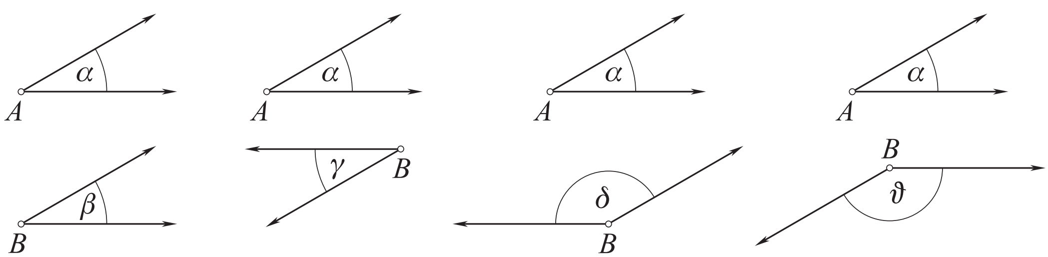
Naj premica p seka premici q in s v dveh različnih točkah. **Premico p imenujemo prečnica** in s premicama q in s oblikuje več kotov.

Premici s in q sta vzporedni natanko takrat, ko sta kota α_1 in α_2 skladna.



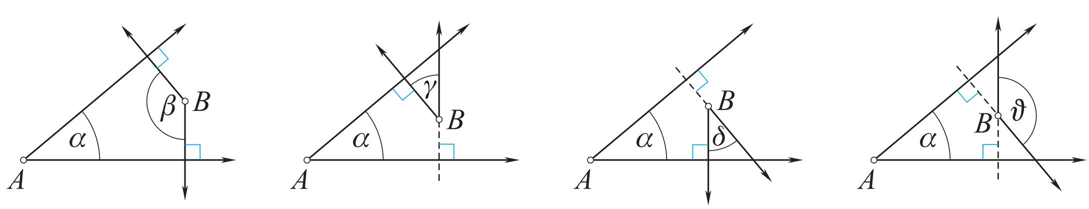


Kota z vzporednimi kraki sta bodisi skladna bodisi suplementarna.



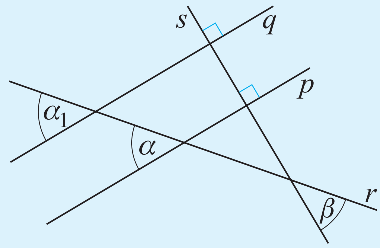
$\alpha = \beta$ $\qquad$ $\alpha = \gamma$ $\qquad$ $\alpha + \delta = 180°$ $\qquad$ $\alpha + \vartheta = 180°$

Kota s pravokotnimi kraki sta bodisi skladna bodisi suplementarna.

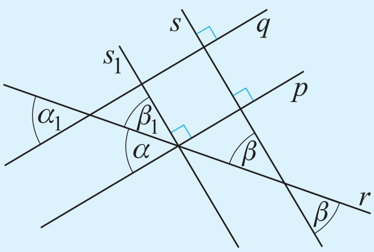


$\alpha + \beta = 180°$ $\qquad$ $\alpha = \gamma$ $\qquad$ $\alpha = \delta$ $\qquad$ $\alpha + \vartheta = 180°$

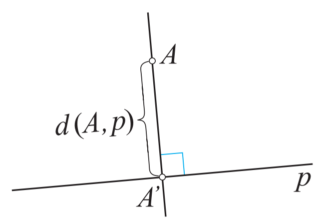
Dani sta vzporednici p in q, pravokotnica s na premico q ter premica r, ki seka premico p pod kotom $\alpha_1 = 50°$. Izračunajmo velikosti kotov α in β.



Ker sta kota α_1 in α kota ob vzporednici, je $\alpha = \alpha_1 = 50°$.
Skozi presečišče premic r in p narišemo vzporednico s_1 k premici s.
Zato je premica s_1 pravokotna na p in velja $\beta = \beta_1$.
Ker pa so koti ob premici p suplementarni, je
$\beta = \beta_1 = 180° - 50° - 90° = 40°$.



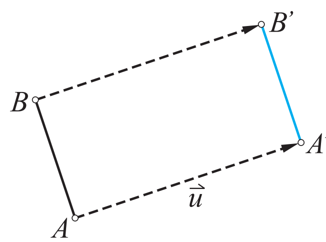
Pravokotna projekcija točke *A* na premico *p* je presečišče premice p in pravokotnice skozi točko A na premico p. **Razdalja med točko *A* in premico *p*** je razdalja med točko A in njeno pravokotno projekcijo na premico p.



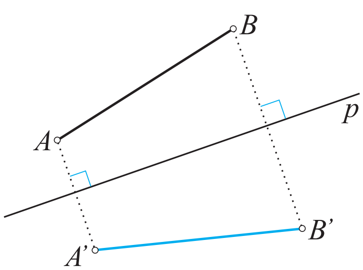
Togi premik ali **gibanje** je taka preslikava točk ravnine v točke iste ravnine, ki ohranja **razdalje**.

Primeri togih premikov:

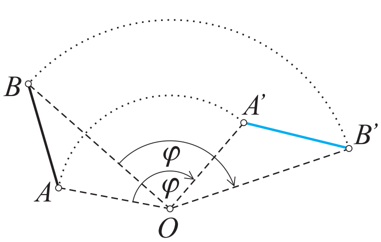
1. Vzporedni premik za vektor $\vec{u}$ (usmerjeno daljico):

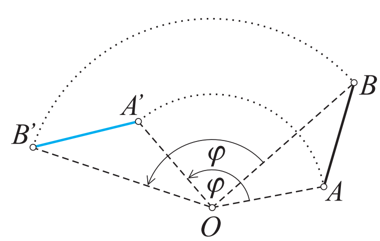


2. Zrcaljenje čez premico p:



3. Vrtenje okoli točke O za kot φ:
   a) v pozitivni smeri (vrtenje, nasprotno smeri urnega kazalca),
   b) v negativni smeri (vrtenje v smeri urnega kazalca).



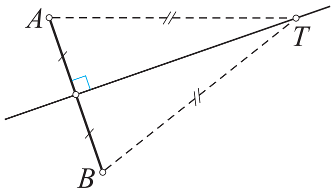


Dva **lika** L_1 in L_2 sta **skladna** ($L_1 \cong L_2$), **če obstaja togi premik**, ki preslika drugega na drugega.

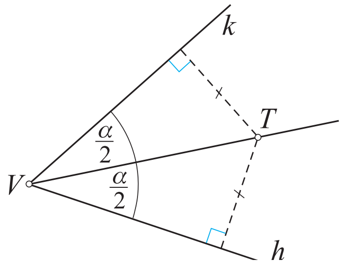
Dve daljici sta skladni natanko takrat, ko sta enako dolgi.

Množica točk je **simetrična** glede na premico p, če je enaka svoji zrcalni sliki glede na premico p. Premico p imenujemo **simetrijska os** ali **simetrala** dane množice.

Simetrala daljice AB je pravokotnica skozi njeno razpolovišče. Točka T leži na simetrali daljice AB natanko takrat, ko je enako oddaljena od obeh krajišč daljice AB.

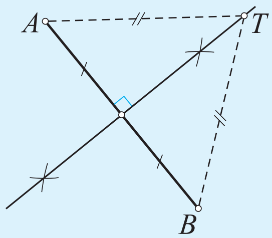


Simetrala kota je premica, ki gre skozi vrh kota in razpolavlja kot. Točka T leži na simetrali kota natanko takrat, ko je enako oddaljena od obeh krakov kota.



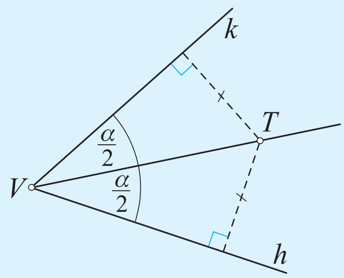
1. Konstruirajmo simetralo daljice AB, če je $|AB| = 4$ cm.

Narišemo daljico AB z dolžino 4 cm. V šestilo vzamemo poljuben polmer, večji od 2 cm, šestilo zapičimo v točko A in narišemo en lok nad daljico, drug lok pod daljico in isti postopek ponovimo iz točke B. Skozi presečišči lokov narišemo simetralo daljice.



2. Konstruirajmo simetralo poljubnega kota.

Narišemo poljuben kot. V šestilo vzamemo poljuben polmer, šestilo zapičimo v vrh kota in narišemo lok tako, da seka kraka kota. Nato zapičimo šestilo v eno od presečišč in narišemo lok v notranjosti kota in postopek ponovimo za drugo, pred tem pridobljeno presečišče, tako da se oba loka sekata. Nato skozi to točko in vrh kota narišemo simetralo kota.



3. Narišimo poljubno premico p in točki $A \in p$ in $B \notin p$.

a) Skozi točko A konstruirajmo pravokotnico q na premico p.

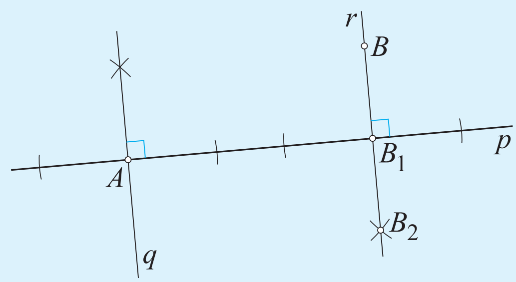
b) Skozi točko B konstruirajmo pravokotnico r na premico p.

c) Na sliki poiščimo pravokotno projekcijo B_1 točke B na premico p in točko B_2, ki je simetrična točki B glede na premico p.

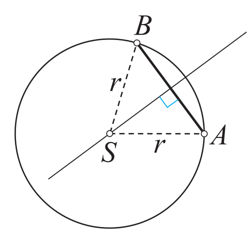
a) Narišemo poljubno premico p in na njej izberemo poljubno točko A.
Potem šestilo s poljubnim polmerom zapičimo v točko A in narišemo lok, tako da dvakrat seka premico p.
Šestilo zapičimo najprej v eno od dobljenih presečišč na premici in naredimo lok.
Nato ga zapičimo še v drugo presečišče na premici in naredimo lok na isti strani premice.
Skozi točko A in presečišči lokov narišemo pravokotnico q.

b) Izberemo poljubno točko B, ki ne leži na premici p.
Šestilo zapičimo v točko B in narišemo krožni lok, ki seka premico p v dveh različnih točkah.
Šestilo zapičimo najprej v eno od dobljenih presečišč na premici in naredimo lok na drugi strani, kot je točka B.
Nato zapičimo šestilo še v drugo presečišče na premici in naredimo lok, ki seka pred tem narisani krožni lok.
Skozi točko B in presečišči lokov B_2 narišemo pravokotnico r.

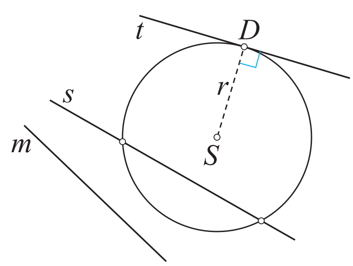
c) Pravokotna projekcija B_1 točke B na premico p je presečišče premic p in r.
Točko B_2, ki je simetrična točki B glede na premico p, dobimo tako, da šestilo zapičimo v točko B_1, odmerimo polmer do točke B in narišemo krožni lok, ki seka premico r na drugem bregu premice p.



Simetrala poljubne tetive dane krožnice **gre skozi središče krožnice**.

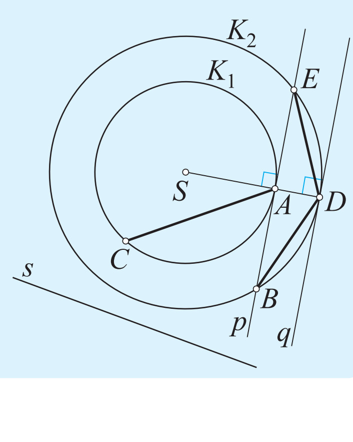


Premico s, ki **seka krožnico** v dveh različnih točkah, imenujemo **sekanta**. Premico m, ki ne seka dane krožnice, imenujemo **mimobežnica**. **Premico** t, ki ima **s krožnico skupno natanko eno točko** D (dotikališče), imenujemo **tangenta** na krožnico. **Tangenta na krožnico je pravokotna na polmer v dotikališču**.

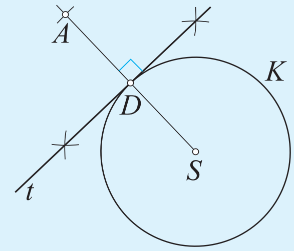


1. Na sliki sta dani krožnici K_1 in K_2, premice p, q in s ter točke S, A, B, C, D in E. Zapišimo vse poznane geometrijske pojme.

Krožnici K_1 in K_2 sta koncentrični. Premica p je tangenta na krožnico K_1 in sekanta krožnice K_2. Premica q je tangenta na krožnico K_2 in mimobežnica za krožnico K_1. Premica s je mimobežnica za obe krožnici. Daljice EB, BD in ED so tetive krožnice K_2. Daljica CA je tetiva krožnice K_1. Premici p in q sta vzporedni.



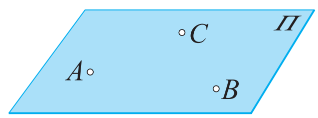
2. Narišimo krožnico K s središčem S in polmerom $r = 2{\cdot}5$ cm in na njej izberimo poljubno točko D. Skozi točko D konstruirajmo tangento t na krožnico K.

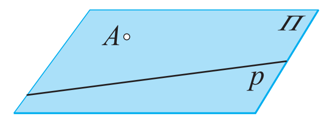


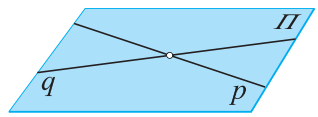
Narišemo krožnico K s središčem S in polmerom $2{\cdot}5$ cm. Na krožnici si izberemo poljubno točko D.
Nato narišemo poltrak z izhodiščem v točki S, ki poteka skozi točko D.
V točko D zapičimo šestilo s polmerom $r = 2{\cdot}5$ cm in na poltraku narišemo lok.
Dobljeno točko označimo z A. Tangenta t je simetrala daljice SA, ki jo konstruiramo po že znanem postopku.

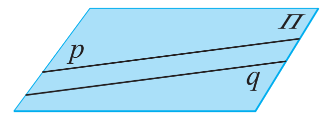
Ravnino natanko določajo:

1. **tri različne točke**, ki **ne ležijo na isti premici** (tri nekolinearne točke);
2. **premica** in **točka** zunaj te **premice**;
3. dve **sekajoči se premici**;
4. dve **različni vzporednici**.



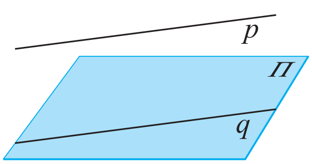




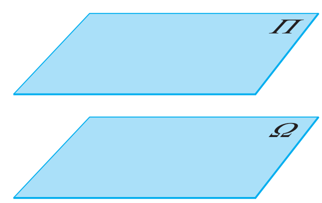


Vsaka ravnina preostanek prostora razdeli na dve neprazni, disjunktni množici – **polprostora**.

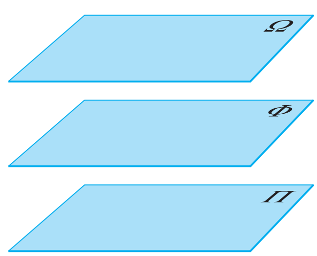
Premica p in ravnina Π sta vzporedni ($p \parallel \Pi$), če bodisi nimata skupne točke bodisi premica p leži v ravnini Π. Če je premica p vzporedna premici q, ki leži v ravnini Π, je premica p vzporedna ravnini Π.



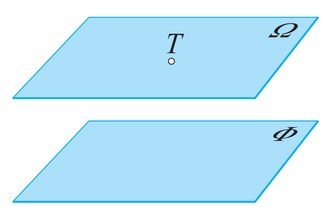
Ravnini Π in Ω sta vzporedni ($\Pi \parallel \Omega$), če bodisi nimata skupne točke bodisi sovpadata.



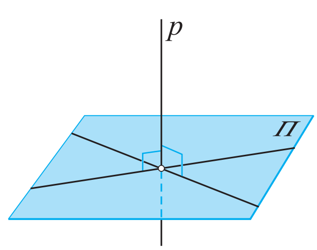
Če je ravnina Π vzporedna ravnini Φ in ravnina Φ vzporedna ravnini Ω, potem je ravnina Π vzporedna ravnini Ω.



Skozi dano **točko T poteka natanko ena ravnina** Ω, ki je **vzporedna dani ravnini Π**.

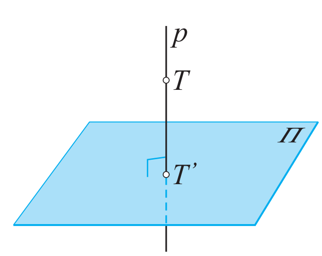


Premica p je pravokotna na ravnino Π, če je pravokotna na vsako premico v ravnini Π.



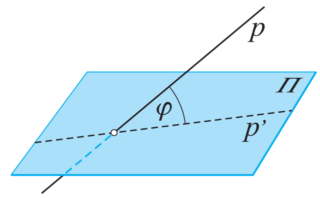
Skozi dano **točko T poteka natanko ena premica p**, ki je **pravokotna na dano ravnino Π**.
Pravokotna projekcija točke T na ravnino Π je presečišče ravnine Π in pravokotnice skozi točko T na ravnino Π.

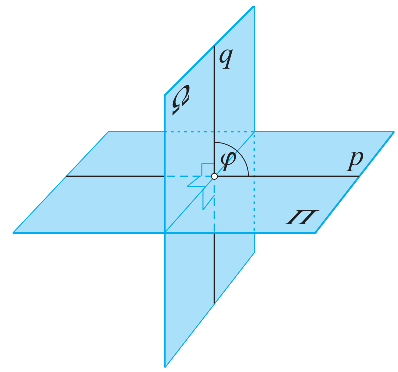
Razdalja med točko T in ravnino Π je razdalja med točko T in njeno pravokotno projekcijo T' na ravnino Π.



Kot med premico *p* in ravnino Π je kot med premico p in njeno pravokotno projekcijo p' na ravnino Π.

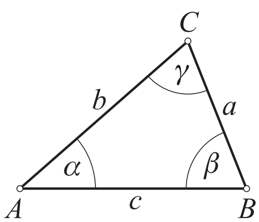
Kot med ravninama Π in Ω je kot med pravokotnicama na ti dve ravnini.





Trikotnik, enakostranični trikotnik, enakokraki trikotnik, pravokotni trikotnik in Pitagorov izrek ter kotne funkcije

Trikotnik ABC je množica točk v ravnini, ki jo omejujejo zveznice (daljice) treh nekolinearnih točk A, B in C.



Oznake:

oglišča trikotnika: A, B in C;

dolžine stranic trikotnika: a, b in c;

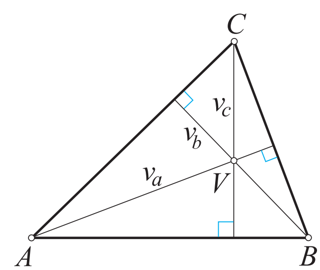
notranji koti trikotnika: $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$ in $\measuredangle ACB = \gamma$.

Za **trikotnik** velja:

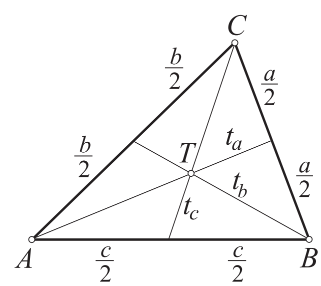
a) obseg: $o = a + b + c$,

b) polovica obsega trikotnika: $s = \frac{a + b + c}{2}$,

c) ploščina: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$.



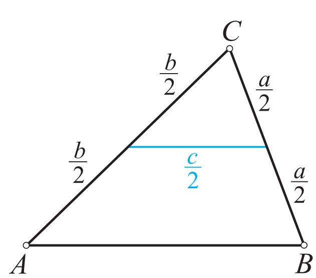
Višina na stranico trikotnika je daljica, ki je pravokotna na stranico in povezuje stranico ter nasprotno oglišče. Višine trikotnika označimo z v_a, v_b, v_c. Vse tri trikotnikove višine se sekajo v eni točki V – **višinski točki** trikotnika.



Težiščnica trikotnika je zveznica oglišča z razpoloviščem nasprotne stranice. Težiščnice trikotnika označimo s t_a, t_b, t_c. Vse tri trikotnikove težiščnice se sekajo v eni točki T – **težišču** trikotnika.

Težišče trikotnika deli vsako težiščnico v razmerju 2 : 1 (gledano od oglišča).

Srednjica trikotnika je zveznica razpolovišč dveh stranic. Srednjica trikotnika je vzporedna tretji stranici, njena dolžina je polovica dolžine te stranice.



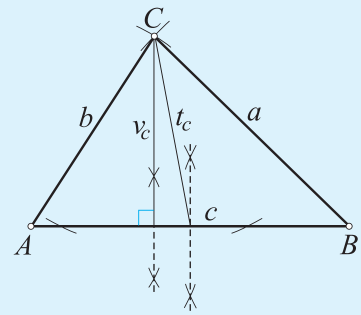
Konstruirajmo trikotnik ABC s podatki $a = 6$ cm, $b = 5$ cm in $c = 7$ cm in v njem težiščnico in višino na stranico c.

Najprej narišemo stranico AB dolžine 7 cm.

S šestilom narišemo lok s središčem v točki B in polmerom 6 cm. Nato narišemo lok s središčem v točki A in polmerom 5 cm. Presečišče narisanih lokov je točka C. Narišemo še stranici a in b.

S simetralo stranice AB poiščemo razpolovišče stranice c in ga povežemo z ogliščem C. Narisali smo težiščnico na stranico c.

Iz oglišča C narišemo poljuben lok, ki seka stranico c v dveh različnih točkah. Lok z istim polmerom narišemo še iz dobljenih presečišč. Povežemo dobljeno presečišče lokov in oglišče C. Daljica od oglišča C do stranice c je višina na stranico c.



Za trikotnik velja:

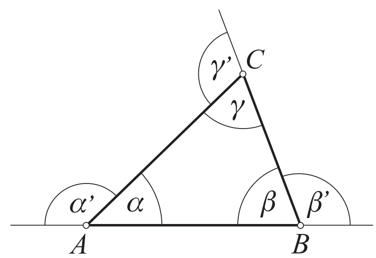
a) večji stranici nasproti leži večji kot in obratno, večjemu kotu nasproti leži daljša stranica,

b) vsota notranjih kotov trikotnika meri 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$,

c) zunanji koti trikotnika α', β', γ' so sokoti notranjim kotom, zato velja: $\alpha + \alpha' = 180°$, $\beta + \beta' = 180°$, $\gamma + \gamma' = 180°$,

č) vsota zunanjih kotov trikotnika meri 360°: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$,

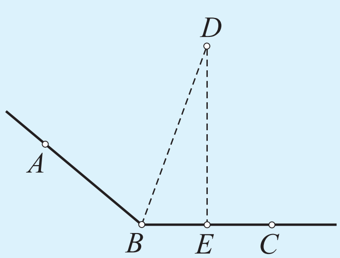
d) zunanji kot trikotnika je enak vsoti nepriležnih notranjih kotov:
$\alpha' = \beta + \gamma$
$\beta' = \alpha + \gamma$
$\gamma' = \alpha + \beta$



1. Izračunajmo neznane notranje in zunanje kote trikotnika, če je $\alpha = 49°55'$ in $\beta = 47°13'$.

Iz formule $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ izrazimo $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 82°52'$, nato pa k vsakemu notranjemu kotu izračunajmo še zunanji kot: $\alpha' = 180° - \alpha = 130°5'$, $\beta' = 180° - \beta = 132°47'$ in $\gamma' = 180° - \gamma = 97°8'$.

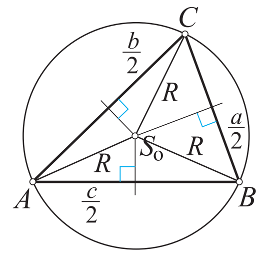
2. Na sliki je dan kot $\sphericalangle ABC$, ki meri 140°. Točka D je enako oddaljena od obeh krakov kota in enako oddaljena od točk B in C. Izračunajte velikost kota $\sphericalangle BDE$, če je točka E razpolovišče daljice BC.

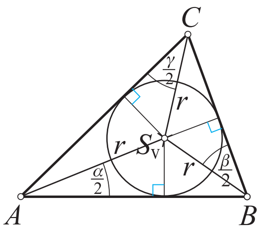


Ker je točka D enako oddaljena od krakov kota, leži na simetrali kota $\sphericalangle ABC$. Zato je $\sphericalangle DBE = 70°$.
Ker je točka D enako oddaljena od točk B in C, leži na simetrali daljice BC. Zato je $\sphericalangle DEB = 90°$.
Ker je vsota notranjih kotov trikotnika BED enaka 180°, je $\sphericalangle BED = 20°$.

Središče **trikotniku očrtanega kroga** je presečišče **simetral stranic** trikotnika.
Polmer trikotniku očrtanega kroga označimo z ***R***.

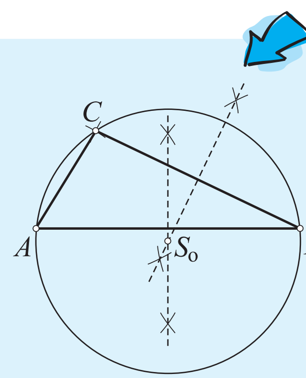
Središče **trikotniku včrtanega kroga** je presečišče **simetral notranjih kotov** trikotnika. **Polmer trikotniku včrtanega kroga** označimo z ***r***.





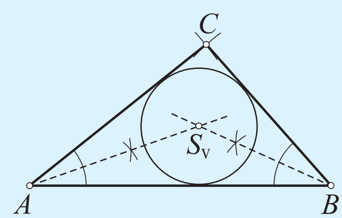
1. Konstruirajmo trikotnik ABC s podatki $a = 6$ cm, $b = 3$ cm in $c = 7$ cm ter mu očrtajmo krožnico.

Najprej narišemo trikotnik ABC.
Nato konstruiramo simetrali dveh stranic (npr. stranic c in b).
Presečišče simetral stranic je središče S_o očrtane krožnice,
ki jo narišemo tako, da šestilo zapičimo v S_o,
polmer krožnice pa je enak razdalji med S_o in enim od oglišč trikotnika (npr. ogliščem A).



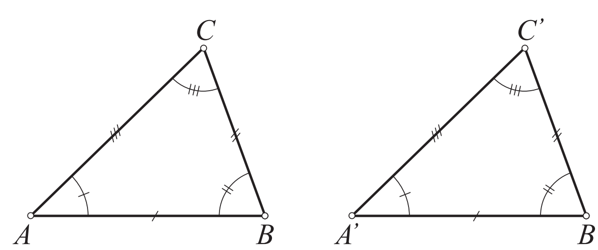
2. Konstruirajmo trikotnik s podatki $a = 5$ cm, $b = 6$ cm in $c = 8$ cm ter mu včrtajmo krožnico.

Najprej narišemo trikotnik ABC.
Nato konstruiramo simetrali dveh notranjih kotov (npr. kotov α *in* β).
Presečišče simetral notranjih kotov je središče S_v očrtane krožnice,
ki jo narišemo tako, da šestilo zapičimo v S_v,
polmer krožnice pa je enak razdalji med S_v in eno od stranic trikotnika (npr. stranico c).



Trikotnika ΔABC in $\Delta A'B'C'$ **sta skladna** ($\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$), **če obstaja togi premik**, ki preslika drugega na drugega.

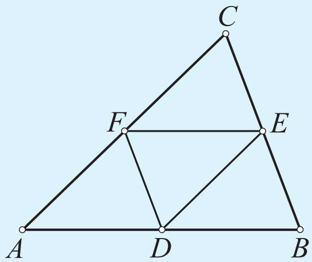
Če sta **trikotnika skladna**, imata **paroma skladne stranice** in **paroma skladne kote**.



Izreki o skladnosti trikotnikov:

1. Če imata trikotnika **skladno stranico in priležna kota**, **sta skladna**.
2. Če imata trikotnika **skladni dve stranici** in **kot med njima**, **sta skladna**.
3. Če imata trikotnika **paroma skladne stranice**, **sta skladna**.
4. Če imata trikotnika **skladni dve stranici** in **kot**, ki leži **nasproti daljši od obeh stranic**, **sta skladna**.

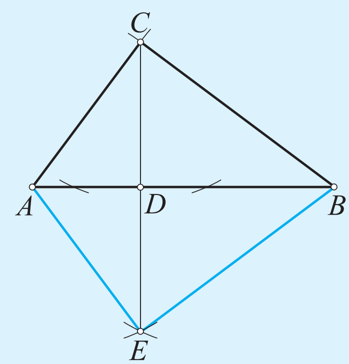
1. Zapišimo skladne trikotnike, ki so na sliki, če so točke D, E in F razpolovišča stranic.



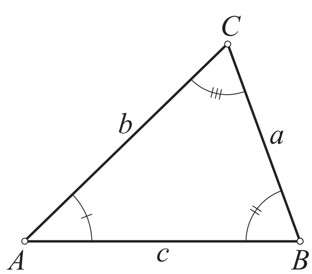
Skladni trikotniki so: $\Delta ADF \cong \Delta FEC \cong \Delta DBE \cong \Delta EFD$.

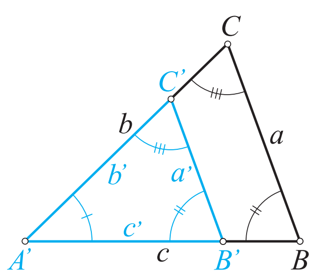
2. Narišimo trikotnik ABC s podatki $a = 4$ cm, $b = 2$ cm in $c = 5$ cm. Točka D je pravokotna projekcija točke C na stranico c, točka E je simetrična točki C glede na daljico AB. Narišimo daljice EC, AE in BE ter zapišimo skladne trikotnike.

Konstruiramo trikotnik ABC.
Iz točke C narišemo pravokotnico na stranico AB in na njej poiščemo točko E.
Skladni so naslednji trikotniki:
$\Delta ABC \cong \Delta ABE$
$\Delta ADC \cong \Delta ADE$
$\Delta BDC \cong \Delta BDE$



Trikotnika ΔABC in $\Delta A'B'C'$ **sta podobna** ($\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$), če **imata paroma skladne kote**.





Če sta trikotnika ΔABC in $\Delta A'B'C'$ podobna, potem so razmerja istoležnih stranic enaka:
$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

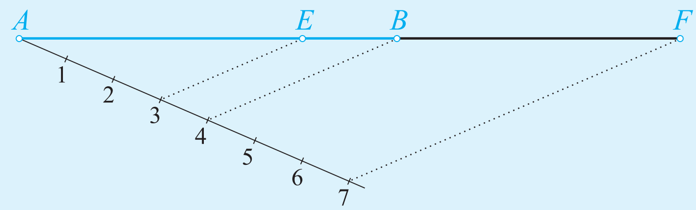
Število k **imenujemo koeficient podobnosti**.

Izreki o podobnosti trikotnikov:

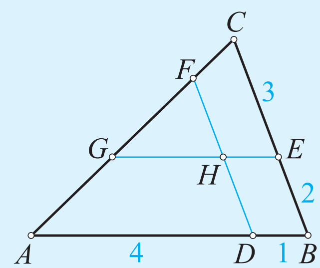
1. Če se trikotnika **ujemata v dveh kotih**, **sta podobna**.
2. Če se trikotnika **ujemata v dveh razmerjih enakoležnih stranic**, **sta podobna**.
3. Če se trikotnika **ujemata v kotu in v razmerju priležnih stranic**, **sta podobna**.

1. Narišimo daljico AB z dolžino 5 cm in na njej poiščimo točki E in F, za kateri velja $|AE| = \frac{3}{4}|AB|$ in $|AF| = \frac{7}{4}|AB|$.

Narišemo daljico AB in poltrak z izhodiščem v točki A.
Na poltrak nanesemo skladne daljice (enote) in točke označimo s števili od 1 do 7.
Nato povežemo točko 4 na poltraku s točko B.
Skozi točko 3 potegnemo vzporednico k prejšnji daljici.
Presečišče vzporednice in daljice AB je točka E.
Nato narišemo še vzporednico skozi točko 7.
Presečišče vzporednice in daljice AB je točka F.



2. Na sliki je narisan trikotnik ABC in daljici $DF \parallel BC$ in $GE \parallel AB$. Zapišimo podobne trikotnike in izračunajmo dolžino daljice GE.



Ker je $DF \parallel BC$ in $GE \parallel AB$ in so koti ob vzporednicah skladni, lahko zapišemo:
$\Delta ABC \sim \Delta ADF \sim \Delta GHF \sim \Delta GEC$.

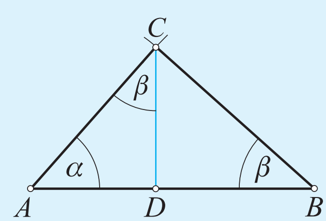
Zato lahko zapišemo $\frac{|GE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$

in od tod izračunamo $|GE| = \frac{|AB| \cdot |EC|}{|BC|} = \frac{5 \cdot 3}{5} = 3$.

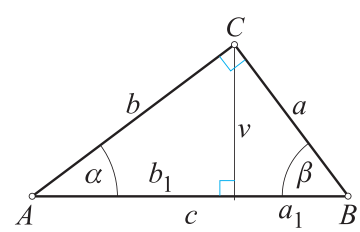
3. V trikotniku ABC je $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 9$ cm in $|AC| = 8$ cm. Skozi oglišče C trikotnika ABC narišimo premico, ki seka stranico AB v točki D tako, da je kot ACD skladen kotu ABC. Zapišimo podobna trikotnika in izračunajmo dolžino daljice CD.

Narišemo sliko.
Trikotnika ABC in ACD sta podobna, zato je $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|CD|}$.

Od tod izračunamo $|CD| = \frac{|AC| \cdot |BC|}{|AB|} = \frac{8 \cdot 9}{12} = 6$ cm.



Pravokotni trikotnik je trikotnik, ki ima en pravi kot. Običajno je to kot v oglišču C. Stranici a in b imenujemo **kateti**, stranico c pa **hipotenuza** pravokotnega trikotnika.



Za **pravokotni trikotnik** velja:

a) kota ob hipotenuzi sta komplementarna: $\alpha + \beta = 90°$,

b) Pitagorov izrek je $c^2 = a^2 + b^2$,

c) z a_1, b_1 označimo dolžini pravokotnih projekcij katet a in b na hipotenuzo: $a_1 + b_1 = c$,

č) polmer trikotniku očrtanega kroga je enak polovici dolžine hipotenuze c: $R = \frac{c}{2}$.

1. V pravokotnem trikotniku merita kateti $a = 4$ cm in $b = 12$ cm. Natančno izračunajmo dolžino hipotenuze in polmer trikotniku očrtanega kroga.

Iz Pitagorovega izreka $c^2 = a^2 + b^2$ izračunamo $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ cm in nato še polmer trikotniku očrtanega kroga $R = \frac{c}{2} = 2\sqrt{10}$ cm.

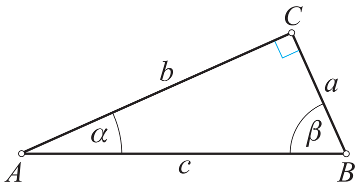
2. V pravokotnem trikotniku hipotenuza c meri 29 cm, kateta a pa 20 cm. Izračunajmo dolžino katete b.

Iz Pitagorovega izreka $a^2 + b^2 = c^2$ izrazimo $b^2 = c^2 - a^2$ in izračunamo
$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{841 - 400} = \sqrt{441} = 21$ cm.

3. V pravokotnem trikotniku je vsota dolžin katet 17 cm, hipotenuza c pa meri 13 cm. Izračunajmo dolžini katet trikotnika.

Zapišemo $c = 13$ cm in iz $a + b = 17$ izrazimo $a = 17 - b$.
Uporabimo Pitagorov izrek $c^2 = a^2 + b^2$,
vstavimo dane vrednosti $13^2 = (b - 17)^2 + b^2$
in preoblikujemo $169 = b^2 - 34b + 289 + b^2$
in iz $2b^2 - 34b + 120 = 0$ zapišemo $b^2 - 17b + 60 = 0$.
Enačbo rešimo z razstavljanjem $(b - 5)(b - 12) = 0$.
Dolžini katet sta $b = 5$ cm in $a = 12$ cm ali $b = 12$ cm in $a = 5$ cm.

Kotne funkcije v pravokotnem trikotniku:



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ **Sinus kota** α je enak razmerju med kotu α **nasprotno kateto in hipotenuzo**.

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ **Kosinus kota** α je enak razmerju med kotu α **priležno kateto in hipotenuzo**.

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ **Tangens kota** α je enak razmerju med kotu α **nasprotno kateto in priležno kateto**.

$\cot\alpha = \frac{b}{a}$ **Kotangens kota** α je enak razmerju med kotu α **priležno kateto in nasprotno kateto**.

Vrednosti kotnih funkcij za nekatere kote:

$\alpha°$	α^{rad}	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0°	0	0	1	0	-
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0

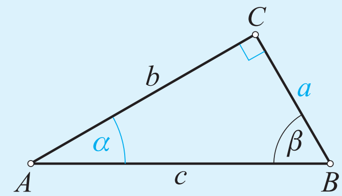
1. Poiščimo natančno vrednost izraza $\frac{\sin 30° + \cos^2 45° \cdot \tan 45°}{\cos 30° \cdot \cot 60°}$.

Zapišemo $\frac{\sin 30° + \cos^2 45° \cdot \tan 45°}{\cos 30° \cdot \cot 60°} = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

2. V pravokotnem trikotniku meri stranica a 6 cm, kot α pa 30°. Natančno izračunajmo dolžini stranic b in c.

Iz zveze $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ izrazimo $b = \frac{a}{\tan\alpha} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 6\sqrt{3}$ cm,

iz $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ pa zapišemo $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$ cm.



3. V pravokotnem trikotniku je $a = 5$ cm in $b = 12$ cm. Vrednosti kotnih funkcij sinus, kosinus in tangens kota α zapišimo na štiri mesta natančno in na minuto natančno izračunajmo velikosti notranjih kotov trikotnika.

Iz Pitagorovega izreka $c^2 = a^2 + b^2$ izračunamo $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ cm.

Zapišemo $\sin\alpha = \frac{5}{13} = 0{\cdot}3846$, $\cos\alpha = \frac{12}{13} = 0{\cdot}9231$, $\tan\alpha = \frac{5}{12} = 0{\cdot}4167$.

Izračunamo $\alpha = 22°37'$ in $\beta = 90° - \alpha = 67°23'$.

4. V pravokotnem trikotniku je kateta $a = 20$ cm, višina na hipotenuzo $v_c = 11{\cdot}5$ cm. Izračunajmo velikosti neznanih notranjih kotov trikotnika in dolžini neznanih stranic. Velikosti kotov zapišimo na minuto, dolžine stranic pa na stotinko natančno.

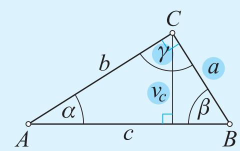
Narišemo skico.

Iz $\sin\beta = \frac{v}{a} = 0{\cdot}5750$ izračunamo $\beta = 35°6'$

in nato $\alpha = 90° - \beta = 54°54'$.

Iz $\tan\beta = \frac{b}{a}$ izračunamo $b = a \cdot \tan\beta = 20 \cdot \tan 35°6' = 14{\cdot}06$ cm.

Iz $\cos\beta = \frac{a}{c}$ izračunamo $c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{20}{\cos 35°6'} = 24{\cdot}45$ cm.



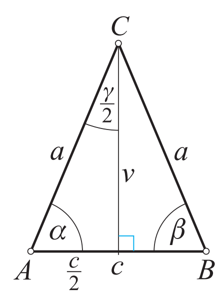
Enakokraki trikotnik je trikotnik, v katerem sta **dve stranici (kraka) enako dolgi**.

Za **enakokraki trikotnik** velja:

a) kota ob osnovnici sta enako velika: $\alpha = \beta$,

b) višina na osnovnico v_c razpolovi osnovnico c,

c) višina na osnovnico v_c razpolovi kot ob vrhu (γ).

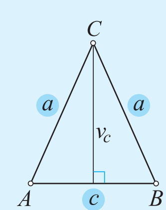


1. V enakokrakem trikotniku meri osnovnica $c = 18$ cm, kraka pa $a = b = 15$ cm. Izračunajmo dolžino višine na osnovnico.

Narišemo skico in uporabimo Pitagorov izrek $(\frac{c}{2})^2 + v^2 = a^2$.

Izrazimo $v^2 = a^2 - (\frac{c}{2})^2$

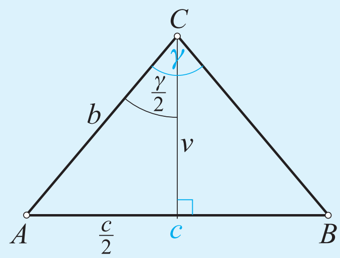
in izračunamo $v = \sqrt{a^2 - (\frac{c}{2})^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$ cm.



2. V enakokrakem trikotniku ABC meri osnovnica 8 cm, kot med krakoma pa 40°. Izračunajmo dolžino kraka in rezultat zaokrožimo na 3 mesta.

Iz lastnosti enakokrakega trikotnika in s pomočjo slike

dobimo $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{b}$ in od tod $b = \frac{\frac{c}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{4}{\sin 20°} \doteq 11{,}6952 \doteq 11{,}7$ cm.



Enakostranični trikotnik je trikotnik, v katerem so **vse stranice enako dolge**.

Za **enakostranični trikotnik** velja:

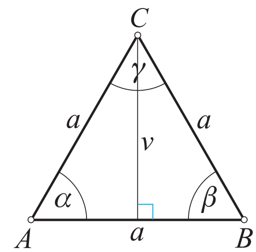
a) vsi notranji koti so enaki: $\alpha = \beta = \gamma = 60°$,

b) višina je $v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$,

c) ploščina je $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$,

č) središče včrtanega in očrtanega kroga, višinska točka in težišče trikotnika sovpadajo,

d) polmer včrtanega kroga meri polovico polmera očrtanega kroga: $r = \frac{R}{2}$.



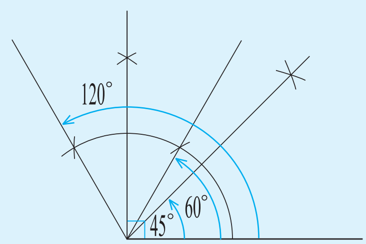
1. Obseg enakostraničnega trikotnika je 12 dm. Izračunajmo dolžino stranice a in višino v.

Iz $o = 3a = 12$ dm izračunamo $a = \frac{o}{3} = \frac{12}{3} = 4$ dm.

Izračunamo še dolžino višine $v = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ dm.

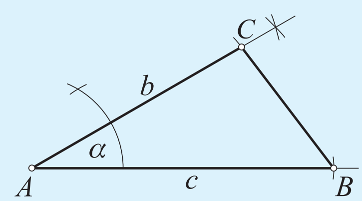
2. Konstruirajmo kote 60°, 120°, 90° in 45°.

Najprej konstruiramo kota 60° in 120°.
Nato pa s simetralami kotov narišemo še kota 90° in 45°.



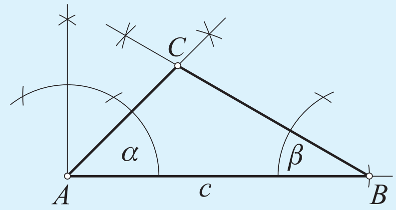
3. Konstruirajmo trikotnik ABC s podatki $b = 4$ cm, $c = 5$ cm in $\alpha = 30°$.

Najprej narišemo kot 60°, nato s simetralo tega kota kot 30°.
Vrh kota označimo z A in na krakih kota odmerimo razdalji $c = 5$ cm in $b = 4$ cm.
Dobljeni točki označimo z B in s C ter ju povežemo.



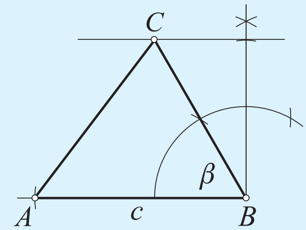
4. Konstruirajmo trikotnik ABC s podatki $c = 6$ cm, $\alpha = 45°$ in $\beta = 30°$.

Najprej narišemo stranico $c = 6$ cm in označimo krajišči A in B.
Nato konstruiramo kota 45° in 30°.
Presečišče krakov obeh kotov označimo s C.



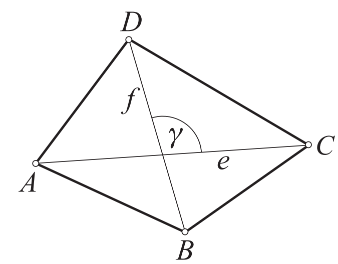
5. Konstruirajmo trikotnik ABC s podatki $c = 4$ cm, $v_c = 3$ cm in $\beta = 60°$.

Najprej narišemo stranico $c = 5$ cm in označimo krajišči A in B.
Nato v točki B konstruiramo kota 60° in 90°.
Na pravokotnici odmerimo 3 cm in skozi to točko
narišemo vzporednico k stranici c.
Presečišče vzporednice in kraka kota 60° označimo s C.
Povežemo točki A in C.



Štirikotnik, paralelogram, romb, pravokotnik, kvadrat, trapez in enakokraki trapez, deltoid

Štirikotnik $ABCD$ je množica točk v ravnini, ki jo omejujejo daljice AB, BC, CD in AD, pri čemer so A, B, C in D različne točke v ravnini, tako da nobena trojica ne leži na isti premici in se nobena dvojica nesosednjih stranic ne seka.

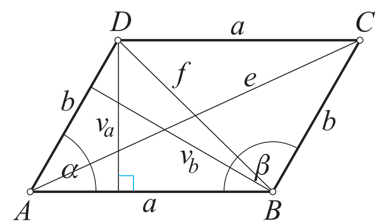


V poljubnem štirikotniku je vsota notranjih kotov 360°.

Diagonala štirikotnika je zveznica nesosednjih oglišč.

Diagonali označimo $\boldsymbol{e = AC}$ in $\boldsymbol{f = BD}$.

Paralelogram je štirikotnik, ki ima **dva para vzporednih stranic**.



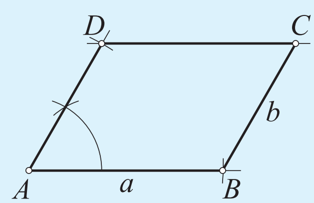
Štirikotnik je paralelogram natanko takrat, ko:

a) ima en par skladnih in vzporednih stranic;
b) sta po dve nasprotni stranici skladni;
c) sta nasprotna kota skladna;
č) sta sosednja kota suplementarna;
d) se **diagonali** paralelograma $AC = e$ in $BD = f$ **razpolavljata**.

Obseg paralelograma je $o = 2a + 2b$, ploščina paralelograma pa $S = a \cdot v_a$.

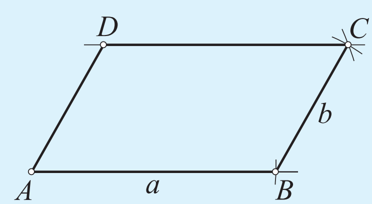
1. Konstruirajmo paralelogram $ABCD$, če merita stranici $a = 4$ cm, $b = 3$ cm in oklepata kot 60°.

Najprej narišemo kot 60° z vrhom v točki A.
Nato na krakih kota odmerimo dolžini stranic a in b
in dobljeni točki označimo z B in D.
Skozi dobljeni točki narišemo vzporednici k danima stranicama.
Presečišče vzporednic je oglišče C.



2. Konstruirajmo paralelogram $ABCD$, če merita stranici $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, diagonala e pa 7 cm.

Najprej narišemo trikotnik ABC, v katerem je $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm
in $|AC| = 7$ cm.
Nato skozi točko C narišemo vzporednico k stranici AB,
skozi točko A pa vzporednico k stranici BC.
Presečišče vzporednic je točka D.

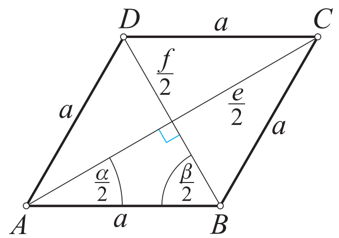


3. Izračunajmo velikost kota $\measuredangle CDA$ in dolžino višine na stranico a paralelograma $ABCD$, za katerega velja $a = 6$ cm, $b = 8$ cm in $\alpha = 55°$. Rezultat zapišimo na tri mesta natančno.

Zapišemo $\measuredangle CDA = \delta = \beta = 180° - \alpha = 180° - 55° = 125°$.

Iz $\sin\alpha = \frac{v_a}{b}$ izračunamo $v_a = b \cdot \sin\alpha = 8 \cdot \sin 55° = 6{,}55$ cm.

Romb je paralelogram, ki ima **vse stranice enako dolge**.



Za **romb** velja:

a) diagonali romba se razpolavljata pod pravim kotom,

b) diagonali romba razpolavljata notranje kote,

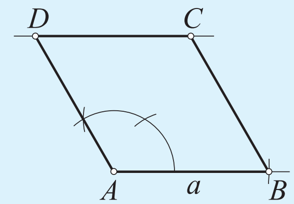
c) zveza med diagonalama in stranico romba je $a^2 = (\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2$,

č) ploščina je $S = \frac{ef}{2}$,

d) obseg je $o = 4a$.

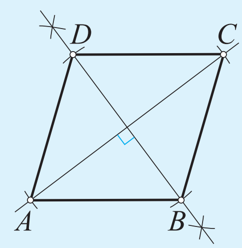
1. Konstruirajmo romb $ABCD$ s podatki $a = 4$ cm in $\alpha = 120°$.

Najprej narišemo trikotnik ABD, v katerem je $\alpha = 120°$ in $|AB| = |AD| = 4$ cm.
Nato pa skozi točko D narišemo vzporednico k stranici AB,
skozi točko B pa vzporednico k stranici AD.
Presečišče vzporednic je točka C.



2. Konstruirajmo romb $ABCD$ s podatki $e = 4$ cm in $f = 3$ cm.

Najprej narišemo diagonalo AC,
nato simetralo te diagonale.
Šestilo s polmerom $1{,}5$ cm zapičimo v razpolovišče diagonale AC
in na obeh straneh simetrale narišemo loka.
Presečišči sta oglišči B in D. Narišemo še stranice romba.



3. Izračunajmo dolžino stranice romba $ABCD$, v katerem merita diagonali $e = 80$ cm in $f = 18$ cm.

Dolžino stranice romba izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka $a^2 = (\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2$.

Izračunamo $a = \sqrt{(\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2} = \sqrt{40^2 + 9^2} = \sqrt{1600 + 81} = \sqrt{1681} = 41$ cm.

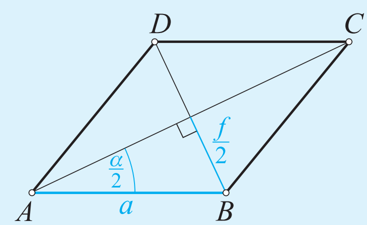
4. V rombu $ABCD$ stranica a meri 7 cm, diagonala $f = |BD|$ pa 6 cm. Izračunajmo, kolikšen kot oklepata stranici romba $a = AB$ in $b = AD$.

Ker se diagonali romba razpolavljata pod pravim kotom,

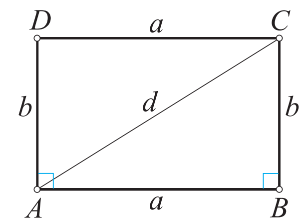
lahko uporabimo kotne funkcije in zapišemo $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{f}{2}}{a} = \frac{3}{7}$,

izračunamo $\frac{\alpha}{2} = 25{,}3769°$

in od tod $\alpha = 50°45'$.



Pravokotnik je paralelogram, ki ima **notranje kote prave**.



Za pravokotnik velja:

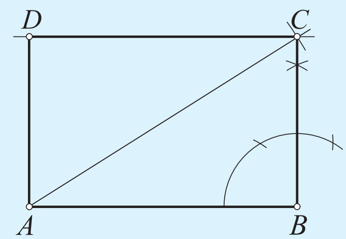
a) dolžina diagonale je $d = \sqrt{a^2 + b^2}$,

b) ploščina je $S = ab$,

c) obseg je $o = 2a + 2b = 2(a + b)$.

1. Konstruirajmo pravokotnik $ABCD$ s podatki: $|AB| = 5$ cm in $|AC| = 6$ cm.

Najprej narišemo daljico AB,
nato v oglišču B konstruiramo pravokotnico.
Iz oglišča A s šestilom odmerimo 6 cm.
Presečišče loka s pravokotnico je točka C.
Nato skozi točko C narišemo vzporednico k stranici AB,
skozi točko A pa vzporednico k stranici BC.
Presečišče vzporednic je točka D.



2. Diagonala d pravokotnika s stranico $a = 20$ cm meri 29 cm. Izračunajmo obseg pravokotnika.

Najprej z uporabo Pitagorovega izreka $a^2 + b^2 = d^2$ izračunamo dolžino stranice
$b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{841 - 400} = \sqrt{441} = 21$ cm.

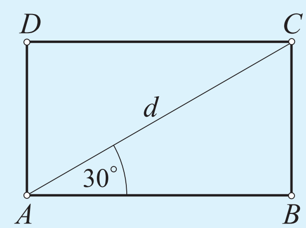
Obseg pravokotnika $o = 2(a + b) = 2(20 + 21) = 82$ cm.

3. Stranica pravokotnika $ABCD$ meri $6\sqrt{3}$ cm in oklepa z diagonalo AC kot $30°$. Izračunajmo dolžino druge stranice pravokotnika in dolžino diagonale.

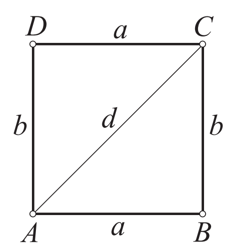
Če je $|AB| = 6\sqrt{3}$ cm in $\varphi = 30°$, potem je $\tan\varphi = \frac{|BC|}{|AB|}$ in od tod

$|BC| = |AB| \cdot \tan\varphi = 6\sqrt{3} \cdot \tan 30° = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6$ cm.

Iz $\cos\varphi = \frac{|AB|}{|AC|}$ izračunamo $|AC| = \frac{|AB|}{\cos\varphi} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12$ cm.



Kvadrat je pravokotnik, ki ima vse **stranice enako dolge**.



Za **kvadrat** velja:

a) dolžina diagonale je $d = a \cdot \sqrt{2}$,

b) ploščina je $S = a^2 = \frac{d^2}{2}$,

c) obseg je $o = 4a$.

1. Diagonala kvadrata meri 10 cm. Natančno izračunajmo dolžino stranice kvadrata.

Iz $d = a\sqrt{2}$ izračunamo $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ cm.

2. V kvadratu $ABCD$ s stranico $a = 8$ cm leži na stranici BC točka E tako, da je $|BE| : |EC| = 1 : 3$.
Natančno izračunajmo dolžino daljice AE in na minuto natančno kot med daljico AE in stranico AB.

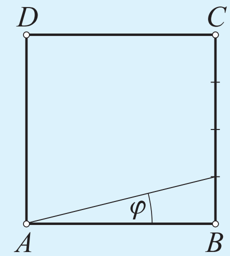
Najprej narišemo sliko in izračunamo $|BE| = \frac{1}{4}|BC| = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ cm.

Z uporabo Pitagorovega izreka zapišemo $|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2$

in izračunamo $|AE| = \sqrt{|AB|^2 + |BE|^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ cm.

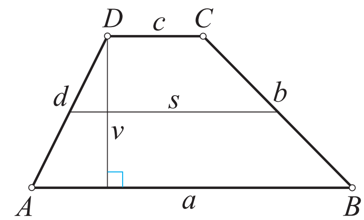
Za kot φ med stranicama AE in AB velja $\tan\varphi = \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Zapišemo $\varphi = 14°2'$.



Trapez je štirikotnik, ki ima **en par vzporednih stranic**.

Stranici AB in CD sta osnovnici, stranici AD in BC pa kraka trapeza.



Za **trapez** velja:

a) srednjica s je daljica, ki povezuje razpolovišči krakov in je vzporedna osnovnicama, njena dolžina je $s = \frac{1}{2}(a + c)$,

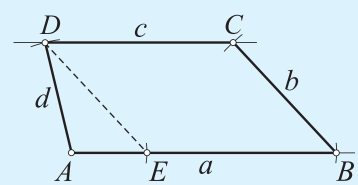
b) kota ob krakih sta suplementarna: $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$,

c) ploščina je $S = \frac{(a + c)v}{2}$,

č) obseg je $o = a + b + c + d$.

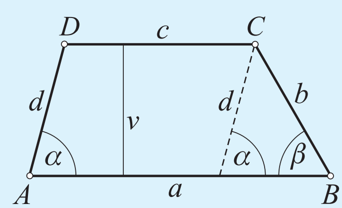
1. Konstruirajmo trapez $ABCD$ s podatki $a = 7$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm in $d = 3$ cm.

Narišemo skico in v njej skozi točko D vzporednico h kraku BC.
Najprej narišemo stranico AB in na njej poiščemo točko E, za katero velja $|AE| = 2$ cm.
Nato konstruiramo trikotnik AED.
Skozi točko B narišemo vzporednico k stranici ED,
skozi točko D vzporednico k stranici AB.
Presečišče vzporednic je točka C.



2. V trapezu $ABCD$ velja $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 75°$ in $\beta = 60°$.
a) Izračunajmo velikosti kotov γ in δ.
b) Na tri mesta natančno izračunajmo višino trapeza.

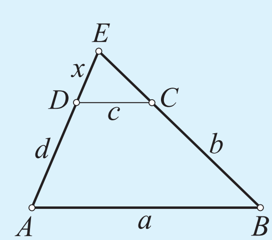
Narišemo skico.
Izračunamo $\gamma = 180° - \beta = 120°$ in $\delta = 180° - \alpha = 105°$.
Iz $\sin\beta = \frac{v}{b}$ izračunamo $v = b \cdot \sin\beta = 4 \cdot \sin 60° = 3{\cdot}46$ cm.



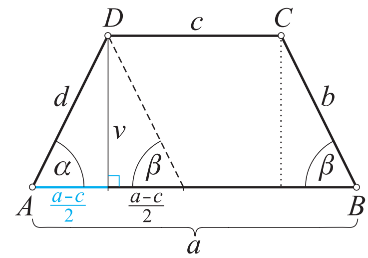
3. Nosilki krakov trapeza $ABCD$ s podatki $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $c = 4$ cm in $d = 6$ cm se sekata v točki E.
Izračunajmo dolžino daljice AE.

Narišemo sliko in zapišemo podobna trikotnika $ABE \sim DCE$.
Iz sorazmerja $\frac{d + x}{a} = \frac{x}{c}$
zapišemo $\frac{6 + x}{12} = \frac{x}{4}$
in izračunamo $4(6 + x) = 12x$

$24 + 4x = 12x$
$-8x = -24$
$x = 3$ cm
$|AE| = d + x = 6\text{ cm} + 3\text{ cm} = 9$ cm



Enakokraki trapez je trapez, v katerem sta **kraka b in d enako dolga: $b = d$.**



Za enakokraki trapez velja:

a) kota ob osnovnici sta skladna: $\alpha = \beta$,

b) zveza med osnovnicama, višino in krakom je: $b^2 = v^2 + (\frac{a-c}{2})^2$.

1. V enakokrakem trapezu $ABCD$ z osnovnicama $a = 10$ cm in $c = 6$ cm merita kraka $b = d = 5$ cm. Na desetinko natančno izračunajmo višino trapeza in dolžini diagonal.

Zapišemo $d^2 = v^2 + (\frac{a-c}{2})^2$ in iz $v^2 = d^2 - (\frac{a-c}{2})^2$

izračunamo $v = \sqrt{d^2 - (\frac{a-c}{2})^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} = 4{\cdot}6$ cm.

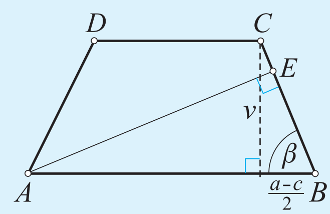
Zapišemo še $f^2 = (c + \frac{a-c}{2})^2 + v^2$ in izračunamo $f = \sqrt{(c + \frac{a-c}{2})^2 + v^2} = \sqrt{8^2 + 21} = \sqrt{85} = 9{\cdot}2$ cm.

Velja $e = f = 9{\cdot}2$ cm.

2. V enakokrakem trapezu je $a = 19$ cm, $c = 13$ cm, kot med krakom in daljšo osnovnico pa meri $67°28'$.

a) Izračunajmo višino enakokrakega trapeza.

b) Točka E leži na stranici BC tako, da je kot BEA pravi. Izračunajmo dolžino daljice AE.

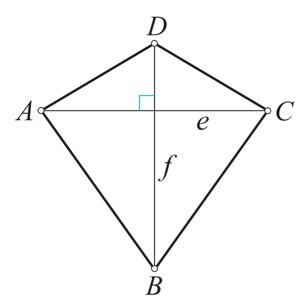


Zapišemo $\alpha = \beta = 67°28'$ in narišemo sliko.

Iz $\tan\beta = \frac{v}{\frac{a-c}{2}}$ je $v = \frac{a-c}{2} \cdot \tan\beta = 3 \cdot \tan 67°28' = 7{\cdot}23$ cm.

Iz $\sin\beta = \frac{|AE|}{a}$ izračunamo $|AE| = a \cdot \sin\beta = 19 \cdot \sin 67°28' = 17{\cdot}55$ cm.

Deltoid je štirikotnik, v katerem **ena diagonala razpolavlja drugo pod pravim kotom.**



Za **deltoid** velja:

a) stranici AD in CD sta skladni, prav tako sta skladni stranici AB in BC,

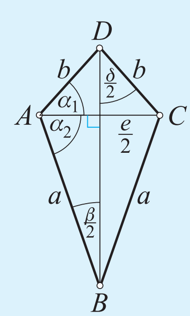
b) če je diagonala $f = BD$ simetrala deltoida, potem razpolavlja notranja kota pri ogliščih B in D,

c) ploščina je $S = \frac{ef}{2}$,

č) obseg je $o = 2a + 2b = 2(a + b)$.

V deltoidu $ABCD$ je $a = |AB| = |BC| = 6$ cm, $b = |AD| = |DC| = 3$ cm in diagonala $e = |AC| = 4$ cm. Izračunajmo velikosti kotov deltoida.

Narišemo sliko in označimo kote.



Iz $\cos\alpha_1 = \frac{\frac{e}{2}}{a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ je $\alpha_1 = 70°32'$.

Iz $\cos\alpha_2 = \frac{\frac{e}{2}}{b} = \frac{2}{3}$ je $\alpha_2 = 48°11'$.

Zapišemo $\alpha = \gamma = \alpha_1 + \alpha_2 = 118°43'$.

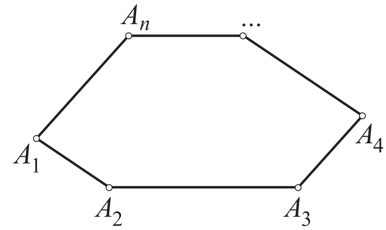
Iz $\frac{\beta}{2} = 90° - \alpha_1$ dobimo $\beta = 2(90° - \alpha_1) = 38°56'$

in iz $\frac{\delta}{2} = 90° - \alpha_2$ dobimo $\delta = 2(90° - \alpha_2) = 83°38'$.

Konveksni *n*-kotnik, pravilni *n*-kotnik

Naj bodo $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$, $n \geq 3$ različne točke v ravnini.
Daljice $A_1A_2, A_2A_3 \dots A_{n-1}A_nA_1$ so stranice **konveksnega večkotnika** z oglišči $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$, če velja:

1. nobena trojica zaporednih oglišč ne leži na isti premici;
2. nobena dvojica nesosednjih stranic se ne seka;
3. vsa oglišča večkotnika ležijo na isti strani nosilke poljubne stranice ali na tej nosilki.

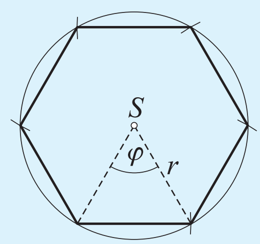


Notranji kot večkotnika je kot med sosednjima stranicama. Večkotnik je **pravilen**, če ima skladne stranice in skladne notranje kote. Vsota notranjih kotov je $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n - 2) \cdot 180°$.

Diagonala večkotnika je zveznica nesosednjih oglišč. Število diagonal *n*-kotnika izračunamo po formuli $N = \frac{n(n-3)}{2}$.

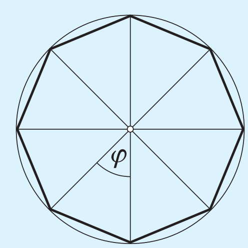
1. Konstruirajmo pravilni šestkotnik, ki je včrtan v krog s polmerom $r = 2{,}5$ cm, ter izračunajmo velikost notranjega kota.

Narišemo krožnico s polmerom 2˙5 cm in si izberemo eno točko na krožnici.
Od tam po krožnici zaporedoma šestkrat nanesemo polmer.
Dobljene točke so oglišča pravilnega šestkotnika.
Narišemo še stranice šestkotnika.
Stranici a pripadajoči središčni kot meri $\varphi = \frac{360°}{6} = 60°$,
od tod je velikost notranjega kota $\alpha = 180° - 60° = 120°$.



2. Konstruirajmo pravilni osemkotnik, ki je včrtan v krog s polmerom $r = 3$ cm, ter izračunajmo velikost notranjega kota.

Narišemo krožnico s polmerom 3 cm, premer in simetralo tega premera.
Nato narišemo še dve različni simetrali pravih kotov.
Presečišča simetral s krožnico so oglišča pravilnega osemkotnika.
Narišemo stranice osemkotnika.
Stranici a pripadajoči središčni kot meri $\varphi = \frac{360°}{8} = 45°$,
od tod je velikost notranjega kota $\alpha = 180° - 45° = 135°$.

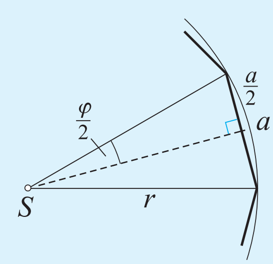


3. Izračunajmo velikost notranjega kota, vsoto notranjih kotov in število diagonal pravilnega petkotnika.

Za vsoto notranjih kotov uporabimo zgornjo formulo $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = (5 - 2) \cdot 180° = 540°$,
od tod lahko izračunamo velikost notranjega kota $\alpha = \frac{540°}{5} = 108°$.
Število diagonal je $N = \frac{5(5-3)}{2} = 5$.

4. Izračunajmo dolžino stranice a pravilnega dvanajstkotnika, ki je včrtan krožnici s polmerom $r = 15$ cm.

Narišemo sliko in izračunamo velikost stranici a pripadajočega središčnega kota $\varphi = \frac{360°}{12} = 30°$.
Zapišemo $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r}$ in od tod $a = 2r\sin\frac{\varphi}{2} = 2 \cdot 15 \cdot \sin 15° = 7{,}76$ cm.



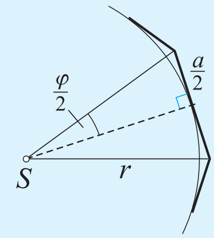
5. Izračunajmo dolžino stranice a pravilnega desetkotnika, ki je očrtan krožnici s polmerom $r = 8$ cm.

Narišemo sliko in izračunamo velikost stranici a pripadajočega središčnega kota

$\varphi = \frac{360°}{10} = 36°$.

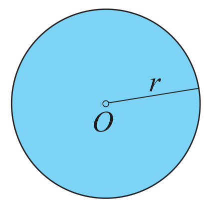
Zapišemo $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r}$ je

$a = 2r\cos\frac{\varphi}{2} = 2 \cdot 8 \cdot \tan 18° = 5{\cdot}20$ cm.



Krog in krožnica, krožni lok, središčni in obodni kot

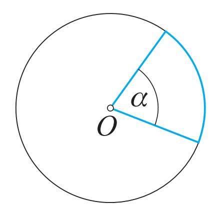
Za krog veljata obrazca za ploščino $S = \pi \cdot r^2$ in obseg $o = 2\pi r$.



Prečni presek drevesa z obsegom 1 m ima obliko kroga. Izračunajmo polmer preseka.

Iz $o = 2\pi r$ izračunamo $r = \frac{o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} = 0{\cdot}159$ m $= 15{\cdot}9$ cm.

Kot α, ki ima vrh v središču krožnice, kraka pa od krožnice odrežeta dani lok, imenujemo **središčni kot**.



Dolžino krožnega loka l, ki pripada središčnemu kotu α, izračunamo:

a) če je kot α v stopinjah: $l = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°}$,

b) če je kot α v radianih: $l = r \cdot \alpha$.

1. Polmer kroga meri 5 cm. Izračunajmo:

a) koliko meri središčnemu kotu 70° pripadajoči krožni lok;

b) kolikšen središčni kot pripada krožnemu loku z dolžino 8 cm.

Izračunamo $l = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 70°}{180°} = 6{\cdot}1$ cm.

Iz $l = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180°}$ izračunamo $\alpha = \frac{l \cdot 180°}{\pi \cdot r} = \frac{8 \cdot 180°}{\pi \cdot 5} = 91°40'$.

2. Dan je krog s polmerom 12 cm. Izračunajmo:

a) koliko meri središčnemu kotu $\frac{2\pi}{3}$ pripadajoči krožni lok;

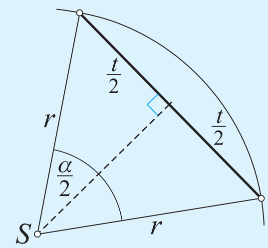
b) kolikšen središčni kot pripada krožnemu loku z dolžino 6 cm. Rezultat pretvorimo v stopinje.

Izračunamo $l = r \cdot \alpha = 8\pi$ cm $\doteq 25{\cdot}13$ cm.

Iz $l = r \cdot \alpha$ izračunamo $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ radiana, kar je $28°39'$.

3. Izračunajmo, koliko meri tetiva, ki v krogu s polmerom $r = 6$ cm pripada središčnemu kotu $\alpha = 70°$.

Narišemo sliko.

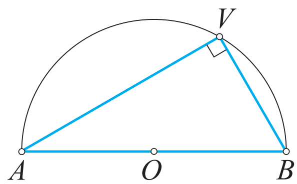


Iz $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{t}{2}}{r}$

izračunamo $t = 2r\sin\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot 6 \cdot \sin 35° = 6{\cdot}88$ cm.

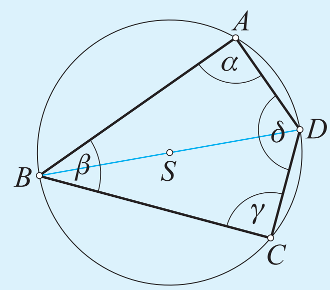
Kot, ki ima vrh na krožnici, kraka pa potekata skozi krajišči premera krožnice, imenujemo **kot v polkrogu**.

Talesov izrek: kot v polkrogu je pravi kot.



1. Izračunajmo velikosti notranjih kotov štirikotnika iz slike, če je diagonala BD premer štirikotniku očrtane krožnice in $\beta = 50°$.

Ker je diagonala BD premer štirikotniku očrtane krožnice, je $\alpha = \gamma = 90°$.
Ker je vsota notranjih kotov štirikotnika $360°$, je $\delta = 360° - \alpha - \beta - \gamma = 130°$.

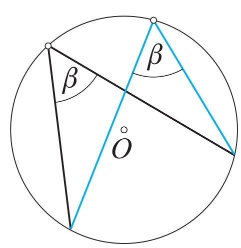


2. Izračunajmo polmer krožnice, ki je pravokotnemu trikotniku s katetama 7 cm in $\sqrt{15}$ cm očrtana.

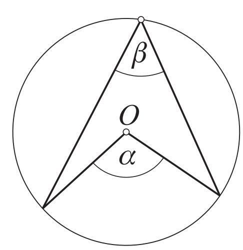
Po Talesovem izreku je središče pravokotnemu trikotniku očrtane krožnice ravno v razpolovišču hipotenuze. Zato meri polmer očrtane krožnice polovico dolžine hipotenuze.

$R = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{49 + 15} = \frac{1}{2}\sqrt{64} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ cm

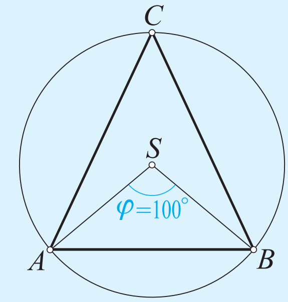
Kot β, ki ima vrh na krožnici, kraka pa od krožnice odrežeta dani lok, imenujemo **obodni kot**. **Vsi obodni koti krožnice nad istim lokom so skladni**.



Obodni kot meri polovico središčnega kota nad istim lokom dane krožnice:
$\beta = \frac{\alpha}{2}$ oziroma $\alpha = 2\beta$.

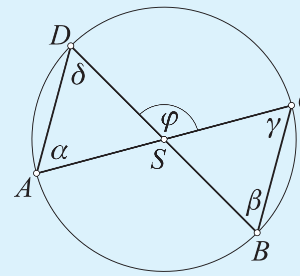


1. Izračunajmo velikosti notranjih kotov enakokrakega trikotnika ABC iz slike, če je točka S središče trikotniku očrtane krožnice.



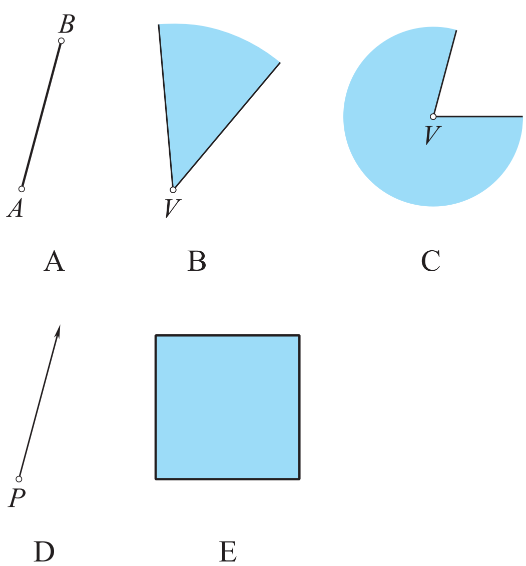
Iz prejšnje zveze lahko zapišemo $\gamma = \frac{\varphi}{2} = 50^\circ$.
Ker je trikotnik enakokrak, je $\alpha = \beta$.
Iz zveze $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ oz. $2\alpha + \gamma = 180^\circ$
lahko izračunamo $\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2}(180^\circ - 50^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 130^\circ = 65^\circ$.

2. Izračunajmo velikosti kotov iz slike, če je $\delta = 60^\circ$.

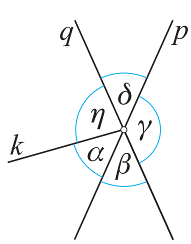


Kot γ je obodni kot nad istim lokom kot δ, zato je $\gamma = 60^\circ$.
Kot $\measuredangle ASB$ je sovršen kotu φ, zato sta skladna.
Ker je kot $\measuredangle ASB$ središčni kot nad istim lokom kot δ, je $\varphi = \measuredangle ASB = 120^\circ$.
Ker sta trikotnika ΔASD in ΔBSC enakokraka,
sta kota ob osnovnici skladna in je $\alpha = \delta = 60^\circ$ in $\beta = \gamma = 60^\circ$.

1. Katere od spodnjih množic so konveksne?



2. Na sliki sta dani premici p in q in poltrak k. Zapišite pare sosednjih kotov, sokotov in sovršnih kotov.



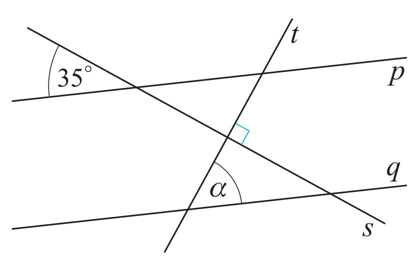
3. Izračunajte vsoto in razliko danih parov kotov.
a) $\alpha = 104^\circ 25'$, $\beta = 56^\circ 38'$
b) $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\delta = \frac{\pi}{6}$

4. Danemu kotu α poiščimo velikost komplementarnega kota β in velikost suplementarnega kota γ.
a) $\alpha = 34^\circ 19'$ b) $\alpha = \frac{\pi}{4}$

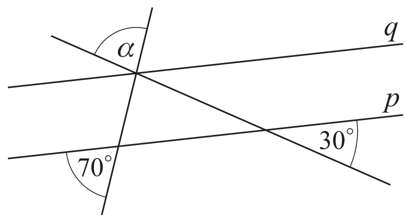
5. Pretvorite stopinje v radiane.
a) $\alpha = 71{\cdot}5^\circ$ c) $\delta = 25^\circ 17'$
b) $\beta = 123{\cdot}69^\circ$ č) $\gamma = 87^\circ 37' 16''$

6. Pretvorite radiane v stopinje, kotne minute in sekunde.
a) $\alpha = 0{\cdot}5241$ c) $\delta = \frac{5\pi}{6}$
b) $\gamma = \frac{\pi}{3}$ č) $\beta = 1{\cdot}5$

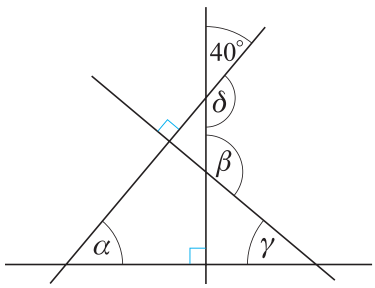
7. Izračunajte velikost kota α iz slike, če sta premici p in q vzporedni, premici s in t pa pravokotni.



8. Izračunajte velikost kota α iz slike, če sta premici p in q vzporedni.



9. Izračunajte velikosti kotov iz slik.



10. Obseg enakokrakega trikotnika meri 110 cm, daljica, ki povezuje razpolovišči krakov, pa 15 cm. Koliko merijo stranice trikotnika?

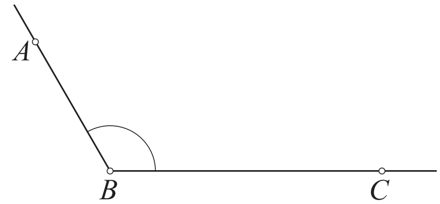
11. V enakostraničnem trikotniku ABC na kraku AC leži točka D, na kraku BC pa točka E, tako da je $|AE| = |BD|$. Zapišite skladne trikotnike in ugotovite, ali je $|AD| = |BE|$.

12. Na krakih kota $\measuredangle AVB = \measuredangle(k, h)$ ležita točki $A \in k$ in $B \in h$ tako, da je $|VA| = |VB|$. Na kraku k leži točka C, na kraku h pa točka D tako, da je $\measuredangle VAD = \measuredangle VBC$. Zapišite skladna trikotnika in ugotovite, ali je trikotnik CDV enakokrak.

13. V kvadratu $ABCD$ leži točka T, tako da je $|TB| = |TD|$.
a) Ali sta trikotnika ABT in ADT skladna? Odgovor utemeljite.
b) Ugotovite, ali točka T leži na diagonali AC kvadrata $ABCD$.

14. Konstruirajte simetralo daljice AB, če je $|AB| = 4$ cm. Na simetrali poiščite točki, ki sta od krajišč daljice oddaljeni za 28 mm.

15. Na sliki je dan kot $\measuredangle ABC$ in $|CB| = 36$ mm. Poiščite točko T, ki je enako oddaljena od točk B in C ter od obeh krakov kota.



16. V ravnini konstruirajte kot 105°.

17. S šestilom in ravnilom konstruirajte kot 22·5°. V kotu narišite množico točk, ki so enako oddaljene od obeh krakov in ležijo v notranjosti kota. Kako imenujemo to množico točk?

18. Narišite premico p in točko $T \notin p$, za katero je $d(T, p) = 2{\cdot}5$ cm. Skozi točko T konstruirajte pravokotnico na premico p.

19. Dana je premica p ter točki $A \in p$ in $B \notin p$.
a) Skozi točko A konstruirajte pravokotnico na premico p.
b) Poiščite pravokotno projekcijo točke B na premico p.
c) Točki B poiščite simetrično točko glede na premico p.

20. Za točki A in B velja $|AB| = 2{\cdot}5$ cm. Narišite krožnico K, ki ima središče v točki A in gre skozi točko B. Skozi točko B konstruirajte tangento na dano krožnico K.

21. Konstruirajte enakokraki trikotnik z osnovnico dolžine 4 cm in kotoma ob osnovnici velikosti 30°.

22. Konstruirajte trikotnik s podatki $a = 7$ cm, $b = 6$ cm in $c = 4$ cm ter mu poiščite težišče.

23. Konstruirajte trikotnik s podatki $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $\gamma = 105°$ in mu očrtajte krožnico.

24. Konstruirajte trikotnik ABC, za katerega velja $b = 5$ cm, $\alpha = 75°$ in $\gamma = 60°$.

25. Konstruirajte trikotnik s podatki $a = 5$ cm, $v_a = 3$ cm, $\beta = 45°$ in mu poiščite višinsko točko.

26. Konstruirajte trikotnik ABC, za katerega velja $c = 5$ cm, $b = 4$ cm in $\alpha = 120°$, ter ga vzporedno premaknite za vektor $\overrightarrow{AC}$.

27. Konstruirajte trikotnik ABC, za katerega velja $a = 3{\cdot}5$ cm, $b = 4$ cm in $\gamma = 15°$, ter ga zavrtite okoli oglišča C za $60°$.

28. Konstruirajte pravokotni trikotnik ABC, katerega kateti merita $a = 4$ cm in $b = 5$ cm. Trikotnik ABC prezrcalite čez hipotenuzo.

29. Konstruirajte trikotnik ABC s podatki $a = 5$ cm, $\alpha = 60°$ in $v_c = 4$ cm.

30. Konstruirajte trikotnik ABC s podatki $c = 6$ cm, $\beta = 45°$ in $t_c = 4$ cm.

31. Konstruirajte pravokotnik $ABCD$ s stranico $|AB| = 6$ cm in diagonalo $|BD| = 8$ cm in mu očrtajte krožnico.

32. Konstruirajte kvadrat, če meri diagonala 4 cm.

33. Konstruirajte paralelogram s podatki $a = 5$ cm, $v_a = 2{\cdot}5$ cm, $\alpha = 45°$.

34. Konstruirajte paralelogram $ABCD$, če meri stranica $a = 5$ cm, diagonala $e = 7$ cm, kot $\beta = 60°$.

35. Konstruirajte romb s podatki $a = 5$ cm, $\alpha = 75°$.

36. Diagonali romba $ABCD$ merita $e = 5$ cm in $f = 3$ cm. Konstruirajte romb $ABCD$.

37. Konstruirajte trapez s podatki $a = 8$ cm, $c = 5$ cm, $e = 7$ cm, $v = 4$ cm.

38. Konstruirajte trapez s podatki $a = 7$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

39. Konstruirajte trapez s podatki $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm, $d = 5$ cm.

40. Konstruirajte enakokraki trapez s podatki $a = 5$ cm, $b = d = 3$ cm in $\alpha = \beta = 45°$.

41. Izračunajte notranje in zunanje kote trikotnika, če je:

a) $\beta = 94°25'$ in $\gamma' = 117°31'$

b) $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ in $\beta' = \frac{5\pi}{6}$

42. V trikotniku je $\alpha = 48°24'$, druga dva kota pa sta v razmerju $\beta : \gamma = 3 : 5$. Izračunajte velikosti kotov β in γ.

43. Notranji koti trikotnika ABC so v razmerju $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 7$. Izračunajte velikosti notranjih kotov trikotnika in velikost kota ε med stranico AB in višino na stranico AC.

44. Izračunajte velikosti preostalih neznanih notranjih kotov trikotnika ABC, v katerem je $\alpha' = 116°58'$ in $\gamma = 47°51'$. Koliko meri kot med višinama v_a in v_b?

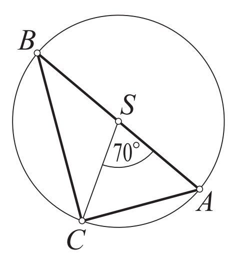
45. Izračunajte velikosti preostalih neznanih notranjih in zunanjih kotov trikotnika ABC, v katerem je $\beta = 126°8'$ in $\gamma = 35°32'$. Koliko meri kot med simetralama kotov β in γ?

46. V enakokrakem trikotniku ABC, pri katerem je $|AC| = |BC|$, meri kot ob vrhu $20°$. Izračunajte velikost topega kota, ki ga oklepata višina na osnovnico in višina na krak.

47. Velikosti notranjih kotov trikotnika so v razmerju $7 : 3 : 2$. Točka S je središče trikotniku očrtanega kroga. Izračunajte velikosti kotov trikotnika ABC in velikost kota ASB.

48. Oglišča trikotnika ABC delijo očrtano krožnico na krožne loke, ki so v razmerju $6 : 4 : 5$. Izračunajte velikosti notranjih kotov trikotnika.

49. Izračunajte velikosti kotov iz slike.



50. Narišite daljico AB dolžine 7 cm. Nato na nosilki daljice AB poiščite točki D in F, za kateri velja $|AD| = \frac{2}{3}|AB|$, $|AF| = \frac{6}{5}|AB|$. V kolikšnem razmerju deli točka D daljico AF?

51. Narišite daljico AB z dolžino 6 cm in jo s konstrukcijo razdelite v razmerju $2 : 3$.

52. Za trikotnika ABC in $A'B'C'$ velja: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Konstruirajte oba trikotnika, če je $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 5$ cm, $\measuredangle BAC = 60°$ in $|A'B'| = 5$ cm.

53. Kot v vrhu enakokrakega trikotnika meri $64°$, kota ob osnovnici drugega trikotnika pa merita $58°$. Ali sta trikotnika podobna?

54. Ali sta trikotnika s stranicami 18 cm, 12 cm, 15 cm in 2˙5 dm, 3 dm in 2 dm podobna? Kolikšen je koeficient podobnosti?

55. Osnovnica c enakokrakega trikotnika ABC meri 30 cm, krak a meri 20 cm, osnovnica c' podobnega trikotnika $A'B'C'$ pa 12 cm. Izračunajte dolžino kraka a' podobnega trikotnika $A'B'C'$.

56. V trikotniku ABC so stranice v razmerju 2 : 4 : 5, obseg trikotnika je 55 cm. Izračunajte dolžine stranic trikotnika ABC.

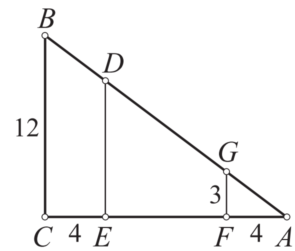
57. Dan je ΔABC s podatki $a = 8$ cm, $b = 6$ cm in $c = 9$ cm. Na stranici AC leži točka D, tako da je $|AD| = 2$ cm, na stranici BC pa leži točka E, tako da je $DE \parallel AB$. Zapišite podobna trikotnika in izračunajte dolžino daljice DE.

58. V trikotniku ABC je $a = 6$ cm, $b = 9$ cm in $c = 8$ cm. Na stranici AB je točka D, tako da je $|AD| = 2$ cm. Skozi točko D je narisana vzporednica k stranici AC. Na kolikšna odseka deli ta vzporednica stranico BC?

59. Dolžine stranic trikotnika merijo 11 cm, 12 cm in 13 cm. Razlika dolžin dveh krajših stranic podobnega trikotnika meri 11 cm. Kolikšne so dolžine stranic podobnega trikotnika?

60. Točke A, B in C so oglišča trikotnika na karti z merilom 1 : 100 000. Koliko kilometrov znaša razdalja med kraji A, B in C v naravi, če je na karti $d(B, C) = 4$ cm, $d(A, C) = 5$ cm in $d(A, B) = 7$ cm? Kolikšna bi bila razdalja med točkami A, B in C na karti z merilom 1 : 250 000?

61. Izračunajte dolžino daljice EF in DE iz slike.



62. V paralelogramu $ABCD$ je $|AB| = 12$, $|AD| = 10$ in $\measuredangle BAD = 80°$. Na stranici CD leži točka F, tako da je $|DF| = 8$ cm, na stranici AD leži točka G, tako da je $|FG| = 10$ cm. Točka E leži na stranici BC, tako da je $AE \parallel FG$. Zapišite podobne trikotnike in izračunajte dolžino stranice AE.

63. V rombu s stranico 16 cm in kotu $\measuredangle ABC = 120°$ leži na stranici AB točka E, ki je od oglišča B oddaljena za 6 cm. Točka F leži na stranici AD tako, da je $EF \parallel BD$. Izračunajte velikosti kotov trikotnika AEF in dolžine stranic.

64. V paralelogramu $ABCD$ s stranicama $a = 10$ cm in $b = 6$ cm na stranici BC leži točka E, tako da je daljica CE dolga 2˙5 cm. Nosilka daljice DE seka nosilko daljice AB v točki F. Narišite sliko in zapišite podobne trikotnike ter z izreki o podobnih trikotnikih izračunajte dolžino daljice AF.

65. Pravokotnemu trikotniku ABC s katetama 12 cm in 8 cm včrtamo kvadrat $CDEF$ tako, da dve stranici kvadrata ležita na katetah pravokotnega trikotnika. Izračunajte stranico kvadrata.

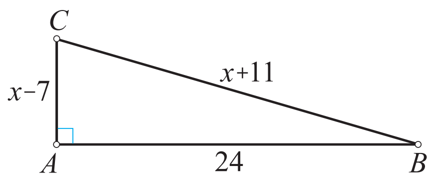
66. Skozi oglišče C trikotnika ABC poteka premica, ki seka stranico AB v točki D tako, da je $\measuredangle ACD \cong \measuredangle ABC$. Izračunajte $|CD|$, če je $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 9$ cm in $|AC| = 8$ cm.

67. Na stranicah AC in BC trikotnika ABC ležita točki D in E (D na AC in E na BC), tako da je $|AD| = 7$ cm, $|EC| = 5$ cm, $|BE| = 19$ cm in $\measuredangle EDC \cong \measuredangle ABC$. Izračunajte $|DC|$.

68. V pravokotnem trikotniku merita kateti 2 cm in $4\sqrt{2}$ cm. Izračunajte dolžino hipotenuze in polmer trikotniku očrtanega kroga.

69. V enakokrakem pravokotnem trikotniku meri hipotenuza 18 cm. Natančno izračunajte dolžini katet.

70. Izračunajte dolžini stranic trikotnika s slike.



71. Polmer enakokrakemu pravokotnemu trikotniku očrtanega kroga meri 4 cm. Natančno izračunajte dolžine stranic trikotnika.

72. V pravokotnem trikotniku *ABC* je vsota dolžin katet *a* in *b* enaka 34 cm, hipotenuza *c* meri 26 cm. Izračunajte dolžini katet trikotnika.

73. V pravokotnem trikotniku je vsota dolžin katete *a* in hipotenuze *c* enaka 14 cm, kateta *b* meri 8 cm. Natančno izračunajte dolžini stranic *a* in *c*.

74. Dolžini katet pravokotnega trikotnika sta 1 dm in 2˙4 dm, dolžina hipotenuze podobnega trikotnika je 3˙9 dm. Koliko merita kateti drugega trikotnika?

75. Višina na osnovnico enakokrakega trikotnika meri 36 cm, osnovnica pa 30 cm. Koliko meri krak?

76. Izračunajte višino enakostraničnega trikotnika s stranico 12 cm. Kolikšna je stranica enakostraničnega trikotnika z višino 15 cm? Rezultata zapišite v natančni obliki.

77. V pravokotniku je $a = 40$ cm, diagonala $e = 41$ cm. Koliko meri stranica *b*?

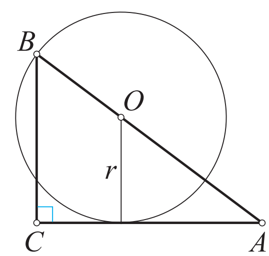
78. Natančno izračunajte dolžino diagonale kvadrata s stranico 8 cm. Koliko meri stranica kvadrata z diagonalo dolžine 20 cm? Rezultat zapišite najprej v natančni obliki, nato pa še na tri mesta natančno.

79. Stranica romba meri 17 cm, diagonala *f* 16 cm. Izračunajte dolžino diagonale *e*.

80. Osnovnici enakokrakega trapeza merita $a = 40$ cm in $c = 24$ cm, kraka pa 10 cm. Izračunajte dolžino višine trapeza.

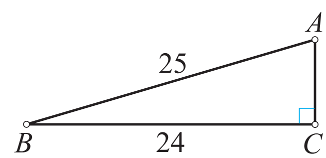
81. V trapezu *ABCD* je $a = 6$ cm, $c = d$, kot v oglišču *B* je pravi kot. Nosilki krakov se sekata v točki *E* tako, da daljica *BE* meri 8 cm. Izračunajte dolžini stranic *b* in *c*.

82. Z izreki o podobnih trikotnikih izračunajte polmer krožnice s slike, če je $|AC| = 4$ cm, $|BC| = 3$ cm in je daljica *AC* tangenta na dano krožnico.



83. Koliko merijo neznane stranice in notranji koti pravokotnega trikotnika, če ena od katet meri 12 cm, hipotenuza pa 20 cm?

84. Iz podatkov na sliki izračunajte $|AC|$ in na minuto natančno kot *CBA*.



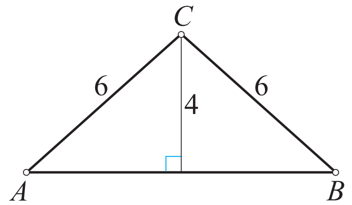
85. Izračunajte višino drevesa, ki raste pravokotno na podlago, če dolžina njegove sence meri 12 m, ko sončni žarki padajo pod kotom $61°20'$.

86. V pravokotnem trikotniku merita kateti $a = 12$ dm in $b = 5$ dm. Izračunajte velikosti notranjih kotov trikotnika in dolžino stranice *c*. Koliko meri višina na hipotenuzo?

87. V pravokotnem trikotniku kateta *a* meri 28 dm, priležni kot β meri $55°43'$. Izračunajte dolžino hipotenuze *c* in dolžino pravokotne projekcije katete *a* na hipotenuzo *c*.

88. V pravokotnem trikotniku *ABC* kateta *a* meri 8 cm, njena pravokotna projekcija na hipotenuzo pa 2 cm. Na stotinko natančno izračunajte kote trikotnika in dolžine njegovih stranic.

89. Iz podatkov na sliki izračunajte na desetinko stopinje natančno velikosti notranjih kotov trikotnika in natančno dolžino stranice c.



90. Osnovnica c enakokrakega trikotnika ABC meri $4\sqrt{2}$, kot ob osnovnici pa $45°$. Izračunajte kot γ pri vrhu C in natančno dolžino kraka a.

91. V enakokrakem trikotniku merita kraka 43 cm, kot med njima pa $35°$. Koliko meri osnovnica trikotnika?

92. V enakokrakem trikotniku ABC ($|AC| = |BC|$) je $\alpha = 40°$ in $|AB| = 4$ dm. Koliko meri višina na osnovnico in koliko višina na krak?

93. V enakokrakem trikotniku ABC je $\sin\alpha = \frac{5}{6}$, krak pa meri 12 cm. Natančno izračunajte dolžino osnovnice in na minuto natančno velikost notranjih kotov trikotnika.

94. Stranica pravokotnika meri 12 cm in oklepa z diagonalo kot $60°$. Natančno izračunajte dolžino diagonale in ploščino pravokotnika.

95. V pravokotniku $ABCD$ je $|AB| = 14$ cm, $|BC| = 9$ cm. Na stranici CD leži točka E, tako da je $|CE| : |ED| = 2 : 5$. Izračunajte dolžino daljic DE in AE in kot med daljico AE in stranico AD.

96. V kvadratu $ABCD$ je $|AB| = 7$ dm. Na stranici BC leži točka E tako, da je $|BE| : |BC| = 4 : 7$. Izračunajte dolžino daljice AE in velikost kota med daljico AE in diagonalo BD.

97. V paralelogramu $ABCD$ je $a = 4$ cm, $b = 4{\cdot}5$ cm in $\alpha = 75°$.
a) Konstruirajte dani paralelogram.
b) Izračunajte dolžino višine na stranico a.

98. V paralelogramu $ABCD$ meri notranji kot $\alpha = 72°13'$. Izračunajte preostale notranje kote paralelograma. Koliko meri kot φ med stranico AD in višino na stranico AB?

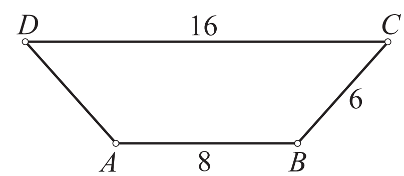
99. V rombu je stranica a dolga 10 cm, kot α meri $45°$. Izračunajte dolžino višine in krajše diagonale romba. Rezultata zaokrožite na tri mesta.

100. V rombu diagonala e meri 5 cm, kot α pa $75°$. Izračunajte dolžino stranice romba in diagonale f. Rezultata zaokrožite na dve decimalni mesti.

101. V trapezu $ABCD$ merijo stranice $a = 10$ cm, $d = 8$ cm, $c = 3$ cm in kot $\alpha = 65°$. Izračunajte dolžino višine trapeza.

102. Izračunajte velikosti kotov enakokrakega trapeza z osnovnicama 5 dm in 3 dm ter višino 2 dm.

103. Na sliki je narisan enakokraki trapez. Koliko meri kot α in koliko višina trapeza? Kot zapišite na minuto natančno, dolžino višine zapišite v natančni obliki.



104. V deltoidu $ABCD$ merita stranici $a = |AB| = |BC| = 8$ cm, $b = |AD| = |DC| = 5$ cm in diagonala $e = |AC| = 4$ cm. Izračunajte dolžino diagonale f in velikost kota ABC.

105. V ostrokotnem trikotniku ABC s podatki $c = 4\sqrt{3}$ cm, $v_a = 6$ cm in $\gamma = 60°$ izračunajte natančno dolžino stranice a.

106. V trikotniku ABC je $c = 15$ cm, $\alpha = 45°22'$, $\gamma = 33°39'$. Izračunajte dolžino stranice b in dolžino višine na stranico b. Rezultata zapišite na 3 mesta natančno.

107. Izračunajte dolžino stranice a trikotnika s podatki $c = 37$ cm, $b = 45$ cm, $\beta = 71°5'$.

108. Izračunajte dolžino tetive in dolžino krožnega loka, ki v krogu pripadata središčnemu kotu $120°$ s polmerom 8 cm. Rezultat zaokrožite na stotinko.

109. Na krožnici s središčem S in polmerom 9 cm ležita točki A in B tako, da je $\sphericalangle ASB = 80°$. Izračunajte dolžino tetive AB in dolžino pripadajočega krožnega loka ter rezultat zaokrožite na tri mesta natančno.

110. Kolikšna tetiva pripada krogu s polmerom $8\dot{}6$ cm in središčnemu kotu $109°\ 8'$? Izračunajte oddaljenost tetive od središča kroga.

111. Kolikšen lok pripada krogu s polmerom 12 cm in središčnemu kotu $\frac{2\pi}{3}$?

112. Izračunajte dolžino tetive, ki jo v krogu s polmerom 4 dm določa središčni kot $\frac{\pi}{7}$.

113. Kolikšna tetiva pripada obodnemu kotu $50°$ v krogu s polmerom 20 cm?

114. V krogu s polmerom 24 cm meri krožni lok 20 cm. Koliko meri pripadajoči središčni kot?

115. Daljica AB je tetiva krožnice s polmerom 100 mm. Koliko meri pripadajoči središčni kot, če je $|AB| = 60$ mm?

116. Pravokotni trikotnik ABC s katetama $a = 6$ cm in $b = 11$ cm zavrtimo okoli oglišča C za kot $\varphi = 105°$. Izračunajte dolžini lokov, ki ju pri tem vrtenju opišeta točki A in B.

117. Točke A, B in C delijo trikotniku ABC očrtano krožnico na loke, ki so v razmerju $3 : 4 : 5$. Izračunajte velikosti notranjih kotov trikotnika. Koliko merijo pripadajoči krožni loki, če polmer očrtane krožnice meri 30 mm?

118. Znotraj kota, ki meri $45°$, leži krožnica z obsegom 8π cm in se dotika krakov kota. Na tri mesta natančno izračunajte razdaljo med vrhom kota in središčem krožnice.

119. Izračunajte notranji kot pravilnega 20-kotnika. Koliko diagonal ima dani večkotnik?

120. Kateri večkotnik ima 20 diagonal?

121. Stranica pravilnega šestkotnika $ABCDEF$ meri 3 cm. Natančno izračunajte dolžini diagonal AC in AD ter velikost kota φ med njima.

122. Krogu s polmerom $r = 8$ cm je očrtan pravilni petkotnik s stranico a. Koliko merita notranji kot petkotnika α in stranica a? Dolžino stranice izračunajte na dve decimalni mesti.

123. Izračunajte stranico pravilnega 9-kotnika, ki ga včrtamo krogu s polmerom 30 cm.

8. METRIČNA GEOMETRIJA V RAVNINI

Lastnosti ploščin

Ploščina lika *S* je velikost ravnine, ki jo lik pokriva.

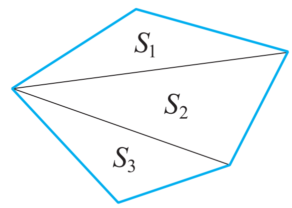
Osnovna enota za merjenje ploščin je 1 m² (ploščina kvadrata s stranico 1 m).

Izpeljane enote so: 1 mm^2, 1 cm^2, 1 dm^2, 1 ar, 1 hektar, 1 km^2

Velja: $1\ m^2 = 1 \cdot 10^6\ mm^2$, $1\ m^2 = 1 \cdot 10^4\ cm^2$, $1\ m^2 = 100\ dm^2$
$1\ ar = 100\ m^2$, $1\ hektar = 10\,000\ m^2$, $1\ km^2 = 10^6\ m^2$

Lastnosti merjenja ploščin:

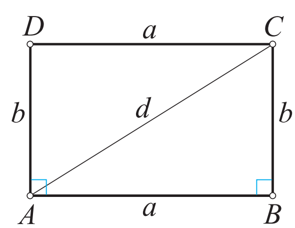
1. **Vsakemu liku** lahko določimo nenegativno realno število – **ploščino *S***.
2. **Skladna lika** imata **enako ploščino**.
3. Če lik **razdelimo na več delov**, potem je **ploščina celotnega lika enaka vsoti ploščin** posameznih delov.



$S = S_1 + S_2 + S_3$

Ploščina pravokotnika in paralelograma

Ploščina pravokotnika je $S = ab$.



1. Izračunajmo ploščino pravokotnika, če meri ena stranica 8 cm, diagonala pa 10 cm.

S Pitagorovim izrekom izračunamo dolžino druge stranice pravokotnika

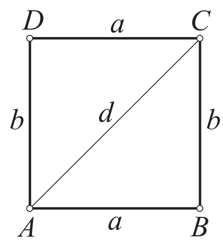
$b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ cm

in nato ploščino pravokotnika $S = ab = 8 \cdot 6 = 48$ cm^2.

2. Ploščina pravokotnika z obsegom $o = 32$ cm je $S = 48$ cm^2.

Izračunajmo dolžine stranic pravokotnika.
Iz $o = 2a + 2b$ zapišemo $32 = 2a + 2b$ oz. $16 = a + b$ izrazimo $a = 16 - b$.
Iz $S = ab$ dobimo $48 = (16 - b)b$.
Zapišemo $48 = 16b - b^2$.
Preoblikujemo v $b^2 - 16b + 48 = 0$.
Enačbo rešimo z razstavljanjem $(b - 12)(b - 4) = 0$.
Dolžini stranic pravokotnika sta $b = 12$ cm in $a = 4$ cm ali $b = 4$ cm in $a = 12$ cm.

Ploščina kvadrata je $S = a^2 = \frac{d^2}{2}$.

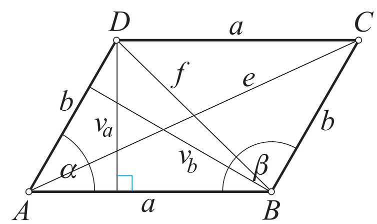


Ploščina kvadrata je 36 cm^2. Izračunajmo dolžino stranice kvadrata in še, koliko meri dolžina stranice kvadrata, ki ima dvakrat večjo ploščino kot dani kvadrat.

Iz $S = a^2$ izračunamo $a = \sqrt{S} = \sqrt{36} = 6$ cm.

Iz $S_1 = 2S = 72$ cm^2 izračunamo $a_1 = \sqrt{S_1} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm $\doteq 8{\cdot}49$ cm.

Ploščina paralelograma je $S = a \cdot v_a = b \cdot v_b = ab \sin\alpha$.

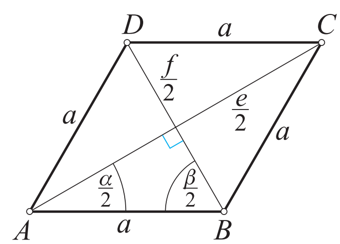


Na tri mesta natančno izračunajmo višino na stranico a in ploščino paralelograma s stranicama $a = 7$ cm in $b = 10$ cm, ki oklepata kot $80°$.

Iz $\sin\alpha = \frac{v_a}{b}$ izračunamo višino $v_a = b \cdot \sin\alpha = 10 \cdot \sin 80° \doteq 9{\cdot}85$ cm.

Ploščina paralelograma je $S = a \cdot v_a \doteq 7$ cm $\cdot\ 9{\cdot}85$ cm $\doteq 68{\cdot}9$ cm^2.

Ploščina romba je $S = a \cdot v = a^2 \sin\alpha = \frac{e \cdot f}{2}$.



1. Izračunajmo višino in ploščino romba s stranico $a = 12$ cm in kotom $\beta = 130°$.

Najprej izračunamo $\alpha = 180° - \beta = 50°$.

Iz $\sin\alpha = \frac{v}{a}$ izračunamo višino $v = a \cdot \sin\alpha = 12 \cdot \sin 50° \doteq 9{\cdot}19$ cm.

Ploščina romba je $S = a \cdot v = 12$ cm $\cdot\ 9{\cdot}19$ cm $= 110{\cdot}3$ cm^2.

2. Ploščina romba z diagonalo $e = 12$ cm meri $S = 96$ cm^2. Izračunajmo dolžini diagonale f in stranice a.

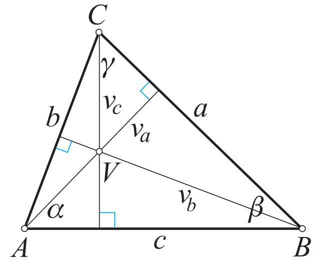
Iz $S = \frac{e \cdot f}{2}$ izračunamo $f = \frac{2S}{e} = \frac{2 \cdot 96}{12} = 16$ cm.

Z uporabo Pitagorovega izreka zapišemo $a^2 = (\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2$ in izračunamo

$a = \sqrt{(\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ cm.

Ploščina trikotnika. Sinusni in kosinusni izrek

V poljubnem trikotniku ABC veljajo obrazci:



a) **Za ploščino**:

$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$

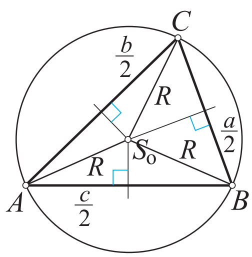
$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$

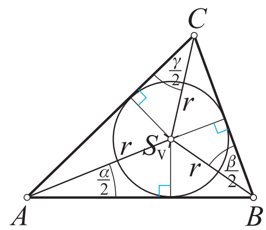
$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Heronov obrazec: $s = \frac{a+b+c}{2}$)

$S = \frac{abc}{4R}$

$S = rs$

R je polmer trikotniku očrtanega kroga, r pa polmer trikotniku včrtanega kroga.





1. Izračunajmo ploščino pravokotnega trikotnika s katetama $a = 5$ cm in $b = 8$ cm.

Ploščino pravokotnega trikotnika lahko izračunamo iz $S = \frac{ab}{2} = 5 \cdot 8 = 20\ \text{cm}^2$.

2. Ploščina enakostraničnega trikotnika je $S = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Izračunajmo dolžino stranice trikotnika.

Iz $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$ in $v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$ dobimo obrazec za ploščino enakostraničnega trikotnika $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Od tod izračunamo $a^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 25\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 100$ in $a = 10$ cm.

3. Z 8 dm dolgo žico oblikujemo enakostranični trikotnik. Natančno izračunajmo njegovo ploščino in nato rezultat zaokrožimo na kvadratni centimeter natančno.

Ker je $o = 3a$, je $a = \frac{o}{3} = \frac{8}{3}$ dm.

Sedaj izračunajmo ploščino trikotnika $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\frac{8}{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{9}\ \text{dm}^2$.

Rezultat izračunamo z žepnim računalom in ga zaokrožimo $S = \frac{16\sqrt{3}}{9}\ \text{dm}^2 \doteq 3{\cdot}08\ \text{dm}^2 \doteq 308\ \text{cm}^2$.

4. Izračunajmo ploščino trikotnika, če merita stranici 5 cm in 4 cm, kot med njima pa $62°24'$. Rezultat zaokrožimo na dve mesti.

Za izračun ploščine trikotnika uporabimo obrazec $S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ in dobimo
$S = \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} \cdot \sin 62°24' = 8{\cdot}9\ \text{cm}^2$.

5. Stranice trikotnika ABC merijo 6 cm, 8 cm in 1 dm. Natančno izračunajmo ploščino trikotnika ter polmera očrtanega in včrtanega kroga.

Najprej izračunamo $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+8+10}{2} = 12$, nato pa ploščino trikotnika z uporabo Heronovega obrazca $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{12 \cdot (12-6)(12-8)(12-10)} = 24\ \text{cm}^2$.

Iz formule $S = \frac{abc}{4R}$ izrazimo $R = \frac{abc}{4S}$ in izračunamo $R = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = 5$ cm, nato pa iz formule $S = rs$ izrazimo $r = \frac{S}{s}$ in izračunamo $r = \frac{24}{12} = 2$ cm.

b) Sinusni izrek: V trikotniku je razmerje dolžine stranice in sinusa nasprotnega kota enako premeru trikotniku očrtanega kroga.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Sinusni izrek uporabljamo v poljubnem trikotniku, če imamo dani dolžini dveh stranic in velikost kota, ki je eni od teh dveh stranic nasproti, ali če imamo podano dolžino stranice in velikosti dveh kotov.

1. V trikotniku ABC je $a = 6$ m, $c = 9$ m in $\gamma = 82°46'$. Izračunajmo dolžino stranice b in velikosti kotov α in β.

Iz obrazca $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ izrazimo $\sin\alpha = a\sin\frac{\gamma}{c}$, izračunamo $\sin\alpha = \frac{6\sin 82°24'}{9} = 0{\cdot}6614$ in od tod $\alpha = 41°24'$.

Iz zveze $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ izrazimo $\beta = 180° - \alpha - \gamma$ in izračunamo $\beta = 55°50'$.

Iz obrazca $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ izrazimo $b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$ in izračunamo $b = 7{\cdot}51$ cm.

2. V trikotniku ABC je $b = 4{\cdot}5$ cm, $c = 5$ cm in $\beta = 56°$. Izračunajmo velikosti kotov α in γ.

Iz $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ zapišemo $\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b} = \frac{5\sin 56°}{4{,}5} = 0{\cdot}9212$.

Od tod dobimo dve rešitvi $\gamma_1 = 67°6'$ in $\gamma_2 = 180° - \gamma_1 = 180° - 67°6' = 112°54'$.

Od tod je $\alpha_1 = 180° - \beta - \gamma_1 = 56°54'$ in $\alpha_2 = 180° - \beta - \gamma_2 = 11°6'$.

c) Kosinusni izrek:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Kosinusni izrek uporabljamo v poljubnem trikotniku, če imamo podani dolžini dveh stranic in velikost kota med njima ali če imamo podane dolžine vseh treh stranic.

1. Natančno izračunajmo dolžino neznane stranice trikotnika, v katerem dve stranici merita 3 cm in 5 cm, kot med njima pa 60° stopinj.

Uporabimo kosinusni izrek $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5\cos 60° = 19$ in zapišemo $c = \sqrt{19}$ cm.

2. Izračunajmo velikost največjega kota trikotnika s podatki $a = 5$ cm, $b = 7$ cm in $c = 8$ cm.

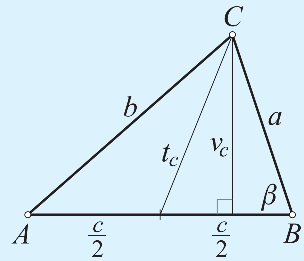
Največji kot trikotnika je γ, saj leži nasproti najdaljše stranice c.

Zapišemo $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$,

izrazimo $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{25 + 49 - 64}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \dfrac{1}{7}$

in izračunamo $\gamma = 81°47'$.

3. V trikotniku s podatki $a = 10$ cm, $c = 14$ cm in $\beta = 71°34'$ izračunajmo dolžini višine na stranico c in težiščnice na stranico c.



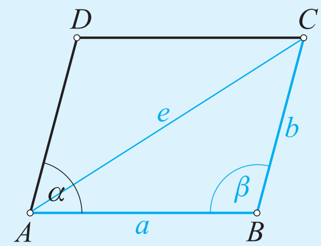
Narišemo sliko.

Iz $\sin\beta = \dfrac{v_c}{a}$ izračunamo $v_c = a\sin\beta = 10\sin 71°34' = 9{}^{\cdot}49$ cm.

Zapišemo $t_c^2 = \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \dfrac{c}{2}\cos\beta$ in izračunamo

$t_c = \sqrt{\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \dfrac{c}{2}\cos\beta} = \sqrt{49 + 100 - 140\cos 71°34'} = 10{}^{\cdot}2$ cm.

4. Izračunajmo dolžino diagonale $e = AC$ paralelograma $ABCD$, če je $a = 5$ cm, $b = 4$ cm in $\alpha = 75°$.



Izračunamo $\beta = 180° - \alpha = 105°$,

zapišimo kosinusni izrek

$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4\cos 105° = 51{}^{\cdot}35$

in od tod $e = \sqrt{51{,}35} = 7{}^{\cdot}2$ cm.

5. Izračunajmo dolžino diagonale e trapeza $ABCD$, za katerega velja $a = 20$ cm, $c = 14$ cm, $b = 9$ cm in $\beta = 65°48'$.

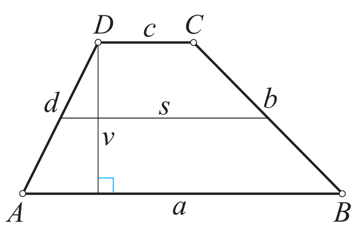
Zapišemo $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$ in izračunamo

$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta} = \sqrt{400 + 81 - 360\cos 65°48'} = 18{}^{\cdot}26$ cm.

Ploščina trapeza in deltoida

Ploščina trapeza je $S = \dfrac{(a + c) \cdot v}{2} = s \cdot v$.

Za srednjico trapeza s velja $s = \dfrac{a + c}{2}$.



1. Izračunajmo višino in ploščino trapeza s podatki $a = 16$ cm, $b = 12$ cm, $c = 13$ cm in $\beta = 70°$.

Iz $\sin\beta = \dfrac{v}{b}$ izračunamo $v = b\sin\beta = 12\sin 70° = 11{}^{\cdot}3$ cm.

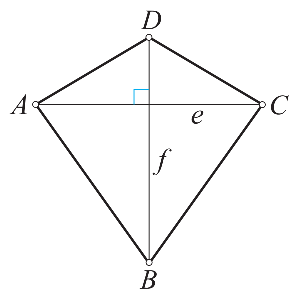
Ploščina trapeza meri $S = \dfrac{(a + c) \cdot v}{2} = \dfrac{(16 + 13) \cdot 11{,}28}{2} = 163{}^{\cdot}5\ \text{cm}^2$.

2. Izračunajmo ploščino enakokrakega trapeza $ABCD$, če merita osnovnici 27 cm in 13 cm, kraka pa 25 cm.
Z uporabo Pitagorovega izreka izračunamo višino trapeza

$v = \sqrt{d^2 - (\frac{a-c}{2})^2} = \sqrt{25^2 - (\frac{27-13}{2})^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$ cm, nato pa ploščino trapeza

$S = \frac{(a+c) \cdot v}{2} = \frac{(27+13) \cdot 24}{2} = 480\ \text{cm}^2$.

Ploščina deltoida je $S = \frac{e \cdot f}{2}$.



Natančno izračunajmo ploščino deltoida $ABCD$ s stranicama, dolgima 16 cm in 10 cm, ki oklepata kot 120°.

Ker sta trikotnika ABD in CBD skladna, je ploščina deltoida $ABCD$ dvakratnik ploščine trikotnika ABD.
Zato lahko zapišemo $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin 120° = 16 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 80\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Ploščina pravilnega *n*-kotnika

Ploščina pravilnega n-kotnika je $S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot v = \frac{1}{2} \cdot n \cdot R^2 \cdot \sin\varphi$, pri čemer je R polmer n-kotniku očrtanega kroga, $\varphi = \frac{360°}{n}$ stranici a pripadajoči središčni kot in v višina trikotnikov, ki sestavljajo n-kotnik.

Izračunajmo ploščino in obseg pravilnega osemkotnika s stranico $a = 4$ cm.

Obseg pravilnega osemkotnika meri $o = 8a = 32$ cm.
Pravilni osemkotnik je sestavljen iz osmih enakokrakih trikotnikov, v katerih kot med krakoma meri $\frac{360°}{8} = 45°$, za višino pa velja $\tan 22{\cdot}5° = \frac{\frac{a}{2}}{v} = \frac{a}{2v}$.

Izračunamo višino $v = \frac{a}{2\tan 22{,}5°} = 4{\cdot}83$ cm.

Ploščina pravilnega osemkotnika je $S = 8 \cdot \frac{a \cdot v}{2} = 77{\cdot}3\ \text{cm}^2$.

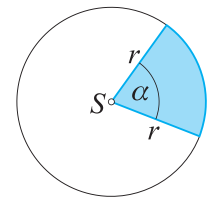
Krog in krožnica. Krožni izsek in krožni odsek

Ploščina kroga je $S = \pi r^2$.

Obseg kroga je 1 dm. Izračunajmo, koliko kvadratnih centimetrov meri ploščina kroga.

Iz $o = 2\pi r$ zapišemo $r = \frac{o}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$ cm in izračunamo ploščino kroga $S = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{25}{\pi^2} = \frac{25}{\pi}\ \text{cm}^2 \doteq 8\ \text{cm}^2$.

Krožni izsek je množica točk kroga, ki ležijo v danem središčnem kotu.



Za krožni izsek izračunamo **ploščino krožnega izseka** S po obrazcih:

a) če je kot α v stopinjah: $S = \frac{\pi \cdot r^2 \alpha}{360°}$,

b) če je kot α v radianih: $S = \frac{1}{2} r \cdot l = \frac{1}{2} r^2 \alpha$.

1. V krogu s polmerom 12 cm meri središčni kot $\frac{\pi}{6}$. Izračunajmo, koliko meri ploščina krožnega izseka.

Uporabimo formulo $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$ in izračunamo $S = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \frac{\pi}{6} = 12\pi \text{ cm}^2 \doteq 37{.}7 \text{ cm}^2$.

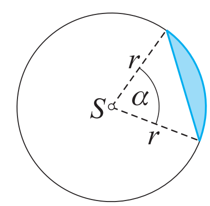
2. Izračunajmo, koliko stopinj meri središčni kot, ki ga v krogu s polmerom 4 cm določa krožni izsek s ploščino 6π cm^2.

Iz zveze $S = \frac{\pi \cdot r^2 \alpha}{360°}$

izrazimo $\alpha = \frac{360° \cdot S}{\pi \cdot r^2}$

in izračunamo $\alpha = \frac{360° \cdot 6\pi}{\pi \cdot 4^2} = 135°$.

Krožni odsek je del kroga, omejen s krožnim lokom in pripadajočo tetivo.



S Pitagorovim izrekom lahko zapišemo zvezo med polmerom kroga r, dolžino tetive t in oddaljenostjo tetive od središča v: $r^2 = v^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2$.

Ploščino krožnega odseka izračunamo po obrazcih:

a) če je kot $0 < \alpha < 180°$ (v stopinjah): $S = \frac{\pi \cdot r^2 \alpha}{360°} - \frac{t \cdot v}{2}$,

b) če je kot $0 < \alpha < \pi$ (v radianih): $S = \frac{1}{2} r^2(\alpha - \sin\alpha)$.

Izračunajmo ploščino krožnega odseka, ki ga v krogu s polmerom $r = 8$ cm določa tetiva $t = 10$ cm.

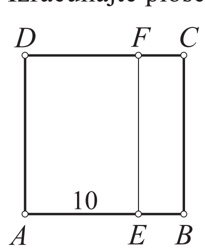
Iz $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{t}{2}}{r} = \frac{5}{8}$ je $\frac{\alpha}{2} = 38{.}68$ in od tod $\alpha = 77°22'$.

Ploščina krožnega izseka je $S_i = \frac{\pi \cdot r^2 \alpha}{360°} = 43{.}21 \text{ cm}^2$,

ploščina trikotnika je $S_t = \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha = 31{.}23 \text{ cm}^2$.

Ploščina krožnega odseka je $S = S_i - S_t = 11{.}98 \text{ cm}^2$.

1. Kvadrat razdelimo na dva pravokotnika, kot kaže slika. Ploščina manjšega pravokotnika je 56 cm^2. Izračunajte ploščino kvadrata.



2. Izračunajte ploščino pravokotnika z obsegom 24 m, če je ena stranica za 3 m daljša od druge.

3. Koliko merita stranici pravokotnika s ploščino 40 dm^2 in obsegom 2.6 m?

4. Izračunajte ploščino pravokotnika s stranico $a = 14{.}3$ cm, če kot med diagonalama (nasproti stranice a) meri $\varphi = 156°44'$. Rezultat zaokrožite na stotinko.

5. Stranici paralelograma $ABCD$ z višino $v_a = 6{\cdot}9$ cm merita $a = 9$ cm in $b = 7$ cm. Koliko meri ostri kot med stranicama paralelograma in koliko njegova ploščina?

6. Natančno izračunajte ploščino paralelograma s podatki $a = 52$ cm, $b = 63$ cm, $\alpha = 150°$.

7. Za paralelogram $ABCD$ velja: $S = 20\sqrt{2}$ cm^2, $a : b = 5 : 2$, $\alpha = 45°$. Izračunajte dolžini stranic a in b ter dolžino diagonale e.

8. Diagonali romba $ABCD$ merita $e = |AC| = 48$ mm in $f = |BD| = 36$ mm. Izračunajte dolžino stranice romba in njegovo ploščino.

9. Natančno izračunajte ploščino romba s stranico 8 dm in kotom $\beta = 120°$.

10. Izračunajte ploščino romba $ABCD$, če je $|AB| = 10$ cm in $|BD| = 16$ cm.

11. Ploščina romba je 120 cm^2, diagonala f pa meri 10 cm.
a) Izračunajte dolžino stranice a in dolžino diagonale e.
b) Izračunajte višino romba in velikost kota α.

12. Kateti pravokotnega trikotnika merita 24 cm in 30 cm. Izračunajte ploščino trikotnika in dolžino hipotenuze.

13. Pravokotnik $ABCD$ ima stranici dolžine $|AB| = 20$ cm in $|BC| = 14$ cm. Točka M deli stranico AD v razmerju $|AM| : |MD| = 2 : 5$. Kolikšen odstotek ploščine pravokotnika pokriva trikotnik MCD?

14. Vsota dolžin katet pravokotnega trikotnika s ploščino 60 dm^2 je 23 dm. Koliko merijo stranice trikotnika?

15. Izračunajte ploščino enakostraničnega trikotnika s stranico 20 cm. Koliko bi morala meriti stranica enakostraničnega trikotnika, da bi imel ta ploščino 100 cm^2?

16. Izračunajte višino in ploščino enakokrakega trikotnika z osnovnico 28 cm in krakom 21 cm.

17. Osnovnica c enakokrakega trikotnika ABC meri 36 cm, krak a meri 30 cm, osnovnica c' podobnega trikotnika $A'B'C'$ pa 24 cm. Izračunajte krak a' in ploščino trikotnika $A'B'C'$.

18. Trikotnik ABC z osnovnico $c = 4$ cm in s ploščino $S = 20$ cm^2 je podoben trikotniku $A'B'C'$ s ploščino $S' = 80$ cm^2. Koliko meri osnovnica trikotnika $A'B'C'$?

19. Stranici trikotnika ABC merita 10 cm in 7 cm ter oklepata kot $52°37'$. Koliko meri tretja stranica trikotnika?

20. Stranice trikotnika ABC merijo $a = 7$ cm, $b = 9$ cm in $c = 6$ cm. Izračunajte velikost največjega notranjega kota trikotnika.

21. V trikotniku ABC s podatki $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 7$ cm in $\gamma = 56°41'$ izračunajte dolžino stranice $c = |AB|$ in v_a (višina na stranico a). Obe dolžini zapišite zaokroženo na dve mesti.

22. V paralelogramu $ABCD$ s stranicama $a = 5$ cm in $b = 3$ cm in kotom $\beta = 130°$ izračunajte dolžino diagonale AC in višino paralelograma.

23. V paralelogramu $ABCD$ je $b = 7$ cm, $e = 15{\cdot}5$ cm in $\alpha = 50°$. Izračunajte dolžino stranice a in diagonale f.

24. V trikotniku ABC je $a = 6$ cm, $b = 9$ cm in $\gamma = 40°$.
a) Na tri mesta natančno izračunajte dolžino stranice c.
b) Točka D leži v ravnini tako, da je štirikotnik $ABDC$ paralelogram ($|AB| = |CD|$ in $|AC| = |BD|$). Izračunajte dolžino diagonale AD.

25. V paralelogramu $ABCD$ je $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 45°$.
a) Izračunajte višino na stranico a in ploščino paralelograma.
b) Koliko meri dolžina diagonale f?
c) Za koliko odstotkov se spremeni ploščina paralelograma, če povečamo kot α za 10 %, dolžini stranic a in b pa ostaneta nespremenjeni?

26. Koliko meri kot med diagonalama paralelograma, v katerem je $a = 10$ cm, $e = 15$ cm in $f = 8$ cm?

27. V trapezu $ABCD$ merijo stranice $a = 20$ cm, $b = 18$ cm, $c = 7$ cm in kot $\alpha = 62°30'$. Izračunajte dolžino stranice d.

28. V trapezu $ABCD$ je $|BC| = 15$ cm, $|CD| = 18$ cm, $v = 12$ cm in $\delta = 120°$. Izračunajte dolžino stranice AB.

29. V trapezu $ABCD$ je $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 70°$, $\beta = 50°$.
a) Koliko meri kot γ?
b) Na milimeter natančno izračunajte dolžino stranice c.
c) V trapezu leži točka E na stranici CD tako, da je $|CE| : |ED| = 3 : 1$. Izračunajte dolžino daljice BE.

30. V trikotniku ABC s podatki $a = 5$ cm, $b = 3$ cm in $\gamma = 60°$ leži točka D na stranici AB, tako da je $|AD| : |DB| = 5 : 2$. Izračunajte dolžini daljic AB in CD in velikost kota $\sphericalangle CDA$.

31. Dan je trikotnik ABC s podatki $a = 4$ cm, $b = 5$ cm in $\gamma = 60°$.
a) Natančno izračunajte dolžino stranice c.
b) Natančno izračunajte dolžino težiščnice iz oglišča A.
c) V kolikšnem razmerju deli višina stranico a?

32. Dan je trikotnik ABC s stranicami $a = 10$ cm, $b = 12$ cm in $c = 16$ cm.
a) Izračunajte obseg in ploščino trikotnika.
b) Izračunajte največji notranji kot trikotnika.

33. Stranici trikotnika merita 6 cm in 10 cm in oklepata kot 60°. Koliko meri ploščina trikotnika in koliko tretja stranica trikotnika? Rezultat naj bo zapisan v natančni obliki.

34. Ploščina ostrokotnega trikotnika s stranicama 6 cm in 8 cm meri 20 cm^2. Kolikšen kot oklepata dani stranici?

35. V trikotniku ABC merijo stranice $a = 5$ cm, $b = 7$ cm in $c = 6$ cm. Natančno izračunajte ploščino trikotnika in dolžino najdaljše višine trikotnika.

36. V trikotniku ABC je $c = 36$ cm, $b = 25$ cm in $\gamma = 75°$. Izračunajte velikosti neznanih notranjih kotov trikotnika.

37. Koliko merijo stranice trikotnika s podatki $a = 2{,}5$ dm, $\alpha = 80°$ in $\beta = 55°$?

38. V trikotniku ABC je $c = 16$ cm, $b = 15$ cm in $\beta = 65°$. Izračunajte velikosti neznanih notranjih kotov in stranic trikotnika. Zapišite obe možnosti.

39. V trikotniku s stranico $c = 12$ cm je razmerje notranjih kotov $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 2 : 4$.
a) Izračunajte velikosti notranjih kotov.
b) Izračunajte dolžini stranic a in b.

40. Izračunajte obsega in ploščini obeh trikotnikov, ki sta določena s podatki $a = 5$ cm, $b = 6$ cm in $\alpha = 40°$. Rezultate zaokrožite na stotinko.

41. V trikotniku ABC je $a = |BC| = 5$ cm, $b = |AC| = 8$ cm in $\beta = 68°15'$. Izračunajte:
a) velikosti neznanih kotov in stranic trikotnika,
b) polmer trikotniku očrtanega, polmer trikotniku včrtanega kroga in ploščino trikotnika.

42. Dan je trikotnik ABC s podatki $a = 5$ cm, $b = 7$ cm in $\beta = 60°$.
a) Konstruirajte dani trikotnik.
b) Izračunajte velikosti kotov α in γ, dolžino stranice c in ploščino trikotnika.

43. V enakokrakem trikotniku z osnovnico 6 cm in višino na osnovnico 4 cm izračunajte kot ob osnovnici in polmer trikotniku očrtanega kroga.

44. Za trikotnik ABC poznamo $a = 6$ cm, $b = 10$ cm in $S = 15$ cm^2. Izračunajte velikost kota γ. Zapišite obe možnosti.

45. Ploščina trikotnika s stranicama 4 cm in 6 cm je 9 cm^2. Poiščite obe možni dolžini tretje stranice trikotnika.

46. Ploščina trikotnika ABC s stranicama $a = |BC| = 10$ cm in $c = |AB| = 12$ cm je 48 cm^2. Izračunajte polmer trikotniku včrtanega kroga.

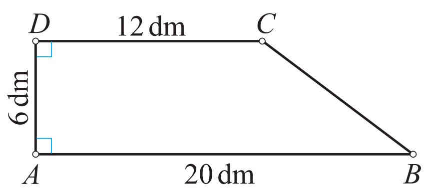
47. Za koliko odstotkov se spremeni ploščina trikotnika, če eno stranico trikotnika povečamo za 30 %, drugo stranico zmanjšamo za 30 %, kot, ki ga oklepata stranici, pa ostane nespremenjen?

48. Izračunajte stranici a in c trikotnika s podatki $S = 120\ \text{cm}^2$, $a : c = 5 : 6$, $\beta = 30°$ (S je ploščina trikotnika, β je kot med stranicama a in c).

49. V trikotniku ABC je $b = 11\cdot5$ cm, $c = 23$ cm, $\gamma = 65°20'$.
a) Izračunajte dolžino stranice a in velikost kotov α in β.
b) Izračunajte ploščino trikotnika.
c) Izračunajte polmera trikotniku včrtanega in očrtanega kroga.
č) Koliko meri pravokotna projekcija stranice b na stranico c?

50. V trikotniku ABC je $R = 2\cdot5$ cm, $a = 4$ cm, $v_b = 3$ cm.
a) Izračunajte kote trikotnika.
b) Izračunajte ploščino trikotnika.

51. Izračunajte obseg in ploščino lika s slike.



52. Izračunajte višino in ploščino trapeza, če je $a = 8$ m, $b = 5$ m, $c = 3$ m in $\beta = 75°$.

53. Izračunajte ploščino enakokrakega trapeza z osnovnicama $0\cdot45$ m in $3\cdot1$ dm ter višino 24 cm. Koliko merita kraka trapeza?

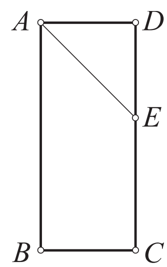
54. Izračunajte ploščino enakokrakega trapeza $ABCD$ s podatki $a = 9$ cm, $b = 5$ cm, $c = 3$ cm. Koliko meri diagonala e in koliko kot v oglišču C?

55. Trapez $ABCD$ je podan s podatki $a = 18$ cm, $b = 12$ cm, $c = 4$ cm in $d = 10$ cm. Izračunajte višino in ploščino trapeza. Rezultata zaokrožite na desetinko natančno.

56. V pravokotniku $ABCD$ merita stranici $a = 10$ cm in $b = 8$ cm. Na stranici DC je točka E, tako da je $|CE| : |ED| = 2 : 3$. Izračunajte ploščino štirikotnika $ABCE$ in velikost kota BAE.

57. Pravokotnik $ABCD$ ima stranici dolžine $|AB| = 24$ cm in $|BC| = 12$ cm. Točka E deli stranico AB v razmerju $|AE| : |ED| = 2 : 1$, točka F pa deli stranico CD v razmerju $|DF| : |FC| = 5 : 7$. Natančno izračunajte dolžino daljice EF in razmerje med ploščinama štirikotnika $AEFD$ in štirikotnika $EBCF$.

58. Pravokotnik s ploščino $60\ \text{cm}^2$ razdelimo na enakokraki trikotnik in trapez s krajšo osnovnico $|CE| = 7$ cm, kot kaže slika. Izračunajte dolžini stranic pravokotnika.



59. V trapezu $ABCD$ s ploščino $S = 244\ \text{cm}^2$ je stranica AB za 14 cm daljša od stranice CD, stranica AD meri 13 cm, oglišče D pa je od stranice AB oddaljeno za 1 dm.
a) Izračunajte velikost kota α.
b) Izračunajte dolžini stranic AB in CD.

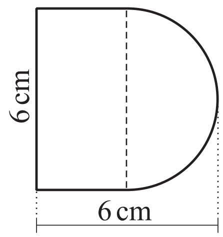
60. Daljica ED je srednjica trikotnika ABC z višino 24 cm. Izračunajte ploščino trikotnika ABC, če je ploščina štirikotnika $ABED$ $108\ \text{cm}^2$.

61. Ploščina zmaja v obliki deltoida je $1470\ \text{cm}^2$. Izračunajte dolžini diagonal, če veste, da sta v razmerju $3 : 5$.

62. Izračunajte ploščino deltoida $ABCD$, za katerega je $|AB| = 24$ cm, $|AD| = 7$ cm in $|BD| = 25$ cm.

63. Izračunajte ploščino deltoida, za katerega je $a = 42\cdot6$ mm, $f = 28\cdot2$ mm (diagonala $e = AC$ razpolavlja diagonalo $f = BD$), kot med stranicama a pa je $\alpha = 84°36'$.

64. Izračunajte obseg in ploščino lika s slike.



65. Pravokotnemu trikotniku s katetama 3 cm in $3\sqrt{3}$ cm očrtamo krog.

a) Izračunajte polmer trikotniku očrtanega kroga.

b) Za koliko odstotkov je ploščina kroga večja od ploščine trikotnika?

66. V trikotnik ABC s kotom $\alpha = 60°$ včrtamo krog s ploščino 16π cm^2. Koliko je oglišče A oddaljeno od središča včrtanega kroga?

67. Dana je krožnica s polmerom 6 dm in v njej središčni kot $100°$. Izračunajte danemu središčnemu kotu:

a) dolžino pripadajočega loka,

b) ploščino krožnega izseka.

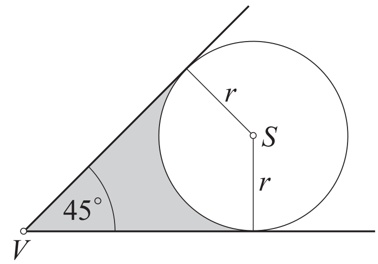
68. V krogu s polmerom $r = 4$ m meri središčni kot $\varphi = 0{\cdot}25$. Izračunajte dolžino pripadajočega krožnega loka in ploščino krožnega izseka.

69. Ploščina krožnega izseka kroga s polmerom 12 cm je 54π cm^2. Kolikšen je središčni kot izseka in kolikšen obseg izseka?

70. Izračunajte ploščino krožnega odseka, ki ga v krogu s polmerom 12 cm določa središčni kot $45°$.

71. Izračunajte ploščino in obseg krožnega odseka, ki ga v krogu s premerom 10 cm odreže tetiva dolžine 7 cm.

72. V kot $45°$ je včrtan krog tako, da se dotika obeh krakov kota. Središče kroga je od vrha kota oddaljeno za 15 cm. Koliko meri polmer kroga in koliko ploščina osenčenega lika?



73. Izračunajte velikost notranjega kota in število diagonal pravilnega desetkotnika, ki ga včrtamo v krog s polmerom 12 cm. Koliko meri ploščina desetkotnika?

74. Izračunajte dolžino stranice in ploščino pravilnega 7-kotnika, včrtanega v krog s polmerom 10 cm.

75. V krog s polmerom 1 m očrtamo pravilni osemkotnik. Izračunajte ploščino osemkotnika.

76. Izračunajte ploščino pravilnega 9-kotnika s stranico dolžine $10{\cdot}3$ cm.

77. Izračunajte dolžini najkrajše in najdaljše diagonale pravilnega petkotnika s stranico 1 m.

9. METRIČNA GEOMETRIJA V PROSTORU

Površine in prostornine geometrijskih teles

Geometrijsko telo je del prostora, ki je z vseh strani omejen s ploskvami. Telo, ki ga omejujejo same ravne ploskve – večkotniki, je **oglato telo** ali **polieder** (prizma, piramida ...). Telo, pri katerem je vsaj ena ploskev kriva, je **okroglo telo** (valj, stožec, krogla ...). Stikališče dveh mejnih ploskev telesa je **rob telesa**. Krajišča robov telesa so **oglišča telesa**. **Površje telesa** je unija vseh mejnih ploskev. Vsota ploščin vseh mejnih ploskev je **površina telesa**.

Če površje telesa lahko razrežemo po nekaterih robovih tako, da ga lahko razvijemo v ravnino, potem dobljenemu liku rečemo **mreža telesa**. **Plašč telesa** je del mreže telesa brez osnovnih ploskev. **Prostornina telesa** je velikost prostora, ki ga telo zavzema.

Osnovna enota za merjenje prostornine je 1 m^3 (prostornina kocke s stranico 1 m).

Izpeljane enote so: 1 mm^3, 1 cm^3, 1 dm^3
1 liter, 1 hektoliter

Velja: 1 m^3 = 1 · 10^9 mm^3, 1 m^3 = 1 · 10^6 cm^3, 1 m^3 = 1000 dm^3
1 liter = 1 dm^3, 1 hektoliter = 100 litrov = 0˙1 m^3

Veljajo oznake: **Obseg osnovne ploskve** označimo s črko o, **ploščino osnovne ploskve** s črko S, **višino telesa** s črko v, **ploščino plašča** s S_{pl}, **površino telesa** s P, **prostornino telesa** z V in **ploščino osnega preseka** s S_0.

Prizma

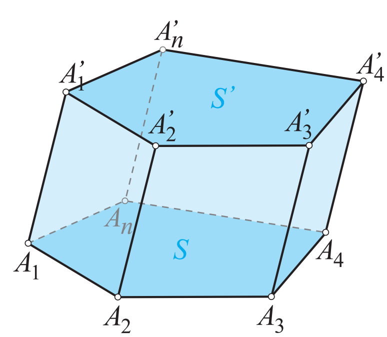
Naj bo v ravnini dan poljuben večkotnik $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ in naj točka $A_1{}'$ ne leži v ravnini danega večkotnika. **Prizma** je množica točk prostora, ki jo »opiše« večkotnik $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ pri vzporednem premiku za vektor $\overrightarrow{A_1A_1{}'}$. Pri tem se večkotnik $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ (**osnovna ploskev** prizme) preslika v večkotnik $A_1{}', A_2{}', A_3{}' \ldots A_n{}'$ (**druga osnovna ploskev** prizme). **Osnovni ploskvi** prizme sta **vzporedna skladna** večkotnika. **Osnovni robovi** prizme so stranice osnovnih ploskev, **stranski robovi** prizme pa so daljice $A_1A_1{}', A_2A_2{}', A_3A_3{}' \ldots A_nA_n{}'$. Sosednja stranska robova prizme sta stranici paralelograma, ki ga imenujemo **stranska ploskev** prizme. Stranske ploskve prizme sestavljajo **plašč prizme**. **Višina prizme** je razdalja med osnovnima ploskvama. Prizma je ***n*-strana**, če je osnovna ploskev n-kotnik. Prizma je **pokončna**, če so stranski robovi pravokotni na osnovno ploskev. Stranske ploskve pokončne prizme so pravokotniki. Višina pokončne prizme je enaka dolžini stranskega roba. Prizma je **pravilna**, če je pokončna in je osnovna ploskev pravilen večkotnik. Prizma je **enakorobna**, če so vsi robovi enako dolgi. **Telesna diagonala** prizme je zveznica dveh oglišč različnih osnovnih ploskev.

Za **pokončno prizmo** velja:

a) površina je $P = 2S + S_{pl}$,

b) ploščina plašča je $S_{pl} = ov$,

c) prostornina je $V = Sv$.



1. Pokončna prizma z višino $v = 16$ cm ima za osnovno ploskev trikotnik s stranicami $a = 5$ cm, $b = 7$ cm in $c = 10$ cm. Izračunajmo površino in prostornino prizme.

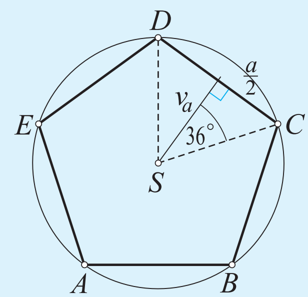
Najprej izračunajmo $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+7+10}{2} = 11$, nato pa po Heronovi formuli ploščino osnovne ploskve $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{11 \cdot (11-5)(11-7)(11-10)} = 16{,}25 \text{ cm}^2$.

Izračunajmo površino prizme $P = 2S + S_{pl} = 2S + o \cdot v = 2S + (a+b+c) \cdot v = 2 \cdot 16{,}25 + (5+7+10) \cdot 16 =$
$= 32{,}5 \text{ cm}^2 + 352 \text{ cm}^2 = 384{,}5 \text{ cm}^2$

in prostornino prizme $V = Sv = 16{,}25 \cdot 16 = 260 \text{ cm}^3$.

2. Pokončna enakorobna prizma ima za osnovno ploskev pravilni petkotnik s stranico 1 dm. Izračunajmo prostornino in površino prizme.

Narišemo sliko osnovne ploskve prizme.



Izračunamo središčni kot $\varphi = \frac{360°}{5} = 72°$.

Ker je prizma enakorobna, je $v = a = 1$ dm.

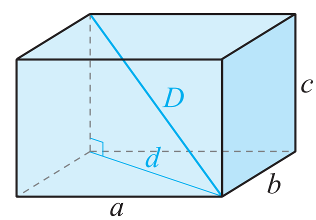
Iz $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{v_a} = \frac{a}{2v_a}$ dobimo $v_a = \frac{a}{2\tan\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2\tan 36°} \doteq 0{,}688$ dm.

Ploščina osnovne ploskve prizme je $S = 5 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} \doteq 1{,}72 \text{ dm}^2$.

Prostornina prizme je $V = S \cdot v = 1{,}72 \cdot 1 = 1{,}72 \text{ dm}^2$.

Površina prizme je $P = 2S + S_{pl} = 2 \cdot 1{,}72 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 8{,}44 \text{ dm}^2$.

Kvader je pokončna štiristrana prizma, ki ima za osnovno ploskev pravokotnik.



Za **kvader** velja:

a) ploščina plašča meri $S_{pl} = 2c(a+b)$,

b) površina je $P = 2(ab + ac + bc)$,

c) prostornina je $V = abc$,

č) dolžino telesne diagonale kvadra izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka in je $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

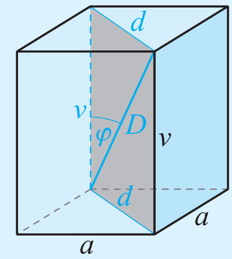
1. Bazen ima obliko kvadra s širino 12 m, dolžino 25 m in globino 1,6 m. Izračunajmo, koliko kvadratnih metrov ploščic potrebujemo, da ga obložimo, in koliko litrov vode porabimo, da ga napolnimo.

Za obložitev bazena potrebujemo $P = S + S_{pl} = 12 \cdot 25 + 1{,}6 \cdot 2 \cdot (12 + 25) = 300 + 118{,}4 \doteq 419 \text{ m}^2$ ploščic, v bazen pa gre $V = abc = 12 \cdot 25 \cdot 1{,}6 = 480 \text{ m}^3 = 480\,000 \text{ dm}^3 = 480\,000$ litrov vode.

2. Dolžine robov kvadra so v razmerju 5 : 4 : 2, njegova prostornina pa je 5000 cm^3. Izračunajmo dolžine robov kvadra.

Zapišemo $a : b : c = 5 : 4 : 2$ in od tod $a = 5x$, $b = 4x$ in $c = 2x$.
Iz formule $V = abc = 5x \cdot 4x \cdot 2x = 40x^3$
zapišemo enačbo $40x^3 = 5000$,
jo preoblikujemo v $x^3 = 125$
in rešimo $x = \sqrt[3]{125} = 5$.
Robovi kvadra merijo $a = 5 \cdot 5 = 25$ cm, $b = 4 \cdot 5 = 20$ cm in $c = 2 \cdot 5 = 10$ cm.

3. Osnovna ploskev kvadra je kvadrat s stranico $a = \sqrt{2}$ cm. Izračunajmo ploščino diagonalnega preseka kvadra, če telesna diagonala kvadra z višino oklepa kot $\varphi = 36°46'$.



Narišemo sliko kvadra.

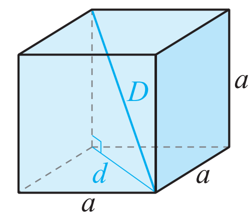
Izračunamo dolžino diagonale osnovne ploskve $d = a\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ cm.

Iz slike razberemo $\tan\varphi = \frac{d}{v}$

in izračunamo $v = \frac{d}{\tan\varphi} = \frac{2}{\tan 36°46'} \doteq 2^{\cdot}68$ cm.

Ploščina diagonalnega preseka kvadra je $S = d \cdot v = 2 \cdot 2^{\cdot}86 = 5^{\cdot}36$ cm^2.

Kocka je pokončna, pravilna, enakorobna štiristrana prizma.



Za **kocko** velja:

a) ploščina plašča meri $S_{pl} = 4a^2$,

b) površina je $P = 6a^2$,

c) prostornina je $V = a^3$,

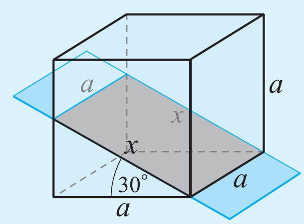
č) dolžina telesne diagonale je $D = a\sqrt{3}$.

1. Izračunajmo rob kocke s prostornino 100 dm^3.

Iz obrazca za prostornino kocke $V = a^3$

izrazimo in izračunamo dolžino stranice $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{100} \doteq 4^{\cdot}64$ dm.

2. Kocko z robom 3 cm presekamo z ravnino, ki poteka skozi rob osnovne ploskve kocke in z osnovno ploskvijo oklepa kot 30°. Natančno izračunajmo ploščino preseka.



Narišemo sliko.

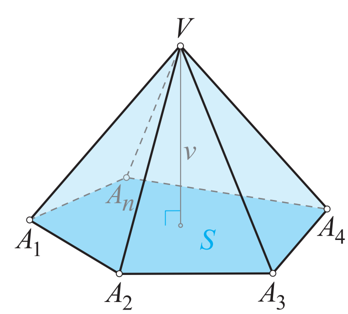
Presek je pravokotnik s stranicama a in x.

Iz $\cos\varphi = \frac{a}{x}$ izračunamo $x = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ cm.

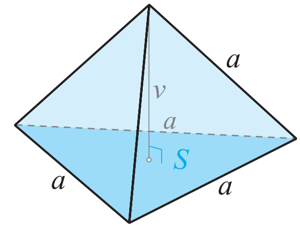
Ploščina je $P = a \cdot x = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ cm^2.

Piramida

Naj bo v ravnini dan poljuben večkotnik $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ in naj točka V ne leži v ravnini večkotnika. **Piramida** je množica vseh točk prostora, ki leže na zveznicah točke V s točkami večkotnika $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$.



Točko V imenujemo **vrh piramide**, večkotnik $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ je **osnovna ploskev** piramide, stranice osnovne ploskve pa so **osnovni robovi** piramide. **Stranski robovi** piramide so daljice, ki povezujejo vrh piramide z oglišči osnovne ploskve. **Stranska ploskev** piramide je trikotnik, ki ga omejujejo osnovni rob piramide in stranska robova iz krajišč osnovnega roba. **Višina piramide** je razdalja vrha od osnovne ploskve. Piramida je ***n*-strana**, če je osnovna ploskev n-kotnik. Piramida je **pokončna**, če so stranski robovi enako dolgi. Piramida je **pravilna**, če je pokončna in je osnovna ploskev pravilen večkotnik. **Pravilni tetraeder** je pravilna enakorobna tristrana piramida.

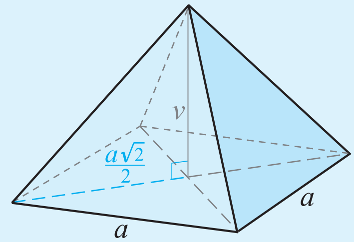


Za **pokončno piramido** velja:

a) površina je $P = S + S_{pl}$,

b) prostornina je $V = \frac{Sv}{3}$.

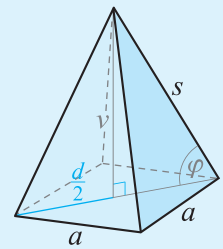
1. Izračunajmo prostornino pravilne štiristrane piramide z osnovnim robom $a = 6$ cm in stranskim robom $s = 7$ cm.



Ob pomoči slike in Pitagorovega izreka lahko zapišemo
$v^2 = s^2 - (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 = 49 - \frac{36}{2} = 31$
in izračunamo višino piramide $v = \sqrt{31} \doteq 5\dot{}57$ cm.

Prostornina piramide je $V = \frac{Sv}{3} = \frac{a^2 \cdot v}{3} = \frac{36 \cdot 5{,}57}{3} \doteq 66\dot{}8\ \text{cm}^3$.

2. Izračunajmo velikost naklonskega kota φ stranskega roba glede na osnovno ploskev pravilne štiristrane piramide z osnovnim robom 3 cm in stranskim robom 6 cm.



Narišemo piramido, katere osnovna ploskev je kvadrat.

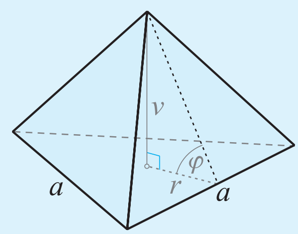
Izračunamo diagonalo kvadrata $d = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Za kot φ med stranskim robom in osnovno ploskvijo

velja $\cos\varphi = \frac{\frac{d}{2}}{s} = \frac{d}{2s} = \frac{3\sqrt{2}}{2 \cdot 6} = \frac{\sqrt{3}}{4} \doteq 0\dot{}3536$.

Od tod je $\varphi = 69° 18'$.

3. Izračunajmo prostornino pokončne pravilne tristrane piramide z osnovnim robom 6 dm, če je kot med stransko ploskvijo in osnovno ploskvijo $\varphi = 70°$.



Narišemo sliko.

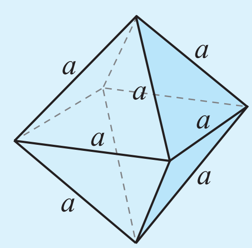
Najprej izračunamo polmer r enakostraničnemu trikotniku včrtanega kroga

$$r = \frac{S}{s} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}\ \text{dm}.$$

Nato iz $\tan\varphi = \frac{v}{r}$ izračunamo višino $v = r\tan\varphi = \sqrt{3} \cdot \tan 70° \doteq 4\dot{}76$ cm.

Prostornina piramide je $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4\dot{}76 \doteq 24\dot{}7\ \text{dm}^2$.

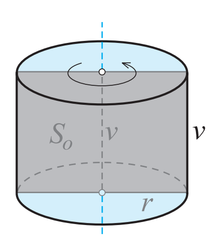
4. Izračunajmo površino pravilnega oktaedra na sliki, ki ga sestavlja osem enakostraničnih trikotnikov s stranico $a = 15$ cm.



Površina oktaedra je sestavljena iz dveh plaščev pravilnih enakorobnih štiristranih piramid.

Zato je $P = 2 \cdot 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2a^2 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 225 \cdot \sqrt{3} = 450\sqrt{3} \doteq 779\dot{}4\ \text{cm}^2$.

Pokončni krožni valj



Pravokotnik s stranicama r in v zavrtimo za polni kot okoli stranice v. Množico točk, ki jo pri tem vrtenju opiše dani pravokotnik, imenujemo **pokončni krožni valj s polmerom r in višino v**.

Kroga, ki ju opišeta stranici pravokotnika, imenujemo **osnovni ploskvi** valja. Premica, ki gre skozi središči obeh osnovnih ploskev, je **os valja**. Če valj presekamo z ravnino, ki gre skozi os valja, dobimo **osni presek valja**, to je pravokotnik s stranicama $2r$ in v. Valj je **enakostraničen**, če je **osni presek kvadrat**. Torej je $v = 2r$.

Za **pokončni krožni valj** velja:

a) ploščina osnovne ploskve je $S = \pi \cdot r^2$,

b) ploščina osnega preseka je $S_0 = 2rv$,

c) plašč meri $S_{pl} = 2\pi rv$,

č) površina je $P = 2\pi r(r + v)$,

d) prostornina $V = \pi r^2 v$.

1. List papirja A4 formata z merami 21 cm in 29˙7 cm lahko na dva načina zvijemo v valj. Izračunajmo, kateri od valjev ima večjo prostornino.

Za $v = 29˙7$ cm in $o = 2\pi r = 21$ cm je $r = \frac{21}{2\pi} \doteq 3˙342$ cm

ter od tod prostornina $V = \pi r^2 v = \pi \cdot 3˙342^2 \cdot 29˙7 \doteq 1042˙3\ \text{cm}^3$.

Za $v = 21$ cm in $o = 2\pi r = 29˙7$ cm je $r = 4˙727$ cm

ter od tod prostornina $V = \pi r^2 v = \pi \cdot 4˙727^2 \cdot 21 \doteq 1474˙1\ \text{cm}^3$.

Torej, če list papirja zvijemo po daljši stranici, dobimo valj z večjo prostornino.

2. Osni presek pokončnega krožnega valja je pravokotnik s stranicama 16 cm in 9 cm. Izračunajmo prostornino valja. Rezultat zaokrožimo na štiri mesta.

Iz $2r = 16$ dobimo $r = 8$ cm.

Višina valja je $v = 9$ cm.

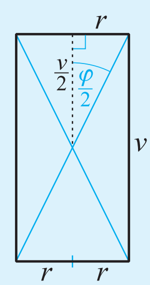
Prostornina valja je $V = S \cdot v = \pi r^2 \cdot v = \pi \cdot 64 \cdot 9 \doteq 1810\ \text{cm}^3$.

3. Višina pokončnega krožnega valja je 10 cm, diagonali osnega preseka valja pa oklepata kot $\varphi = 53°$. Izračunajmo površino valja.

Narišemo sliko osnega preseka valja.

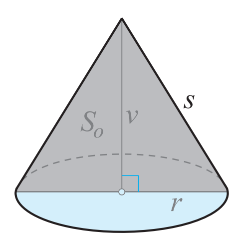
Iz $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{\frac{v}{2}}$ izračunamo $r = \frac{v}{2} \cdot \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{10}{2} \cdot \tan \frac{53°}{2} \doteq 2˙49$ cm.

Površina valja je $P = 2s + S_{pl} = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2 \cdot \pi \cdot 2˙49^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2˙49 \cdot 10 \doteq 195˙4\ \text{cm}^2$.



Pokončni stožec

Naj bo v ravnini dan krog s polmerom r (osnovna ploskev stožca). Skozi središče kroga postavimo pravokotnico (os stožca) na dano ravnino in si na pravokotnici izberimo poljubno točko V. Množico vseh točk, ki ležijo na zveznicah točke V s točkami kroga, imenujemo **pokončni stožec** z **vrhom** V.



Pokončni stožec je tudi množica točk, ki jo opiše pravokotni trikotnik, če ga za 360° zavrtimo okoli ene od katet. Krog, ki ga pri tem opiše druga kateta, imenujemo **osnovna ploskev**. **Višina stožca** je oddaljenost vrha V od osnovne ploskve stožca. **Stranica** s **stožca** je zveznica poljubne točke roba osnovne ploskve z vrhom stožca. Množica vseh točk na zveznicah vrha V z robom kroga je **plašč stožca**. Če presekamo stožec z ravnino, ki gre skozi os stožca, dobimo **osni presek stožca**, to je enakokrak trikotnik z osnovnico $2r$ in krakom s.

Za **pokončni stožec** velja:

a) dolžina stranice $s^2 = r^2 + v^2$,

b) ploščina osnovne ploskve $S = \pi r^2$,

c) ploščina osnega preseka $S_0 = rv$,

č) plašč meri $S_{pl} = \pi rs$,

d) površina stožca $P = \pi r(r + s)$,

e) prostornina $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$.

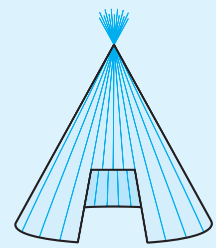
1. Indijanski šotor ima obliko stožca s polmerom 245 cm in višino 340 cm. Izračunajmo, koliko kvadratnih metrov meri osnovna ploskev šotora in koliko kvadratnih metrov blaga potrebujemo za šotor.

Osnovna ploskev šotora meri $S = \pi r^2 = \pi \cdot 2^{\cdot}45^2 \doteq 18^{\cdot}9\ \mathrm{m}^2$.

Blago potrebujemo za plašča stožca, zato najprej izračunamo dolžino stranice stožca

$s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{2{,}45^2 + 3{,}4^2} = \sqrt{17{,}56} \doteq 4^{\cdot}19\ \mathrm{m}$

in nato ploščino plašča $S_{pl} = \pi rs = \pi \cdot 2^{\cdot}45 \cdot 4^{\cdot}2 \doteq 32^{\cdot}3\ \mathrm{m}^2$.

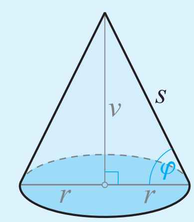


2. Izračunajmo, kolikšen kot oklepa stranica pokončnega stožca z osnovno ploskvijo, če je višina stožca dvakrat daljša od polmera.

Zapišemo $v = 2r$.

Iz slike razberemo $\tan\varphi = \frac{v}{r} = \frac{2r}{r} = 2$

in izračunamo $\varphi = 63°26'$.



3. Osni presek pokončnega stožca je enakokrak trikotnik s krakoma 20 cm in kotom med njima 60°. Natančno izračunajmo polmer in višino stožca ter na štiri mesta natančno prostornino stožca.

Narišemo sliko in zapišemo $s = 20$ cm.

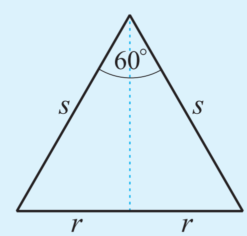
Uporabimo kosinusni izrek in iz

$(2r)^2 = s^2 + s^2 - 2s \cdot s \cdot \cos\varphi = 400 + 400 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \cos 60° = 800 - 800 \cdot \frac{1}{2} = 400$

izračunamo $2r = 20$ ter od tod $r = 10$ cm.

Iz $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{v}{s}$ dobimo višino stožca $v = s \cdot \cos\frac{\varphi}{2} = 20 \cdot \cos 30° = 10\sqrt{3}$ cm.

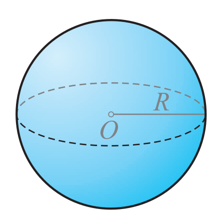
Prostornina stožca je $V = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3} = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 10\sqrt{3}}{3} = \frac{100\pi\sqrt{3}}{3} \doteq 1814$ cm.



Krogla

Krogla s središčem *O* in polmerom *R* je množica točk v prostoru, ki so kvečjemu za R oddaljene od točke O.

Krogla je tudi množica točk, ki jo opiše krog, če ga zavrtimo za 180° okoli premera. Krog, ki gre skozi središče krogle, imenujemo **glavni krogelni krog**. **Njegov polmer** je R.



Za **kroglo** velja:

a) površina je $P = 4\pi R^2$,

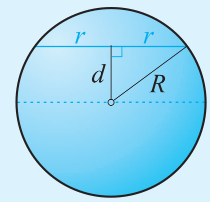
b) prostornina je $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.

1. Izračunajmo, koliko meri površina košarkarske žoge z obsegom glavnega krogelnega kroga 76 cm.

Iz obsega glavnega kroga $o = 2\pi R$ izrazimo in izračunamo polmer žoge $r = \frac{o}{2\pi} = \frac{76}{2\pi} \doteq 12{\cdot}096$ cm

in od tod površino žoge $P = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 12{\cdot}096^2 \doteq 1838{\cdot}6\ \text{cm}^2 = 18{\cdot}4\ \text{dm}^2$.

2. Presek krogle s polmerom $R = 25$ cm in ravnine je krog s polmerom $r = 20$ cm. Izračunajmo, kolikšna je razdalja d med središčem krogle in dano ravnino.



Narišemo osni presek krogle.
Uporabimo Pitagorov izrek in zapišemo $d^2 + r^2 = R^2$.
Izračunamo razdaljo $d = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15$ cm.

3. Izračunajmo, za koliko odstotkov je prostornina kocke z robom 6 dm večja od prostornine krogle s premerom 6 dm.

Prostornina kocke je $V_{\text{ko}} = a^3 = 216\ \text{dm}^3$.
Ker je premer krogle 6 dm, je njen polmer $R = 3$ dm.
Prostornina krogle je $V_{\text{kr}} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi 3^3}{3} = 36\pi \doteq 113{\cdot}1\ \text{dm}^3$.
Razmerje prostornin znaša $p = \frac{V_{\text{ko}}}{V_{\text{kr}}} = \frac{216}{113{,}1} \doteq 1{\cdot}911$.
Prostornina kocke je za $91{\cdot}1$ % večja od prostornine krogle.

1. Škatlica za vžigalice ima obliko kvadra z dolžinami robov 1 dm, $4{\cdot}5$ cm in 25 mm. Izračunajte prostornino embalaže. Koliko kubičnih decimetrov zavzame 1000 škatlic za vžigalice?

2. Izračunajte višino in površino kvadra s prostornino 960 cm^3, če merita robova osnovne ploskve 8 cm in 12 cm.

3. Kolikšen kot oklepa telesna diagonala kvadra z osnovno ploskvijo, če merita robova osnovne ploskve 3 cm in 4 cm, višina kvadra pa je 6 cm?

4. V kvadru $ABCDEFGH$ (E je nad ogliščem A) je $a = |AB| = 4$ dm, $b = |AD| = 3$ dm in $c = |AE| = 12$ dm. Izračunajte dolžino diagonal AC in AG in kot med njima.

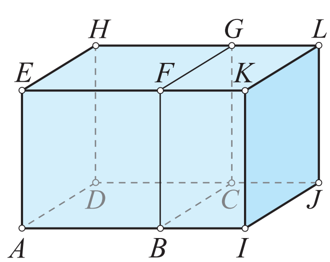
5. Dolžine robov kvadra so v razmerju 2 : 3 : 4, njegova površina pa meri 4212 cm^2. Izračunajte dolžine robov kvadra.

6. Koliko meri prostornina kocke s površino 1014 cm^2?

7. Lesen zaboj ima obliko kocke. Dolžina zunanjega roba meri 60 cm, debelina stene meri 3 cm. Kolikšna je notranja prostornina zaboja? Koliko kock z robom 8 cm lahko zložimo v ta lesen zaboj?

8. V kocki $ABCDA'B'C'D'$ s stranico 12 cm je točka E razpolovišče stranice $A'D'$. Izračunajte velikost kota $\sphericalangle BEC'$.

9. Kocki $ABCDEFGH$ z robom dolgim 8 cm dodamo kvader $BIJCFKLG$, tako da dobimo kvader $AIJDEKLH$ s površino 512 dm^2, kot kaže slika. Kolikšne so mere dodanega kvadra $BIJCFKLG$?



10. V trikotniku s stranico $a = 10$ cm je razmerje notranjih kotov $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 4$.
a) Izračunajte velikosti notranjih kotov.
b) Izračunajte dolžini stranic b in c.
c) Izračunajte prostornino prizme, če je njena osnovna ploskev dani trikotnik, višina pa meri 5 cm.

11. Dan je trikotnik ABC s stranicami $a = 10$ cm, $b = 12$ cm in $c = 16$ cm. Izračunajte prostornino in površino prizme, ki ima za osnovno ploskev dani trikotnik, višina prizme pa je enaka polmeru trikotniku očrtanega kroga.

12. Osnovna ploskev pokončne tristrane prizme $ABCDEF$ (D je nad A) je enakostranični trikotnik s stranico 8 cm. Višina prizme je 16 cm. Izračunajte kot BDC. Velikost kota zaokrožite na desetinko stopinje.

13. Prostornina pravilne šeststrane prizme z višino 5 cm je $120 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^3$. Koliko meri rob osnovne ploskve in kolikšna je površina prizme?

14. Izračunajte površino pravilne osemstrane enakorobne pokončne prizme z robom dolgim 8 cm. Kolikšen kot oklepata sosednji ploskvi plašča?

15. Podan je paralelogram s podatki $a = 12{\cdot}5$ cm, $b = 10{\cdot}2$ cm, $\alpha = 50°$.
a) Izračunajte dolžino diagonale f.
b) Izračunajte višino in prostornino pokončne prizme, ki ima za osnovno ploskev dani paralelogram, krajša telesna diagonala prizme pa meri $13{\cdot}86$ cm.

16. Koliko meri površina pravilne štiristrane prizme z višino 12 cm in prostornino $1200\ \text{cm}^3$?

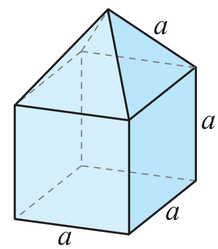
17. Iz kocke z robom 24 cm izrežemo največjo pravilno štiristrano pokončno piramido. Kolikšna je prostornina piramide?

18. Izračunajte površino in prostornino pokončne pravilne štiristrane piramide z osnovnim robom $a = 12$ cm in višino $v = 8$ cm.

19. Osnovni rob pravilne štiristrane piramide meri 7 cm, stranski rob pa 15 cm. Izračunajte prostornino piramide.

20. Štiristrana piramida z višino 9 cm ima za osnovno ploskev pravokotnik s stranicama 10 cm in 14 cm. Izračunajte prostornino piramide. Osnovno ploskev in stranske ploskve piramide razvijemo v ravnino, tako da dobimo mrežo piramide. Izračunajte ploščino mreže piramide.

21. Telo na sliki je sestavljeno iz kocke z robom dolžine 8 cm in enakorobne štiristrane piramide. Izračunajte površino in prostornino telesa.



22. Izračunajte prostornino pravilnega tetraedra z dolžino roba 8 cm.

23. Izračunajte kot med stranskima ploskvama pravilne enakorobne štiristrane piramide z robom 5 dm.

24. Koliko kubičnih decimetrov meri volumen pokončne pravilne tristrane piramide z osnovnim robom 2 dm in višino 35 cm?

25. Izračunajte površino pravilne tristrane pokončne piramide z osnovnim robom 12 cm in višino 15 cm.

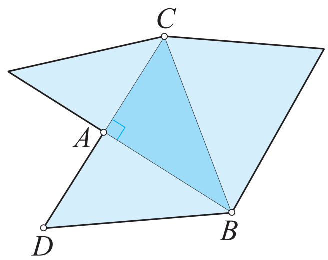
26. Koliko meri prostornina piramide z višino 12 dm, če je trikotnik s stranicami 8 dm, 6 dm in 4 dm njena osnovna ploskev?

27. Dan je trikotnik ABC s podatki $c = 8$ cm, $b = 7$ cm in $\alpha = 60°$.
a) Izračunajte velikosti kotov β in γ, dolžino stranice a in ploščino trikotnika.
b) Trikotnik ABC je osnovna ploskev 12 cm visoke pokončne piramide. Izračunajte prostornino piramide.

28. Osnovna ploskev pokončne tristrane piramide je trikotnik s podatki $a = 6$ cm, $\alpha = 47°$, $\beta = 53°$. Stranski rob je nagnjen proti osnovni ploskvi za kot 50°. Izračunajte višino in prostornino piramide.

29. Stranski rob pokončne tristrane piramide meri 3 dm, osnovna ploskev je trikotnik s stranicama, dolgima 2 dm in 4 dm, ki oklepata kot 60°. Koliko meri tretja stranica osnovne ploskve piramide in kolikšna je njena prostornina?

30. Na sliki je narisana mreža piramide, kjer je trikotnik ABC osnovna ploskev. Za $|AB| = 8$ cm in $|AC| = |AD| = 6$ cm izračunajte njeno prostornino.



31. Dana je pravilna in enakorobna petstrana piramida z osnovnim robom $a = 8$ cm.

a) Izračunajte ploščino osnovne ploskve.
b) Izračunajte višino stranske ploskve in višino piramide.
c) Izračunajte kot med stransko in osnovno ploskvijo piramide.
č) Izračunajte prostornino in površino piramide.

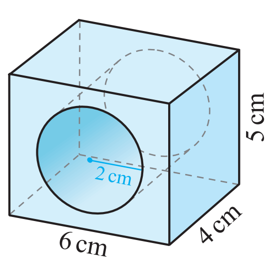
32. Kolikšni sta prostornina in površina betonskega stebra valjaste oblike s premerom osnovne ploskve 30 cm in dolžino 4 m?

33. Izračunajte površino in prostornino enakostraničnega valja s polmerom osnovne ploskve 3·8 dm.

34. Kolikšen je polmer osnovne ploskve krožnega valja in kolikšna prostornina valja z višino 20 dm in s ploščino plašča 2010 dm^2?

35. Osnovna ploskev krožnega valja meri 452·4 cm^2, plašč pa 1357·2 cm^2. Koliko meri prostornina valja?

36. Izračunajte prostornino in površino telesa iz slike.



37. Osni presek valja je kvadrat s ploščino 196 cm^2. Koliko natančno meri prostornina valja?

38. Kocko z robom 10 cm pretalimo v enakostranični valj. Kolikšen je polmer valja in kolikšna njegova višina?

39. Površina enakostraničnega valja meri 726π cm^2. Kolikšna je prostornina valja? Rezultat zaokrožite na štiri mesta.

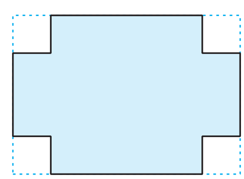
40. Lonec valjaste oblike je do $\frac{5}{8}$ napolnjen z vodo. Koliko litrov vode je v loncu, če je njegov polmer 13 cm in je visok 3 dm?

41. Lonec v obliki valja drži 20 litrov. Premer dna lonca meri 28 cm.

a) Koliko centimetrov meri višina lonca?
b) Kolikšna je površina lonca brez pokrova?

42. List papirja formata A4 ima obliko pravokotnika s stranicama 297 mm in 212 mm.

a) List papirja zvijemo v plašč valja tako, da je krajša stranica pravokotnika višina valja. Kolikšna je prostornina valja? Rezultat zapišite na desetinko litra natančno.
b) Na vogalih pravokotnika smo izrezali kvadrate s stranico 5 cm, kot kaže slika. Dobili smo mrežo škatle oblike kvadra – brez pokrova. Izračunajte robove škatle.
c) Koliko meri površina škatle in koliko prostornina škatle iz primera b?



43. Pokončni krožni valj in pravilna štiristrana prizma imata enako velika plašča, ki je kvadrat s ploščino 144 cm^2.

a) Izračunajte stranico, višino in prostornino prizme.
b) Izračunajte polmer osnovne ploskve, višino in prostornino valja. Rezultate zaokrožite na tri mesta.
c) Za koliko odstotkov je prostornina prizme manjša od prostornine valja?

44. Rob kocke meri 50 cm. Ostružimo jo v največji možni valj.
a) Izračunajte razliko med prostornino valja in prostornino kocke.
b) Koliko odstotkov prostornine kocke znašajo ostružki?
c) Izračunajte površino dobljenega valja.

45. Prostornina krožnega valja meri 2413 dm^3. Kolikšna je površina valja, če sta dolžina polmera in višina valja v razmerju 2 : 3? Rezultat zaokrožite na štiri mesta.

46. Pravilni enakorobni tristrani prizmi s stranico a je včrtan valj z isto višino. Za koliko odstotkov je prostornina valja manjša od prostornine prizme?

47. Izračunajte površino in prostornino stožca s polmerom osnovne ploskve 36 cm in višino 6 dm. Rezultata zapišite v dm^2 in dm^3.

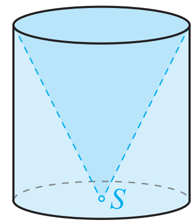
48. Kopica sena ima obliko pokončnega stožca s polmerom osnovne ploskve 1˙2 m in višino 2˙3 m. Koliko kubičnih metrov sena je v kopici in koliko kvadratnih metrov pregrinjala potrebujemo, da bi seno zavarovali pred dežjem?

49. Natančno izračunajte površino in prostornino stožca s polmerom osnovne ploskve 6 cm in stranskim robom 10 cm. Koliko meri kot ob vrhu osnega preseka stožca?

50. Izračunajte površino in prostornino stožca, če meri stranica stožca 12 cm in je proti osnovni ploskvi nagnjena za kot 30°.

51. Izračunajte prostornino enakostraničnega stožca s polmerom osnovne ploskve 5 dm. Plašč stožca in osnovno ploskev razvijemo v ravnino, tako da dobimo mrežo stožca. Kolikšna je ploščina mreže stožca?
Oba rezultata zaokrožite na štiri mesta.

52. Na sliki je narisano telo, ki smo ga dobili tako, da smo iz enakostraničnega valja izrezali stožec z isto višino $v = 0˙8$ m. Izračunajte površino telesa.



53. Pravokotni trikotnik s katetama 14 cm in 8 cm zavrtimo za 360° okoli daljše katete. Množica točk, ki jo pri tem vrtenju opiše dani trikotnik, je stožec. Kolikšna je prostornina telesa?

54. Kot ob vrhu osnega preseka stožca meri 30°. Kolikšna je višina in kolikšna prostornina stožca, če premer osnovne ploskve stožca meri 50 cm?

55. Osni presek enakostraničnega stožca meri $64\sqrt{3}$ dm^2. Koliko meri površina stožca?

56. Površina plašča enakostraničnega stožca meri 8π cm^2. Izračunajte njegovo prostornino. Rezultat zapišite v natančni obliki.

57. Prostornina enakostraničnega stožca je $72\pi\sqrt{3}$ cm^3. Izračunajte polmer osnovne ploskve stožca.

58. Površina enakostraničnega stožca meri 192π cm^2. Izračunajte polmer osnovne ploskve stožca, natančno ploščino osnega preseka in natančen volumen stožca.

59. Krožni izsek s polmerom 3 dm in središčnim kotom 120° zvijemo v plašč stožca. Izračunaj prostornino stožca in jo zapiši v litrih.

60. Kolikšno je razmerje med ploščino plašča in ploščino osnovne ploskve enakostraničnega stožca?

61. V pokončnem stožcu je razmerje med površino plašča in ploščino osnovne ploskve 5 : 3. Koliko meri višina stožca, če je površina stožca 384π cm^2?

62. Obseg glavnega kroga nogometne žoge je 70 cm. Kolikšna je prostornina in kolikšna površina žoge?

63. Krogla za balinanje ima polmer 5˙5 cm.
a) Izračunajte površino in prostornino krogle.
b) Kolikšna je masa krogle, če je gostota kovine, iz katere je krogla narejena, 5˙4 g/cm^3?

64. Kolikšna je prostornina krogle s površino 1 m^2?

65. Kolikšen je premer krogle, ki ima enako prostornino kot kocka z robom 1 m?

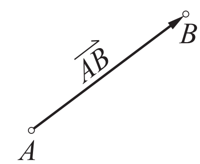
66. Polmer Lune je 1738 km, polmer Zemlje pa 6378 km. Koliko odstotkov prostornine Zemlje predstavlja prostornina Lune?

67. Železno kroglo s polmerom $R = 100$ cm pretalimo v enakostranični valj. Kolikšen je polmer in kolikšna višina valja?

68. Kroglo, ki ima prostornino 288π cm^3, prerežemo z ravnino, ki je od središča oddaljena za 3 cm. Natančno izračunajte ploščino preseka krogle in ravnine.

10. VEKTORJI

Vsak **urejen par točk** (A, B) v prostoru določa **vektor** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.



Vektor ponazorimo z **usmerjeno daljico**.

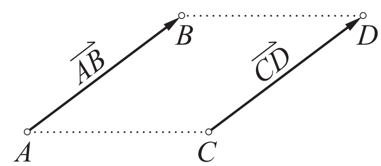
Dolžina vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je enaka dolžini daljice AB. Oznaka: $a = |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = d(A, B)$.

Enotski vektor je vektor z dolžino 1.

Ničelni vektor je vektor, pri katerem začetna in končna točka sovpadata: $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$.

Vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ **sta enaka**, če imata **enako velikost in se ujemata v smeri in usmerjenosti**.

Usmerjeni daljici predstavljata **isti vektor**, če sta **vzporedni**, **enako dolgi** in **enako usmerjeni**.



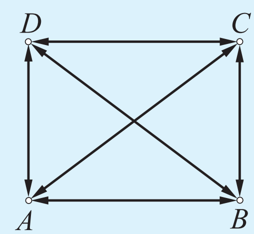
Vektor se ne spremeni, če ga **vzporedno premaknemo**.

Vektor $\overrightarrow{BA}$ je **nasprotni vektor** vektorju $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BA}$ sta enako dolga, vzporedna in nasprotno usmerjena.

Narišimo pravokotnik $ABCD$, za katerega velja $|AB| = 4$ cm in $|BC| = 3$ cm, in v njem narišimo in zapišimo vse neničelne vektorje, ki jih določajo oglišča pravokotnika. Zapišimo še vektor, ki je enak vektorju $\overrightarrow{AD}$, in vektorje, ki so nasprotni vektorju $\overrightarrow{AB}$.

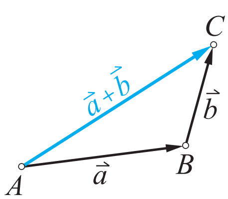
Vsi neničelni vektorji so: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

Vektor $\overrightarrow{BC}$ je enak vektorju $\overrightarrow{AD}$, vektorju $\overrightarrow{AB}$ sta nasprotna vektorja $\overrightarrow{BA}$ in $\overrightarrow{CD}$.

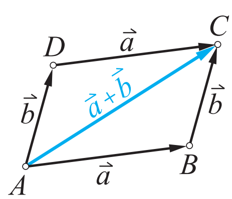


Računanje z vektorji

I. **Seštevanje vektorjev**:

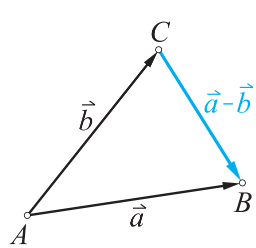


Trikotniško pravilo



Paralelogramsko pravilo

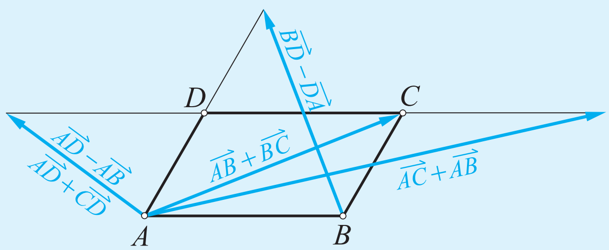
II. **Odštevanje vektorjev**: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Za seštevanje vektorjev veljajo lastnosti:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ komutativnost seštevanja ali zakon o zamenjavi členov
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ asociativnost seštevanja ali zakon o združevanju členov
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

1. Narišimo paralelogram $ABCD$, za katerega velja $|AB| = 5$ cm, $|AD| = 3$ cm in $\alpha = 60°$, in vektorje $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DA}$.



2. V kvadru $ABCDA'B'C'D'$ poiščimo vektorje $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{D'A'}$ in $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{C'C}$.

Narišemo kvader in zapišemo.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'}$

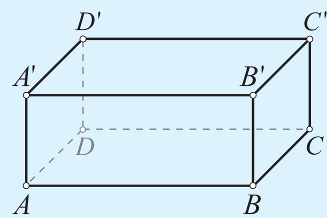
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB'}$

$\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{BC'}$

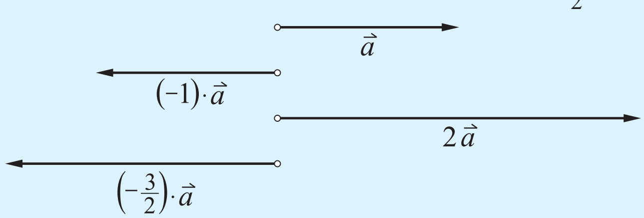
$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{BC'}$



III. **Produkt vektorja $\vec{a}$ s številom (skalarjem) m** je vektor $\overrightarrow{ma}$, ki je:

1. vzporeden vektorju $\vec{a}$,
2. enako usmerjen kot vektor $\vec{a}$, če je $m > 0$, oz. nasprotno usmerjen kot vektor $\vec{a}$, če je $m < 0$,
3. za njegovo dolžino velja $|m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}|$.

Prikažimo produkt vektorja $\vec{a}$ s števili -1, 2 in $-\frac{3}{2}$.

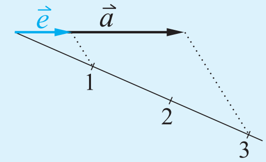


Lastnosti množenja vektorja s številom:

1. $n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a}$ asociativnost v skalarnem faktorju
2. $(n + m)\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a}$ distributivnost v skalarnem faktorju
3. $n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$ distributivnost v vektorskem faktorju

1. Narišimo vektor $\vec{a}$, če je $|\vec{a}| = 3$ cm, ter narišimo in zapišimo enotski vektor $\vec{e}$ v smeri vektorja $\vec{a}$.

Vektor $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a}$ je enotski vektor v smeri vektorja $\vec{a}$.

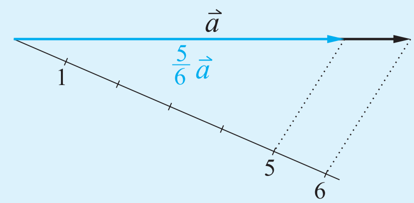


2. Izračunajmo $2 \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(\vec{a} - 2\vec{b}) - (\frac{1}{2} - \frac{2}{3}) \cdot \vec{a}$.

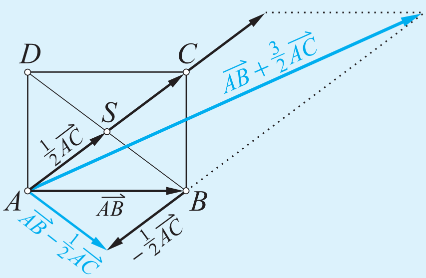
$2 \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(\vec{a} - 2\vec{b}) - (\frac{1}{2} - \frac{2}{3}) \cdot \vec{a} = 2\vec{a} - 6\vec{b} - 3\vec{a} + 6\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{a} = 3\vec{a}(2 - 3 + \frac{1}{6}) = -\frac{5}{6}\vec{a}$.

3. Narišimo vektor $\frac{4}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a}$, če je $|\vec{a}| = 7$ cm.

Izraz najprej poenostavimo $\frac{4}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} = (\frac{4}{3} - \frac{1}{2})\vec{a} = \frac{5}{6}\vec{a}$ in nato narišemo vektor.



4. Dan je pravokotnik $ABCD$ s stranicama $|AB| = 4$ cm in $|AD| = 3$ cm. Narišimo vektorja $\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Presečišče diagonal označimo s S in dobimo $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, nato vektorja narišemo.



Kolinearnost in komplanarnost. Linearna kombinacija

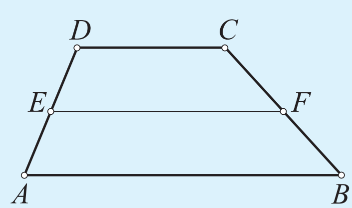
Neničelna vektorja $\vec{a}$ **in** $\vec{b}$ sta **vzporedna oz. kolinearna** natanko takrat, ko obstaja tako realno število k, da je $\vec{a} = k\vec{b}$.

V trapezu $ABCD$ z osnovnicama $|AB| = 10$ cm in $|CD| = 6$ cm je točka E razpolovišče kraka AD, točka F pa razpolovišče kraka BC. Vektor $\overrightarrow{EF}$ izrazimo z vektorjem $\overrightarrow{AB}$ in z vektorjem $\overrightarrow{CD}$.

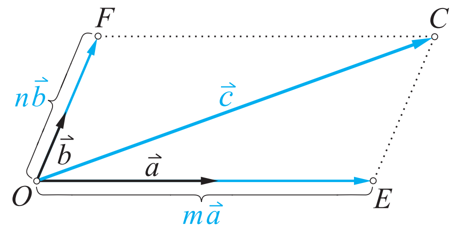
Ker je daljica EF srednjica trapeza z dolžino $|EF| = 8$ cm in je vzporedna osnovnicama, so vektorji $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ in $\overrightarrow{EF}$ kolinearni.

Ker imata vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{EF}$ isto usmerjenost, zapišemo $\overrightarrow{EF} = \frac{8}{10}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

Ker imata vektorja $\overrightarrow{CD}$ in $\overrightarrow{EF}$ nasprotno usmerjenost, je $\overrightarrow{EF} = -\frac{8}{6}\overrightarrow{CD} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CD}$.



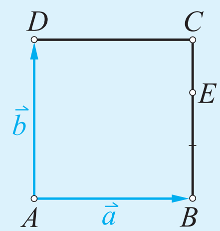
Vsak vektor oblike $m\vec{a} + n\vec{b}$, pri čemer sta m in n poljubni realni števili, imenujemo **linearna kombinacija vektorjev** $\vec{a}$ in $\vec{b}$.



Če vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nista kolinearna, potem je $m\vec{a} + n\vec{b} = 0$ le, ko je $m = 0$ in hkrati $n = 0$. Dvojico neničelnih nekolinearnih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ imenujemo **baza ravnine**, vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa **bazna vektorja**.

Če vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sestavljata bazo ravnine, potem lahko vsak vektor $\vec{c}$ iz ravnine, ki jo določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, na en sam način zapišemo kot njuno linearno kombinacijo: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$; $m, n \in \mathbb{R}$. Števili m in n sta **komponenti vektorja** $\vec{c}$ v bazi $\vec{a}$, $\vec{b}$.

V kvadratu $ABCD$ točka E leži na stranici BC tako, da je $|BE| : |EC| = 2 : 1$. Z baznima vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ izrazimo vektorje $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{ED}$.



$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

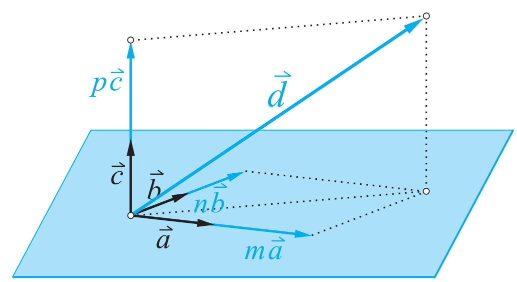
$\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}$

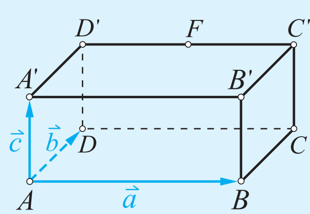
Neničelni vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so **komplanarni**, če jih lahko tako vzporedno premaknemo, da **ležijo v isti ravnini**.



Če so neničelni vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ nekomplanarni, je $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = 0$ samo takrat, ko je $m = n = p = 0$.

Trojico neničelnih nekomplanarnih vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ imenujemo **baza prostora**, vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ pa **bazni vektorji**. Če bazo prostora sestavljajo enotski vektorji, ki so paroma pravokotni, potem jo imenujemo **ortonormirana baza**. Če vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ sestavljajo bazo prostora, potem lahko vsak vektor $\vec{d}$ v prostoru na en sam način zapišemo v obliki $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$; $m, n, p \in \mathbb{R}$. Števila m, n, p so **komponente vektorja** $\vec{d}$ v bazi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

V kvadru $ABCDA'B'C'D'$ je točka F razpolovišče stranice $C'D'$. Vektorje $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{AF}$ in $\overrightarrow{BF}$ zapišimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$.



$\overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{AD'} = \vec{b} + \vec{c}$

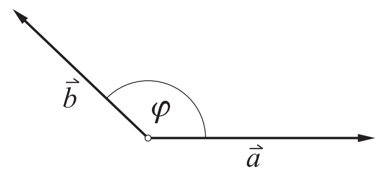
$\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{B'D'} = -\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Skalarni produkt



Kot φ med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je konveksen kot, ki ima za kraka dana vektorja.

Nasprotna vektorja oklepa kot 180°. Vektor sam s seboj oklepa kot 0°.

Skalarni produkt dveh vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je **produkt njunih dolžin in kosinusa vmesnega kota**:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$.

Izračunajmo skalarne produkte vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če zanju velja $|\vec{a}| = 8$ in $|\vec{b}| = 3$, kot med njima pa meri:

a) 60°
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot 3 \cdot \cos 60° = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$

b) 90°
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot 3 \cdot \cos 90° = 24 \cdot 0 = 0$

c) 150°
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot 3 \cdot \cos 150° = 24 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -12\sqrt{3}$

č) 0°
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot 3 \cdot \cos 0° = 24 \cdot 1 = 24$

d) 180°
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot 3 \cdot \cos 180° = 24 \cdot (-1) = -24$

Dolžina vektorja $\vec{a}$: $a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Kot med neničelnima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ **izračunamo iz formule** $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}$.

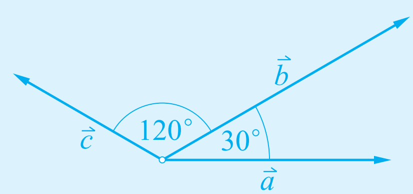
Lastnosti skalarnega produkta:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — komutativnost ali zakon o zamenjavi
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ — distributivnost
3. $\vec{a} \cdot (m\vec{b}) = (m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — homogenost

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta **pravokotna** natanko takrat, ko je njun **skalarni produkt enak 0**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

1. Na sliki so narisani vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ z dolžinami $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ in $|\vec{c}| = 3$.

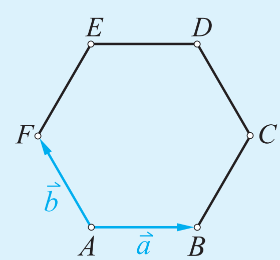
Natančno izračunajmo skalarni produkt.



$\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) + (2\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} =$
$= 4 \cdot 5 \cdot \cos 30° - 4 \cdot 3 \cos 150° + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120° =$
$= 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 12 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) - 30 \cdot \frac{1}{2} = 16\sqrt{3} - 15$

2. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ s stranico 4 enote vektorja $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{AD}$ izrazimo z vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$ ter izračunajmo skalarni produkt $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Pravilni šestkotnik je sestavljen iz šestih skladnih enakostraničnih trikotnikov. Tako kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ meri 120° in lahko izračunamo:



$\overrightarrow{AE} = \vec{a} + 2\vec{b}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 2\vec{b}) =$
$= 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} = 2a^2 + 6ab\cos\varphi + 4b^2 =$
$= 2 \cdot 16 + 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120° + 4 \cdot 16 = 32 + 96 \cdot (-\frac{1}{2}) + 64 = 48$

3. V kocki $ABCDA'B'C'D'$ s stranico 6 enot je točka F razpolovišče stranice $B'C'$. Vektorja $\overrightarrow{AD'}$ in $\overrightarrow{AF}$ zapišimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$ ter izračunajmo $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AF}$.

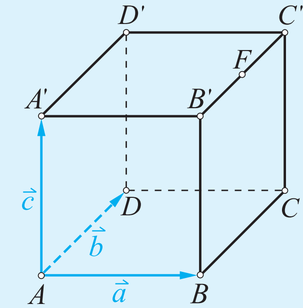
$\overrightarrow{AD'} = \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{AF} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

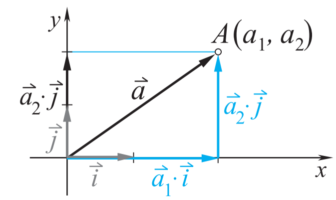
$\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AF} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}) =$

$= \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot (\frac{1}{2}\vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot (\frac{1}{2}\vec{b}) + \vec{c} \cdot \vec{c} =$

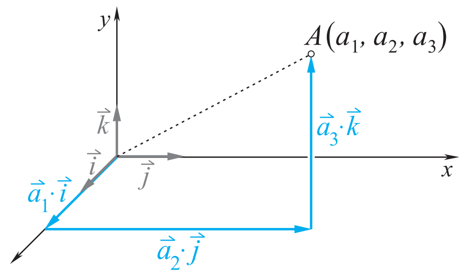
$= 0 + \frac{1}{2}6^2 + 0 + 0 + 0 + 6^2 = 54$



Pravokotni koordinatni sistem



Pravokotni koordinatni sistem v prostoru določajo tri paroma pravokotne številske premice x, y in z s skupnim izhodiščem. Vsaki točki A v prostoru pripada natanko ena urejena trojica realnih števil (a_1, a_2, a_3). To urejeno trojico števil imenujemo **koordinate točke** A (abscisa, ordinata in aplikata točke A) in pišemo: $A(a_1, a_2, a_3)$.



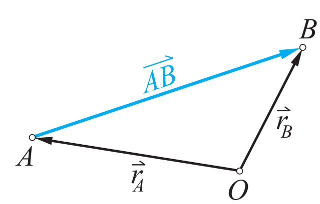
Naj bodo $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ enotski vektorji na koordinatnih oseh z začetkom v koordinatnem izhodišču. Vektorja $\vec{i}$ in $\vec{j}$ sestavljata **ortonormirano** (standardno) **bazo ravnine**, vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ pa **ortonormirano** (standardno) **bazo prostora**.

Zapišimo komponente baznih vektorjev ravnine $\vec{i}$ in $\vec{j}$ ter komponente baznih vektorjev prostora $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$.

Ortonormirano bazo sestavljajo enotski vektorji na koordinatnih oseh z začetkov v izhodišču koordinatnega sistema. Zato sta vektorja $\vec{i} = (1, 0)$ in $\vec{j} = (0, 1)$ baza ravnine in so vektorji $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ in $\vec{k} = (0, 0, 1)$ baza prostora.

Vsak vektor $\vec{a}$ v ravnini ali v prostoru lahko na en sam način zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev. Če vektor $\vec{a}$ vzporedno premaknemo tako, da ima začetek v izhodišču koordinatnega sistema, potem ga v ravnini zapišemo v obliki $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} = (a_1, a_2)$, v prostoru pa $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + \vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$.

Krajevni vektor $\vec{r_A}$ je vektor, ki ima začetek v koordinatnem izhodišču in konec v izbrani točki A. Če ima točka A koordinate (a_1, a_2, a_3), potem lahko krajevni vektor točke A zapišemo v obliki $\vec{r_A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$. Števila a_1, a_2, a_3 so **komponente krajevnega vektorja** $\vec{r_A}$. Vsak vektor $\overrightarrow{AB}$ v prostoru lahko zapišemo s krajevnimi vektorji točk $A\ (a_1, a_2, a_3)$ in $B\ (b_1, b_2, b_3)$:
$\overrightarrow{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.



Računanje z vektorji v standardni bazi: Če je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, potem je:

1. $\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ seštevanje vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$
2. $\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ odštevanje vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$
3. $m\vec{a} = (ma_1, ma_2, ma_3)$ produkt vektorja $\vec{a}$ s številom m
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$
5. $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ dolžina vektorja $\vec{a}$

1. V prostoru sta dani točki $A(3, -2, -1)$ in $B(-2, 4, -5)$. Zapišimo krajevna vektorja točk A in B in komponente vektorja $\overrightarrow{AB}$.

$\vec{r}_A = (3, -2, -1)$

$\vec{r}_B = (-2, 4, -5)$

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-2, 4, -5) - (3, -2, -1) = (-5, 6, -4)$

2. Dana sta vektorja $\vec{a} = (4, -2, -3)$ in $\vec{b} = (-2, 5, -2)$. Izračunajmo komponente vektorjev $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ in $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

$\vec{a} + \vec{b} = (4, -2, -3) + (-2, 5, -2) = (2, 3, -5)$

$\vec{a} - \vec{b} = (4, -2, -3) - (-2, 5, -2) = (6, -7, -1)$

$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(4, -2, -3) - 3(-2, 5, -2) = (8, -4, -6) - (-6, 15, -6) = (14, -19, 0)$

3. Za kateri y bosta vektorja $\vec{a} = (1, -2, -3)$ in $\vec{b} = (-2, y, 6)$ kolinearna?

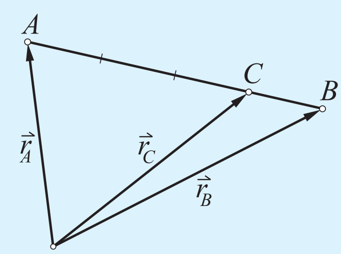
Za vzporedna vektorja velja $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

Iz prvih komponent lahko zapišemo enačbo $1 \cdot k = -2$ in izračunamo $k = -2$.

Potem je $y = -(2)(-2) = 4$.

Preverimo še tretjo komponento $(-2)(-3) = 6$. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta vzporedna za $y = 4$.

4. Dani sta točki $A(2, 0, 3)$ in $B(6, 3, -1)$. Točka C leži na daljici AB tako, da je $|AC| : |CB| = 3 : 1$. S krajevnima vektorjema točk A in B izrazite krajevni vektor točke C in zapišite njegove komponente. Kolikšne so koordinate točke C?



Zapišemo

$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \vec{r}_A + \frac{3}{4}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{r}_A + \frac{3}{4}\vec{r}_B - \frac{3}{4}\vec{r}_A = \frac{1}{4}\vec{r}_A + \frac{3}{4}\vec{r}_B$

in izračunamo

$\vec{r}_C = \frac{1}{4}\vec{r}_A + \frac{3}{4}\vec{r}_B = \frac{1}{4}(2, 0, 3) + \frac{3}{4}(6, 3, -1) = (5, \frac{9}{4}, 0)$.

Koordinate točke so $C(5, \frac{9}{4}, 0)$.

5. V prostoru sta dani točki $A(-2, 2, 1)$ in $B(-3, -4, 2)$. Zapišimo komponente vektorja $\overrightarrow{AB}$ in izračunajmo njegovo dolžino.

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-3, -4, 2) - (-2, 2, 1) = (-1, -6, 1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{38} \doteq 6{\cdot}16$

6. Izračunajmo skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (3, -6, -2)$ in $\vec{b} = (2, -1, 4)$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, -6, -2) \cdot (2, -1, 4) = 3 \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 = 6 + 6 - 8 = 4$

7. Izračunajmo kot med vektorjema $\vec{a} = (-3, -1, 4)$ in $\vec{b} = (4, -2, 3)$.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(-3) \cdot 4 + (-1)(-2) + 4 \cdot 3}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2}} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 3^2} = \frac{2}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{29}} \doteq 0{\cdot}0728$$

$\varphi = 85°49'$

8. Za kateri x bosta vektorja $\vec{a} = (x, -4, 1)$ in $\vec{b} = (5, 2, -2)$ pravokotna?

Vektorja sta pravokotna natanko takrat, ko je njun skalarni produkt 0.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x, -4, 1) \cdot (5, 2, -2) = 0$

$5x - 8 - 2 = 0$

$5x = 10$

$x = 2$

1. Narišite pravokotnik $ABCD$ s stranicama $|AB| = 3$ cm in $|AD| = 2$ cm ter narišite vektorje $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB}$ in $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CB}$.

2. V kocki $ABCDA'B'C'D'$ poiščite vektorje $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{DC'}$, $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{A'A}$ in $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{A'C}$.

3. Dolžina vektorja $\vec{a}$ je 5 cm. Narišite vektorje $\vec{a}$, $\frac{3}{4}\vec{a}$ in $-\frac{1}{4}\vec{a}$.

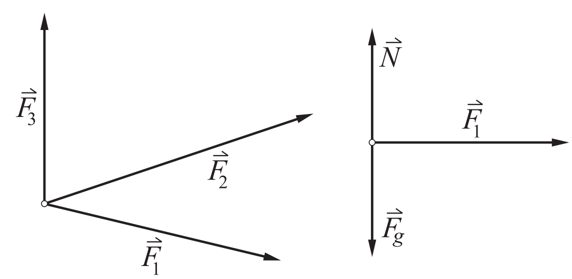
4. Izračunajte $2\vec{e} - \frac{1}{3}(\vec{f} + 4\vec{e})$, če je $\vec{e} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ in $\vec{f} = \vec{b} - \vec{a}$.

5. Narišite vektor $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{a}$, če je $|\vec{a}| = 6$ cm.

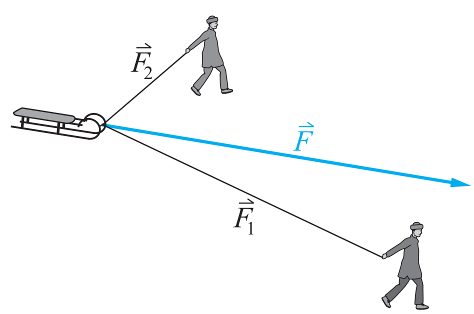
6. V ravnini konstruirajte vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki oklepata kot $60°$ in zanju velja $|\vec{a}| = 4$ cm ter $|\vec{b}| = 2$ cm. Nato narišite še vektorja $2\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{a} - 2\vec{b}$.

7. Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico 4 cm. Narišite vektorja $\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

8. Sile $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ in $\vec{F_3}$ na sliki ležijo v isti ravnini in imajo prijemališče v isti točki. Narišite rezultanto (vsoto) vseh sil.



9. Fanta vlečeta sani z vrvema, kot kaže slika. Velikost rezultante njunih sil $\vec{F}$ je 700 N. Ocenite velikosti vlečnih sil posameznih fantov $\vec{F_1}$ in $\vec{F_2}$.

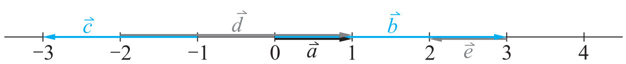


10. Silo $\vec{F}$ z velikostjo 20 N, ki je usmerjena navpično navzdol, razstavimo na dve komponenti. Komponenta $\vec{F_1}$ je usmerjena vodoravno proti desni in njena velikost znaša 40 N.

a) Narišite sliko (merilo: 1 cm ... 10 N).
b) Izračunajte velikost druge sile.
c) Iz slike izmerite kot med drugo komponento in silo $\vec{F}$.

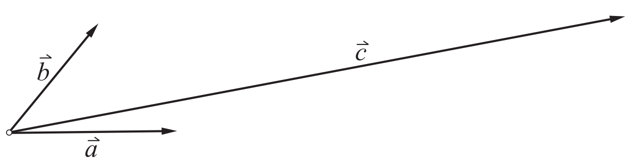
11. Narišite enakostranični trikotnik ABC s stranico 3 cm ter zapišite enotski vektor $\vec{e}$ v smeri vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Narišite trikotnik $A'B'C'$, ki ga dobite z vzporednim premikom trikotnika ABC za vektor $\vec{a} + 2\vec{b}$, če je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

12. Na sliki so na številski premici narisani vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ in $\vec{e}$.



a) Vektorje $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ in $\vec{e}$ izrazite z vektorjem $\vec{a}$.
b) Vektorja $\vec{b}$, $\vec{e}$ in $\vec{c}$ izrazite z vektorjem $\vec{d}$.

13. Na sliki so narisani komplanarni vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.



a) Vektor $\vec{b}$ zapišite z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
b) Vektor $\vec{a}$ zapišite z vektorjema $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

14. V trikotniku ABC je točka E razpolovišče stranice BC. Vektorje $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$ in $\overrightarrow{AE}$ zapišite kot linearno kombinacijo vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$.

15. V paralelogramu $ABCD$ točka E leži na stranici CD tako, da je $|CE| : |ED| = 3 : 2$. Z baznima vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ izrazimo vektorje $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{BE}$.

16. V pravokotniku $ABCD$ točka E leži na stranici AD tako, da je $|AE| : |AD| = 1 : 3$. Z baznima vektorjema $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ izrazimo vektorje $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{BE}$. Za kateri racionalni števili m in n je $\overrightarrow{CE} = m\vec{a} + n\vec{b}$?

17. V trikotniku ABC leži na stranici AC točka E tako, da je $|AE| : |EC| = 1 : 3$, točka F pa leži na stranici BC tako, da je $EF \parallel AB$. Pokažite, da je $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

18. V kocki $ABCDEFGH$ (oglišče E je nad ogliščem A) leži točka M na stranici EF tako, da je $|EM| : |MF| = 1 : 2$. Vektorje $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$ in $\overrightarrow{EC}$ zapišimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$.

19. Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če je podana njuna dolžina in kot med njima.

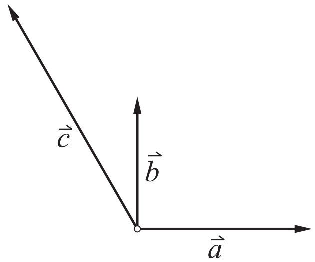
a) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4, \varphi = 45°$
b) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 8, \varphi = 30°$
c) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \varphi = 0°$
č) $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 9, \varphi = 90°$
d) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 11, \varphi = 120°$
e) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 8, \varphi = 180°$
f) $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 9, \varphi = 72°35'$
g) $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 5, \varphi = 136°42'$

20. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ z dolžinama $|\vec{a}| = 7$ enot ter $|\vec{b}| = 4$ enote oklepata kot $120°$. Izračunajte skalarni produkt $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$.

21. Izračunajte dolžino vektorja $\vec{a} + 2\vec{b}$, če vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ merita $|\vec{a}| = 8$ enot ter $|\vec{b}| = 5\sqrt{2}$ enot in oklepata kot $45°$.

22. V ravnini narišite vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki oklepata kot $\alpha = 60°$ in zanju velja $|\vec{a}| = 6$ enot ter $|\vec{b}| = 3$ enote. Nato narišite še vektor $2\vec{a} + \vec{b}$ ter natančno izračunajte njegovo dolžino. Kolikšen kot oklepata vektorja $2\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{b}$? Rezultat zaokrožite na stotinko stopinje.

23. Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ z dolžinami $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ in $|\vec{c}| = 6$ ležijo v ravnini tako, kot kaže slika. Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je pravi kot, kot med vektorjema $\vec{b}$ in $\vec{c}$ pa meri $30°$. Izračunajte natančno vrednost $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})$.



24. Kolikšen kot φ oklepata enotska vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če je vektor $\vec{a}$ pravokoten na vektor $\vec{a} - 2\vec{b}$?

25. Dolžina vektorja $\vec{a}$ meri 5 enot, dolžina vektorja $\vec{b}$ meri 7 enot, dolžina vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ pa 11 enot. Natančno izračunajte dolžino vektorja $\vec{a} - \vec{b}$.

26. Pravokotnik $ABCD$ ima stranici dolžine $|AB| = 8$ cm in $|AD| = 7$ cm. Točka M deli stranico AD v razmerju $|AM| : |MD| = 5 : 2$. Izrazite vektorja $\overrightarrow{MB}$ in $\overrightarrow{MC}$ z vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in izračunajte skalarni produkt $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$. Narišite skico.

27. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ s stranico dolžine 2 enoti označimo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ in $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Zapišite vektorja $\overrightarrow{FD}$ in $\overrightarrow{FB}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Izračunajte skalarni produkt $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FB}$.

28. Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine 4 enote. Narišite vektor $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. Natančno izračunajte dolžino vektorja $\vec{v}$ ter na minuto natančno kot φ med vektorjema $\vec{v}$ in $\overrightarrow{AB}$.

29. V pravokotniku $ABCD$ merita stranici $a = 5$ enot in $b = 3$ enote. Na stranici DC je točka M, tako da je $|DM| : |MC| = 3 : 2$. Narišite sliko in izračunajte skalarni produkt $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ ter ploščino štirikotnika $ABCM$.

30. V kocki $ABCDEFGH$ (oglišče E je nad ogliščem A) s stranico 6 cm je točka M razpolovišče stranice FG, točka N pa razpolovišče stranice EH. Vektorja $\overrightarrow{BM}$ in $\overrightarrow{BN}$ zapišite kot linearno kombinacijo baznih vektorjev $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ ter izračunajte skalarni produkt $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$.

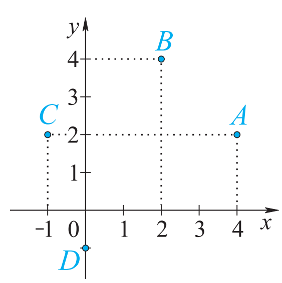
31. Točke A, B in C so določene s krajevnimi vektorji $\vec{r}_A = \vec{a}$, $\vec{r}_B = \vec{b}$ in $\vec{r}_C = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ zapišite krajevni vektor $\vec{r}_S$ razpolovišča S daljice AC in krajevni vektor $\vec{r}_T$ razpolovišča T daljice BC.

32. Dana sta vektorja $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ in $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$. Vektorje $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ in $2\vec{b}$ zapišite kot linearno kombinacijo baznih vektorjev $\vec{i}$ in $\vec{j}$ ter zapišite njihove komponente.

33. Za vektorja $\vec{a} = (-3, 2)$ in $\vec{b} = (1, 3)$ izračunajte $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $-2\vec{a}$ in $\vec{a} + 2\vec{b}$.

34. Dane so točke $A(3, -2)$, $B(2, 5)$ in $C(-1, 6)$. Vektorje $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BC}$ izrazite s krajevnimi vektorji točk A, B in C ter zapišite njihove komponente. Zapišite še komponente krajevnega vektorja razpolovišča daljice AC.

35. Na sliki so v koordinatnem sistemu dane točke A, B, C in D. Zapišite komponente vektorjev $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ in koordinati razpolovišča daljice AD.



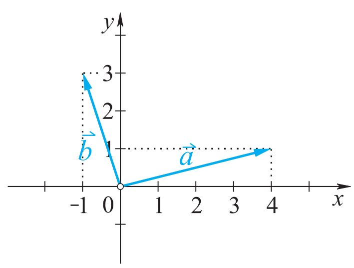
36. Vektor $\vec{c} = (6, 5)$ zapišite kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a} = (-3, 4)$ in $\vec{b} = (4, -1)$.

37. Pravokotne koordinate treh točk v ravnini so $A(-2, -2)$, $B(-1, 2)$ in $C(2, -4)$. Četrta točka D je določena tako, da je $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$. Zapišite koordinate točke D.

38. Izračunajte dolžino vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ in kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če je:
a) $\vec{a} = (-4, 3)$, $\vec{b} = (5, 12)$
b) $\vec{a} = (1, 7)$, $\vec{b} = (2, -2)$
c) $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (-2, 4)$

39. Zapišite enotski vektor $\vec{e}$ v smeri vektorja $\overrightarrow{AB}$, če je $A(3, -2)$ in $B(-1, -5)$.

40. Na sliki sta dana vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Zapišite njune komponente in na minuto natančno izračunajte kot med njima.



41. V ravnini sta dana vektorja $\vec{a} = (-8, 2)$ in $\vec{b} = (-1, 5)$. Izračunajte dolžino vektorja $\vec{a} - 2\vec{b}$.

42. Za katero realno število k bosta vektorja $\vec{a} = (-5, k)$ in $\vec{b} = (-1, 7)$:
a) enako dolga,
b) pravokotna?

43. Kolikšen kot oklepa vektor $\vec{a} = (-3, 2)$ z ordinatno osjo?

44. V ravnini so v standardni bazi $\vec{i}$ in $\vec{j}$ podani krajevni vektorji točk A, B in C: $\vec{r_A} = -\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{r_B} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ in $\vec{r_C} = -4\vec{i} - 6\vec{j}$.
a) Na minuto natančno izračunajte kot med vektorjema $\vec{r_A}$ in $\vec{r_B}$.
b) Točka D leži v ravnini, tako da je točka A razpolovišče daljice DC. Zapišite komponente krajevnega vektorja točke D.

45. Dana sta vektorja $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ in $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$. Na dva različna načina zapišite vektorje $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ in $\frac{2}{3}\vec{b}$.

46. Za vektorja $\vec{a} = (2, -1, 3)$ in $\vec{b} = (-2, 4, -1)$ izračunajte $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$ in $3\vec{a} + 2\vec{b}$.

47. V prostoru sta dani točki $A(-4, 3, -8)$ in $B(6, -2, -3)$. Točka C leži na daljici AB tako, da je $|AC| : |CB| = 4 : 1$. Zapišite komponente krajevnega vektorja točke C in koordinate točke C.

48. V prostoru sta dani točki $A(1, -4, 2)$ in $B(5, 7, -1)$.
a) Zapišite koordinati razpolovišča daljice AB.
b) Izračunajte komponente vektorja $\overrightarrow{AB}$.
c) Zapišite koordinati točke B', ki jo dobimo, če točko B zrcalimo čez točko A.

49. Točka $R(2, \frac{3}{2}, -1)$ je razpolovišče daljice AB. Zapišite koordinate točke A, če je $B(1, 2, -4)$.

50. Z računom pokažite, da sta vektorja $\vec{a} = (3, 0, -6)$ in $\vec{b} = (-2, 0, 4)$ vzporedna.

51. Pokažite, da so vektorji $\vec{a} = (4, -2, 5)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$ in $\vec{c} = (8, -2, 7)$ komplanarni.

52. Vektor $\vec{d} = (4, 1, 1)$ zapišite kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$ in $\vec{c} = (-1, 1, -1)$.

53. Natančno izračunajte razdaljo med točkama $A(-6, 4)$ in $B(-3, -2)$.

54. Kolikšna je dolžina daljice CD, če je $C(2, -3, 1)$ in $D(-1, 0, 4)$?

55. Izračunajte dolžino vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ in kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če je:
a) $\vec{a} = (6, -3, 2)$, $\vec{b} = (4, -1, 8)$,
b) $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -1, -1)$,
c) $\vec{a} = (2, -1, -2)$, $\vec{b} = (-3, 0, 4)$.

56. Zapišite komponente baznega vektorja standardne baze, ki leži na aplikatni osi, in izračunajte kot, ki ga oklepa vektor $\vec{a} = (3, -2, 4)$ z aplikatno osjo.

57. V standardni bazi $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$ sta dana vektorja $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$ in $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$. Zapišite vektor $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$ v bazi $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$ in izračunajte kot φ, ki ga oklepata vektorja $\vec{x}$ in $\vec{k}$. Velikost kota zaokrožite na stotinko stopinje.

58. Dana sta vektorja $\vec{a} = (-1, 2, -3)$ in $\vec{b} = (3, -2, -1)$ v standardni bazi $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$. Zapišite komponente vektorjev $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{v} = 3\vec{a} - \vec{b}$. Natančno izračunajte dolžino vektorja $\vec{v}$ in skalarni produkt $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

59. V prostoru sta dani točki $A(2, 4, 1)$ in $B(4, -2, 3)$.
a) Zapišite koordinati razpolovišča R daljice AB.
b) Kolikšen kot oklepata krajevni vektor točke R in vektor $\overrightarrow{AB}$?

60. Dana sta vektorja $\vec{a} = (-3, 1, -10)$ in $\vec{b} = (6, -2, b_3)$.
a) Za katero število b_3 bosta vektorja pravokotna?
b) Za katero število b_3 bosta vektorja vzporedna?

61. Izračunajte, za kateri vrednosti realnega števila x sta vektorja $\vec{a} = (x, -3, 2 + x)$ in $\vec{b} = (2, x, x - 1)$ pravokotna.

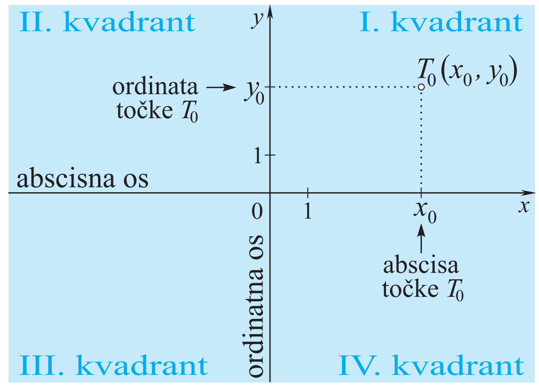
62. V standardni bazi so dani vektorji $\vec{a} = (-2, 1, -1)$, $\vec{b} = (3, y, -4)$ in $\vec{c} = (-1, 3, z)$. Poiščite y in z tako, da bo $\vec{a} \perp \vec{b}$ in $\vec{b} \perp \vec{c}$.

63. Izračunajte realno število m, tako da bo kot med vektorjema $\vec{j} = (0, 1, 0)$ in $\vec{a} = (\sqrt{5}, m + 1, m)$ enak $45°$.

64. Izračunajte realno število k tako, da bo dolžina vektorja $\vec{a} = (-4, k - 2, -8)$ enaka 9.

65. Točke $A(8, -\frac{2}{3}, -1)$, $B(9, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$, $C(7, 3, \frac{11}{4})$ in $D(x, y, z,)$ so oglišča paralelograma.
a) Poiščite koordinate točke D.
b) Izračunajte kot med vektorjema $\overrightarrow{BA}$ in $\overrightarrow{BC}$. Rezultat zaokrožite na desetinko stopinje.

11. PRAVOKOTNI KOORDINATNI SISTEM V RAVNINI



Pravokotni koordinatni sistem v ravnini določata dve pravokotno postavljeni realni osi s skupnim izhodiščem O. Vodoravno premico imenujemo **abscisna os**, navpično premico pa **ordinatna os**. Ti dve premici razdelita ravnino na 4 dele – **kvadrante**.

Vsaki točki T_0 ravnine lahko na en sam način priredimo **urejen par realnih števil (x_0, y_0)** in to zapišemo $T(x_0, y_0)$. Števili x_0 in y_0 sta **koordinati točke T_0**: **x_0** je **abscisa** točke T_0, **y_0** je **ordinata** točke T_0.

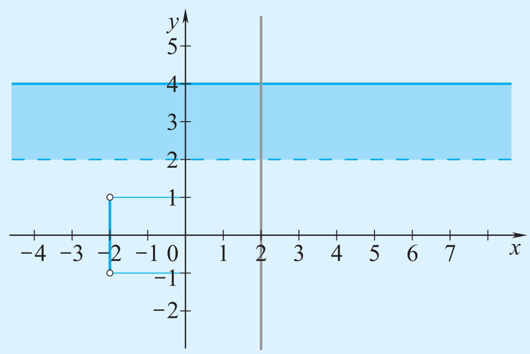
Velja tudi obratno: vsakemu urejenemu paru realnih števil v ravnini pripada natanko ena točka, katere koordinati sta dani števili.

V isti koordinatni sistem narišimo množice točk (x, y), za katere je:

a) $x = 2$

b) $x = -2$ in $|y| \leq 1$

c) $2 < y \leq 4$

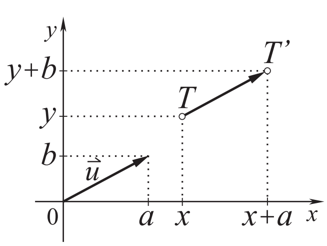


Predpis $x = 2$ določa navpično premico.
Predpis $x = -2$ in $|y| \leq 1$ določa navpično daljico.
Predpis $2 < y \leq 4$ določa vodoraven pas, pri katerem rob $y = 4$ sodi k pasu, rob $y = 2$ pa ne.

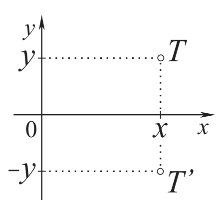
Transformacije ravnine

Preslikave ravnine nase, ki vsaki točki T priredijo točko T', so:

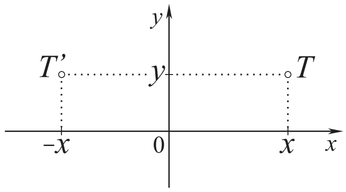
a) Vzporedni premik za vektor $\vec{u} = (a, b)$ v standardni bazi: $T(x, y) \rightarrow T'(x + a, y + b)$.



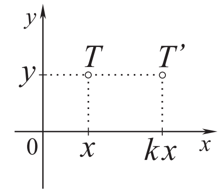
b) Zrcaljenje čez abscisno os: $T(x, y) \rightarrow T'(x, -y)$.



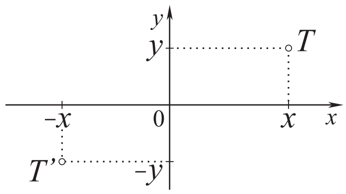
c) Zrcaljenje čez ordinatno os:
$T(x, y) \rightarrow T'(-x, y)$.



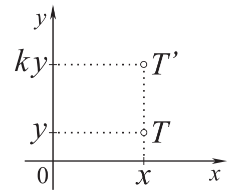
d) Razteg s središčem v O za faktor k v smeri abscisne osi: $T(x, y) \rightarrow T'(kx, y)$.



č) Zrcaljenje čez koordinatno izhodišče:
$T(x, y) \rightarrow T'(-x, -y)$.

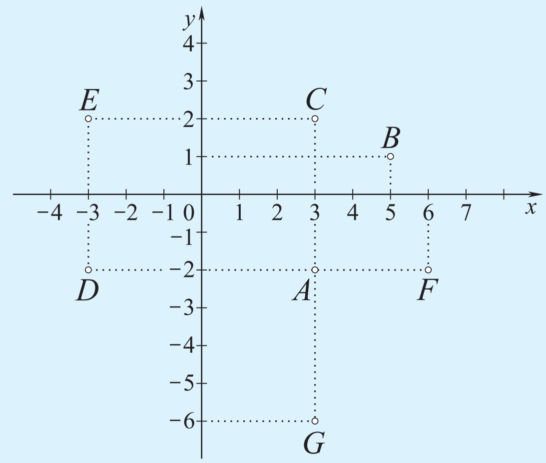


e) Razteg s središčem v O za faktor k v smeri ordinatne osi: $T(x, y) \rightarrow T'(x, ky)$.



V koordinatni sistem narišimo točko $A(3, -2)$.
V isti koordinatni sistem narišimo:

a) točko B, ki jo dobimo z vzporednim premikom točke A za vektor $\vec{u} = (2, 3)$,
b) točko C, ki jo dobimo z zrcaljenjem točke A čez abscisno os,
c) točko D, ki jo dobimo z zrcaljenjem točke A čez ordinatno os,
č) točko E, ki jo dobimo z zrcaljenjem točke A čez koordinatno izhodišče,
d) točko F, ki jo dobimo z raztegom s središčem v $(0, 0)$ in faktorjem 2 točke A v smeri abscisne osi,
e) točko G, ki jo dobimo z raztegom s središčem v $(0, 0)$ in faktorjem 3 točke A v smeri ordinatne osi.



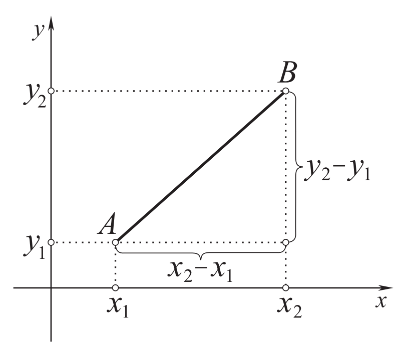
Razdalja med točkama

Razdalja med točkama $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$:

$d(A, B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Razpolovišče daljice s krajiščema $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ je točka

$R_{AB}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.



1. Dani sta točki $A(-3, 2)$ in $B(5, -4)$. Izračunajmo:

a) razdaljo med točkama A in B,
b) oddaljenost točke B od koordinatnega izhodišča,
c) koordinati razpolovišča daljice AB.

a) Izračunamo razdaljo med točkama A in B:
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3-5)^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

b) Nato izračunamo oddaljenost točke $B(5, -4)$ od koordinatnega izhodišča $O(0, 0)$:
$$d(B, O) = \sqrt{(5-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}\,.$$

c) Koordinati razpolovišča daljice AB: $R_{AB}(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+4}{2}) = R_{AB}(1, -1)$.

2. Kateri točki na abscisni osi sta za 13 enot oddaljeni od točke $T(2, 5)$?

Točki ležita na abscisni osi, zato zapišemo $M(m, 0)$ in nastavimo enačbo
$d(m, T) = \sqrt{(2-m)^2 + (5-0)^2} = 13$ ter jo s kvadriranjem in razstavljanjem rešimo $(2-m)^2 + 5^2 = 13^2$.

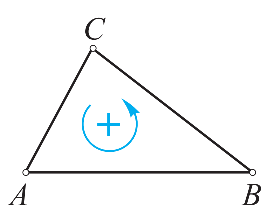
$4 - 4m + m^2 + 25 - 169 = 0$
$m^2 - 4m - 140 = 0$
$(m - 14)(m + 10) = 0$
$m_1 = 14,\ m_2 = -10$
Iskani točki sta $M_1(14, 0)$ in $M_2(-10, 0)$.

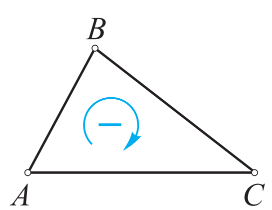
Ploščina trikotnika

Izraz, zapisan v obliki $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, pri čemer so a, b, c, in d poljubna realna števila, imenujemo **determinanta**.

Ploščino trikotnika z oglišči $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ in $C(x_3, y_3)$ izračunamo po obrazcu $S = \frac{1}{2}|D|$,
pri čemer je $D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$.

Trikotnik ABC je pozitivno orientiran, če si oglišča A, B in C sledijo v nasprotni smeri gibanja urnega kazalca, in **negativno orientiran**, če si oglišča A, B in C sledijo v smeri gibanja urnega kazalca.





Trikotnik ABC je pozitivno orientiran natanko takrat, ko je determinanta $\boldsymbol{D > 0}$, in **negativno orientiran** natanko takrat, ko je determinanta $\boldsymbol{D < 0}$. Če je determinanta $\boldsymbol{D = 0}$, potem točke A, B in C **ležijo** na **isti premici**.

Točke $A(4, -1)$, $B(-1, 1)$ in $C(3, 5)$ so oglišča trikotnika. Izračunajmo:
a) ploščino trikotnika in zapišimo njegovo orientacijo,
b) koordinati presečišča stranice BC z ordinatno osjo.

a) Izračunamo determinanto $D = \begin{bmatrix} -1-4 & 1-(-1) \\ 3-4 & 5-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = (-5)\cdot 6 - (-1)\cdot 2 = -30 + 2 = -28.$

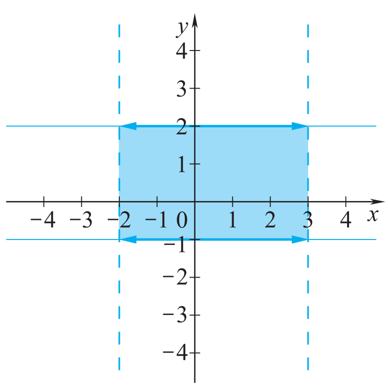
Ploščina trikotnika je $S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}\cdot|-28| = \frac{1}{2}\cdot 28 = 14$, orientacija trikotnika pa negativna.

b) Stranica BC seka ordinatno os v točki $N(0, n)$. Ker točke BCN ležijo na isti premici, je ploščina trikotnika BCN enaka 0 in tako tudi determinanta $D = 0$. Zato zapišemo enačbo $0 = \begin{bmatrix} 3-(-1) & 5-1 \\ 0-(-1) & n-1 \end{bmatrix}$

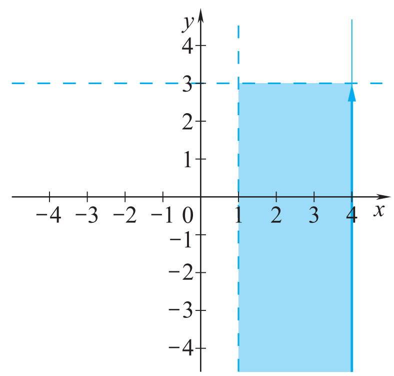
in jo preoblikujemo v $0 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & n-1 \end{bmatrix}$ oz. $0 = 4(n-1) - 1\cdot 4$
ter rešimo $n = 2$.
Presečišče stranice BC z ordinatno osjo je točka $N(0, 2)$.

1. V pravokotnem koordinatnem sistemu narišite množico vseh točk (x, y), za katere velja:
a) $x > -1, y > 1$
b) $x < 2, y \geq -2$
c) $-2 < x \leq 3$
č) $1 \leq x < 3$ in $y \geq -1$
d) $x \geq 1$ in $-1 \leq y < 2$
e) $-1 < x < 3, 1 \leq y \leq 4$
f) $1 < x < 4$ in $y = 2$
g) $x = -1, -2 < y < 3$
h) $x = 2, y > 1$
i) $|y| < 2$
j) $|x| < 3, y = -1$
k) $|x - 2| < 1, y > -2$

2. Na sliki sta v koordinatnem sistemu dani množici točk. Opišite ju s pravokotnimi koordinatami.
a)



b)



3. Točki $A(-2, 4)$ in $B(3, -2)$ sta krajišči daljice. Poiščite krajišča daljic, ki jih dobite, če daljico AB:
a) prezrcalite čez abscisno os,
b) prezrcalite čez ordinatno os,
c) prezrcalite čez koordinatno izhodišče.

4. Dana je točka $T(-1, 2)$.
a) Točko D dobimo iz točke T pri raztegu s središčem v točki $(0, 0)$ in faktorjem 3 v smeri abscisne osi, točko E pa dobimo iz točke T pri raztegu s središčem v točki $(0, 0)$ in faktorjem $\frac{5}{2}$ v smeri ordinatne osi. Zapišite koordinati točk D in E.
b) Točka P se je pri raztegu s središčem v točki $(0, 0)$ in faktorjem $\frac{5}{2}$ v smeri ordinatne osi preslikala v točko $P'(-5, 10)$. Zapišite koordinate točke P'.

5. Translacija za vektor $\vec{u}$ preslika točko $A(-1, 4)$ v točko $A_1(1, 1)$. Kam preslika dana translacija točko $B(1, -1)$?

6. Točke $A(1, 1)$, $B(5, 1)$ in $C(5, -3)$ so oglišča kvadrata. Zapišite četrto oglišče D kvadrata in izračunajte njegovo ploščino.

7. Dani sta točki $A(4, -3)$, $B(-6, 8)$.
a) Izračunajte razdaljo med točkama A in B. Rezultat zaokrožite na 3 mesta.
b) Izračunajte obseg trikotnika ABO, pri čemer je točka O izhodišče koordinatnega sistema.

8. Natančno izračunajte razdaljo med točkama $T(2, -2)$ in $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

9. Ugotovite, ali je trikotnik z oglišči $A(5, 3)$, $B(4, 6)$ in $C(-4, 0)$ pravokoten.

10. Točke $A(-4, -2)$, $B(2, 2)$ in $C(-5, 6)$ so oglišča trikotnika. Ali je trikotnik ABC enakokrak pravokotni trikotnik?

11. V paralelogramu $ABCD$ so znane koordinate naslednjih oglišč: $A(-2, 6)$, $B(-3, 4)$ in $C(4, -2)$.
a) Poiščite koordinati točke D.
b) Izračunajte dolžini diagonal paralelograma.

12. Točki $A(4, -3)$ in $B(x, 5)$ sta krajišči daljice z dolžino 10 enot. Poiščite absciso točke B. Zapišite obe rešitvi.

13. Izračunajte, kateri točki na ordinatni osi sta za 17 enot oddaljeni od točke $T(8, -11)$.

14. Dani sta točki $A(4, -2)$ in $B(-2, -6)$. Natančno izračunajte razdaljo med točkama A in B in zapišite koordinati razpolovišča R daljice AB.

15. Točka $R(\frac{9}{2}, -3)$ je razpolovišče daljice AB. Izračunajte koordinati točke B, če je $A(6, -1)$.

16. Točke $A(-5, -2)$, B, C, D in $E(3, 6)$ v tem vrstnem redu razdelijo daljico AE na štiri enake dele. Zapišite koordinate točk B, C in D.

17. Točke A, B, C, $D(10, 0)$ in $E(12, 1)$ razdelijo daljico AE na štiri enake dele. Zapišite koordinate točk A, B in C.

18. Izračunajte ploščino in zapišite orientacijo trikotnika ABC, podanega z oglišči:
a) $A(-2, -3)$, $B(1, -4)$, $C(-5, 6)$
b) $A(-3, 5)$, $B(1, 7)$, $C(0, 3)$

19. Točke $A(-2, -6)$, $B(3, 7)$ in $C(-1, 5)$ so oglišča trikotnika. Trikotnik prezrcalite čez koordinatno izhodišče. Zapišite koordinate oglišč dobljenega trikotnika in izračunajte njegovo ploščino.

20. Točke $A(-1, -2)$, $B(1, 4)$, $C(5, -1)$ in $D(6, 2)$ so oglišča štirikotnika. V koordinatnem sistemu narišite štirikotnik $ABCD$ in izračunajte njegovo ploščino.

21. Točke $A(2, 5)$, $B(6, -2)$, $C(-4, -3)$ in $D(1, 0)$ so oglišča štirikotnika. Izračunajte njegovo ploščino. Za koliko odstotkov je ploščina trikotnika ABC večja od ploščine štirikotnika $ABCD$?

22. Točke $A(-4, -2)$, $B(-1, 5)$ in $C(-3, 1)$ so oglišča trikotnika.
a) Izračunajte ploščino trikotnika.
b) Natančno izračunajte razdaljo med ogliščem A in razpoloviščem daljice BC.

23. Točke $A(1, -2)$, $B(-2, 3)$ in $C(-1, -4)$ so oglišča trikotnika.
a) Izračunajte ploščino trikotnika.
b) Natančno izračunajte dolžino težiščnice na stranico AC.

24. Ali točke $A(-1, 1)$, $B(1, 5)$ in $C(7, 17)$ ležijo na isti premici? Odgovor utemeljite.

25. Pokažite, da točke $A(3, 2)$, $B(-4, -5)$ in $C(5, 7)$ niso kolinearne.

26. Za kateri x točke $A(x, 5)$, $B(-1, -7)$ in $C(1, 1)$ ležijo na isti premici?

27. Katera točka C na simetrali lihih kvadrantov leži na premici skozi točki $A(1, -2)$ in $B(3, 6)$?

28. Izračunajte, v katerih točkah premica skozi točki $A(3, 1)$ in $B(-6, 4)$ seka koordinatni osi.

29. Točke $A(4, -2)$, $B(-2, 6)$ in $C(1, 2)$ so oglišča trikotnika.
a) Ali je trikotnik enakokrak?
b) V kateri točki stranica AC seka ordinatno os?

30. Točke $A(-6, 2)$, $B(6, -4)$, $C(12, 2)$ in $D(0, 8)$ so oglišča paralelograma.

a) Natančno izračunajte dolžino diagonale BD.

b) Izračunajte koordinati presečišča R diagonal AC in BD.

c) V kateri točki seka stranica AB koordinatni osi?

31. Ploščina pozitivno orientiranega trikotnika ABC z oglišči $A(-3, y)$, $B(-1, 0)$ in $C(5, 2)$ je 14 enot. Izračunajte ordinato točke A.

32. Za trikotnik ABC vemo, da je ploščina $19{\cdot}5$ enot, orientacija negativna, dve oglišči sta $A(-2, -3)$ ter $B(-1, 4)$, oglišče C pa leži na abscisni osi. Izračunajte koordinati točke C.

33. Dve oglišči trikotnika ABC sta $A(-2, 1)$ in $C(4, 3)$, tretje oglišče B pa leži na simetrali sodih kvadrantov. Izračunajte koordinate točke B, če je ploščina trikotnika ABC enaka 13.

34. Pokažite, da so točke $A(-2, -1)$, $B(1, 0)$, $C(2, 3)$ in $D(-1, 2)$ oglišča romba, in izračunajte njegovo ploščino.

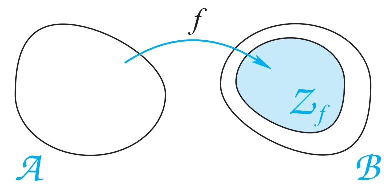
12. FUNKCIJE

Funkcija *f* (preslikava, transformacija) iz množice $\mathcal{A}$ v množico $\mathcal{B}$ ($f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$) je predpis, ki vsakemu elementu *x* množice $\mathcal{A}$ priredi natanko en element *y* množice $\mathcal{B}$: $f\colon x \mapsto y$ oz. $f(x) = y$.

Pri dani funkciji f je **element *y* slika elementa *x*.**

Definicijsko območje funkcije f je množica $\mathcal{A}$ in ga **označimo z D_f.**

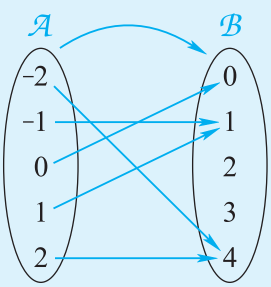
Zaloga vrednosti funkcije f je množica vseh slik elementov množice $\mathcal{A}$ in jo označimo z Z_f. Zaloga vrednosti funkcije f je podmnožica množice $\mathcal{B}$: $Z_f = \{f(x);\ x \in D_f\} \subseteq \mathcal{B}$.



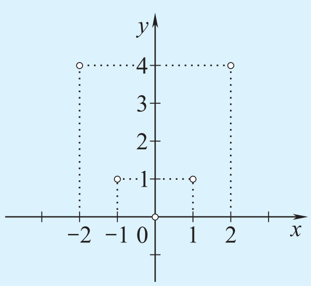
Graf funkcije f je množica vseh urejenih parov $(x, f(x))$, pri čemer je $x \in D_f$:

$G_f = \{(x, f(x);\ x \in D_f\} = \{(x, y);\ x \in D_f \text{ in } y = f(x)\}$.

S puščičnim diagramom je predstavljena funkcija $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
Zapišimo predpis za funkcijo f, njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti in narišimo njen graf.



Funkcija f ima predpis $f(x) = x^2$,
definicijsko območje je množica $\mathcal{A}$: $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
zaloga vrednosti je množica vseh slik: $Z_f = \{0, 1, 4\}$,
graf pa množica urejenih parov $(x, f(x))$, pri čemer je $x \in D_f$: $G_f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$.



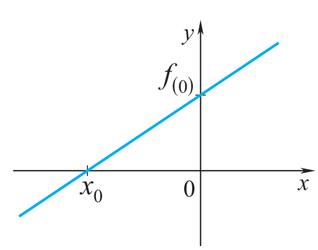
Realna funkcija realne spremenljivke je funkcija, ki slika iz podmnožice realnih števil v množico realnih števil:
$f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R},\ \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$
$f\colon x \mapsto f(x)$

Graf realne funkcije *f* je množica točk $T(x, y)$ v ravnini, za katere velja $x \in \mathcal{A}$ in $y = f(x)$:

$G_f = \{(x, y), (x \in \mathcal{A}) \wedge (y = f(x))\} = \{(x, f(x));\ x \in \mathcal{A}\}$.

Enačba grafa funkcije *f* (krivulje) je $y = f(x)$.

Število x_0 je **ničla funkcije** f natanko takrat, ko je $f(x_0) = 0$.
V ničli funkcije graf funkcije seka abscisno os ali pa se abscisne osi dotika.



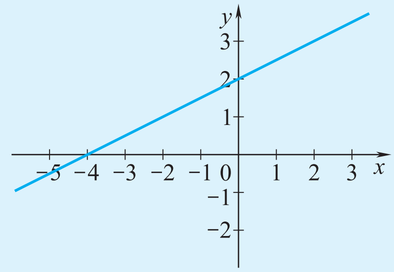
Graf funkcije *f* seka ordinatno os v točki $(0, f(0))$. Število $f(0)$ imenujemo **začetna vrednost funkcije.**

Graf linearne funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ je premica. Izračunajmo ničlo funkcije f, zapišimo njeno začetno vrednost in narišimo njen graf.

Iz enačbe $\frac{1}{2}x + 2 = 0$ izračunamo ničlo $x = -4$.

Začetna vrednost je $f(0) = 2$.

Narišemo graf funkcije f. Pri tem upoštevamo, da graf seka abscisno os v točki $M(-4, 0)$ in ordinatno os v točki $N(0, 2)$.



Lastnosti realnih funkcij

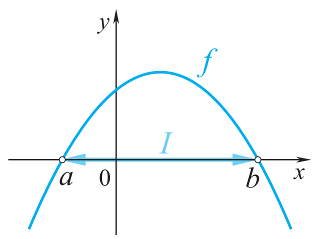
Naj bo f **realna funkcija realne spremenljivke**: $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$; $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$.

Funkcija f je na intervalu I **pozitivna**, če je $f(x) > 0$ za vsako realno število x iz intervala I.

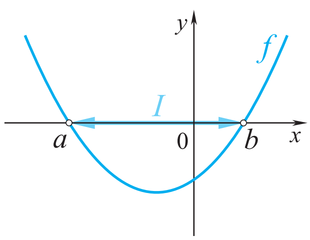
Na tem intervalu leži **graf funkcije nad abscisno osjo**.

Funkcija f je na intervalu I **negativna**, če je $f(x) < 0$ za vsako realno število x iz intervala I.

Na tem intervalu leži graf funkcije **pod abscisno osjo**.



$f(x) > 0$ na (a, b)

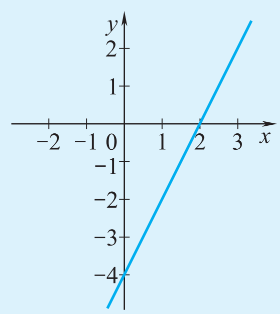


$f(x) < 0$ na (a, b)

Narišimo graf linearne funkcije $f(x) = 2x - 4$ in zapišimo interval, na katerem je funkcija pozitivna, in interval, na katerem je funkcija negativna.

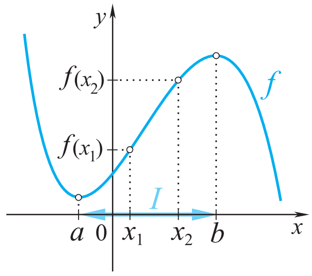
Iz enačbe $2x - 4 = 0$ izračunamo ničlo $x = 2$, nato zapišemo začetno vrednost $f(0) = -4$ in narišemo graf.

Iz grafa razberemo, da je funkcija f pozitivna na intervalu $(2, \infty)$, negativna pa na intervalu $(-\infty, 2)$.

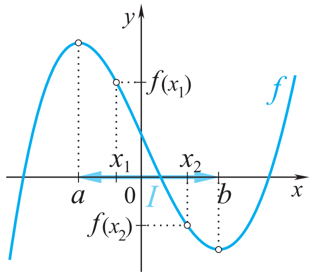


Funkcija f je na intervalu I **naraščajoča**, če za poljubni realni števili $x_1, x_2 \in I$ velja: če je $x_1 < x_2$, potem je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcija f je na intervalu I **padajoča**, če za poljubni realni števili $x_1, x_2 \in I$ velja: če je $x_1 < x_2$, potem je $f(x_1) > f(x_2)$.



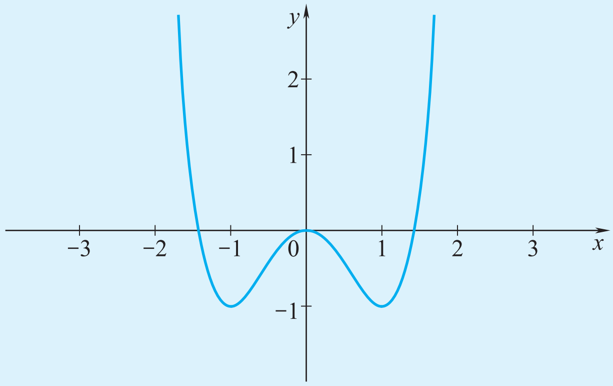
f naraščajoča na (a, b)



f padajoča na (a, b)

Na sliki je graf polinoma $p(x) = x^4 - 2x^2$. Zapišimo intervale, na katerih je polinom naraščajoča funkcija, in intervale, na katerih je padajoča funkcija.

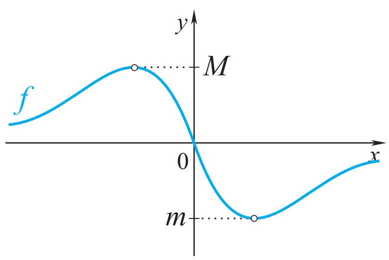
Polinom narašča na intervalih $(-1, 0)$ in $(1, \infty)$, pada pa na intervalih $(-\infty, -1)$ in $(0, 1)$.



Funkcija f je **navzgor omejena**, če obstaja tako realno število M, da je $f(x) \leq M$ za vsak x iz definicijskega območja.

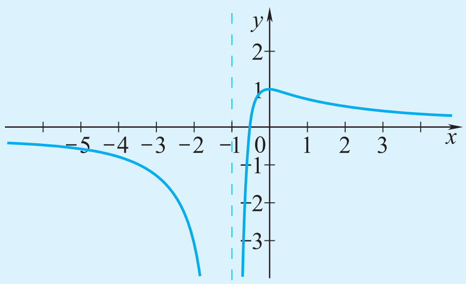
Funkcija f je **navzdol omejena**, če obstaja tako realno število m, da je $f(x) \geq m$ za vsak x iz definicijskega območja.

Funkcija f je **omejena**, če je navzgor in navzdol omejena.

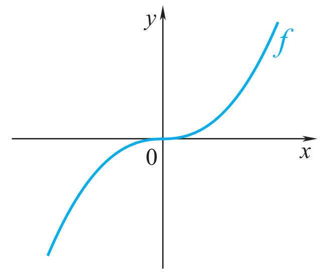


Na sliki je dan graf racionalne funkcije $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$. Ugotovimo, ali je funkcija omejena.

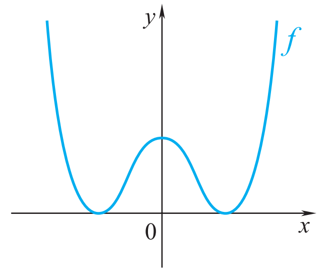
Funkcija je navzgor omejena z 1, navzdol pa ni omejena.



Funkcija f je **liha**, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak x iz definicijskega območja.
Graf lihe funkcije je simetričen glede na koordinatno izhodišče.



Funkcija f je **soda**, če je $f(-x) = f(x)$ za vsak x iz definicijskega območja.
Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.

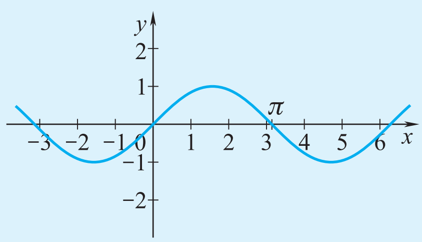


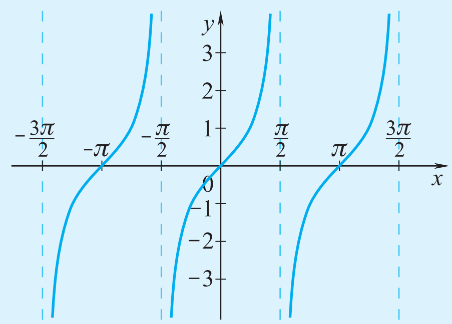
Za funkcije $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = x^2 - 3$ in $h(x) = x^3$ ugotovimo, katere so lihe in katere sode.

Ker je $f(-x) = 3(-x) + 4 = -3x + 4$, funkcija f ni ne liha ne soda.
Ker je $g(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = g(x)$, je funkcija g soda.
Ker je $h(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h(x)$, je funkcija h liha.

Če je ω tako od 0 različno realno število, da je $f(x + \omega) = f(x)$, potem rečemo, da je funkcija f **periodična s periodo** ω. Najmanjše tako realno število ω imenujemo **osnovna perioda** funkcije f.

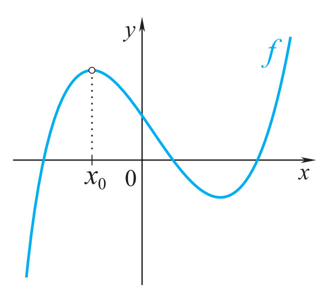
Kotne funkcije so periodične: sinus (na sliki levo) in kosinus z osnovno periodo 2π, tangens (na sliki desno) in kotangens z osnovno periodo π.



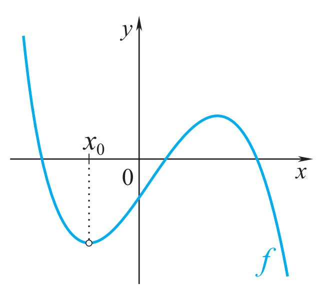


Ekstremi realnih funkcij: Naj bo $f: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$; $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$.

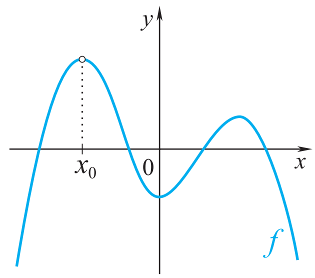
Funkcija f ima v točki $x_0 \in \mathcal{A}$ **lokalni maksimum**, če obstaja taka okolica $O(x_0)$ točke x_0, da je $f(x) \leq f(x_0)$ za vsak $x \in O(x_0)$.



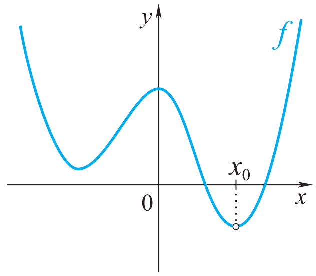
Funkcija f ima v točki $x_0 \in \mathcal{A}$ **lokalni minimum**, če obstaja taka okolica $O(x_0)$ točke x_0, da je $f(x) \geq f(x_0)$ za vsak $x \in O(x_0)$.



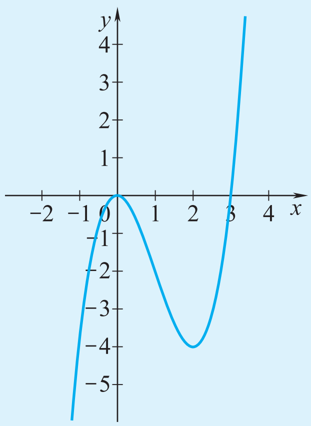
Funkcija f ima v točki $x_0 \in \mathcal{A}$ **globalni maksimum**, če je $f(x) \leq f(x_0)$ za vsak x iz definicijskega območja.

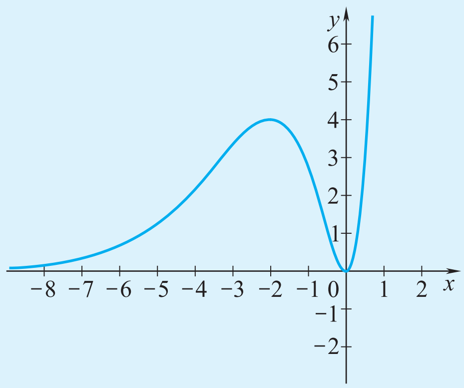


Funkcija f ima v točki $x_0 \in \mathcal{A}$ **globalni minimum**, če je $f(x) \geq f(x_0)$ za vsak x iz definicijskega območja.



Za dani funkciji $f(x) = x^2(x - 3)$ in $g(x) = (ex)^2 e^x$, za kateri sta na slikah dana grafa, zapišimo lokalne in globalne ekstreme.





a) Funkcija f ima v točki $(0, 0)$ lokalni maksimum in v točki $(2, -4)$ lokalni minimum.

b) Funkcija g ima v točki $(-2, 4)$ lokalni maksimum, v točki $(0, 0)$ pa globalni minimum.

Računske operacije s funkcijami

Za realni funkciji $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ter realno število k lahko definiramo:

a) produkt funkcije f s številom k: $(k \cdot f)\colon x \mapsto k \cdot f(x)$

b) vsoto funkcij f in g: $(f + g)\colon x \mapsto f(x) + g(x)$

c) razliko funkcij f in g: $(f - g)\colon x \mapsto f(x) - g(x)$

d) produkt funkcij f in g: $(f \cdot g)\colon x \mapsto f(x) \cdot g(x)$

e) kvocient funkcij f in g: $\left(\frac{f}{g}\right)\colon x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

Zapišimo predpise za vsoto, razliko in produkt funkcij $f(x) = x^2 + x + 1$ in $g(x) = 2x - 3$ ter izračunajmo njihove vrednosti za $x = 3$.

Predpis za vsoto funkcij:
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x + 1 + 2x - 3 = x^2 + 3x - 2$ in $(f + g)(3) = 3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = 16$.

Predpis za razliko funkcij:
$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + x + 1 - (2x - 3) = x^2 - x + 4$ in $(f - g)(3) = 3^2 - 3 + 4 = 10$.

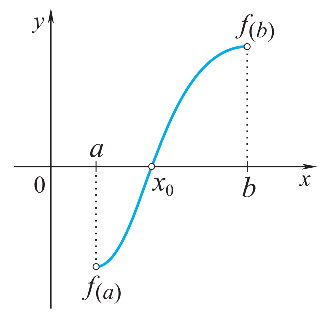
Predpis za produkt funkcij:
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + x + 1) \cdot (2x - 3) = 2x^3 - x^2 - x - 3$ in $(f \cdot g)(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^3 - 3 - 3 = 39$.

Če je funkcija **f zvezna v točki a**, potem je njen graf v tej točki **nepretrgana krivulja**.

Funkcija f je **zvezna na intervalu** $[a, b]$, če je zvezna v vsaki točki intervala $[a, b]$.

Če je funkcija f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in sta $f(a)$, $f(b)$ različno predznačeni vrednosti, potem obstaja na intervalu $[a, b]$ vsaj ena točka x_0 (ničla funkcije f), tako da je $f(x_0) = 0$.

Vsota, razlika, produkt in kvocient (povsod, kjer je imenovalec različen od 0) zveznih funkcij so zvezne funkcije.



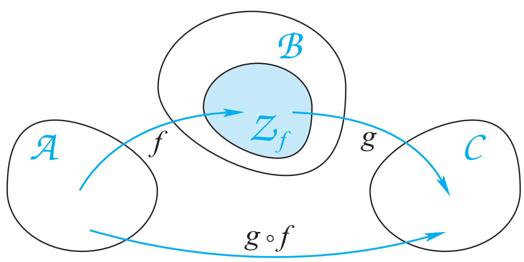
Funkcije, ki so zvezne na celotnem definicijskem območju, so: linearna funkcija, kvadratna funkcija, eksponentna funkcija, logaritemska funkcija, polinomi, kotni funkciji sinus in kosinus ...

Imejmo taki funkciji $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in $g\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, da je $Z_f \subset D_g \subset \mathcal{B}$.

Sestavljena funkcija (**kompozitum**) $g \circ f$ je funkcija, podana s predpisom

$g \circ f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$; $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$



Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija.

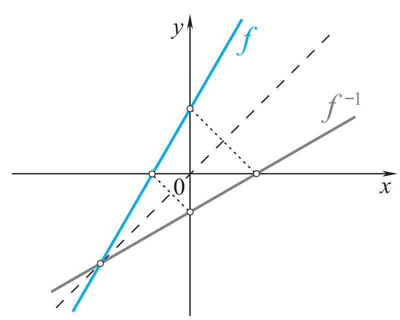
Funkcija $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je **injektivna**, če je vsak element iz zaloge vrednosti funkcije f slika natanko enega elementa iz množice $\mathcal{A}$ (različni elementi se preslikajo v različne elemente).

Funkcija $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je **surjektivna**, če je vsak element iz množice $\mathcal{B}$ slika vsaj enega elementa množice $\mathcal{A}$ (zaloga vrednosti funkcije f je enaka množici $\mathcal{B}$: $Z_f = \mathcal{B}$).

Funkcija f je **bijektivna**, če je **injektivna** in **surjektivna**.

Če je funkcija $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **bijektivna**, potem obstaja **inverzna funkcija** $f^{-1}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, tako da je $f(x) = y$ natanko takrat, ko je $f^{-1}(y) = x$.

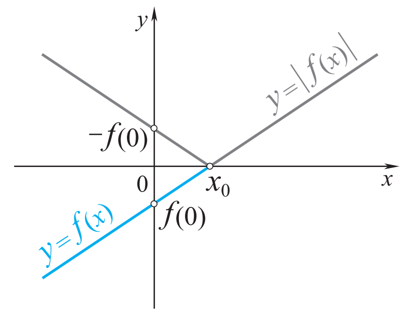
Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da graf funkcije f prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov.



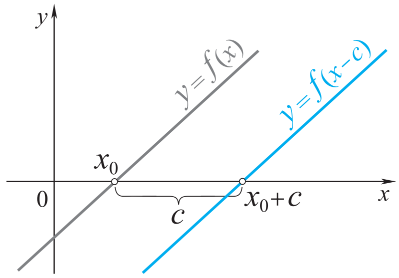
Transformacije grafov funkcij na ravnini

Če je znan graf funkcije *f*, potem njen graf lahko transformiramo (premaknemo, raztegnemo, zrcalimo ...):

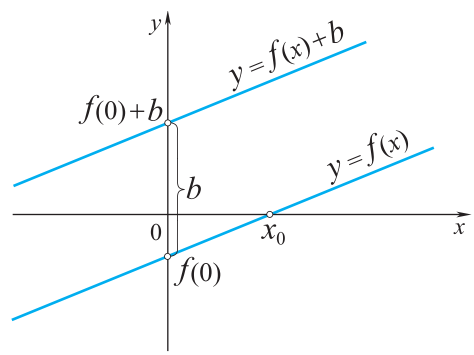
a) $x \mapsto |f(x)|$ narišemo tako, da del grafa funkcije f, ki je nad abscisno osjo ali na abscisni osi, ohranimo, tisti del grafa funkcije f, ki je pod abscisno osjo, pa prezrcalimo čez abscisno os.



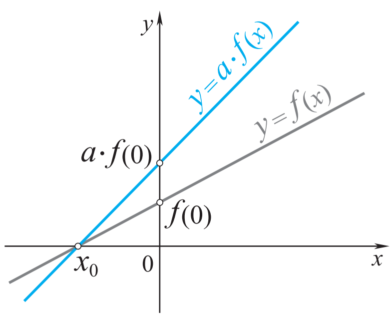
b) $x \mapsto f(x-c)$ narišemo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo za c v smeri abscisne osi. Če je $c > 0$, graf premaknemo v desno, če je $c < 0$, pa v levo.



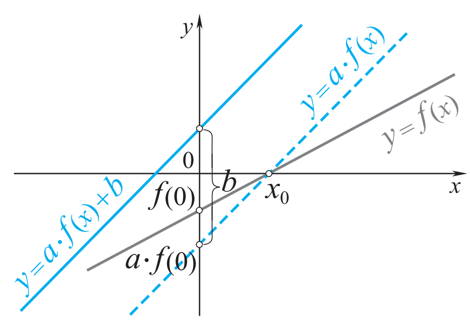
c) $x \mapsto f(x) + b$ narišemo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo za b v smeri ordinatne osi. Če je $b > 0$, graf premaknemo navzgor, če je $b < 0$, pa navzdol.



č) $x \mapsto af(x)$ narišemo tako, da graf funkcije f raztegnemo v smeri ordinatne osi za faktor a.

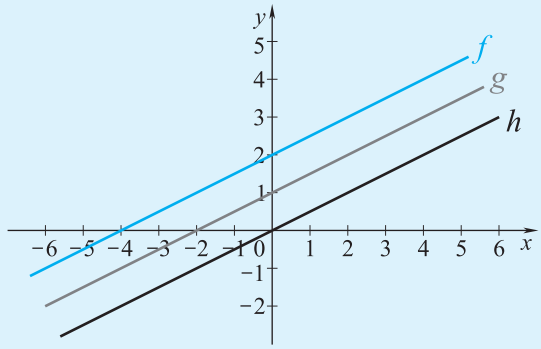


d) $x \to af(x) + b$ narišemo tako, da graf funkcije $x \mapsto af(x)$ vzporedno premaknemo za b v smeri ordinatne osi.

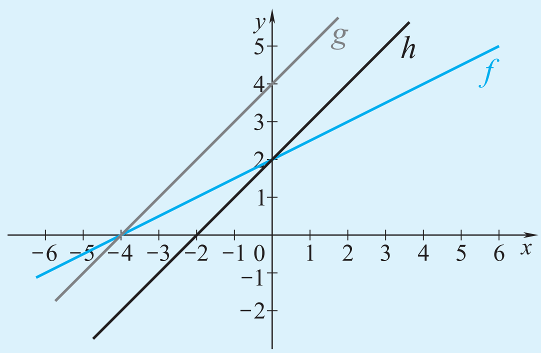


1. Dana je linearna funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, katere graf je premica.

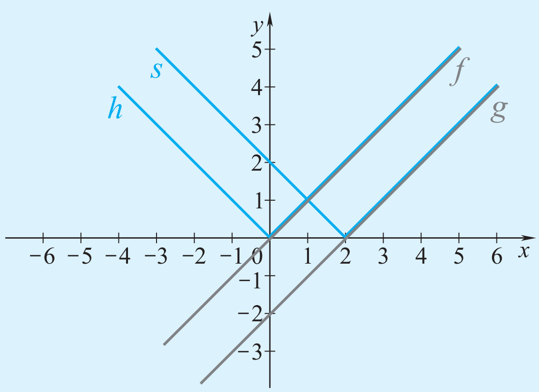
a) V isti koordinatni sistem narišimo grafe funkcij f, $g\colon x \mapsto f(x-2)$ in $h\colon x \mapsto f(x) - 2$.



b) V novi koordinatni sistem narišimo grafe funkcij f, $g\colon x \mapsto 2f(x)$ in $h\colon x \mapsto 2f(x) - 2$.



2. Grafa linearnih funkcij $f(x) = x$ in $g(x) = x - 2$ sta premici. V isti koordinatni sistem narišimo grafe funkcij f, g, $h\colon x \mapsto |f(x)|$ in $s\colon x \mapsto |g(x)|$.



1. Izračunajte ničle in začetne vrednosti naslednjih funkcij.

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $g(x) = x^2 - x - 20$

c) $h(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$

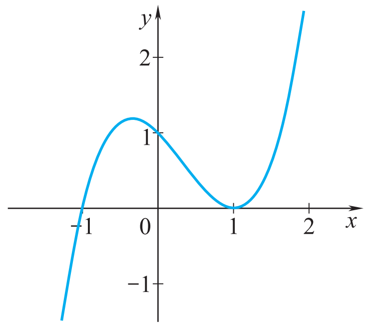
2. V katerih točkah sekajo grafi spodnjih funkcij koordinatni osi?

a) $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$

b) $g(x) = -x^2 + 2x + 15$

c) $h(x) = \frac{1 - x^2}{x + 2}$

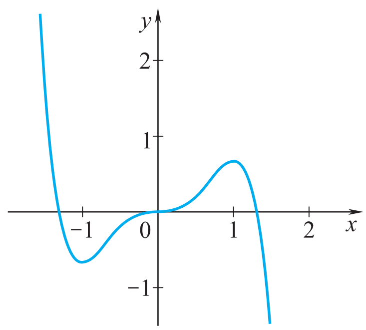
3. Na sliki je graf polinoma $p(x) = (x - 1)^2(x + 1)$.



Zapišite intervale, na katerih je polinom pozitiven, in intervale, na katerih je negativen.

4. Izračunajte ničlo linearne funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, narišite njen graf in zapišite interval, na katerem je funkcija pozitivna, in interval, na katerem je funkcija negativna.

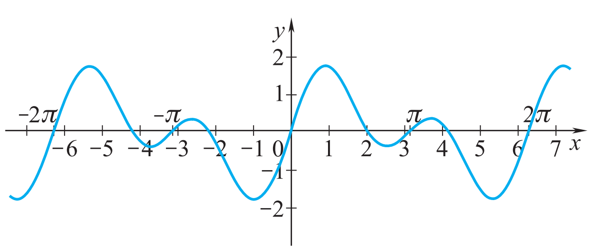
5. Na sliki je graf polinoma $p(x) = \frac{5}{3}x^3 - x^5$.



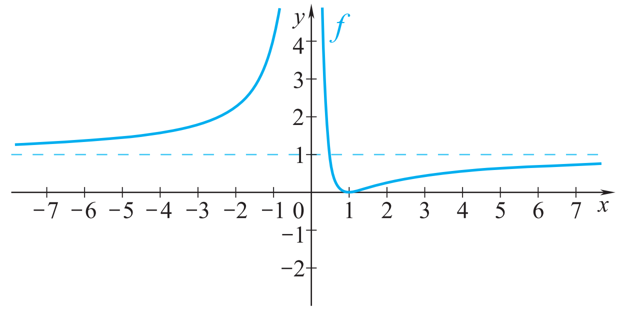
Zapišite intervale, na katerih je polinom naraščajoča funkcija, in intervale, na katerih je padajoča funkcija.

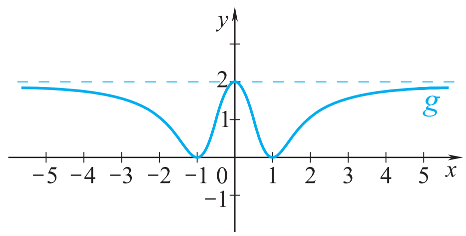
6. Za funkcije $f(x) = -2x - 1$, $g(x) = -x^2 + 1$ in $h(x) = x^3 - 3x$ ugotovite, katere so lihe in katere so sode.

7. Na sliki je graf funkcije $f(x) = \sin(2x) + \sin x$. Zapišite osnovno periodo funkcije f.



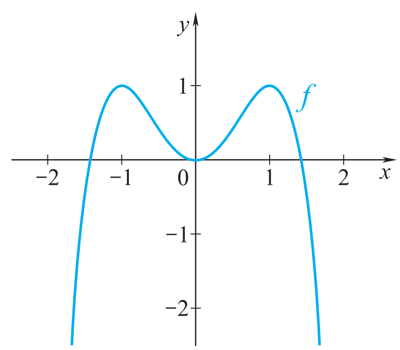
8. Na sliki sta dana grafa racionalne funkcije $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ in $g(x) = \frac{2((x-1)(x+1))^2}{x^4+1}$. Ugotovite, ali je katera od funkcij omejena, in zapišite meji.

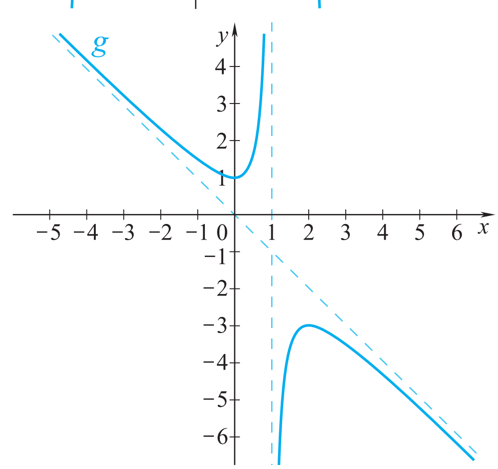




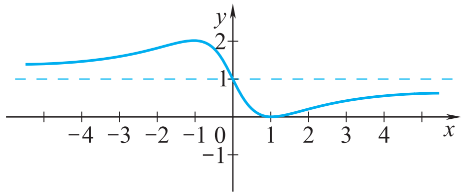
9. Zapišite predpise za vsoto, razliko in produkt funkcij $f(x) = 3x + 1$ in $g(x) = x^3 + x - 2$ ter izračunajte njihove vrednosti za $x = -2$.

10. Na slikah sta dana grafa funkcij $f(x) = x^2(2 - x^2)$ in $g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{1 - x}$. Zapišite lokalne in globalne ekstreme.





11. Na sliki je dan graf racionalne funkcije $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$. Zapišimo lastnosti funkcije f.



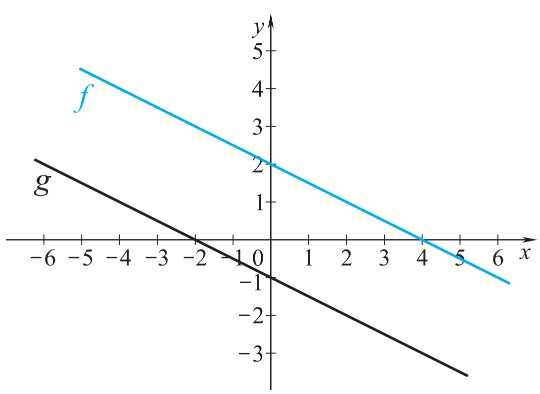
12. Dana je linearna funkcija $f(x) = 2x - 2$, katere graf je premica. V isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij f, $g: x \mapsto f(x+1)$ in $h: x \mapsto f(x) + 1$. Za funkciji g in h zapišite predpise.

13. Dana je linearna funkcija $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$. V isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij f, $g: x \mapsto -f(x)$, $h: x \mapsto -f(x) + 2$.

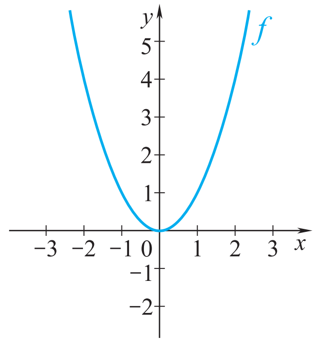
14. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = 2x - 3$ in $g: x \mapsto |f(x)|$.

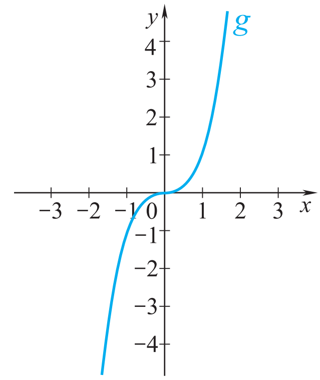
15. Izračunajte ničlo in začetno vrednost funkcije $f(x) = -2x - 2$ ter v isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij f, $g(x) = f(x) + 4$ in $h: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot f(x)$.

16. Na sliki sta dana grafa funkcij $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ in g. Zapišite predpis za funkcijo g.

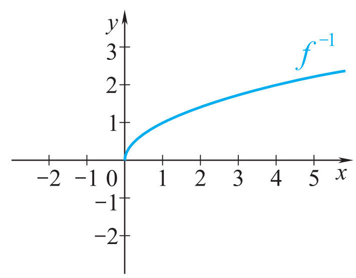


17. Na sliki sta narisana grafa funkcij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ in g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = x^3$. Narišite še grafa funkcij $h: x \mapsto -f(x) + 4$ in $s: x \mapsto g(x-1)$ ter zapišite njuna predpisa.

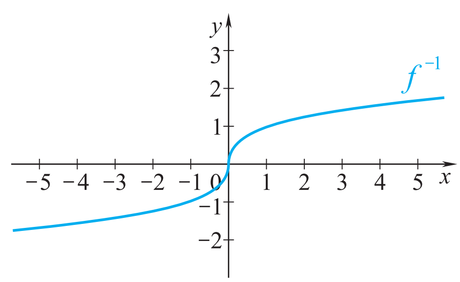




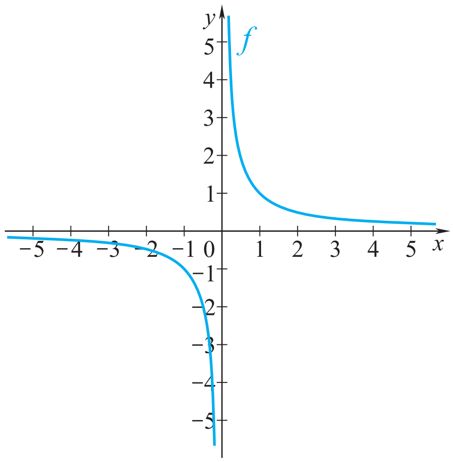
18. K funkciji $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$; $f(x) = x^2$ je inverzna funkcija $f^{-1}: [0, \infty) \to [0, \infty)$; $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Na sliki je narisan graf funkcije f^{-1}. Narišite še grafa funkcij $g: x \mapsto -f(x)$ in $h: x \mapsto g(x+4)$ ter zapišite njuna predpisa.

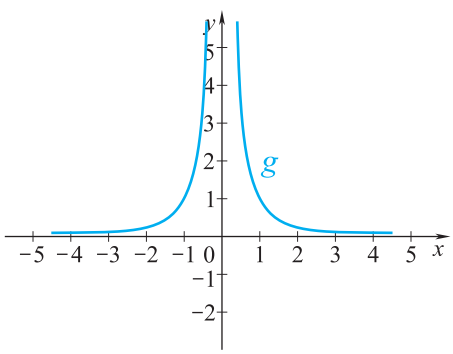


19. K funkciji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$ je inverzna funkcija $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Na sliki je narisan graf funkcije f^{-1}. Narišite še grafa funkcij $g: x \mapsto f(x) + 1$ in $h: x \mapsto g(x-1)$ ter zapišite njuna predpisa.

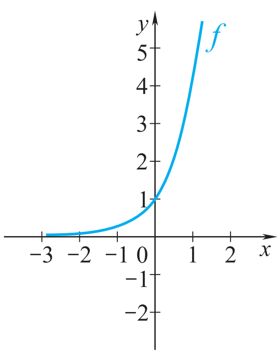


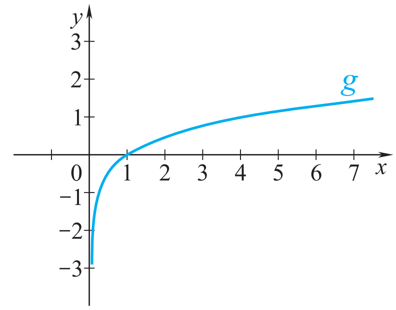
20. Na sliki sta narisana grafa funkcij $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}; f(x) = x^{-1}$ in $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; $g(x) = x^{-2}$. Narišite še grafa funkcij $h\colon x \mapsto f(x - 1)$ in $s\colon x \mapsto -g(x)$ in zapišite njuna predpisa.



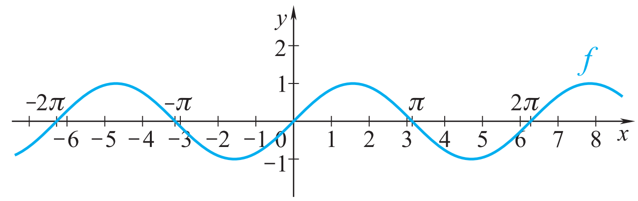


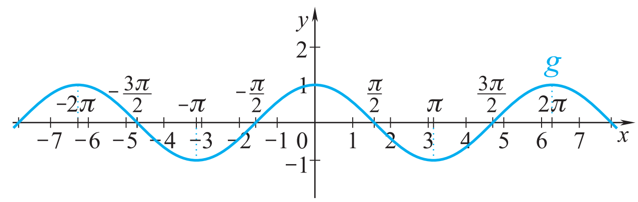
21. Na sliki sta narisana grafa funkcij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 4^x$ in $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; $g(x) = \log_4 x$. Narišite še grafa funkcij $h\colon x \mapsto -f(x) + 1$ in $s\colon x \mapsto g(x + 4)$ in zapišite njuna predpisa.

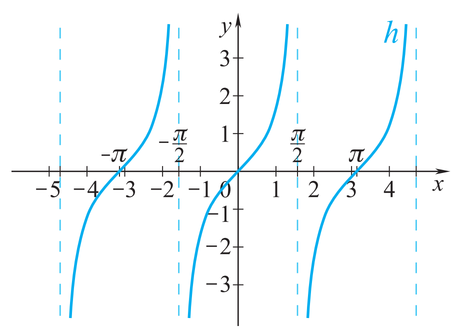




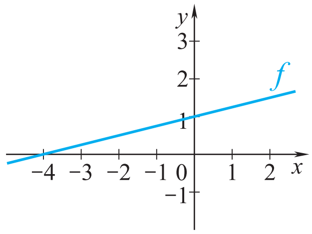
22. Na sliki so narisani grafi funkcij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sin x$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = \cos x$ in $h\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}; f(x) = \tan x$. Narišite še grafa funkcij $x \mapsto \sin x + 1$, $x \mapsto -2\cos x$ in $x \mapsto |\tan x|$.

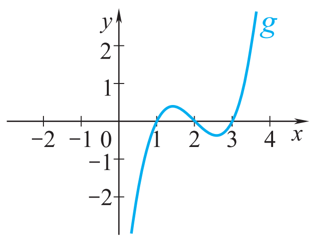




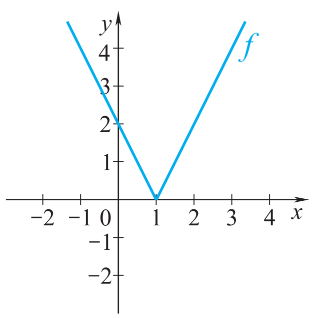


23. Na sliki sta grafa funkcij $f(x) = \frac{1}{4}x + 1$ in $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Grafa funkcij premaknite v smeri abscisne osi tako, da bosta funkciji, katerih grafa ste dobili, lihi. Zapišite enačbi dobljenih krivulj.





24. Na sliki je graf funkcije $f(x) = |2x - 2|$. Graf funkcije f premaknite v smeri abscisne osi tako, da bo funkcija g, katere graf ste dobili, soda. Zapišite predpis za funkcijo g.



13. LINEARNA FUNKCIJA

Linearna funkcija je realna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = k \cdot x + n$, pri čemer sta k in n poljubni realni števili. Število k imenujemo **smerni koeficient** linearne funkcije, število n pa **začetna vrednost** linearne funkcije.

Za linearno funkcijo $f(x) = k \cdot x + n$, ki za $x = 1$ zavzame vrednost -2, za $x = 3$ pa vrednost 8, izračunajmo smerni koeficient in začetno vrednost ter zapišimo njen predpis.

Zapišimo $f(1) = k \cdot 1 + n = -2$ in $f(3) = k \cdot 3 + n = 8$ in rešimo sistem enačb.
Iz prve enačbe izrazimo $k = -n - 2$
in vstavimo v drugo enačbo $(-n - 2) \cdot 3 + n = 8$
ter izračunamo $-3n - 6 + n = 8$ ter $n = -7$ in od tod $k = -n - 2 = -(-7) - 2 = 5$.
Smerni koeficient linearne funkcije je $k = 5$, začetna vrednost $n = -7$, njen predpis pa $f(x) = 5x - 7$.

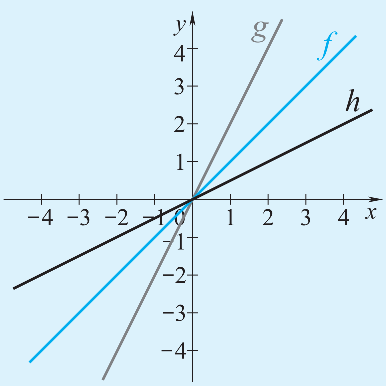
Graf linearne funkcije $f(x) = k \cdot x + n$ je **premica** z enačbo $y = k \cdot x + n$.

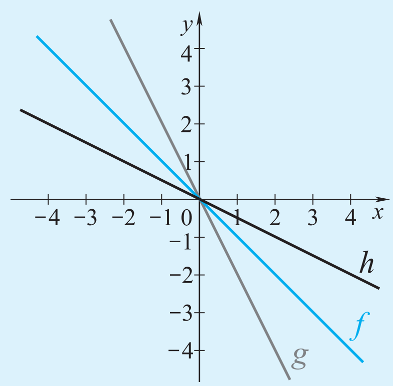
Smerni koeficient funkcije določa strmino premice:
- za $\boldsymbol{k > 0}$ je linearna funkcija **naraščajoča** (večji je k, strmejša je premica),
- za $\boldsymbol{k < 0}$ je linearna funkcija **padajoča**,
- za $\boldsymbol{k = 0}$ je linearna funkcija konstantna (premica je vzporedna abscisni osi).

V dana koordinatna sistema narišimo grafe funkcij.

a) $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ in $h(x) = \frac{1}{2}x$.

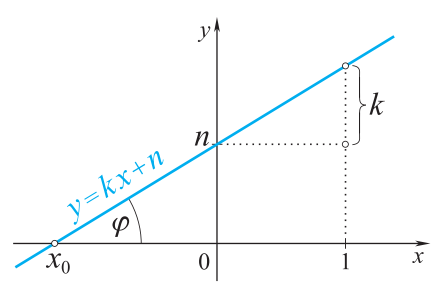
b) $f(x) = -x$, $g(x) = -2x$ in $h(x) = -\frac{1}{2}x$.





Začetna vrednost $f(0) = n$ določa **presečišče grafa** linearne funkcije **z ordinatno osjo**; to je točka $N(0, n)$.

Število x_0 je **ničla** linearne funkcije f natanko takrat, ko je $f(x_0) = 0$.
Ničlo linearne funkcije dobimo kot **rešitev linearne enačbe** $k \cdot x + n = 0$.
Če je smerni koeficient linearne funkcije različen od 0, ima linearna funkcija natanko eno ničlo. V **ničli** funkcije **graf** linearne funkcije **seka abscisno os**; to je v točki $M(x_0, 0)$.



Naklonski kot φ premice je kot med pozitivno smerjo abscisne osi in premico (merjen v nasprotni smeri urnega kazalca): $\varphi \in [0°, 180°)$.

Tangens naklonskega kota φ premice je enak njenemu smernemu koeficientu: $\tan \varphi = k$.

1. Zapišimo predpis za linearno funkcijo f s smernim koeficientom $\frac{6}{5}$, če gre njen graf skozi točko $T(-5, 6)$. Izračunajmo tudi, v katerih točkah graf linearne funkcije seka koordinatni osi.

Vstavimo $k = \frac{6}{5}$ in $f(-5) = 6$ v predpis $f(x) = k \cdot x + n$ in dobimo enačbo $6 = \frac{6}{5} \cdot (-5) + n$ ter od tod $n = 12$.

Predpis za funkcijo f je $f(x) = \frac{6}{5}x + 12$.

Ker je $f(0) = 12$, graf funkcije f seka ordinatno os v točki $(0, 12)$.

Graf funkcije f seka abscisno os v ničli, ki jo dobimo kot rešitev enačbe $\frac{6}{5}x + 12 = 0$.

Iz $\frac{6}{5}x = -12$ z množenjem s $\frac{5}{6}$ dobimo $x = -10$. Presečišče grafa z abscisno osjo je točka $(-10, 0)$.

2. Za funkcijo $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ zapišimo začetno vrednost, izračunajmo ničlo in narišimo njen graf.

Začetna vrednost funkcije je $f(0) = 1$,
zato seka graf funkcije ordinatno os v točki $(0, 1)$.

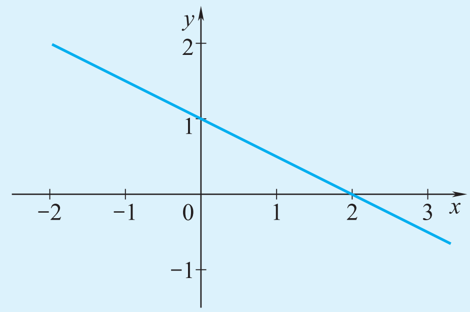
Ničla funkcije je rešitev enačbe $-\frac{1}{2}x + 1 = 0$.

$-\frac{1}{2}x = -1 \quad / \quad \cdot(-2)$

$x = 2$

Zato graf funkcije f seka abscisno os v točki $(2, 0)$.

Narišemo graf.

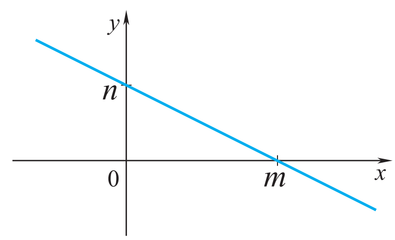


Oblike enačbe premice

V eksplicitni obliki $y = k \cdot x + n$ lahko zapišemo vse premice, razen premic, ki so vzporedne ordinatni osi.

V implicitni obliki $ax + by - c = 0$ lahko zapišemo vse premice.

V odsekovni obliki $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$; $m, n \neq 0$ lahko zapišemo vse premice, razen premic, ki gredo skozi koordinatno izhodišče, in premic, ki so vzporedne bodisi abscisni bodisi ordinatni osi. Premica seka abscisno os v točki $(m, 0)$ in ordinatno os v točki $(0, n)$.



Enačbo premice skozi dve točki $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ lahko poiščemo na dva načina.

I. Način lahko uporabimo pri premicah, ki niso vzporedne ordinatni osi.
Najprej poiščemo smerni koeficient premice $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $x_2 \neq x_1$, nato pa v enačbo $y - y_1 = k(x - x_1)$ vstavimo vrednost koeficienta in še koordinati ene točke na premici ter nato izrazimo y.

II. Način lahko uporabimo pri vseh premicah.
V enačbo $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{bmatrix} = 0$ vstavimo koordinate danih točk na premici in jo izračunamo.

1. Zapišimo eksplicitno enačbo premice, ki gre skozi točki $A(4, -3)$ in $B(-8, -12)$, ter jo preoblikujmo v drugi dve obliki in premico tudi narišimo.

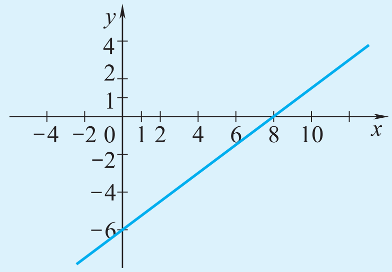
Najprej poiščimo smerni koeficient premice $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-12 - (-3)}{-8 - 4} = \frac{-9}{-12} = \frac{3}{4}$.

Nato v enačbo $y - y_1 = k(x - x_1)$ vstavimo vrednost koeficienta in koordinati točke A $y - (-3) = \frac{3}{4}(x - 4)$ in jo preoblikujemo v $y + 3 = \frac{3x}{4} - 3$ ter zapišemo eksplicitno obliko enačbe premice $y = \frac{3x}{4} - 6$.

Enačbo $y = \frac{3x}{4} - 6$ množimo s 4 in $4y = 3x - 24$ preoblikujemo v implicitno obliko enačbe premice $3x - 4y - 24 = 0$.

Iz te enačbe število 24 prenesemo na drugo stran, da dobimo $3x - 4y = 24$ ter to delimo s 24. Dobimo odsekovno obliko enačbe premice $\frac{x}{8} + \frac{y}{-6} = 1$.

Pri risanju premice upoštevamo, da seka abscisno os v točki $(8, 0)$, ordinatno os pa v $(0, -6)$.



2. Izračunajmo implicitno enačbo premice, ki gre skozi točki $A(2, -2)$ in $B(2, 3)$, jo narišimo v koordinatni sistem in zapišimo drugi dve obliki enačbe premice.

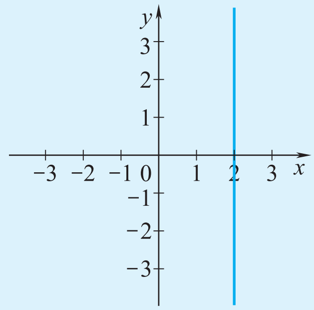
Implicitno enačbo premice poiščemo z determinanto $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{bmatrix} = 0$, v katero vstavimo koordinate točk A in B $\begin{bmatrix} 2 - 2 & 3 - (-2) \\ x - 2 & y - (-2) \end{bmatrix} = 0$ ter iz $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ x - 2 & y + 2 \end{bmatrix} = 0$ zapišemo

$0 \cdot (y + 2) - 5 \cdot (x - 2) = 0$.

Dobimo implicitno obliko enačbe premice $x - 2 = 0$.

Premico narišemo.

Implicitno enačbo premice lahko v danem primeru zapišemo tudi potem, ko narišemo premico skozi dani točki. Ker je premica vzporedna ordinatni osi, eksplicitne in odsekovne oblike enačbe premice ne moremo poiskati.

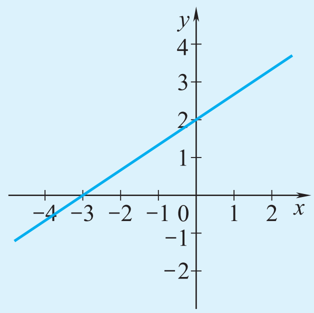


3. Zapišimo odsekovno obliko enačbe premice, ki je narisana na sliki, in jo preoblikujmo v drugi dve obliki.

Ker premica seka abscisno os v točki $(-3, 0)$ in ordinatno os v točki $(0, 2)$, lahko zapišemo odsekovno obliko enačbe premice $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$.

Enačbo množimo s 6 in iz $-2x + 3y = 6$ zapišemo implicitno obliko enačbe premice $2x - 3y + 6 = 0$.

Enačbo preoblikujemo v $-3y = -2x - 6$ in zapišemo eksplicitno obliko enačbe premice $y = \frac{2}{3}x + 2$.



Premici z enačbama $y = k_1 \cdot x + n_1$ in $y = k_2 \cdot x + n_2$ sta:

– **vzporedni** natanko takrat, ko imata enaka smerna koeficienta: $k_1 = k_2$,

– **pravokotni** natanko takrat, ko za njuna smerna koeficienta velja $k_1 \cdot k_2 = -1$ oz. $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Za **kot φ med premicama** z enačbama $y = k_1 \cdot x + n_1$ in $y = k_2 \cdot x + n_2$ velja $\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$.

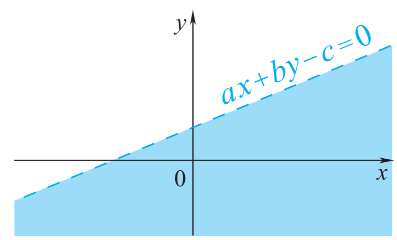
1. Zapišimo eksplicitno obliko enačbe premice, ki gre skozi točko $T(-2, 4)$ in je:
a) vzporedna premici z enačbo $5x - y - 2 = 0$,
b) pravokotna na premico z enačbo $5x - y - 2 = 0$.

Najprej iz enačbe $5x - y - 2 = 0$ izrazimo $y = 5x - 2$ ter zapišimo njen smerni koeficient $k_1 = 5$.
Eksplicitno obliko enačbe vzporednice dobimo, če v enačbo $y - y_1 = k(x - x_1)$ vstavimo $k_1 = 5$ in koordinati točke T. Iz $y - 4 = 5(x + 2)$ izrazimo $y = 5x + 14$.
Za eksplicitno obliko enačbe pravokotnice najprej izračunamo njen smerni koeficient $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{5}$, nato v enačbo $y - y_1 = k(x - x_1)$ vstavimo $k_2 = -\frac{1}{5}$ in koordinate točke T. Iz $y - 4 = -\frac{1}{5}(x - 2)$ izrazimo $y = -\frac{1}{5}x + \frac{18}{5}$.

2. Izračunajmo kot med premicama z enačbama $2x + y - 3 = 0$ in $3x - 2y + 1 = 0$.

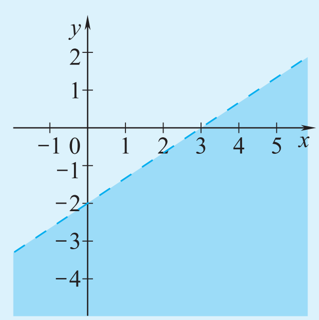
Najprej iz obeh enačb izrazimo $y = -2x + 3$ in $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ in zapišemo njuna smerna koeficienta $k_1 = -2$ in $k_2 = \frac{3}{2}$.
Iz $\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{\frac{3}{2} - (-2)}{1 + \frac{3}{2}(-2)}\right| = \left|\frac{\frac{7}{2}}{-2}\right| = \left|-\frac{7}{4}\right| = \frac{7}{4}$ izračunamo $\varphi = 60°15'$.

Rešitev **linearne neenačbe z dvema neznankama** $ax + by - c < 0$ je množica vseh parov realnih števil (x, y), ki zadoščajo neenačbi, ter jo predstavimo s točkami v ravnini (polravnino), ki so na ustrezni strani premice $ax + by - c = 0$.



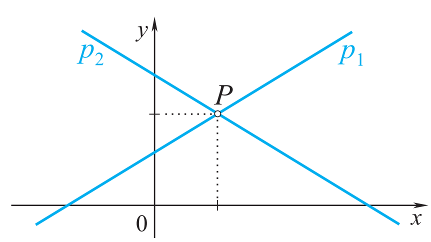
Rešimo neenačbo $2x - 3y - 6 > 0$.

Najprej zapišemo enačbo premice $2x - 3y - 6 = 0$, ki je rob polravnine, in jo preoblikujemo v $2x - 3y = 6$ in z deljenjem s 6 zapišemo odsekovno obliko $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$. Ker rob iskane polravnine ne sodi k rešitvi, premico narišemo črtkano. Nato označimo ustrezno polravnino, ki smo jo določili z izbrano točko, najlaže s točko $(0, 0)$, ki v danem primeru ne ustreza neenačbi.
Neenačbo rešimo lahko tudi tako, da enačbo premice – roba polravnine preoblikujemo v $y < \frac{2}{3}x - 2$ in označimo ustrezno (spodnjo) polravnino.



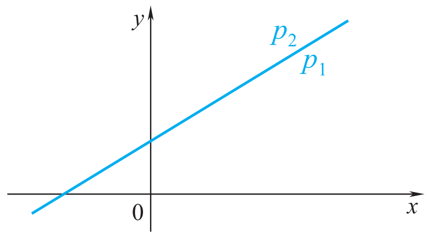
Dve enačbi z dvema neznankama $\boldsymbol{ax + by = c}$ in $\boldsymbol{dx + ey = f}$ predstavljata **sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama**. Rešitev sistema je množica vseh urejenih parov realnih števil (x, y), ki zadoščajo obema enačbama.

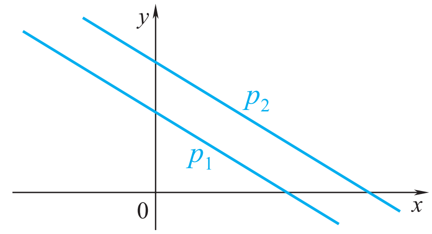
Geometrijski pomen sistema dveh enačb z dvema neznankama:
Dani enačbi sta enačbi dveh premic. Če ima sistem enačb natanko eno rešitev, potem se dani premici sekata v točki P in sta x in y koordinati presečišča premic.



Če sistem nima rešitve, sta premici vzporedni in ne sovpadata.

Če ima sistem neskončno mnogo rešitev, potem premici sovpadata.



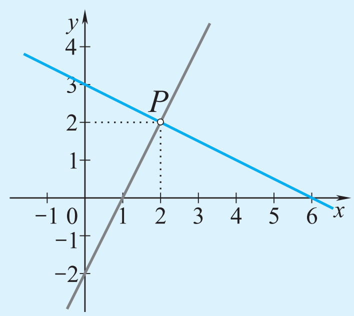


Načini reševanja sistema dveh enačb z dvema neznankama:

Zamenjalni način	**Način nasprotnih koeficientov**	**Grafični način**
Opisan v poglavju racionalna števila.	Opisan v poglavju racionalna števila.	Dani enačbi sta enačbi premic, ki ju narišemo v istem koordinatnem sistemu. Rešitev sistema enačb sta koordinati presečišča premic. Rezultat računsko preverimo.

1. V isti koordinatni sistem narišimo premici, podani z enačbama $x + 2y = 6$ in $2x - y = 2$, in iz grafa razberimo rešitvi sistema enačb.

Enačbi preoblikujemo v odsekovni obliki $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$ in $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} = 1$ ter ju natančno narišemo. Iz grafa razberemo koordinati presečišča $x = 2$, $y = 2$, ki je rešitev sistema dveh enačb z dvema neznankama. Rešitev računsko preverimo tako, da vstavimo dobljeni vrednosti v dani enačbi.



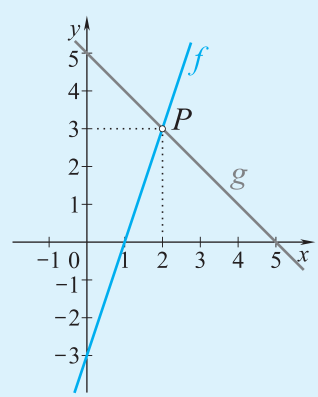
2. Izračunajmo presečišča grafov funkcij $f(x) = 3x - 3$ in $g(x) = -x + 5$. Nato izračunajmo ploščino trikotnika, ki ga omejujejo abscisna os in grafa funkcij f in g.

Najprej zapišemo enačbi $y = 3x - 3$ in $y = -x + 5$.
Od prve enačbe odštejemo drugo, dobimo $0 = 3x - 3 - (-x + 5)$ in od tod $x = 2$.
To vrednost vstavimo v $f(2) = 3 \cdot 2 - 3 = 3$. Presečišče grafov funkcij je točka $P(2, 3)$.
V isti koordinatni sistem narišimo grafa obeh funkcij ter iz grafov zapišemo koordinate oglišč trikotnika $A(1, 0)$, $B(5, 0)$ in $P(2, 3)$.

V determinanto $D = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$ vstavimo koordinate oglišč in jo izračunamo

$$D = \begin{bmatrix} 5 - 1 & 0 - 0 \\ 2 - 1 & 3 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 12.$$

Ploščina trikotnika ABP je $S = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$.
Ploščino trikotnika lahko izračunamo tudi kot $S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

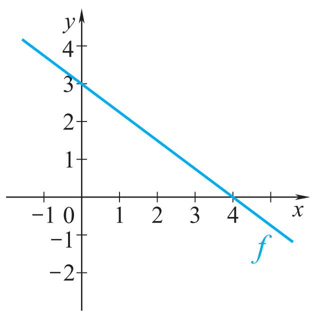


1. Za linearno funkcijo $f(x) = k \cdot x + n$, ki za $x = 3$ zavzame vrednost -2, za $x = 1$ pa vrednost 2, izračunajte smerni koeficient in začetno vrednost ter zapišite njen predpis.

2. Zapišite predpis za linearno funkcijo, ki ima začetno vrednost 5 in ničlo -3.

3. Iz množice linearnih funkcij $f(x) = \frac{1}{2}x + n$, $n \in \mathbb{R}$ zapišite predpis za tisto funkcijo:
   a) katere graf poteka skozi točko $T(-1, 3)$,
   b) ki ima ničlo $x = -2$.

4. Na sliki je narisan graf linearne funkcije f. Zapišite njen predpis.



5. Graf linearne funkcije $f(x) = kx + n$ je vzporeden simetrali lihih kvadrantov in gre skozi točko $T(5, 3)$. Zapišite njen predpis.

6. Za dano linearno funkcijo $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ izračunajte ničlo in začetno vrednost ter narišite njen graf. Izračunajte presečišča grafa funkcije f s premicama $y = 6$ in $x = 4$.

7. V isti koordinatni sistem narišite grafa linearnih funkcij $f(x) = \frac{x}{3} + 2$ in $g(x) = x + 4$ ter izračunajte koordinati njunega presečišča.

8. Za dano linearno funkcijo $f(x) = x + 4$ izračunajte ničlo in začetno vrednost ter narišite njen graf. Za katere x je $f(x) > 0$?

9. Narišite graf funkcije $f(x) = 2x + 1$. Za katere x je $f(x) \leq 0$?

10. Narišite graf funkcije $f(x) = \frac{x}{4} - 1$. Za katere x je funkcija negativna? V kateri točki graf funkcije seka simetralo sodih kvadrantov?

11. Narišite graf funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ in rešite neenačbo $f(x) \leq 1$.

12. V isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij.
   a) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$ in $s(x) = 1$
   b) $f(x) = -4x + 2$, $g(x) = -x + 2$, $h(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ in $s(x) = 2$
   c) $f(x) = -x + 3$, $g(x) = -x$, $h(x) = -x - 2$ in $s(x) = \frac{3}{2} - x$

13. V isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij $f(x) = 2x - 4$, $g\colon x \mapsto f(x) + 2$ in $h\colon x \mapsto f(x + 2)$ ter za funkciji g in h tudi drugače zapišite njuna predpisa.

14. V isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij.
   a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $g(x) = f(x - 2)$ in $h(x) = f(x) - 2$
   b) $f(x) = -2x + 4$, $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$ in $h(x) = |f(x)|$
   c) $f(x) = 3 - x$, $g\colon x \mapsto f(x - 3)$ in $h\colon x \mapsto -2f(x)$

15. Dana je funkcija $f(x) = -2x + 2$. Narišite njen graf in graf funkcije $g\colon x \mapsto 2f(x) - 2$. (Pomoč: najprej narišite graf funkcije $x \mapsto 2f(x)$.)

16. Narišite množice točk (x, y) v ravnini, za katere velja:
   a) $y = |2x|$
   b) $y = |x + 2|$
   c) $y = \left|\frac{x}{2} - 2\right|$
   č) $y = |1 - x|$

17. Dani sta funkciji $f(x) = -\frac{x}{3} + 1$ in $g(x) = |f(x)|$. V isti koordinatni sistem narišite grafa obeh funkcij ter zanju zapišite definicijsko območje in zalogo vrednosti.

18. Narišite graf funkcije $f(x) = |2x - 3|$ iz zapišite njene lastnosti.

19. Dana je funkcija $f(x) = |2x + 4|$.
   a) Narišite graf funkcije f.
   b) Kolikšna je ploščina lika, ki ga graf funkcije f oklepa s koordinatnima osema?

20. Narišite grafa funkcij $f(x) = \frac{x}{4} - 1$ in $g(x) = |f(x)|$. Rešite neenačbo $g(x) < 1$.

21. Dana je linearna funkcija $f(x) = -2x - 6$.
a) Zapišite ničlo in začetno vrednost funkcije f ter narišite njen graf.
b) Točka T leži na simetrali lihih kvadrantov in na grafu funkcije f. Zapišite koordinati točke T.
c) V isti koordinatni sistem (z drugo barvo) narišite še graf funkcije $g: x \mapsto |f(x)|$.
č) Zapišite predpis za linearno funkcijo h, katere graf gre skozi točko $T(-2, 3)$ in je vzporeden grafu funkcije f.

22. Premica s smernim koeficientom 3 seka ordinatno os pri -4.
a) Zapišite njeno enačbo.
b) Ali točki $A(2, 2)$ in $B(1, 1)$ ležita na dani premici?

23. V koordinatni sistem narišite premico z enačbo $y = 2x + 5$. Izračunajte neznani koordinati točk $A(x_1, 2)$ in $B(-3, y_2)$ na tej premici.

24. Zapišite vse tri oblike enačbe premice, ki gre skozi točki.
a) $A(3, -2)$, $B(1, 2)$
b) $C(4, -2)$, $D(4, 1)$
c) $E(2, -2)$, $F(-1, -2)$
č) $F(-6, -7)$, $G(3, -1)$

25. Zapišite eksplicitno obliko enačbe premice, ki gre skozi točko $T(2, -3)$ in je vzporedna simetrali lihih kvadrantov.

26. Zapišite eksplicitno obliko enačbe premice, ki gre skozi točko $T(4, -3)$ in je vzporedna premici z enačbo $3x - y + 2 = 0$.

27. Ali točke $A(1, -3)$, $B(3, 5)$ in $C(6, 18)$ ležijo na isti premici? Odgovor utemeljite.

28. Zapišite implicitno obliko enačbe premice, ki seka abscisno os pri 3 in je vzporedna premici z enačbo $x - 2y + 1 = 0$.

29. V enačbi premice $ax + 2y + 2 = 0$ določite število a tako, da bo premica potekala skozi točko $T(2, -5)$. Zapišite enačbo premice v eksplicitni obliki in jo narišite v dani koordinatni sistem.

30. Za katero realno število a bo premica z enačbo $ax - 3y + a + 4 = 0$ potekala skozi koordinatno izhodišče? Kolikšen je njen smerni koeficient?

31. Zapišite presečišče premice $3x + 2y - 4 = 0$ s koordinatnima osema in jo narišite. Za katere x poteka premica nad abscisno osjo?

32. Zapišite odsekovno obliko enačbe premice $5x - 3y - 10 = 0$ in zapišite, v katerih točkah seka premica koordinatni osi. Kolikšna je ploščina trikotnika, ki ga ta premica oklepa s koordinatnima osema?

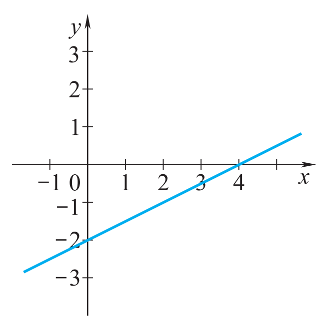
33. Zapišite odsekovno obliko enačbe premice p, ki gre skozi točki $A(-1, -4)$ in $B(-3, 2)$. V katerih točkah premica p seka koordinatni osi?

34. Točke $A(-3, 2)$, $B(1, -4)$ in $C(5, 6)$ so oglišča trikotnika.
a) Zapišite enačbo nosilke stranice AC.
b) Izračunajte ploščino trikotnika ABC.

35. Iz množice premic $y = ax - a - 2$; $a \in \mathbb{R}$ zapišite implicitno obliko enačbe tiste premice, ki:
a) gre skozi točko $(3, 3)$,
b) je vzporedna abscisni osi.

36. Dana je množica premic $y = ax + 3a + 1$; $a \in \mathbb{R}$.
a) Pokažite, da gredo vse premice iz te množice premic skozi točko $(-3, 1)$.
b) Ali v tej množici premic obstaja tudi premica, ki gre skozi točko $(1, 5)$?

37. Zapišite vse tri oblike enačbe premice, ki je narisana na sliki.



38. Zapišite implicitno in odsekovno obliko enačbe premice p, ki gre skozi točki $A(-2, 4)$ in $B(-4, -2)$. V katerih točkah premica p seka koordinatni osi? Ali so točke A, B in $C(-2, -3)$ kolinearne?

39. V dani koordinatni sistem narišite premico, ki je vzporedna simetrali sodih kvadrantov in seka os x v točki z absciso $x = 3$. Njeno enačbo zapišite v vseh treh oblikah.

40. Za katero realno število a bosta premici z enačbama $2x + 3y - 4 = 0$ in $ax - 9y + 1 = 0$ vzporedni?

41. Skozi izhodišče koordinatnega sistema potekata dve premici. Prva gre tudi skozi točko $A(4, 2)$, druga pa skozi točko $B(2, -4)$.
a) V istem koordinatnem sistemu narišite obe premici in zapišite njuni enačbi.
b) Izhodišče koordinatnega sistema in točki A in B so oglišča trikotnika OAB. Pokažite, da je trikotnik enakokrak, in natančno izračunajte njegov obseg.

42. V eksplicitni obliki zapišite enačbo množice premic, ki:
a) ne sekajo premice z enačbo $5x + y + 3 = 0$,
b) gredo skozi točko $(1,- 2)$.

43. Točka $A(-4, 10)$, koordinatno izhodišče O in točka C, ki leži na premici $x + y = 6$, so oglišča trikotnika AOB s pozitivno orientacijo in ploščino 24. Zapišite koordinate oglišč trikotnika AOB.

44. Rešite neenačbe.
a) $x + 1 \geq 0$
b) $2y < 3$
c) $2x - 4y + 4 < 0$
č) $-3x - y - 6 > 0$
d) $2x - 3y \leq 9$
e) $x + y < 0$

45. Rešite sisteme enačb.
a) $x - 2y - 4 = 0,\ 3x + y - 5 = 0$
b) $4x - 7y + 11 = 0,\ 5x - 2y - 2 = 0$
c) $2x + y = 3,\ y = -2x + 1$
č) $\frac{x}{-\frac{1}{2}} + \frac{y}{1} = 1,\ 4x - 2y + 2 = 0$
d) $\frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{3}} = 1,\ \frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{-5} = 1$

46. V koordinatni sistem narišite premici z enačbama $2x - y + 2 = 0$ in $y + 4 = 0$. Izračunajte koordinati njunega presečišča.

47. Točka A je presečišče premic z enačbama $3x - 2y = 5$ in $2x + y + 6 = 0$. Izračunajte koordinati točke A.

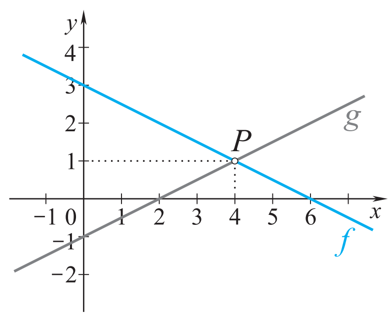
48. Narišite premici $y = x + 2$ in $y = -x + 4$. Izračunajte ploščino trikotnika, ki ga premici oklepata z abscisno osjo.

49. V koordinatni sistem narišite premice z enačbami $x = 3$, $y = 2$ in $x + y + 2 = 0$ in izračunajte ploščino trikotnika, ki ga omejujejo dane premice.

50. Dani sta premici z enačbama $-2x - 3y + 10 = 0$ in $3x + 5y - 17 = 0$.
a) Izračunajte koordinati presečišča premic.
b) Zapišite eksplicitno enačbo premice, ki gre skozi presečišče danih premic in je vzporedna premici z enačbo $5x + 2y - 10 = 0$.

51. Zapišite odsekovno obliko enačbe premice, ki gre skozi točko $A(1, -2)$ in presečišče premic z enačbama $2x + y - 2 = 0$ in $-3x + 2y = 11$.

52. Na sliki sta dani premici.



a) Zapišite odsekovni obliki enačb obeh premic.
b) Iz slike odčitajte koordinati presečišča obeh premic in rezultat računsko preverite.

53. Zapišite implicitno obliko enačbe premice, ki je vzporedna premici z enačbo $2x - y + 5 = 0$ in gre skozi presečišče premic z enačbama $3x - 2y + 3 = 0$ in $y = \frac{1}{3}x - 2$.

54. Zapišite eksplicitno obliko enačbe premice, ki gre skozi presečišče premic z enačbama $y - 2 = 0$ in $2x - 3y + 4 = 0$ ter je vzporedna daljici AB s krajiščema $A(0, 5)$ in $B(2, 1)$.

55. Narišite grafa funkcij.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x + 2, & x < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 2, & x > 2 \end{cases}$

56. Dani sta funkciji $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$ in

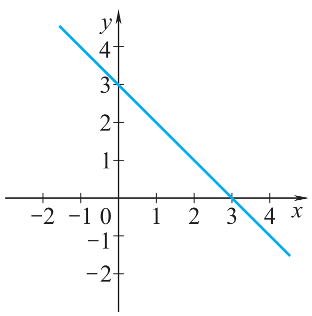
$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 3 - x, & x \geq 0 \end{cases}$$

V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij f in g. Nato izračunajte abscise točk, v katerih se grafa sekata.

57. Zapišite enačbi vzporednice in pravokotnice na premico z enačbo $y = \frac{1}{3}x - 3$, če potekata skozi točko $A(2, -4)$.

58. Zapišite enačbo premice, ki je pravokotna na premico $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ in gre skozi njeno presečišče z ordinatno osjo.

59. Zapišite enačbo premice, ki je narisana na sliki. Kolikšen je njen smerni koeficient? Pod katerim kotom seka premica abscisno os?



60. Zapišite naklonske kote premic.

a) $y = x$
b) $y = -x$
c) $y = -3x + 2$
č) $x = -1$
d) $y = 3$
e) $2x - 5y + 1 = 0$

61. Izračunajte kot med premico z enačbo $y = 3x - 4$ in premicami:

a) $y = \frac{x}{5} + 5$
b) $y = -4x - 7$
c) $x = 1$
č) $y = 2$

62. V kateri točki in pod katerim kotom se sekata premici z enačbama $3x - 2y - 7 = 0$ in $x + y + 1 = 0$?

63. Dani sta premici $x - 2y = 0$ in $2x + y - 5 = 0$.

a) Premici narišite v istem koordinatnem sistemu, označite njuno presečišče in izračunajte njegovi koordinati.
b) Izračunajte kot med premicama.
c) Premici in ordinatna os določajo trikotnik. Izračunajte dolžino najkrajše stranice trikotnika in njegovo ploščino.

64. Izračunajte velikosti notranjih kotov in ploščino trikotnika, ki ga omejujejo premice z enačbami $x - 3 = 0$, $y + 2 = 0$ in $x - y - 1 = 0$.

65. Z računom pokažite, da je trikotnik ABC z oglišči $A(-1, -1)$, $B(5, -3)$ in $C(3, 1)$ enakokrak in pravokoten.

66. Točki $A(-1, -1)$ in $B(3, -3)$ sta krajišči daljice AB.

a) Poiščite koordinati razpolovišča daljice AB.
b) Izračunajte enačbo simetrale daljice AB.

67. Za katero realno število a bosta premici z enačbama $3x - 2y - 4 = 0$ in $ax + 6y + 1 = 0$ vzporedni in za katero realno število pravokotni?

68. Pravokotnica p na premico q z enačbo $y = -\frac{1}{2}x + 5$ gre skozi koordinatno izhodišče. Zapišite enačbo premice p in koordinati presečišča premic p in q.

69. Katera točka na premici $x - 2y + 5 = 0$ je najbližja koordinatnemu izhodišču?

70. Skozi izhodišče koordinatnega sistema potekata dve premici. Prva gre tudi skozi točko $A(-4, 1)$, druga pa skozi točko $B(1, -2)$.

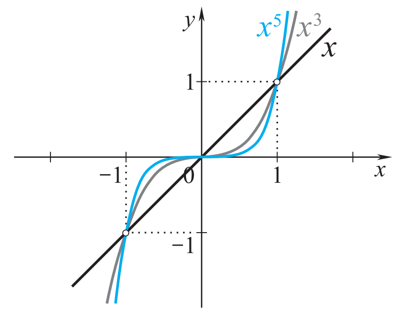
a) V istem koordinatnem sistemu narišite obe premici in zapišite njuni enačbi.
b) Na minuto natančno izračunajte kot med premicama.
c) Izhodišče koordinatnega sistema in točki A in B so oglišča trikotnika OAB. Izračunajte ploščino trikotnika.

14. POTENČNA FUNKCIJA

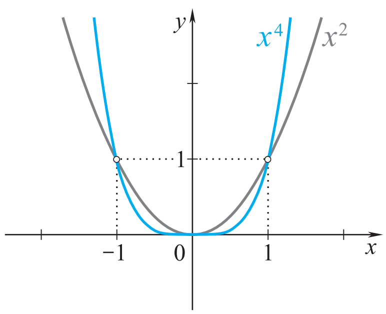
Potenčna funkcija z naravnim eksponentom

Potenčna funkcija f z naravnim eksponentom n je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$.

Funkcije **z lihim eksponentom** so **bijektivne**, **neomejene**, **naraščajoče** in **lihe**. Njihov graf je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

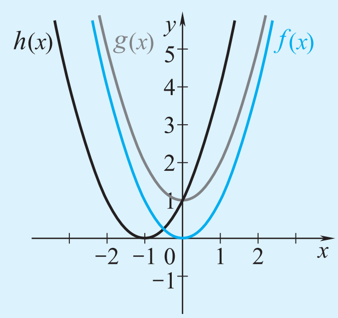


Funkcije **s sodim eksponentom** niso ne injektivne ne surjektivne, so omejene z 0, na intervalu $(-\infty, 0)$ so padajoče, na intervalu $(0, \infty)$ naraščajoče in **sode**. Njihov graf je simetričen glede na ordinatno os.



1. V isti koordinatni sistem narišimo grafe funkcij $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$ in $h(x) = (x + 1)^2$.

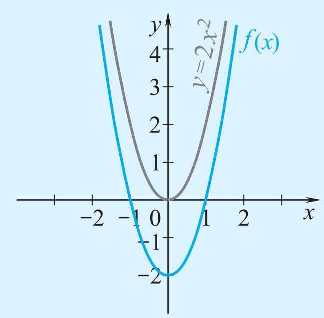
Najprej narišemo graf funkcije f, nato graf funkcije g (graf funkcije f vzporedno premaknemo za 1 navzgor) in nazadnje graf funkcije h (graf funkcije f vzporedno premaknemo za 1 levo).



2. Narišimo graf funkcije $f(x) = 2x^2 - 2$ in zapišimo intervala, na katerih je funkcija f pozitivna.

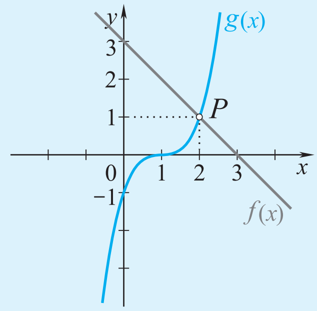
Najprej narišemo graf funkcije $x \mapsto 2x^2$, nato graf funkcije f.

Ničli funkcije f sta rešitvi enačbe $2x^2 - 2 = 0$ oz. $2(x - 1)(x + 1) = 0$. Ničli sta $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$. Funkcija f je pozitivna na intervalih, na katerih je njen graf nad abscisno osjo. To je na $(-\infty, -1)$ in $(1, \infty)$.



3. Narišimo grafa funkcij $f(x) = -x + 3$ in $g(x) = (x - 1)^3$ in zapišimo presečišče grafov.

Graf funkcije f je premica, ki seka abscisno os v $(3, 0)$ in ordinatno os v $(0, 3)$. Graf funkcije g narišemo tako, da graf funkcije $x \mapsto x^3$ vzporedno premaknemo za 1 desno. Iz slike razberemo presečišče $P(2, 1)$ in ga računsko preverimo: $f(2) = -2 + 3 = 1$ in $g(2) = (2 - 1)^3 = 1$.

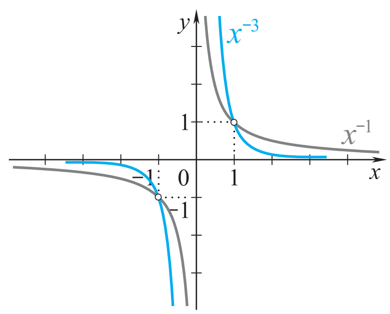


Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom

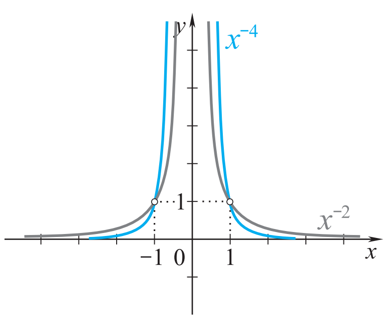
Potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom je funkcija $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = x^{-n}$; $n \in \mathbb{N}$.

Vse potenčne funkcije z negativnim celim eksponentom v točki 0 niso definirane (točka 0 je **pol**), **koordinatni osi pa sta asimptoti njihovih grafov**.

Funkcije **z lihim eksponentom** so neomejene, padajoče na $(-\infty, 0)$ ter na $(0, \infty)$ in **lihe**. Njihov graf je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

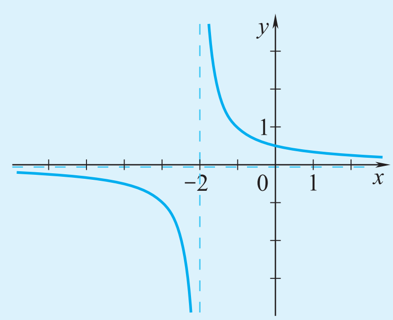


Funkcije **s sodim eksponentom** so **navzdol** omejene z 0, na intervalu $(-\infty, 0)$ so naraščajoče, na intervalu $(0, \infty)$ pa padajoče in **sode**. Njihov graf je simetričen glede na ordinatno os.



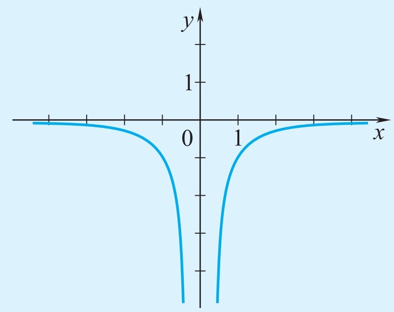
1. Narišimo graf funkcije $f(x) = (x + 2)^{-1}$ in zapišimo enačbi obeh asimptot.

Graf funkcije f narišemo tako, da graf funkcije $x \mapsto x^{-1}$ vzporedno premaknemo za 2 levo. Enačbi asimptot sta $x = -2$ in $y = 0$.



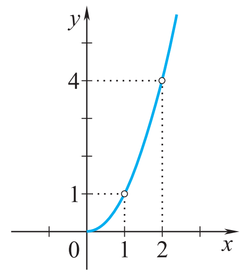
2. Narišimo graf funkcije $f(x) = -x^{-2}$ in zapišimo njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.

Graf funkcije f narišemo tako, da graf funkcije $x \mapsto x^{-2}$ zrcalimo čez abscisno os. Njeno definicijsko območje je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, zaloga vrednosti pa $Z_f = (-\infty, 0)$.

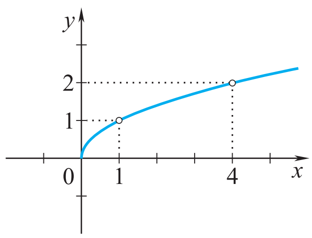


Korenska funkcija

K funkciji f: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ s predpisom $f(x) = x^2$ in z grafom

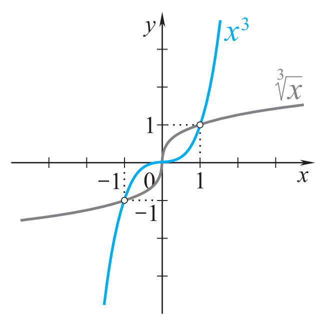


obstaja inverzna funkcija f^{-1}: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ s predpisom $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ter z grafom.



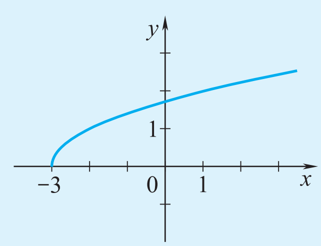
K funkciji f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ obstaja inverzna funkcija f^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Graf funkcije $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ dobimo tako, da graf funkcije $f(x) = x^3$ prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov.



Zapišimo definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $f(x) = \sqrt{x+3}$ ter narišimo njen graf.

Ker je kvadratni koren definiran za nenegativna realna števila, mora biti $x + 3 \geq 0$ in od tod $x \geq -3$ oz. $D_f = [-3, \infty)$. Zaloga vrednosti so vsa nenegativna realna števila: $Z_f = [0, \infty)$. Graf funkcije f narišemo tako, da graf funkcije $x \mapsto \sqrt{x}$ vzporedno premaknemo za 3 levo.



1. Dana je funkcija $f(x) = x^2$.

a) Narišite njen graf in zapišite njene lastnosti (ničla, začetna vrednost, omejenost, sodost, lihost, pozitivnost, negativnost, naraščanje, padanje).

b) Narišite graf funkcije $g(x) = x^2 - 9$. Katere od točk $(3, 0)$, $(-4, 25)$ in $(-1, -8)$ ležijo na njenem grafu?

c) Zapišite presečišče grafa funkcije g in premice $y = x - 7$.

2. Dana je funkcija $f(x) = x^3$.

a) Narišite njen graf in zapišite njene lastnosti.

b) V dani koordinatni sistem narišite še graf funkcije $g(x) = (x + 1)^3$. Katere od točk $(-2, 1)$, $(1, 8)$ in $(-1, 0)$ ležijo na njenem grafu?

3. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x^2$, $h(x) = -x^2$ in $s(x) = -3x^2$

b) $f(x) = (x + 2)^2$, $g(x) = x^2 + 2$

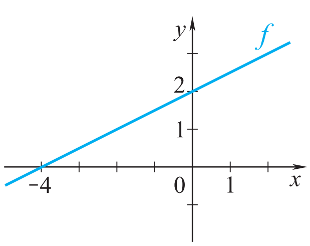
c) $f(x) = x^3$, $g(x) = -x^3$

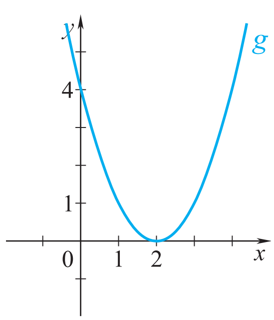
č) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = 2x^3 - 2$

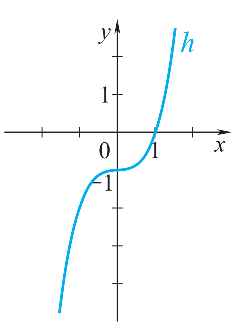
d) $f(x) = x^4$, $g(x) = x^4 - 1$

e) $f(x) = -x^4$ $g(x) = -(x + 2)^4$

4. Na slikah so dani grafi linearne $f(x) = kx + n$, kvadratne $g(x) = (x - p)^2$ in potenčne funkcije $h(x) = ax^3 + b$. Zapišite njihove predpise in ugotovite njihove lastnosti.







5. Narišimo graf funkcije $f(x) = -x^2 + 4$ in zapišimo intervala, na katerih je funkcija f negativna. Ali je funkcija f omejena?

6. Grafa funkcij $f(x) = x^3 - 1$ in $g(x) = x - 1$ se sekata v točkah A, B in C. V istem koordinatnem sistemu narišite njuna grafa in izračunajte koordinate presečišč.

7. Zapišite ničlo funkcije $f(x) = x^3 + 2$ in presečišče grafa z ordinatno osjo in narišite njen graf.

8. Narišite graf funkcije $f(x) = -x^3 - 1$ in rešite neenačbo $f(x) > 0$.

9. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = (x - 1)^3$ in $g\colon x \to |f(x)|$. V katerih točkah seka graf funkcije g premico z enačbo $y = -x + 1$?

10. Poiščite presečišča grafov funkcij $f(x) = 2x^3 - 1$ in $g(x) = x^2 - 1$.

11. Dana je funkcija $f(x) = x^4$.

a) V isti koordinatni sistem narišite njen graf in graf funkcije $h(x) = -f(x)$.

b) V dani koordinatni sistem narišite še graf funkcije $g(x) = -x^4 + 1$. Ali je funkcija g liha ali soda?

12. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = -2x^4 + 2$ in $g(x) = |f(x)|$.

13. Dana je funkcija $f(x) = x^{-1}$.

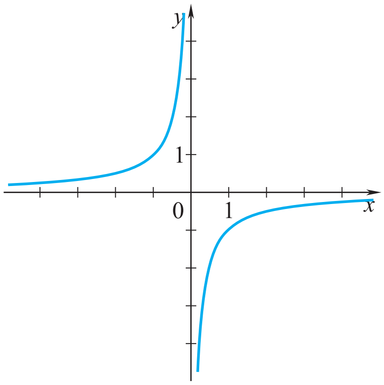
a) Narišite njen graf in zapišite njene lastnosti.

b) Narišite graf funkcije $g(x) = x^{-1} - 1$. Katere od točk $(1, 0)$, $(-2, -\frac{1}{2})$ in $(\frac{1}{2}, 1)$ ležijo na njenem grafu?

c) Zapišite presečišči grafa funkcije g in premice $y = x + \frac{1}{2}$.

14. Narišite graf funkcije $f(x) = (x - 1)^{-1}$ in zapišite intervale, na katerih je funkcija pozitivna in na katerih je negativna.

15. Na sliki je narisan graf funkcije $f(x) = kx^{-n}$; $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Zapišite predpis za funkcijo f. Zapišite intervale, na katerih funkcija narašča, in intervale, na katerih pada. Ali je funkcija navzgor oz. navzdol omejena, soda ali liha? Ali ima ta funkcija ničle?

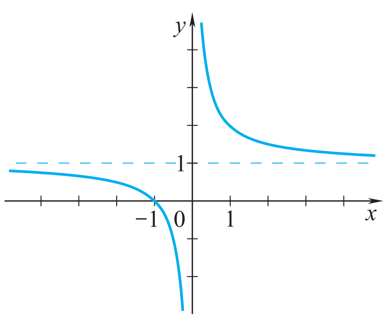


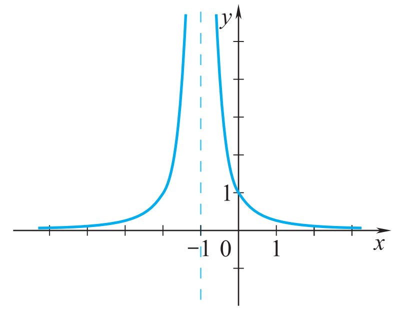
16. Dana je funkcija $f(x) = x^{-2}$.
a) Narišite njen graf in zapišite njene lastnosti.
b) Narišite graf funkcije $g(x) = x^{-2} + 2$.
Ali je funkcija soda ali liha?
c) Rešite neenačbo $g(x) < 3$.

17. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij.
a) $f(x) = 2x^{-1}$ in $g(x) = 2(x - 2)^{-1}$
b) $f(x) = -x^{-1}$ in $g(x) = -x^{-1} + 1$
c) $f(x) = 2x^{-2}$ in $g(x) = 2x^{-2} - 2$
č) $f(x) = -x^{-2}$ in $g(x) = -x^{-2} + 1$

18. V isti koordinatni sistem narišite graf funkcije $f(x) = x^{-1}$ in premice $y = -x - \frac{5}{2}$ ter zapišite koordinati presečišč. Rezultat računsko preverite.

19. Na slikah sta dana grafa potenčnih funkcij $f(x) = ax^{-1} + b$ in $g(x) = (x - c)^{-2}$.
Zapišite njuna predpisa in ugotovite njune lastnosti.





20. Narišite graf funkcije $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ in zapišite enačbi njenih asimptot.

21. Narišite graf funkcije $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ in zapišite njeno zalogo vrednosti.

22. Dani sta krivulji z enačbama $y = \frac{2}{x}$ in $y = ax^2$.
a) Za katero vrednost konstante a se krivulji sekata v točki z absciso 2?
b) Narišite lik, ki ga omejujeta krivulji $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{x^2}{4}$, abscisna os in premica $x = 4$.

23. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$ in $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $g\colon x \mapsto -\sqrt{x}$.

24. Dana je funkcija $f(x) = \sqrt{x - 3}$.
a) Zapišite njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
b) Izračunajte ničlo funkcije f ter narišite njen graf.
c) Poiščite presečišče grafa funkcije f in premice $y = -x + 5$.

25. Za funkcijo $f(x) = 2\sqrt{x} - 4$ izračunajte ničlo in začetno vrednost ter narišite njen graf. Za katere x je $f(x) < 0$?

26. Narišite graf funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Ali je funkcija omejena? Za katere x je graf funkcije f nad simetralo lihih kvadrantov?

27. Zapišite ničlo in začetno vrednost funkcije $f(x) = -\sqrt[3]{x} - 1$ in narišite njen graf. Na katerem intervalu je funkcija f pozitivna?

15. KVADRATNA FUNKCIJA

Kvadratna funkcija je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = ax^2 + bx + c$, pri čemer so a, b, c poljubna realna števila in $a \neq 0$. Števila a, b in c so koeficienti kvadratne funkcije. Število a imenujemo **vodilni koeficient**, število c pa **konstantni člen** oziroma **začetna vrednost kvadratne funkcije**.

1. Zapišimo predpis za kvadratno funkcijo, ki ima vodilni koeficient 3, konstantni člen 4, v točki -1 pa vrednost 8.

Iz $a = 3$ in $c = 4$ lahko zapišemo $f(x) = 3x^2 + bx + 4$. Ker je $f(-1) = 8$, lahko iz $3(-1)^2 + b(-1) + 4 = 8$ izračunamo $3 - b + 4 = 8$ in od tod $b = -1$. Zapišemo še predpis za funkcijo $f(x) = 3x^2 - x + 4$.

2. Zapišimo predpis za kvadratno funkcijo $f(x) = ax^2 + bx + c$, katere graf poteka skozi točke $A(-1, -3)$, $B(1, 5)$ in $C(-2, -1)$. Iz $f(-1) = a - b + c = -3$, $f(1) = a + b + c = 5$ in $f(-2) = 4a - 2b + c = -1$ dobimo sistem treh enačb s tremi neznankami.

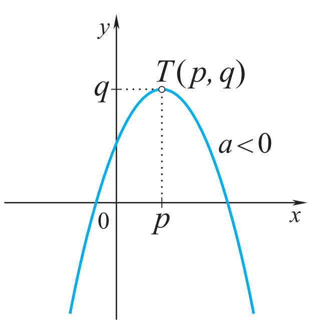
Če od prve enačbe $a - b + c = -3$ odštejemo drugo $a + b + c = 5$, dobimo $-2b = -8$ in od tod $b = 4$.
Vstavimo $b = 4$ v drugo $a + 4 + c = 5$ oz. $a + c = 1$ in tretjo enačbo $4a - 8 + c = -1$ oz. $4a + c = 7$ ter ju odštejemo in dobimo $-3a = -6$ oz. $a = 2$.
Vstavimo v prvo enačbo $a = 2$ in $b = 4$ ter iz $2 - 4 + c = -3$ izračunamo $c = -1$. Zapišemo $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

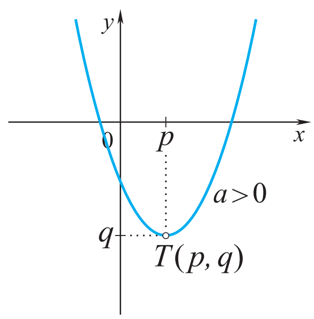
Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ je **parabola** z enačbo $y = ax^2 + bx + c$.

Presečišče parabole in njene simetrale je teme parabole $T(p, q)$.

Koordinati temena lahko izračunamo po obrazcih $p = -\frac{b}{2a}$ in $q = f(p)$ ali $q = -\frac{D}{4a}$, pri čemer je $D = b^2 - 4ac$.

V temenu kvadratna funkcija pri $\boldsymbol{a < 0}$ doseže **največjo vrednost** oziroma pri $\boldsymbol{a > 0}$ **najmanjšo vrednost**.





1. Poiščimo, pri katerem x doseže kvadratna funkcija $f(x) = 2x^2 - 12x + 28$ najmanjšo vrednost. Kolikšna je ta vrednost?

Kvadratna funkcija doseže najmanjšo vrednost v temenu, zato izračunamo koordinati temena.
$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3$, $q = f(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 28 = 10$
Funkcija f pri $x = 3$ doseže najmanjšo vrednost 10.

2. Za katero realno število b bo funkcija $f(x) = -x^2 + bx + \frac{23}{4}$ zavzela največjo vrednost v točki $T(p, 6)$? Pri katerih p zavzame to vrednost?

Kvadratna funkcija zavzame največjo vrednost v temenu $T(p, q)$, zato lahko zapišemo

$q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4(-1)\cdot\frac{23}{4}}{4(-1)} = -\frac{b^2 + 23}{-4} = 6$ in izračunamo $-b^2 - 23 = -24$ ter od tod $b^2 = 1$

oz. $b_1 = 1$ in $b_2 = -1$.

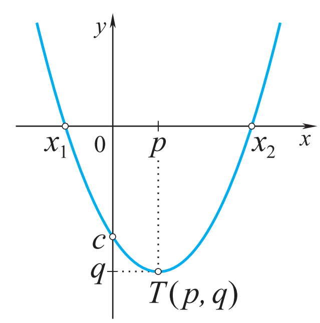
V prvem primeru funkcija f zavzame največjo vrednost pri $p_1 = -\frac{b_1}{2a} = -\frac{-1}{2(-1)} = -\frac{1}{2}$,

v drugem primeru pa pri $p_2 = -\frac{b_2}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$.

Oblike zapisa kvadratne funkcije so:

a) **splošna** $f(x) = ax^2 + bx + c$

Število a določa razteg grafa v smeri ordinatne osi in odprtost grafa navzgor, če je $a > 0$, oziroma navzdol, če je $a < 0$. Graf kvadratne funkcije **seka ordinatno os** v točki $(0, c)$.



b) **temenska** $f(x) = a(x - p)^2 + q$

Teme parabole je v točki $T(p, q)$.

c) **faktorizirana** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, pri čemer sta x_1, x_2 **ničli** kvadratne funkcije. **Ničli** x_1, x_2 **kvadratne funkcije** $f(x) = ax^2 + bx + c$ sta rešitvi **kvadratne enačbe** $ax^2 + bx + c = 0$. **V realnih ničlah funkcije graf funkcije (parabola) seka abscisno os ali pa se je dotika**.

Če sta x_1 in x_2 realni ničli kvadratne funkcije, potem za absciso temena $T(p, q)$ velja $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

1. Zapišimo temensko obliko kvadratne funkcije, ki ima teme v točki $T(-1, 3)$, njen graf pa gre skozi točko $(-2, 1)$.

Najprej zapišemo $f(x) = a(x - (-1))^2 + 3 = a(x + 1)^2 + 3$.

Ker gre graf funkcije f skozi točko $(-2, 1)$, je $f(-2) = a(-2 + 1)^2 + 3 = 1$.

Odpravimo oklepaj $a + 3 = 1$ in dobimo $a = -2$.

Zapišemo še $f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$.

2. Zapišimo vse tri oblike kvadratne funkcije z začetno vrednostjo -42 in ničlama $x_1 = -7$ ter $x_2 = 3$.

Iz $f(x) = a(x + 7)(x - 3)$ in $f(0) = -42$ zapišemo $a(0 + 7)(0 - 3) = -21a = -42$ in izračunamo $a = 2$.

Zapišemo zapis z ničlama $f(x) = 2(x + 7)(x - 3)$ ter nato odpravimo oklepaje in dobimo splošno obliko $f(x) = 2x^2 + 8x - 42$.

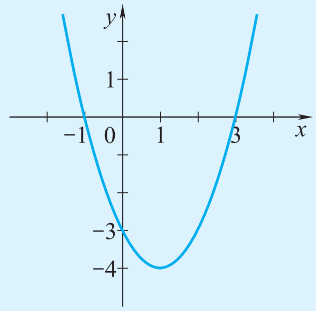
Temensko obliko lahko poiščemo na dva načina:

I. način: V splošni obliki zapisa kvadratne funkcije najprej izpostavimo vodilni koeficient $f(x) = 2(x^2 + 4x - 21)$, nato tvorimo kvadrat $f(x) = 2((x + 2)^2 - 4 - 21) = 2((x + 2)^2 - 25)$ in nazadnje zapišemo $f(x) = 2(x + 2)^2 - 50$.

II. način: Absciso temena p izračunamo iz $p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-7 + 3}{2} = -2$, ordinato q pa iz $q = f(p) = f(-2) = 2(-2 + 7)(-2 - 3) = 2 \cdot 5 \cdot (-5) = -50$. Zapišemo $f(x) = 2(x + 2)^2 - 50$.

3. Kvadratna funkcija z vodilnim koeficientom 1 ima ničli $x_1 = -1$ in $x_2 = 3$. Zapišimo njen predpis in narišimo njen graf.

Zapišemo $f(x) = 1(x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$.
Splošno obliko preoblikujemo v temensko $f(x) = (x - 1)^2 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4$ in zapišemo koordinati temena $T(1, -4)$.
Izračunamo še presečišče grafa funkcije z ordinatno osjo $f(0) = -3$ oz. točko $(0, -3)$.
Narišemo graf.



Kvadratna enačba

Kvadratna enačba je enačba oblike $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$. **Rešitvi kvadratne enačbe** x_1, x_2 dobimo lahko:

a) **po formuli**: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; $D = b^2 - 4ac$
Število D imenujemo **diskriminanta** kvadratne funkcije oz. kvadratne enačbe.

b) **z razstavljanjem**: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$
Pri tem veljata **Viètovi formuli**: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

1. Rešimo enačbe in jih zapišimo kot produkt linearnih faktorjev.

a) $4x^2 + 2x - 12 = 0$

Iz $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-12)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{8} = \frac{-2 \pm 14}{8}$

dobimo rešitvi $x_1 = \frac{-2 + 14}{8} = \frac{3}{2}$ in $x_2 = \frac{-2 - 14}{8} = -2$.

Zapišemo še $4(x - \frac{3}{2})(x + 2) = 0$.

b) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Iz $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{6 \pm 0}{18}$

dobimo rešitvi $x_{1,2} = \frac{1}{3}$.

Zapišemo še $9(x - \frac{1}{3})^2 = 0$.

c) $x^2 - 4x + 5 = 0$

Iz $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2}$

dobimo rešitvi $x_1 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$ in $x_2 = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$.

Zapišemo še $(x - 2 - i)(x - 2 + i) = 0$.

2. Zapišimo kvadratno enačbo, za katero je vsota rešitev 10, produkt rešitev pa 24, ter jo nato tudi rešimo.

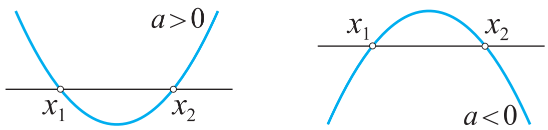
Ker pri enačbi lahko vzamemo, da je $a = 1$, z Viètovimi formulami iz $-b = x_1 + x_2 = 10$ dobimo $b = -10$ in $c = x_1 \cdot x_2 = 24$.
Zapišemo še enačbo $x^2 - 10x + 24 = 0$ in jo z razstavljanjem v $(x - 4)(x - 6) = 0$ rešimo $x_1 = 4$ ter $x_2 = 6$.

3. Z uporabo nove spremenljivke rešimo enačbo $(x^2-1)^2+3(x^2-1)-10=0$.

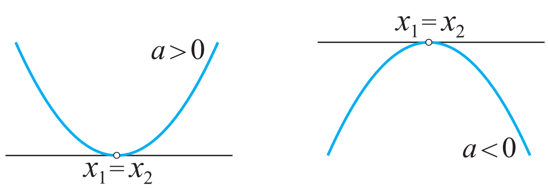
Zapišimo $t=x^2-1$ in enačbo $t^2+3t-10=0$ ter jo z razstavljanjem v $(t-2)(t+5)=0$ rešimo $t_1=2$, $t_2=-5$.
Iz $t_1=2=x^2-1$ dobimo enačbo $x^2=3$ z rešitvama $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$.
Iz $t_2=-5=x^2-1$ dobimo enačbo $x^2=-4$ z rešitvama $x_1=2i$, $x_2=-2i$.

Pomen diskriminante kvadratne funkcije:

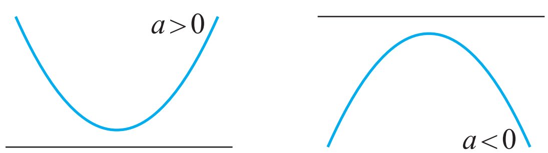
a) Če je $\boldsymbol{D>0}$, potem ima funkcija **dve različni realni ničli** oziroma parabola **seka abscisno os** v dveh različnih točkah.



b) Če je $\boldsymbol{D=0}$, potem ima funkcija **eno dvakratno ničlo** oziroma parabola se **dotika abscisne osi v temenu**.



c) Če je $\boldsymbol{D<0}$, potem funkcija **nima realnih ničel** oziroma parabola **ne seka abscisne osi** (ničli sta kompleksni števili in nastopata v konjugiranem paru).



1. Narišimo grafe kvadratnih funkcij.

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-6$

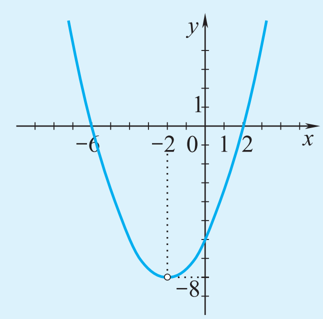
Ker je $f(0)=-6$, je točka $(0,-6)$ presečišče grafa z ordinatno osjo.

Iz $\frac{1}{2}(x^2+4x-12)=0$ in z razstavljanjem v $\frac{1}{2}(x+6)(x-2)=0$

poiščemo ničli $x_1=-6$, $x_2=2$.

Po formuli $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ dobimo koordinati temena $T(-2,-8)$.

Narišemo graf.



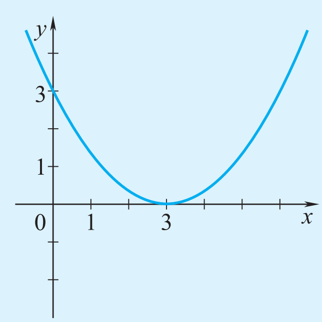
b) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3$

Ker je $f(0)=3$, je točka $(0,3)$ presečišče grafa z ordinatno osjo.

Iz $\frac{1}{3}(x^2-6x+9)=0$ in z razstavljanjem v $\frac{1}{3}(x-3)^2=0$

zapišemo ničli $x_{1,2}=3$.

Ker je ničla dvakratna, je teme $T(3,0)$. Narišemo graf.



c) $f(x) = -x^2 - 4x - 8$

Začetna vrednost funkcije je $f(0) = -8$.

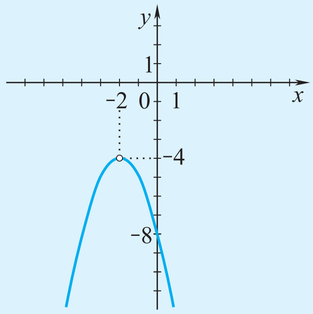
Ničli poiščemo po formuli

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{-2}$.

Ker je diskriminanta $D = -16$ negativna, funkcija nima realnih ničel.

Poiščemo še koordinati temena $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-1)} = -2$ in $q = f(-2) = -4$;

$T(-2, -4)$ ter narišemo graf.



2. Za katero realno število m se bo graf funkcije $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + mx + 5m + 36$ dotikal abscisne osi?

Graf kvadratne funkcije se dotika abscisne osi, če je njena diskriminanta D enaka 0.

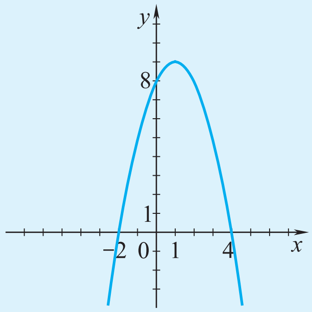
V enačbo $D = b^2 - 4ac = 0$ vstavimo $m^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (5m + 36) = 0$ in iz $m^2 - 5m - 36 = 0$ oz. $(m - 9)(m + 4) = 0$ zapišemo rešitvi $m_1 = 9$ ter $m_2 = -4$.

Kvadratna neenačba

Da ugotovimo, pri katerih x zavzame funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ **pozitivne vrednosti**, moramo rešiti **kvadratno neenačbo** $ax^2 + bx + c > 0$, da ugotovimo, pri katerih x zavzame funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ **negativne vrednosti**, pa moramo rešiti **kvadratno neenačbo** $ax^2 + bx + c < 0$. **Kvadratno neenačbo** $ax^2 + bx + c > 0$ ali $ax^2 + bx + c < 0$ rešimo tako, da najprej poiščemo morebitne realne ničle kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nato z upoštevanjem predznaka vodilnega koeficienta a narišemo približni potek grafa in iz grafa zapišemo interval ali unijo intervalov, na katerih je kvadratna funkcija pozitivna oz. negativna.

1. Rešimo neenačbo $-x^2 + 2x + 8 > 0$.

Zapišemo $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ in z razstavljanjem $-(x^2 - 2x - 8) = 0$ in $-(x - 4)(x + 2) = 0$ zapišemo ničli $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.
Z upoštevanjem predznaka vodilnega koeficienta ($a = -1 < 0$) narišemo približni potek grafa funkcije f.
Iz slike ugotovimo, da je graf funkcij f nad abscisno osjo na intervalu $(-2, 4)$.
Zapišemo rešitev neenačbe $-2 < x < 4$ oz. $x \in (-2, 4)$.



2. Za katera realna števila k enačba $kx^2 - 2x + 1 = 0$ nima realnih rešitev?

Za $D < 0$ enačba nima realnih rešitev. Zato iz $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot k \cdot 1 = 4 - 4k$ zapišemo neenačbo $4 - 4k < 0$, jo preoblikujemo v $-4k < -4$ in z deljenjem z -4 (znak neenakosti moramo obrniti) rešimo $k > 1$.

1. Zapišite predpis za kvadratno funkcijo, ki ima vodilni koeficient -5, konstantni člen 2, v točki 3 pa vrednost -13.

2. Zapišite predpis za kvadratno funkcijo z začetno vrednostjo -4, $f(1) = -3$ in $f(-1) = 1$.

3. Dana je kvadratna funkcija $f(x) = x^2 + bx + c$. Koliko sta linearni koeficient in konstantni člen, če je $f(1) = -1$ in $f(-2) = 11$?

4. Parabola $y = ax^2 - 2x + c$ gre skozi točki $(1, -2)$ in $(2, -1)$. Zapišite njeno enačbo.

5. Zapišite predpis za kvadratno funkcijo $f(x) = ax^2 + bx + c$, za katero je $f(1) = 2$, $f(2) = -3$ in $f(-1) = 6$.

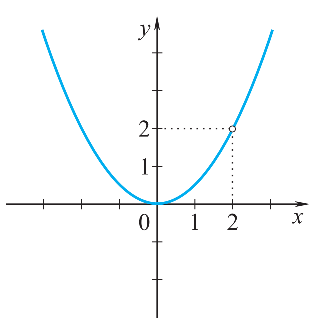
6. Zapišite predpis za kvadratno funkcijo, katere graf poteka skozi točke $A(-1, \frac{5}{4})$, $B(\frac{1}{3}, \frac{7}{12})$ in $C(2, \frac{7}{2})$.

7. Parabola $y = ax^2$ gre skozi točko $(-2, 8)$. Zapišite enačbo parabole in jo narišite.

8. Graf funkcije g dobimo tako, da graf funkcije $f(x) = 3x^3$ prezrcalimo čez abscisno os. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij f in g ter zapišite predpis za funkcijo g.

9. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij $f(x) = 2x^2 - 2$, $g(x) = 2x^2 + 2$, $h(x) = -2x^2 + 1$, $s(x) = -2x^2 - 1$.

10. Na sliki je narisana parabola $y = ax^2$.



a) Zapišite njeno enačbo.
b) Parabolo vzporedno premaknite v smeri ordinatne osi za 3 navzgor. Zapišite njeno enačbo.
c) Parabolo vzporedno premaknite v smeri abscisne osi za 2 levo. Zapišite njeno enačbo.

11. Parabolo z enačbo $y = (x - 2)^2$ zrcalite čez koordinatno izhodišče in zapišite enačbo dobljene parabole.

12. Narišite grafa funkcij $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ in $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ ter zapišite njuna presečišča. Koordinate točk računsko preverite.

13. Dopolnite do popolnega kvadrata.
a) $x^2 - 4x + 8$
b) $2x^2 + 16x - 1$
c) $-3x^2 - 12x - 4$

14. Zapišite koordinati temena in narišite grafe funkcij.
a) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$
b) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 2$
c) $f(x) = 3(x - \frac{5}{2})^2 - 3$
č) $f(x) = -(x + 3)^2 + 1$
d) $f(x) = -3(x - 1)^2 - 1$

15. Zapišite koordinati temena funkcije $f(x) = 2 - 2(x + 2)^2$ in v koordinatni sistem narišite njen graf. Zapišite enačbo simetrijske osi narisane parabole.

16. Zapišite koordinati temena funkcije $f(x) = (x - 3)^2 - 1$ in v koordinatni sistem narišite njen graf. Graf funkcije f vzporedno premaknite v smeri abscisne osi tako, da bo dobljeni graf simetričen glede na ordinatno os. Zapišite enačbo parabole, ki ste jo dobili.

17. Zapišite predpis za kvadratno funkcijo, katere graf gre skozi koordinatno izhodišče in ima teme v točki $(2, -2)$, in narišite njen graf.

18. Zapišite temensko obliko kvadratne funkcije, ki ima teme v točki $T(4, 5)$, njen graf pa seka ordinatno os pri -11.

19. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = -(x - 3)^2 + 1$ in $g(x) = |f(x)|$.

20. Spodnje funkcije zapišite v temenski obliki ter v istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij $f\colon x \mapsto f(x)$ in $g\colon x \mapsto |f(x)|$.
a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 6$
b) $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

21. Pri katerem x doseže kvadratna funkcija $f(x) = -x^2 - 8x - 21$ največjo vrednost? Kolikšna je ta vrednost?

22. Izračunajte, pri katerem x zavzame kvadratna funkcija $f(x) = x^2 + 6x - 1$ najmanjšo vrednost. Kolikšna je ta vrednost?

23. Poiščite realno število k, za katerega ima kvadratna funkcija $f(x) = (k + 1)x^2 + (1 + 2k)x + k - 11$ največjo vrednost pri $x_0 = -\frac{3}{2}$.

24. Za katero realno število b bo funkcija $f(x) = 4x^2 + bx + 14$ zavzela najmanjšo vrednost v točki $T(p, 5)$? Pri katerih p zavzame to vrednost?

25. Za funkcijo $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ zapišite koordinati temena. Kolikšna je največja vrednost, ki jo dana funkcija lahko doseže? Točke A, B in C so presečišča grafa funkcije f s koordinatnima osema. Zapišite njihove koordinate.

26. Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ doseže največjo vrednost 3 pri $x = 1$. Zapišite njen predpis, če je -1 njena ničla.

27. Število 100 zapišite kot vsoto dveh naravnih števil tako, da bo vsota njunih kvadratov najmanjša.

28. Število 30 zapišite kot vsoto dveh naravnih števil tako, da bo njun produkt največji.

29. Vsota števil a in b je 20. Za kateri števili a in b bo produkt $a(a - b)$ minimalen?

30. Obseg pravokotnika je 72 cm. Izračunajte dolžini stranic pravokotnika, tako da bo ploščina pravokotnika maksimalna.

31. V pravokotniku $ABCD$ je $|AB| + |BC| = 24$. Določite dolžini stranic pravokotnika tako, da bo dolžina diagonale najkrajša. Koliko meri diagonala?

32. Določite parameter b tako, da bo teme parabole $y = 2x^2 + bx + 1$ ležalo na premici $y = -3x - 4$.

33. Zapišite realne rešitve enačb.
a) $x^2 - 5x - 4 = 0$
b) $x^2 - x = 12$
c) $x^2 = 289$
č) $x^2 = 3x - 7$
d) $x(x + 2) = 7$
e) $9x^2 + 5 = 6 \cdot \sqrt{5} \cdot x$

34. V množici realnih števil rešite enačbe ter enačbo nato zapišite kot produkt linearnih faktorjev.
a) $x^2 - 12x - 13 = 0$
b) $x^2 - 5 = 0$
c) $x^2 - 2x - 5 = 0$

35. V množici kompleksnih števil rešite enačbe.
a) $x^2 - 2x + 2 = 0$
b) $x^2 + 9 = 0$
c) $x^2 + 13 = 4x$
č) $3(x^2 + 3) = 3 - 2x$

36. V množici kompleksnih števil rešite enačbe ter enačbo nato zapišite kot produkt linearnih členov.
a) $x^2 + 2 = 0$
b) $x^2 + 6x + 13 = 0$
c) $x^2 - 10x + 31 = 0$

37. Za katero realno število a ima enačba $ax^2 + (2a - 1)x + a - 11 = 0$ rešitev $x_1 = 1$? Poiščite še drugo rešitev enačbe.

38. Za katero realno število p ima enačba $x^2 + 2x + 3p = 1$ dvojno rešitev? Kolikšna je ta rešitev?

39. Poiščite realno število a, za katerega ima enačba $ax^2 - 5ax + 6a + 1 = 0$ dvojno rešitev. Zapišite rešitev enačbe.

40. Zapišite kvadratno enačbo v obliki $ax^2 + bx + c = 0$, ki ima rešitvi:
a) 2, 4
b) -9, 8
c) $\pm\sqrt{2}$
č) $1 \pm \sqrt{3}$

41. Zapišite kvadratno enačbo, za katero je vsota njenih rešitev 5, produkt rešitev pa 4, in jo nato tudi rešite.

42. Zapišite kvadratno enačbo z vsoto rešitev 10, če je produkt njenih rešitev 23. Zapišite rešitvi enačbe.

43. Za enačbo $mx^2 - 3(m-1)x - m - 1 = 0$ določite realno število m tako, da bosta rešitvi enačbe nasprotni števili, in enačbo tudi rešite.

44. Pri katerem k bosta rešitvi enačbe $kx^2 - (2k+1)x + 2k - 2 = 0$ obratni števili? Zapišite rešitvi enačbe.

45. Za kvadratno funkcijo $f(x) = 4x^2 + (m+1)x + m - 4$ določite realno število m tako, da bo vsota njenih ničel -2. Zapišite njeni ničli.

46. Naj bosta x_1 in x_2 rešitvi enačbe $x^2 - 2x - 1 = 0$. Izračunajte, kolikšna je vrednost izraza $(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2$.

47. Če naravno število n pomnožimo s 16, dobimo 105 manj, kot če število n kvadriramo. Izračunajte število n.

48. Vsota kvadratov zaporednih lihih naravnih števil je 514. Kateri števili sta to?

49. Ploščina pravokotnika z obsegom 54 cm je 180 cm^2. Izračunajte stranici pravokotnika.

50. Koliko merita stranici pravokotnika z obsegom 35 cm, če njegova diagonala meri 12˙5 cm?

51. V pravokotnem trikotniku je vsota dolžin katete a in hipotenuze c enaka 10 cm, kateta b pa meri polovico hipotenuze. Izračunajte dolžine stranic trikotnika. Rezultat zaokrožite na tri mesta.

52. Ploščina kvadrata s stranico a je za 80 cm^2 večja od ploščine pravokotnika, katerega ena stranica je dvakrat daljša od stranice kvadrata, druga stranica pa je za 12 cm krajša od stranice kvadrata. Izračunajte dolžine stranic kvadrata in pravokotnika.

53. Rešite enačbe.

a) $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{x}{2x-2} + \dfrac{x+2}{x^2-1} - \dfrac{6}{3x+3} = 0$

c) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x+5} + \dfrac{1}{5-x}$

č) $\dfrac{x-2}{x} + \dfrac{x}{x+2} = 3$

54. Z uvedbo nove neznanke v množici realnih števil rešite enačbe.

a) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

b) $x^4 = 64x^2$

c) $x^2(x^2 - 5) = 36$

55. Funkcijo zapišite še v preostalih dveh oblikah.

a) $f(x) = -(x+2)^2 + 1$

b) $f(x) = 3(x-1)(x+3)$

c) $f(x) = 4x^2 + 4x - 3$

56. Zapišite vse tri oblike predpisov za kvadratno funkcijo, ki ima začetno vrednost -21 ter ničli -1 in 7.

57. Ničli kvadratne funkcije $f(x) = x^2 + bx + c$ sta $\frac{1}{2}$ in -3. Zapišite predpis za kvadratno funkcijo f in izračunajte koordinati njenega temena.

58. Teme kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ z vodilnim koeficientom 2 je v točki $T(1, -8)$. Zapišite splošno obliko predpisa kvadratne funkcije f in izračunajte njeni ničli.

59. Poiščite ničli in koordinati temena kvadratne funkcije, presečišče grafa z ordinatno osjo ter narišite njen graf.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

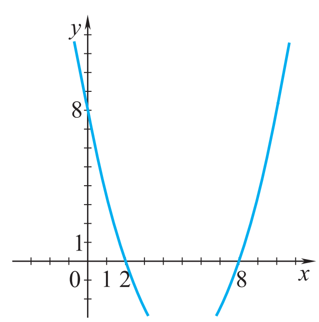
b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

c) $f(x) = 2x^2 + 6x + 4$

č) $f(x) = x^2 + 4x$

d) $f(x) = -3x^2 + 3$

60. Mihu je v zvezku zmanjkalo prostora in je narisal le del grafa kvadratne funkcije. Zapišite predpis za funkcijo f, katere graf je moral Miha narisati, in izračunajte koordinati temena funkcije f.



61. Dana je funkcija $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) Izračunajte njeni ničli, koordinati temena, presečišče grafa z ordinatno osjo in narišite njen graf.

b) Graf funkcije g dobimo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo v smeri ordinatne osi za 2 navzdol. Narišite graf funkcije g in zapišite njen predpis.

62. Narišite parabole.

a) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$

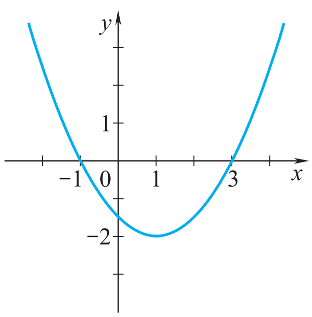
b) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

c) $y = -2x^2 - 4x - 3$

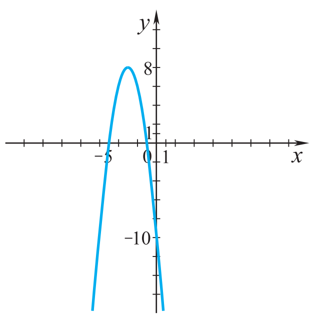
č) $y = x^2 - 4x - 2$

63. V koordinatni sistem narišite parabolo z enačbo $f(x) = 6 - 4x - 2x^2$. Nato dano parabolo zrcalite čez ordinatno os in zapišite njeno enačbo.

64. Zapišite temensko obliko kvadratne funkcije f, katere graf je na sliki. Nato zapišite še preostali dve obliki zapisa kvadratne funkcije.



65. Zapišite enačbo parabole, ki je na sliki.



66. Dana je funkcija $f(x) = 2x^2 + 10x + 8$.

a) Poiščite ničli, teme in presečišče grafa z ordinatno osjo in narišite njen graf.

b) V isti koordinatni sistem narišite še graf funkcije $g(x) = |f(x)|$.

67. Dana je funkcija $f(x) = x^2 - 4x$.

a) Zapišite ničli, koordinati temena in natančno narišite graf funkcije f.

b) Za katero število c bo funkcija $g\colon x \mapsto f(x - c)$ soda. Zapišite predpis za funkcijo g in narišite njen graf.

68. Dana je funkcija $f(x) = -x^2 - 6x - 5$.

a) Poiščite ničli, teme in presečišče grafa z ordinatno osjo in narišite njen graf.

b) Na katerem intervalu je funkcija f naraščajoča in na katerem intervalu padajoča?

69. Dana je kvadratna funkcija $f(x) = 3x^2 + bx + 9$. Koeficient b izberite tako, da bo graf potekal skozi točko $A(-1, 24)$. Zapišite predpis za kvadratno funkcijo f, izračunajte njeni ničli, teme in narišite njen graf.

70. Za katere vrednosti parametra m ima kvadratna funkcija $f(x) = (m - 1)x^2 + 3x + m + 1$ dvojno ničlo?

71. Za katero realno število m bo imela parabola iz množice parabol $y = (m - 2)x^2 + 2mx + 3m$ teme na abscisni osi?

72. Za kvadratno funkcijo $f(x) = mx^2 + (m + 2)x + \frac{9}{4}$ določite realno število m tako, da se bo njen graf dotikal abscisne osi.

73. Rešite neenačbe.

a) $x^2 + 2x - 8 < 0$

b) $-x^2 - x + 12 > 0$

c) $x^2 + 3 > x$

č) $x^2 + 5 \leq 4x$

d) $x^2 - 4x + 3 > 0$

74. Rešite kvadratno neenačbo $\frac{1}{3}x^2 - x > \frac{4}{3}$.

75. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 6$.

a) Zapišite presečišča grafa funkcije f s koordinatnima osema in narišite njen graf.

b) Rešite neenačbo $f(x) \geq 0$.

76. Za katero realno število k enačba $x^2 - 2x - 5k + 1 = 0$ nima realnih rešitev?

77. Za katero realno število p ima enačba $(p + 5)x^2 + 4x + 4 = 0$ dve različni realni rešitvi?

78. Dana je množica funkcij $f(x) = (k + 1)x^2 + 2x + 1$; $k \in \mathbb{R}$. Pri katerem k je $f(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$?

79. Poiščite realna števila b, za katera so funkcije $f(x) = -x^2 + bx - 25$ na celotnem definicijskem območju negativne.

80. Ali v množici funkcij $f(x) = mx^2 - 8x + m$; $m \in \mathbb{R}$ obstajajo funkcije, katerih grafi ne sekajo abscisne osi? Odgovor utemeljite.

81. Izračunajte presečišči parabole $y = -2x^2 - x + 11$ in premice $y = 3 - x$.

82. Izračunajte koordinate presečišč grafov funkcij $f(x) = x^2 - 5x + 5$ in $g(x) = 2x^2 - x + 8$.

83. V isti koordinatni sistem narišite paraboli $y = -x^2 - 6x$ in $y = x^2 + 4x + 8$ ter izračunajte koordinate presečišč.

84. Dani sta kvadratna funkcija $f(x) = -x^2 + 2x$ in linearna funkcija $g(x) = 3x - 6$.
a) V istem koordinatnem sistemu narišite grafa obeh funkcij.
b) Izračunajte koordinate presečišč grafov funkcij.

85. Za katero realno število a bo premica z enačbo $y = 4x - 10$ tangenta parabole z enačbo $y = ax^2 - 8x + 8$?

86. Dani sta funkciji $f(x) = -x^2 + x + 6$ in $g(x) = -x + 3$.
a) Narišite grafa obeh funkcij f in g v istem koordinatnem sistemu.
b) Izračunajte koordinate presečišč grafov funkcij f in g.
c) Natančno izračunajte razdaljo med presečiščema.

87. Določite realno število a funkcije $f(x) = ax^2 + 3x - 2$, tako da:
a) je $x = 2$ ničla funkcije,
b) ima funkcija maksimum pri $x = \frac{3}{2}$ in narišite njen graf,
c) funkcija nima realne ničle.

88. V 45 m globok vodnjak spustimo kamen. Enačba $v^2 = v_0^2 + 2gx$ opisuje hitrost kamna v po opravljeni poti x, enačba $x = v_0t + \frac{g}{2}t^2$ pa opravljeno pot x v času t ($v_0 = 0$ je začetna hitrost, $g \doteq 10\ \mathrm{m/s^2}$ je težni pospešek).
a) Kako globoko je kamen po 2 sekundah?
b) V kolikšnem času bo kamen dosegel dno vodnjaka?
c) S kolikšno hitrostjo udari kamen ob tla?
č) Koliko časa preteče od trenutka, ko spustimo kamen, do trenutka, ko zaslišimo pok? Enačba $s = v \cdot t$ opisuje pot s, ki jo opravi zvok v času t s hitrostjo $v = 340\ \mathrm{m/s}$.

16. POLINOMI

Polinom je funkcija $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, pri čemer so koeficienti $a_n, a_{n-1} \ldots a_0$ poljubna realna števila in $a_n \neq 0$.

Število a_n imenujemo **vodilni koeficient**, a_0 **konstantni člen** in n **stopnja polinoma** p.

Vrednost polinoma p v točki c je število $p(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0$.

Za polinom $p(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^2 - 3x - 6$ zapišimo stopnjo polinoma, vodilni koeficient, vodilni člen in konstantni člen ter izračunajmo vrednosti polinoma v točkah 0, 1 in –3.

Stopnja polinoma je 5, vodilni koeficient je 3, vodilni člen $3x^5$, konstantni člen pa –6.
Vrednost polinoma p v točki 0 je $p(0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 0 - 3 \cdot 0 - 6 = -6$.
Vrednost polinoma p v točki 1 je $p(1) = 3 \cdot 1^5 + 2 \cdot 1^4 - 1^2 - 3 \cdot 1 - 6 = -5$.
Vrednost polinoma p v točki –3 je $p(-3) = 3 \cdot (-3)^5 + 2 \cdot (-3)^4 - (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 6 = -573$.

Polinoma p in q sta **enaka**, če sta iste stopnje in se ujemata v vseh koeficientih pri potencah z enakimi eksponenti.

Če sta polinoma p in q **enaka**, potem je $p(x) = q(x)$ za vsak x iz definicijskega območja.

Poiščimo koeficienta a in b tako, da bosta polinoma $p(x) = (x + 3)^3(2x - 1)$ in $q(x) = 2x^4 + ax^3 + 45x^2 + 27x + b$ enaka.

Da bosta polinoma enaka, mora biti tudi $p(0) = q(0)$ in $p(1) = q(1)$.
Izračunamo $p(0) = (0 + 3)^3(2 \cdot 0 - 1) = -27$ in $q(0) = 2 \cdot 0^4 + a \cdot 0^3 + 45 \cdot 0^2 + 27 \cdot 0 + b = b$ in zapišemo $b = -27$.
Izračunamo $p(1) = (1 + 3)^3(2 \cdot 1 - 1) = 64$ in
$q(1) = 2 \cdot 1^4 + a \cdot 1^3 + 45 \cdot 1^2 + 27 \cdot 1 - 27 = 2 + a + 45 + 27 - 27 = a + 47$
in iz $64 = a + 47$ zapišemo $a = 17$.

S polinomi lahko računamo. Pri tem veljajo **enaki računski zakoni** kot za računanje **s celimi števili**.

1. **Polinome seštevamo (odštevamo)** tako, da seštejemo (odštejemo) koeficiente pri potencah z enako stopnjo. **Stopnja vsote** polinomov je manjša ali enaka večji od stopenj posameznih sumandov.
2. **Polinome množimo** tako, da pomnožimo vsak člen prvega polinoma z vsakim členom drugega, nato pa člene z enakim eksponentom seštejemo.

   Vodilni člen produkta polinomov **je produkt vodilnih členov** posameznih faktorjev, **konstantni člen produkta** polinomov **je produkt konstantnih členov** posameznih faktorjev. **Stopnja produkta** polinomov je vsota stopenj posameznih faktorjev.

1. Izračunajmo vsoto, razliko in produkt polinomov $p(x) = 2x^3 - x^2 + x$ in $q(x) = x^2 + 1$.

$p(x) + q(x) = 2x^3 - x^2 + x + x^2 + 1 = 2x^3 + x + 1$
$p(x) - q(x) = 2x^3 - x^2 + x - (x^2 + 1) = 2x^3 - x^2 + x - x^2 - 1 = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$
$p(x) \cdot q(x) = (2x^3 - x^2 + x)(x^2 + 1) = 2x^5 + 2x^3 - x^4 - x^2 + x^3 + x = 2x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x$

2. Za polinom $p(x) = (2x - 1)^3 \cdot (x + 2)^4$ zapišimo stopnjo ter vodilni in konstantni člen.

Ker je stopnja produkta polinomov enaka vsoti stopenj posameznih faktorjev, je stopnja polinoma p enaka $3 + 4 = 7$.

Ker je vodilni člen produkta polinomov enak produktu vodilnih členov posameznih faktorjev, je vodilni člen polinoma p enak $(2x)^3 \cdot x^4 = 8x^7$.

Konstantni člen produkta polinomov je enak produktu konstantnih členov posameznih faktorjev, zato je konstantni člen polinoma p enak $(-1)^3 \cdot 2^4 = -1 \cdot 16 = -16$.

3. **Osnovni izrek o deljenju polinomov**: Za poljubna polinoma p stopnje n in q stopnje m ($n > m$) obstajata natanko določena polinoma k (stopnje $n - m$) in r (stopnja je manjša od m ali $r = 0$), tako da je $p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$.

   Polinom $\boldsymbol{k}$ imenujemo **količnik**, polinom $\boldsymbol{r}$ pa **ostanek** pri deljenju polinoma p s polinomom q.

   Če je ostanek pri deljenju polinoma p s polinomom q enak 0 ($r = 0$), potem je polinom p deljiv s polinomom q oz. polinom q deli polinom p in velja $p(x) = k(x) \cdot q(x)$.

1. Polinom $p(x) = 3x^4 + x^3 + x + 1$ delimo s polinomom $q(x) = x^2 - 1$.

Izračunamo.

$$
\begin{array}{l}
(3x^4 + x^3 + x + 1) : (x^2 - 1) = 3x^2 + x + 3 \\
\underline{-(3x^4 - 3x^2)} \\
\quad x^3 + 3x^2 + x + 1 \\
\underline{-(x^3 - x)} \\
\quad 3x^2 + 2x + 1 \\
\underline{-(3x^2 - 3)} \\
\quad 2x + 4
\end{array}
$$

Količnik je $k(x) = 3x^2 + x + 3$, ostanek pa $r(x) = 2x + 4$.

Po osnovnem izreku o deljenju zapišemo $3x^4 + x^3 + x + 1 = (3x^2 + x + 3)(x^2 - 1) + 2x + 4$.

2. Poiščimo števili a in b tako, da bo polinom $p(x) = 2x^4 + 3x^3 + ax + b$ deljiv s polinomom $q(x) = x^2 + x$.

Delimo.

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 + 3x^3 + ax + b) : (x^2 + x) = 2x^2 + x - 1 \\
\underline{-(2x^4 + 2x^3)} \\
\qquad x^3 + ax + b \\
\qquad \underline{-(x^3 + x^2)} \\
\qquad\quad -x^2 + ax + b \\
\qquad\quad \underline{-(-x^2 - x)} \\
\qquad\quad (a + 1)x + b
\end{array}
$$

Da bo polinom p deljiv s polinomom q, mora biti ostanek $r(x) = (a + 1)x + b$ enak 0. Torej morajo biti koeficienti polinoma r enaki 0. To pa je za $a = -1$ in $b = 0$.

Če **delimo** polinom p z **linearnim polinomom** $x - c$, je **ostanek enak vrednosti polinoma $\boldsymbol{p}$ v točki** c: $p(x) = (x - c)k(x) + p(c)$.

Število $\boldsymbol{c}$ **je ničla polinoma $\boldsymbol{p}$** natanko takrat, ko je $\boldsymbol{p(c) = 0}$.

Število **c je ničla polinoma p** natanko takrat, ko je polinom **p deljiv z $x - c$**.

Število c je **enojna (enostavna) ničla** polinoma p, če je $p(x) = (x - c)q(x)$ in $q(c) \neq 0$.

Število c je **k-kratna ničla** polinoma p, če je $p(x) = (x - c)^k q(x)$ in $q(c) \neq 0$.

1. Polinom $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 13$ delimo s polinomom $q(x) = x + 4$. Ali je število -4 ničla polinoma p? Kolikšna je vrednost polinoma p v točki -4?

Delimo.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 2x + 13) : (x + 4) = x^2 - x + 2 \\
\underline{-(x^3 + 4x^2)\qquad\qquad} \\
\qquad\quad -x^2 - 2x + 13 \\
\qquad\ \ \underline{-(x^2 - 4x)\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad 2x + 13 \\
\qquad\qquad \underline{-(-2x + 8)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 5
\end{array}
$$

Zapišimo $x^3 + 3x^2 - 2x + 13 = (x^2 - x + 2)(x + 4) + 5$.

Pri deljenju polinoma p s polinomom $q(x) = x + 4 = (x - (-4))$ je ostanek $r = 5$, zato število -4 ni ničla polinoma p in je $p(-4) = 5$.

2. Pokažimo, da je število 1 trojna ničla polinoma $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1$.

Delimo polinom p s polinomom $q(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1) : (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x^2 + 1 \\
\underline{-(x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2)\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{-(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Število 1 je trojna ničla polinoma p, saj je polinom p deljiv s polinomom q.

Osnovni izrek algebre: Vsak **nekonstanten polinom** ima **vsaj eno** kompleksno **ničlo**.

Polinom n-te stopnje ima n ničel (upoštevamo tudi kratnost ničel). Če so števila $x_1, x_2 \ldots x_n$ **vse ničle polinoma** p, potem lahko polinom zapišemo v obliki $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.

Kompleksne ničle **polinoma z realnimi koeficienti** nastopajo **v konjugiranih parih**. Polinom **lihe stopnje** z realnimi koeficienti ima **vsaj eno realno ničlo**.

1. Razstavimo polinom $p(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ na linearne faktorje in zapišimo vse njegove ničle.

Razstavimo $p(x) = x^2(x - 1) - 9(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x - 3)(x + 3)$.

Ničle so $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ in $x_3 = -3$.

2. Ugotovimo, ali je število -2 dvojna ničla polinoma $p(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$, in zapišimo še preostali ničli.

Delimo polinom p s polinomom $q(x) = (x - (-2))^2 = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4) : (x^2 + 4x + 4) = x^2 - 1 \\
\underline{-(x^4 + 4x^3 + 4x^2)\qquad\quad} \\
\qquad\qquad -x^2 - 4x - 4 \\
\qquad\quad \underline{-(-x^2 - 4x - 4)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Zapišemo in razstavimo v produkt

$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = (x^2 - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)^2$.

Ničle polinoma p so $x_{1,\,2} = -2$, $x_3 = 1$ in $x_4 = -1$.

3. Zapišimo polinom p tretje stopnje, ki ima ničle 1, 2 in -3, v točki -1 pa vrednost 36.

Nastavimo $p(x) = a_3(x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

Iz $p(-1) = 36$ zapišemo enačbo $a_3(-1 - 1)(-1 - 2)(-1 + 3) = 36$ in izračunamo $a_3 = 3$.

Zapišemo $p(x) = 3(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 3x^3 - 21x + 18$.

Če je okrajšani ulomek $\frac{c}{d}$ **ničla** polinoma **s celimi koeficienti**, potem c **deli konstantni člen** a_0 in d **vodilni koeficient** a_n. **Racionalne ničle polinoma s celimi koeficienti in vodilnim koeficientom 1 so cela števila**. Zato si pri iskanju racionalnih ničel polinomov pomagamo tako, da kot možne racionalne ničle danega polinoma zapišemo vse okrajšane ulomke $\frac{c}{d}$ z zgornjo lastnostjo, nato pa računsko preverimo, katero od teh števil je ničla polinoma.

Poiščimo vse racionalne ničle polinoma $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Najprej zapišemo možnosti za racionalne ničle: $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$.

Izračunamo.

$p(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 3 = 0$

$p(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 3 = 12$

$p(3) = 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 3 = 60$

$p(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 8 \cdot (-3) + 3 = 0$

$p(\frac{1}{2}) = 2 \cdot (\frac{1}{3})^3 + 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 0$

Števila 1, -3 in $\frac{1}{2}$ so vse ničle polinoma p, saj je polinom p tretje stopnje in ima natanko 3 ničle.

Hornerjev algoritem je postopek za **računanje vrednosti polinoma** p v dani točki c oziroma za deljenje polinoma p z linearnim polinomom $x - c$.

Pomagamo si s tabelo:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$ a_1	a_0
c		cb_{n-1}	cb_{n-2}	$\dots$ cb_1	cb_0
	$a_n = b_{n-1}$	$a_{n-1} + cb_{n-1} = b_{n-2}$	$a_{n-2} + cb_{n-2} = b_{n-3}$	$\dots$ $a_1 + cb_1 = b_0$	$a_0 + cb_0 = p(c)$

Števila $b_{n-1}, b_{n-2} \dots b_0$ so **koeficienti količnika**, ki ga dobimo pri deljenju polinoma p s polinomom $x - c$. Torej je $p(x) = (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0) + p(c)$.

1. S Hornerjevim algoritmom delimo $p(x) = 2x^3 - x^2 - x - 4$ s polinomom $q(x) = x - 3$.

	2	−1	−1	−4
3		6	15	42
	2	5	14	38

$p(x) = 2x^3 - x^2 - x - 4 = (2x^2 + 5x + 14)(x - 3) + 38$

2. S Hornerjevim algoritmom pokažimo, da je število 4 dvojna ničla polinoma $p(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48$. Polinom p zapišimo kot produkt in zapišimo še njegovo tretjo ničlo.

	1	−5	−8	48
4		4	−4	−48
	1	−1	−12	0
4		4	12	
	1	3	0	

Ker je $p(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48 = (x - 4)^2(x + 3)$, je $x_3 = -3$ tretja ničla polinoma p.

3. Poiščimo vse rešitve enačbe $2x^3 + 2x + 2 = 3x^2$.

Enačbo najprej uredimo v $2x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 0$ in zapišemo možnosti za racionalne ničle $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}$.
Nato s Hornerjevim algoritmom izračunamo.

	2	−3	2	2
$-\frac{1}{2}$		−1	2	−2
	2	−4	4	0

Racionalna rešitev enačbe je le $x_1 = -\frac{1}{2}$.

Enačbo zapišemo v obliki $(2x^2 - 4x + 4)(x - \frac{1}{2}) = 0$.

Kvadratno enačbo $2x^2 - 4x + 4 = 0$ rešimo z uporabo formule

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{4} = \frac{4 \pm 4i}{4} = 1 \pm i.$$

Zapišemo $x_2 = 1 + i$ in $x_3 = 1 - i$.

4. Polinoma $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ in $q(x) = 2x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 12x + 8$ zapišimo kot produkt linearnih oz. v realnem nerazcepnih kvadratnih faktorjev.

Poiščimo realne ničle polinoma p.

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0
2		2	−6	
	1	−3	0	
3		3		
	1	0		

Ničle polinoma p so $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ in $x_3 = 3$, zato je $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Poiščimo realne ničle polinoma q.

	2	6	8	12	8
−1		−2	−4	−4	−8
	2	4	4	8	0
−2		−4	0	−8	
	2	0	4	0	

Količnik pri deljenju q z $(x + 1)(x + 2)$ je $2x^2 + 4$, ki je v realnem nerazcepen, saj je diskriminanta $D = b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -32$ negativna.

Zapišemo $q(x) = 2(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$.

Graf polinoma

Polinom je zvezna funkcija, **zato je graf polinoma** $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ **nepretrgana krivulja**. V **ničlah lihe stopnje** polinom p **spremeni predznak** in njegov **graf seka abscisno os**, v **ničlah sode stopnje** pa polinom p **ne spremeni predznaka** in se njegov **graf** samo **dotakne abscisne osi**. **Graf polinoma seka ordinatno os** v točki $(0, a_0)$. Vedenje polinoma p **daleč od izhodišča** določa vodilni člen $a_n x^n$. To je odvisno od stopnje tega člena in predznaka vodilnega koeficienta. **Polinom p ima daleč od izhodišča enak predznak kot** (potenčna funkcija) $a_n x^n$.

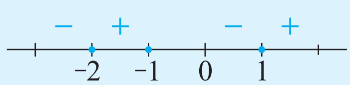
1. Za polinom $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ poiščimo ničle, presečišče grafa z ordinatno osjo, predznak na posameznih intervalih in narišimo njegov graf.

Ničle polinoma p najlaže poiščemo z razstavljanjem $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 =$
$= x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$.

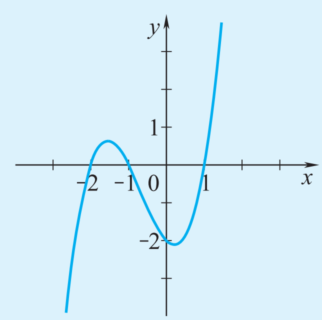
Ničle so $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ in $x_3 = 1$.

Ker je $p(0) = -2$, graf polinoma p seka ordinatno os v točki $(0, -2)$.

Vse ničle polinoma p so prve stopnje (lihe stopnje) in ker je $p(0) = -2 < 0$, za predznak polinoma p velja:



Narišemo približni potek grafa.

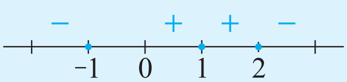


2. Za polinom $p(x) = -x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x + 2$ poiščimo ničle, presečišče grafa z ordinatno osjo, predznak na posameznih intervalih in narišimo njegov graf.

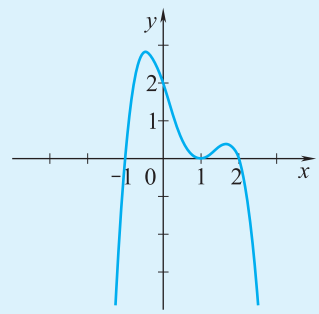
Možnosti za ničle polinoma p so ± 1 in ± 2.
Poiščemo jih s Hornerjevim algoritmom.

	-1	3	-1	-3	2
1		-1	2	1	2
	-1	2	1	-2	0
1		-1	1	2	
	-1	1	2	0	
-1		1	-2		
	-1	2	0		
2		-2			
	-1	0			

Ničle so $x_{1,2} = 1$, $x_3 = -1$ in $x_4 = 2$.
Ker je $p(0) = 2$, graf polinoma p seka ordinatno os v točki $(0, 2)$.
Število 1 je ničla polinoma p druge stopnje, preostali ničli -1 in 2 sta prve stopnje in ker je $p(0) = 2 > 0$, za predznak polinoma p velja:



Narišemo graf.



1. Dan je polinom $p(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 5$. Zapišite vodilni koeficient in konstantni člen ter izračunajte vrednost polinoma p za $x = 2$ in za $x = -1$. Kolikšna je vsota vseh koeficientov polinoma p?

2. Zapišite polinom p tretje stopnje z vodilnim koeficientom 2 in konstantnim členom -3, če je $p(1) = -2$ in $p(-2) = 7$.

3. Dana sta polinoma $p(x) = 2x^3 + x - 4$ in $q(x) = -x^3 + x^2 + 2$. Zapišite predpise za polinome $-2p(x)$, $p(x) + q(x)$, $q(x) - p(x)$, $p(x) \cdot q(x)$.

4. Dan je polinom $p(x) = (2x - 3)^3(x^2 + 1)^2$. Zapišite stopnjo polinoma, vodilni koeficient, vodilni člen, konstantni člen in izračunajte vrednosti polinoma v točki 2.

5. Poiščimo koeficienta a in b tako, da bosta polinoma $p(x) = ax^5 - 20x^4 - 10x^3 + 45x^2 - 27$ in $q(x) = (x + 1)^2(2x + b)^3$ enaka.

6. Polinom p delite s polinomom q.
a) $p(x) = 3x^3 - 8x^2 + 5x - 3$, $q(x) = x - 2$
b) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 30$, $q(x) = x - 3$
c) $p(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 6$, $q(x) = x^2 - 3x + 1$
č) $p(x) = x^6 - 3x^4 + 5x^3 - 11x + 12$, $q(x) = x^2 - 2x + 4$
d) $p(x) = x^5 - 1$, $q(x) = x^2 + x + 1$

7. Kolikšen je količnik in kolikšen ostanek pri deljenju polinoma $p(x) = 2x^5 + 4x^4 - x^3 + 6x + 4$ s polinomom $q(x) = x + 4$?

8. Kolikšen je ostanek pri deljenju polinoma $p(x) = 2x^4 + 6x^3 - x^2 + 13$ z linearnim polinomom $q(x) = x + 3$? Kolikšna je vrednost polinoma p v točki -3?

9. Zapišite količnik in ostanek, ki ju dobite pri deljenju polinoma $p(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ z linearnim polinomom $x - 5$. Ali je število 5 ničla polinoma p?

10. Pokažite, da je število $x = 3$ dvojna ničla polinoma $p(x) = x^3 - 2x^2 - 15x + 36$. Katero realno število je še ničla polinoma p?

11. Za katero realno število a bo polinom $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x + a$ deljiv s polinomom $q(x) = 2x - 1$?

12. Za kateri realni števili a in b je polinom $p(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + b$ deljiv s polinomom $q(x) = x^2 - x + 2$?

13. S Hornerjevim algoritmom izračunajte vrednost polinoma $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ za $x = 2$ in za $x = -3$.

14. S Hornerjevim algoritmom delite polinom $p(x) = 3x^4 - x^2 + 3x + 1$ z linearnima polinomoma $q(x) = x - 3$ in $r(x) = x + 1$.

15. Dan je polinom $p(x) = 4x^3 - 7x + 4$.
a) Z uporabo Hornerjevega algoritma izračunajte $p(-\frac{3}{2})$.
b) Po osnovnem izreku o deljenju polinomov zapišite polinom p v obliki $p(x) = k(x) \cdot (2x + 3) + r(x)$.

16. Polinom $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x - 5$ delite s polinomom $q(x) = (x + 2)(x - 4)$.

17. Za katero realno število a je polinom $p(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 - x - 2$ deljiv s polinomom $q(x) = (x + 2)$?

18. Za kateri realni števili a in b bosta $x_1 = 3$ in $x_2 = -2$ ničli polinoma $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 24$?

19. Pokažite, da je število $x = 2$ dvojna ničla polinoma $p(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$. Ali ima polinom p še kakšno realno ničlo?

20. Za kateri realni števili a in b je polinom $p(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ deljiv s polinomom $q(x) = (x - 1)^2$?

21. Pokažite, da je -5 dvojna ničla polinoma $p(x) = x^4 + 10x^3 + 21x^2 - 40x - 100$. Polinom p zapišite kot produkt linearnih faktorjev in zapišite še preostali dve ničli.

22. Zapišite polinom p četrte stopnje z realnimi koeficienti, ki ima začetno vrednost -8, če je število 2 njegova dvojna ničla in je polinom p deljiv s polinomom $x^2 + 2$.

23. Zapišite realne ničle polinomov.
a) $p(x) = x^3 - 7x + 6$
b) $p(x) = x^4 - 12x^2 + 16x$
c) $p(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$
č) $p(x) = 9x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1$
d) $p(x) = 4x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 7x - 2$
e) $p(x) = 2x^5 + x^4 - 18x - 9$

24. Zapišite racionalne ničle polinoma $p(x) = 4x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 12x - 3$.

25. Poiščite realne rešitve enačb.
a) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 4x + 12$
b) $\frac{1}{2}x^5 - 3x^4 = 4x^2 - 6x^3$
c) $2x^5 = 3x^4 + 3x^2 + 2x$

26. Za katera realna števila zavzame polinom $p(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 11$ vrednost 5?

27. Dolžine stranic kvadra so tri zaporedna naravna števila. Izračunajte njihove dolžine, če je prostornina kvadra 120 cm^3.

28. Če k sedemkratniku števila n prištejemo 100 in vsoto delimo z $n - 2$ ter od kvocienta odštejemo 20, je dobljena razlika enaka kvadratu števila n. Izračunajte število n.

29. Zapišite vse ničle polinomov (tudi kompleksne).
a) $p(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
b) $p(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$
c) $p(x) = x^3 - 7x + 6$
č) $p(x) = 8x^4 - 12x^3 + 2x^2 + 3x - 1$
d) $p(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 6x + 8$
e) $p(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 15x$
f) $p(x) = x^4 + \frac{11}{2}x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 10x + 3$

30. Z računom pokažite, da je kompleksno število $3i$ ničla polinoma $p(x) = -2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 45x - 27$. Koliko je $p(-i)$?

31. Rešite enačbo $x^3 + 3x = 3x^2 + 9$ in zapišite vse tri rešitve.

32. Poiščite vse rešitve enačb.
a) $4x^2 = x^5 - 4x^4 + 6x^3$
b) $2x + 6 = 2x^4 - x^3 + x^2$
c) $3x^3 + x^2 = 6x + 2$

33. Rešite enačbo $x^4 + 20x = 4x^3 + 25$, če veste, da je število $2 - i$ njena rešitev.

34. Poiščite realne ničle polinoma p in polinom zapišite kot produkt linearnih oz. nerazcepnih kvadratnih faktorjev.
a) $p(x) = x^4 + 10x^3 + 29x^2 + 32x + 12$
b) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$
c) $p(x) = 3x^5 + 14x^4 + 13x^3 - 6x^2$
č) $p(x) = x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 4x$
d) $p(x) = x^5 + 7x^4 + 19x^3 + 27x^2 + 20x + 6$

35. Dan je polinom $p(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$. Ali je $\frac{1}{2}$ ničla polinoma p? Poiščite ničle polinoma p in ga zapišite kot produkt linearnih faktorjev.

36. Zapišite polinom p z realnimi koeficienti in vodilnim členom $2x^3$, če so 2, 3 in $-\frac{1}{2}$ njegove ničle in je $p(0) = 6$.

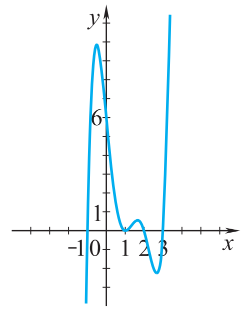
37. Zapišite polinom p četrte stopnje z realnimi koeficienti, če so $x_1 = 1$, $x_{2,\,3} = -4$ in $x_4 = 5$ njegove ničle in je vrednost polinoma p za $x = -3$ enaka 96.

38. Zapišite polinom p tretje stopnje z realnimi koeficienti, če sta $x_1 = 6$ in $x_2 = i$ njegovi ničli in je 24 njegova začetna vrednost.

39. Zapišite polinom p četrte stopnje z realnimi koeficienti, če so $x_1 = -1$, $x_2 = 6$ in $x_3 = 2 - i$ njegove ničle in je vrednost polinoma p za $x = 2$ enaka 12.

40. Rešite neenačbe.
a) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 > 0$
b) $x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 23x - 12 < 0$
c) $-x^3 + 3x^2 + 9x > 27$
č) $x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 15x^2 \geq 0$

41. Na sliki je graf polinoma p pete stopnje.



a) Kolikšna je začetna vrednost polinoma p?
b) Zapišite ničle polinoma p in ugotovite njihovo kratnost.
c) Na katerih intervalih je polinom p pozitiven in na katerih intervalih je negativen?

42. Zapišite ničle polinoma $p(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 2)$ in presečišče grafa z ordinatno osjo ter narišite njegov graf. Graf polinoma q dobimo tako, da graf polinoma p prezrcalimo čez abscisno os. Narišite graf polinoma q in zapišite predpis za polinom q.

43. Zapišite ničle polinoma p in presečišče grafa z ordinatno osjo in narišite njegov graf.
a) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
b) $p(x) = -2x^3 - 6x^2 + 2x + 6$
c) $p(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$
č) $p(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 8x$
d) $p(x) = -x^4 + x^3 + 7x^2 - x - 6$
e) $p(x) = x^5 - 13x^3 + 12x^2$

44. Dan je polinom $p(x) = \frac{1}{2}(x - 3)(x + 2)^2$.
a) Zapišite ničle polinoma p in presečišče grafa polinoma z ordinatno osjo in narišite njegov graf.
b) V isti koordinatni sistem narišite graf polinoma $q(x) = |p(x)|$.

45. Polinom p tretje stopnje z realnimi koeficienti ima ničlo $x_1 = -\frac{1}{2}$ in dvojno ničlo $x_{2,\,3} = 2$. Graf polinoma seka ordinatno os v točki (0, 2).
a) Narišite graf polinoma p.
b) Zapišite predpis za polinom p.

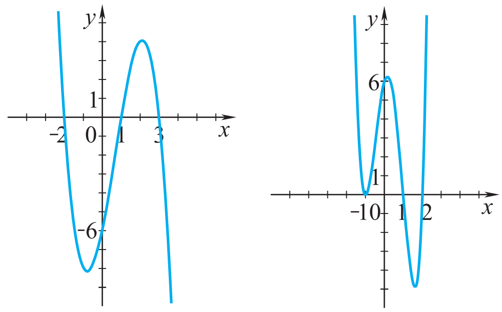
46. Dan je polinom $p(x) = 2x - \frac{1}{2}x^3$.

a) Za katera realna števila so vrednosti polinoma p nenegativne?

b) Narišite graf polinoma p.

c) V isti koordinatni sistem narišite še graf polinoma $x \mapsto |p(x)|$.

47. Na sliki sta graf polinoma p tretje stopnje in graf polinoma q četrte stopnje. Zapišite njuna predpisa.



48. Izračunajte presečišče grafa polinoma $p(x) = -2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 6x + 7$ s premico z enačbo $2x + y + 1 = 0$.

49. Dan je polinom $p(x) = \frac{1}{3}(x + 1)(x - 3)^2$.

a) Zapišite ničle polinoma p in presečišče grafa polinoma z ordinatno osjo.

b) Narišite graf polinoma p.

c) Izračunajte presečišče grafa polinoma s premico $y = -x + 3$.

50. Narišite graf polinoma
$p(x) = 3x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 9x - 6$
(izračunajte ničle in presečišče grafa z ordinatno osjo; računanje ekstremov ni potrebno)
in zapišite rešitev neenačbe $p(x) \leq 0$.

51. Dan je polinom $p(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Izračunajte $p(-2) + p(-\frac{1}{2})$.

b) Zapišite ničle polinoma p in presečišče grafa polinoma p z ordinatno osjo.

c) Narišite graf polinoma p.

52. Dan je polinom $p(x) = x^4 - 8x^3 + ax^2 - 22x + b$.

a) Za kateri realni števili a in b bo imel polinom ničli 2 in 4?

b) Poiščite preostali ničli polinoma p.

c) Narišite graf polinoma p.

17. RACIONALNE FUNKCIJE

Racionalna funkcija je okrajšan kvocient dveh polinomov $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.

Definicijsko območje racionalne funkcije so **vsa realna števila razen ničel imenovalca**.

Ničle racionalne funkcije so ničle števca.

Poli racionalne funkcije so **ničle imenovalca**. V **polih** funkcija f **ni definirana**. V vsakem **polu** ima graf racionalne funkcije **navpično asimptoto**.

Racionalna funkcija spremeni predznak le v ničlah ali polih lihe stopnje.

Za dani racionalni funkciji f in g zapišimo ničle, pole, definicijsko območje ter zapišimo, na katerih intervalih sta posamezni funkciji pozitivni in na katerih intervalih sta negativni.

1. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$

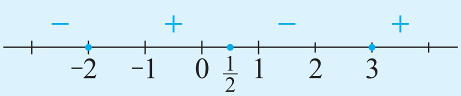
Ničle racionalne funkcije so rešitve enačbe $2x - 1 = 0$. Ničla je $x_1 = \frac{1}{2}$.

Razstavimo imenovalec $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ in zapišimo pole $x_1 = 3$ ter $x_2 = -2$.

Definicijsko območje funkcije f je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$.

Izračunajmo začetno vrednost funkcije $f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0^2 - 0 - 6} = \frac{1}{6} > 0$.

Zapišemo predznak funkcije f (ničla in poli so prve (lihe) stopnje, zato se predznak funkcije povsod spremeni).



Funkcija f je pozitivna na $(-2, \frac{1}{2})$ in $(3, \infty)$, negativna pa na $(-\infty, -2)$ in $(\frac{1}{2}, 3)$.

2. $g(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 2x^2}$

Razstavimo števec
$x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2-1) = (x+1)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)$
in zapišimo ničle $x_{1,2} = -1$, $x_3 = 1$.

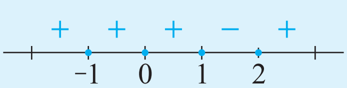
Razstavimo imenovalec $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ in zapišimo pole $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 2$.

Definicijsko območje funkcije g je $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Začetno vrednost funkcije g ne moremo izračunati, ker za $x = 0$ funkcija g ni definirana, zato izračunamo npr.:

$g(3) = \frac{3^3 + 3^2 - 3 - 1}{3^3 - 2 \cdot 3^2} = \frac{32}{9} > 0$.

Zapišemo predznak funkcije g (ničla -1 in pol 0 sta druge (sode) stopnje, zato funkcija g v teh točkah ne spremeni predznaka).



Funkcija g je pozitivna na $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ in $(2, \infty)$, negativna pa na $(1, 2)$.

Vedenje racionalne funkcije **daleč od izhodišča je odvisno od stopenj števca in imenovalca**.
Naj bo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Imamo tri možnosti:

a) Če je **stopnja števca manjša od stopnje imenovalca** ($n < m$), je premica $y = 0$ **vodoravna asimptota** grafa racionalne funkcije f.

b) Če sta **stopnji števca in imenovalca enaki** ($n = m$), je premica $y = \frac{a_n}{b_m}$ **vodoravna asimptota** grafa racionalne funkcije f.

c) Če je **stopnja števca večja od stopnje imenovalca** ($n > m$), števec p delimo z imenovalcem q:
$p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$.

Potem je krivulja $y = k(x)$ asimptota grafa racionalne funkcije f.

1. Za dano funkcijo $f(x) = \frac{2x-2}{x+2}$ zapišimo ničle, pole, enačbo asimptote in presečišče grafa z ordinatno osjo, predznak funkcije na posameznih intervalih in narišimo njen graf.

Iz $2x - 2 = 0$ izračunamo ničlo $x_1 = 1$.

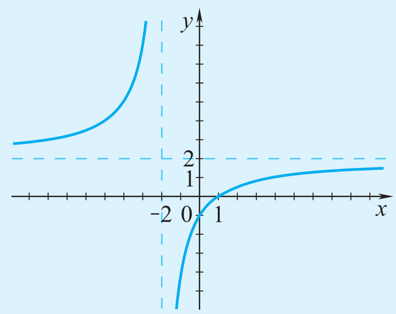
Iz $x + 2 = 0$ zapišemo pol $x_1 = -2$.

Enačba vodoravne asimptote je $y = 2$.

Presečišče grafa funkcije f z ordinatno osjo je točka $(0, -1)$, saj je $f(0) = -1$.

Ker sta ničla in pol lihi stopnji, racionalna funkcija v njima spremeni predznak.

Narišemo graf.



2. Za dano funkcijo $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 5x + 4}$ zapišimo ničle, pole, enačbo asimptote in presečišče grafa z ordinatno osjo, predznak funkcije na posameznih intervalih in narišimo njen graf.

Imenovalec funkcije razstavimo $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x-4)}$ in zapišemo.

Ničla je $x_1 = -2$.

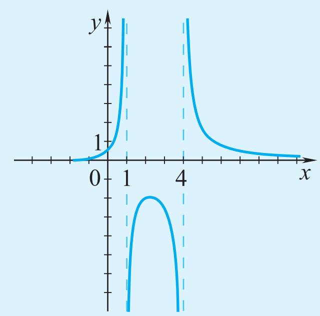
Pola sta $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Enačba vodoravne asimptote je $y = 0$.

Presečišče grafa funkcije f z ordinatno osjo je točka $(0, \frac{1}{2})$, saj je $f(0) = \frac{1}{2}$.

Ker so ničla in pola lihe stopnje, racionalna funkcija v njih spremeni predznak.

Narišemo graf.



Racionalne enačbe in neenačbe

Racionalna enačba je enačba oblike $f(x) = g(x)$, pri čemer sta f in g poljubni racionalni funkciji in x neznanka. Pri reševanju racionalnih enačb najprej izključimo kot možne rešitve ničle imenovalcev, nato pa jih rešujemo s postopki, ki smo jih opisali v poglavju Racionalna števila.

Rešimo enačbo $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x-5}{x^2-5x+6}$.

Najprej razstavimo imenovalec $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x-5}{(x-2)(x-3)}$ in zapišemo $x \neq 2$, $x \neq 3$.

Damo na skupni imenovalec $\dfrac{(x+1)(x-3)-(x-5)}{(x-2)(x-3)} = 0$,

odpravimo oklepaje $\dfrac{x^2-2x-3-x+5}{(x-2)(x-3)} = 0$

in uredimo $\dfrac{x^2-3x+2}{(x-2)(x-3)} = 0$.

Od tod zapišemo enačbo $x^2 - 3x + 2 = 0$ in jo z razstavljanjem v $(x-2)(x-1) = 0$ rešimo $x_1 = 1$ in $x_2 = 2$.

Ker $x \neq 2$, je rešitev enačbe le $x = 1$.

Racionalna neenačba je enačba oblike $f(x) < g(x)$ ali $f(x) > g(x)$, pri čemer sta f in g poljubni racionalni funkciji in x neznanka. Racionalne neenačbe rešujemo tako, da neenačbo pretvorimo v obliko $h(x) < 0$ ali $h(x) > 0$ (na obeh straneh neenačbe odštejemo funkcijo g), nato pa poiščemo ničle in pole funkcije h in izračunamo vrednost racionalne funkcije h v poljubni točki, ki ni ničla ali pol. Nato narišemo številsko premico, označimo ničle in pole ter določimo predznak funkcije h na dobljenih intervalih. Pri tem upoštevamo, da racionalna funkcija spremeni predznak v ničlah in polih lihe stopnje, v ničlah in polih sode stopnje pa ne. Od tod zapišemo rešitev dane neenačbe.

Rešimo neenačbo $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{2}{x+1}$.

Neenačbo pretvorimo v $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} < 0$

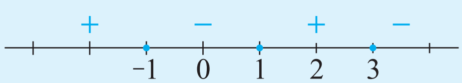
in razširimo na skupni imenovalec $\dfrac{x+1-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0$ oz. $\dfrac{-x+3}{(x-1)(x+1)} < 0$.

Ničla ulomka je $x_1 = 3$,

pola pa sta $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$.

Vrednost ulomka v točki 0 je –3.

Od tod lahko zapišemo predznak vrednosti ulomka na posameznih intervalih.



Rešitev neenačbe je $x \in (-1, 1) \cup (3, \infty)$.

1. Za dane funkcije zapišite definicijsko območje in enačbo njene vodoravne asimptote.

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-6}$

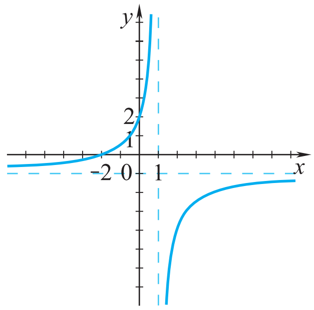
b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-x^2-12x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3-3x}{3x^2+x-2}$

č) $f(x) = \dfrac{1-2x^3}{x^3-2x^2-5x+6}$

2. Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$ ima ničlo 3 in pol –2. Zapišite njen predpis. Kolikšna je začetna vrednost funkcije f? V kateri točki funkcija f zavzame vrednost 3?

3. Na sliki je dan graf racionalne funkcije f, katere števec in imenovalec sta linearna polinoma.



a) Iz grafa razberite začetno vrednost ter ničle in pole racionalne funkcije.
b) Zapišite definicijsko območje funkcije f in enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije f.
c) Zapišite intervale, na katerih je racionalna funkcija pozitivna, in intervale, na katerih je negativna.

4. Za dane funkcije zapišite ničle, začetno vrednost, pole, enačbo vodoravne asimptote in narišite njihove grafe.

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$
b) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ č) $f(x) = \frac{3x+1}{2x}$

5. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$ in $g(x) = |f(x)|$.

6. Racionalna funkcija $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ ima ničlo 2, pol 1 in začetno vrednost 4.

a) Zapišite njen predpis.
b) Narišite njen graf.

7. Dana je racionalna funkcija $f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$.

a) Zapišite ničlo, pol, enačbo vodoravne asimptote in presečišče grafa z ordinatno osjo.
b) Narišite graf funkcije f in zapišite njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
c) Izračunajte presečišče grafa funkcije f s premico z enačbo $y = -1$.

8. Dana je racionalna funkcija $f(x) = (1-x)^{-1}$.

a) Zapišite ničlo, pol, enačbo vodoravne asimptote in presečišče grafa z ordinatno osjo.
b) Narišite graf funkcije f in zapišite njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
c) Rešite neenačbo $f(x) \geq 1$.

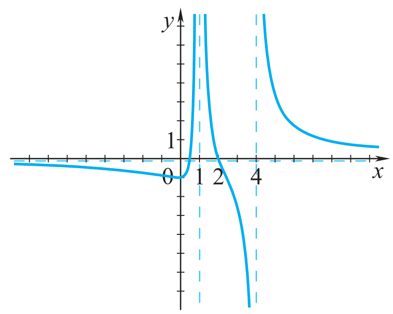
9. Dana je racionalna funkcija $f(x) = \frac{3x-6}{x+2}$.

a) Narišite graf funkcije f.
b) Graf funkcije g dobimo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo v smeri ordinatne osi za 1 navzdol. Narišite graf funkcije g in zapišite njen predpis.

10. Za dane funkcije zapišite ničle, začetno vrednost, pole, enačbo vodoravne asimptote in narišite grafe.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x-6}$ č) $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x+3}$
b) $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ d) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-3x}$
c) $f(x) = \frac{x^2+6x+9}{x^2}$

11. Na sliki je dan graf racionalne funkcije f, katere števec je polinom druge stopnje, imenovalec pa polinom tretje stopnje.



a) Iz grafa razberite začetno vrednost ter ničle in pole racionalne funkcije ter ugotovite njihovo kratnost.
b) Zapišite definicijsko območje funkcije f in enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije f.
c) Zapišite intervale, na katerih je racionalna funkcija pozitivna, in intervale, na katerih je negativna.

12. Dana je funkcija $f(x) = \frac{2(x-1)}{x^2(x+2)}$.

a) Zapišite njeno ničlo, pola in enačbo vodoravne asimptote. Narišite graf funkcije f.
b) Na katerih intervalih je funkcija f nenegativna?

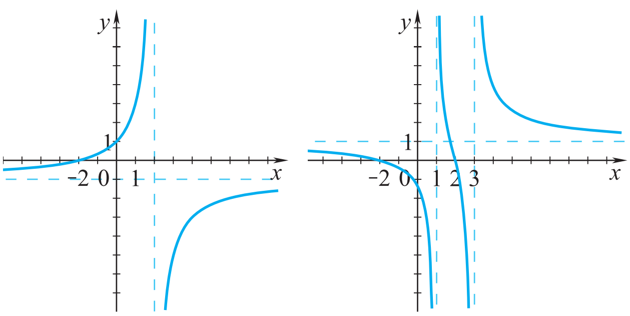
13. Za dane funkcije zapišite ničle, začetno vrednost, pole, enačbo vodoravne asimptote in narišite grafe.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+2}$ č) $f(x) = \frac{x^2}{x^3-2x^2-x+2}$
b) $f(x) = \frac{2-x}{x^2}$ d) $f(x) = \frac{x^3}{x^3-3x^2+3x-1}$
c) $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-x}$ e) $f(x) = \frac{x^3-2}{x^3}$

14. Za funkcijo $f(x) = \frac{x^2 - x}{4 - x^2}$ zapišite ničle, pole, enačbo vodoravne asimptote in izračunajte presečišče grafa z vodoravno asimptoto. Narišite njen graf.

15. Narišite grafe funkcij.
a) $f(x) = 1 - x^{-1}$
b) $g(x) = (x - 2)^{-2} - 1$
c) $h(x) = x^{-2} - x^{-3}$

16. Na sliki sta dana grafa racionalnih funkcij f in g. Zapišite njuna predpisa.



17. Dana je racionalna funkcija $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}$.
a) Izračunajte $f(4) + f(-2)$.
b) Zapišite ničlo, pola, enačbo vodoravne asimptote in presečišče grafa funkcije z ordinatno osjo.
c) Narišite graf funkcije f.

18. Dana je racionalna funkcija $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$.
a) Zapišite ničli, pola, enačbo vodoravne asimptote in presečišče grafa funkcije f z ordinatno osjo.
b) Narišite graf funkcije f.
c) Rešite neenačbo $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} > 0$.

19. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ in $g(x) = |f(x)|$.

20. Za funkcijo $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ zapišite ničli, pola, enačbo vodoravne asimptote in presečišče grafa funkcije f z asimptoto ter narišite njen graf.

21. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.
a) Ali je funkcija f soda? Odgovor utemeljite.
b) V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x)$ in $g(x) = |f(x)|$.

22. Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x + a}{x^2 + bx + c}$ ima ničlo 1 ter pol -1, ki je druge stopnje. Zapišite njen predpis in narišite njen graf.

23. Rešite enačbe.
a) $\frac{x - 1}{1 + 2x} = \frac{x + 3}{x + 2}$
b) $\frac{3x + 4}{x} = \frac{2x + 3}{x + 1}$
c) $\frac{2x + 1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1}$

24. Rešite neenačbe.
a) $\frac{2x - 1}{x + 3} \leq 0$
b) $\frac{2x + 5}{1 - x} \geq 2$
c) $\frac{x^2}{(x - 3)(x + 1)} > 1$
č) $\frac{1}{x} < \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 3) \cdot x}$

25. Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ leži graf funkcije $f(x) = \frac{1 - x}{2x + 5}$ pod premico $y = 1$?

26. Dana je funkcija $f(x) = \left|\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x - 6}\right|$. Zapišite njeno ničlo, začetno vrednost, pola in enačbo vodoravne asimptote. Narišite graf funkcije f.

27. Narišite graf funkcije $f(x) = \frac{3x + 6}{2x + 2}$. V katerih točkah graf funkcije f seka simetralo lihih kvadrantov?

28. V isti koordinatni sistem narišite graf funkcije $f(x) = \frac{x}{(x - 2)^2}$ in premico $y = \frac{x}{4}$ in izračunajte koordinati presečišč.

29. Dana je funkcija $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$.
a) Narišite njen graf.
b) Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) < -6$?

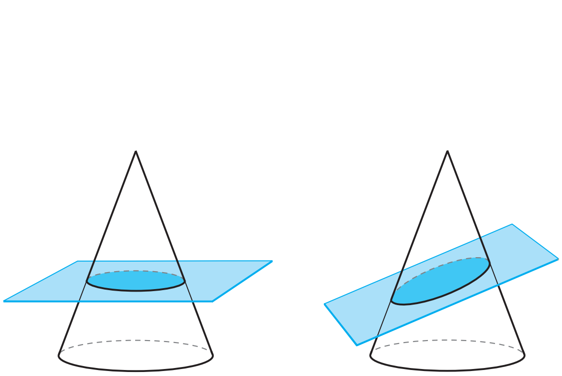
30. Dana je racionalna funkcija $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + x - 12}$.
a) Narišite graf funkcije f.
b) Graf funkcije g dobimo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo v smeri abscisne osi za 2 desno. Narišite graf funkcije g in zapišite njen predpis.

31. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = (2x)^{-1}$ in $g(x) = \frac{x^2}{(x - 2)(x - 3)}$ ter izračunajte koordinati presečišč.

32. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = (x + 1)^2$ in $g(x) = (x + 3) \cdot x^{-1}$. Za katere x je $f(x) > g(x)$?

18. ALGEBRSKE ENAČBE DRUGE STOPNJE. STOŽNICE

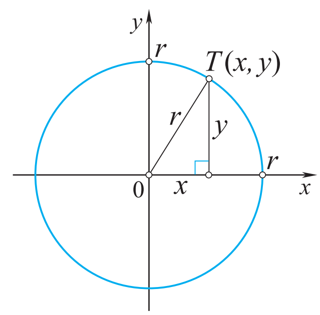
Stožnice so primeri krivulj, ki nastanejo pri preseku stožca z ravnino.



Krožnica

Geometrijska definicija krožnice: **Krožnica je množica točk *T*** v ravnini, **ki so za *r* oddaljene od** izbrane **točke *S***. Točka S je središče krožnice, r pa polmer krožnice.

Enačba krožnice s središčem *S*(0, 0) in polmerom *r* (v središčni legi): $x^2 + y^2 = r^2$.



Zapišimo enačbo krožnice s središčem v koordinatnem izhodišču, na kateri leži točka $A(-1, 7)$. Katere od točk $B(2, 6)$, $C(5, -5)$ in $D(\sqrt{2}, 4\sqrt{3})$ ležijo na dani krožnici?

Izračunajmo polmer krožnice $r = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ in zapišimo njeno enačbo $x^2 + y^2 = 50$.

Ker je $2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$, točka B ne leži na krožnici.

Ker pa je $5^2 + (-5)^2 = 25 + 25 = 50$ in $(\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{3})^2 = 2 + 48 = 50$, točki C in D ležita na dani krožnici.

Enačba krožnice s središčem *S*(*p*, *q*) in polmerom *r*: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

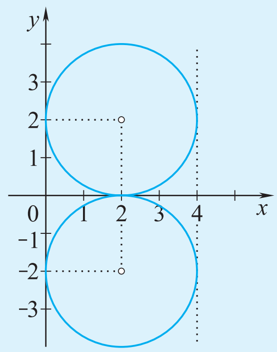
1. Zapišimo enačbo množice točk, ki so za 13 oddaljene od točke (12, 5). Ali koordinatno izhodišče leži v tej množici točk?

Iskana množica točk je krožnica s središčem $S(12, 5)$ in polmerom $r = 13$. Njena enačba je $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$. Koordinatno izhodišče (0, 0) leži v dani množici točk, saj je $(0 - 12)^2 + (0 - 5)^2 = 144 + 25 = 169$.

2. Zapišimo enačbo krožnice s središčem v točki $S(4, -4)$ in s polmerom $r = 5$. V katerih točkah seka krožnica koordinatni osi?

Iz $(x - 4)^2 + (y - (-4))^2 = 25$ oz. $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 25$ dobimo enačbo krožnice $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 7 = 0$.
V presečišču krožnice z abscisno osjo je $y = 0$. Zato iz $x^2 - 8x + 7 = 0$ z razstavljanjem $(x - 1)(x - 7) = 0$ dobimo $x_1 = 1$ in $x_2 = 7$. Presečišči krožnice z abscisno osjo sta točki (1, 0) in (7, 0).
V presečišču krožnice z ordinatno osjo je $x = 0$. Zato iz $y^2 + 8y + 7 = 0$ z razstavljanjem $(y + 1)(y + 7) = 0$ dobimo $y_1 = -1$ in $y_2 = -7$. Presečišči krožnice z ordinatno osjo sta točki (0, −1) in (0, −7).

3. Zapišimo enačbi krožnic, ki se dotikata koordinatnih osi in premice $x = 4$.



Iz slike razberemo, da je premer krožnice 4 oz. njen polmer $r = 2$.
Ker se krožnica dotika ordinatne osi in premice $x = 4$, je abscisa središča $p = 2$.
Ker pa se krožnica s polmerom $r = 2$ dotika tudi abscisne osi, sta ordinati središča lahko $q_1 = 2$ in $q_2 = -2$.
Enačbi krožnic sta $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ in $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

4. Točki $A(-3, 5)$ in $B(1, -1)$ sta krajišči premera krožnice. Zapišimo njeno enačbo.

Središče krožnice S je razpolovišče daljice AB. Iz $S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ dobimo središče $S(-1, 2)$.
Polmer krožnice r je enak razdalji med točkama S in A:
$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.
Enačba krožnice je $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$.

5. Enačba $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$ predstavlja krožnico. Poiščimo središče in polmer krožnice.

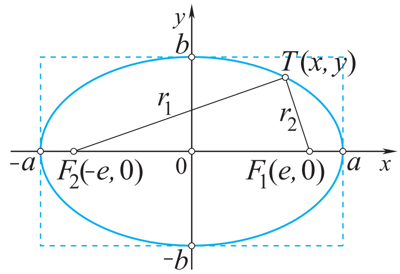
Iz dane enačbe s preoblikovanjem $(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 10y + 25) - 25 + 13 = 0$ in tvorjenjem kvadratov dobimo enačbo krožnice $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$.
Središče krožnice je točka $S(2, -5)$, polmer pa $r = 4$.

6. Zapišimo središče in polmer krožnice, ki poteka skozi točke $A(2, 0)$, $B(0, -2)$ in $C(8, -10)$.

V enačbo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ vstavimo koordinate točk in dobimo sistem treh enačb s tremi neznankami.
$4 + 2a + c = 0$
$4 - 2b + c = 0$
$64 + 100 + 8a - 10b + c = 0$
Iz prve enačbe izrazimo $2a = -c - 4$, iz druge enačbe $2b = c + 4$. Te vrednosti vstavimo v tretjo enačbo
$64 + 100 + 4(-c - 4) - 5(c + 4) + c = 0$ in jo rešimo $c = 16$. Iz prvih dveh enačb dobimo $a = -10$ in $b = 10$.
Enačba krožnice je $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 16 = 0$ oz. $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 34$.
Središče krožnice je točka $S(5, -5)$, polmer pa $r = \sqrt{34}$.

Elipsa

Geometrijska definicija elipse: **Elipsa je množica točk** T v ravnini, **za katere je vsota razdalj do** dveh izbranih točk F_1 **in** F_2 **konstantna**: $d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a$.

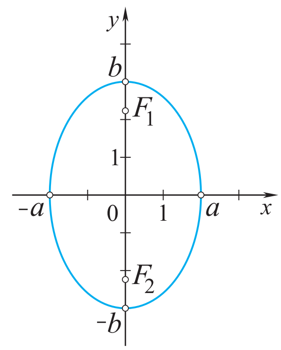


Enačba elipse s središčem $S(0, 0)$ (v središčni legi): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Če je $a > b$, je število a **velika polos**, b pa **mala polos elipse**. Točki $F_1(e, 0)$ in $F_2(-e, 0)$ imenujemo **gorišči elipse**, število e pa **linearna ekscentričnost elipse** in velja: $e^2 = a^2 - b^2$.

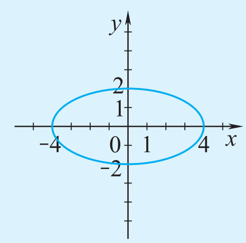
Temena elipse so točke $T_1(a, 0)$, $T_2(-a, 0)$, $T_3(0, b)$, $T_4(0, -b)$.

Če je $b > a$, je število b **velika polos**, a pa **mala polos elipse**. **Gorišči elipse** sta točki $F_1(0, e)$ in $F_2(0, -e)$, **linearno ekscentričnost elipse pa izračunamo iz** $e^2 = b^2 - a^2$.



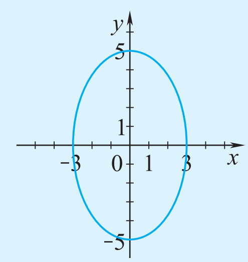
1. Elipsa v središčni legi in goriščema na abscisni osi ima veliko polos 4 in malo polos 2. Zapišimo enačbo elipse, koordinate temen in gorišč ter narišimo elipso.

Iz $a = 4$ in $b = 2$ zapišemo $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Koordinate temen so $T_1(4, 0)$, $T_2(-4, 0)$, $T_3(0, 2)$ in $T_4(0, -2)$.
Linearna ekscentričnost je $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
Koordinati gorišč sta $F_1(2\sqrt{3}, 0)$ in $F_2(-2\sqrt{3}, 0)$. Narišemo elipso.



2. Točki $A(3, 0)$ in $B(0, -5)$ sta temeni elipse v središčni legi. Zapišimo enačbo elipse, koordinate temen in gorišč ter narišimo elipso.

Iz $a = 3$ in $b = 5$ zapišemo $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. Koordinate temen so $T_1(3, 0)$, $T_2(-3, 0)$, $T_3(0, 5)$ in $T_4(0, -5)$.
Ker je $b > a$, je linearna ekscentričnost $e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.
Koordinati gorišč sta $F_1(0, 4)$ in $F_2(0, -4)$. Narišemo elipso.



3. Poiščimo enačbo množice točk, za katere je vsota razdalj do točk $(-6, 0)$ in $(6, 0)$ enaka 20.

Iskana množica točk je elipsa z goriščema $F_1(-6, 0)$ in $F_2(6, 0)$ ter linearno ekscentričnostjo 6.
Iz $2a = 20$ dobimo $a = 10$.
Iz $e^2 = a^2 - b^2$ izračunamo $b^2 = a^2 - e^2 = 100 - 36 = 64$ in od tod $b = 8$.
Enačba elipse je $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

4. Zapišimo enačbo elipse z goriščema na abscisni osi, ki gre skozi točko $A(3\sqrt{2}, -1)$, njena velika polos pa je trikrat večja od male polosi.

Iz $a = 3b$ zapišemo enačbo elipse $\frac{x^2}{9b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, v katero vstavimo koordinate točke A: $\frac{18}{9b^2} + \frac{1}{b^2} = 1$.

Izračunamo $b = \sqrt{3}$ in nato $a = 3\sqrt{3}$.

Zapišemo enačbo elipse $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{3} = 1$.

5. Linearna ekscentričnost elipse z goriščema na abscisni osi in veliko polosjo 7 je 3. Izračunajmo malo polos elipse in zapišimo enačbo elipse.

Zapišemo $a = 7$ in $e = 3$ in iz $e^2 = a^2 - b^2$ izračunamo $b^2 = a^2 - e^2 = 49 - 9 = 40$ ter $b = 2\sqrt{10}$.

Enačba elipse je $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{40} = 1$.

6. Zapišimo enačbo elipse, če je točka $T(-3, 0)$ njeno teme, točka $F(0, 5)$ pa njeno gorišče.

Najprej zapišemo $a = 3$ in $e = 5$.
Ker gorišče elipse leži na ordinatni osi, iz $e^2 = b^2 - a^2$ izračunamo $b^2 = e^2 + a^2 = 25 + 9 = 34$.

Enačba elipse je $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{34} = 1$.

7. Zapišimo enačbo elipse, na kateri ležita točki $A(2, 1)$ in $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

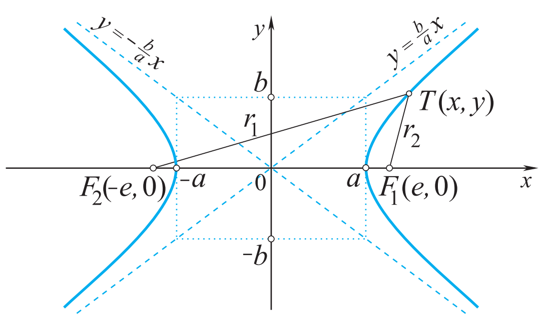
V enačbo elipse vstavimo koordinate točke A: $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ in točke B: $\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$.

Drugo enačbo z 2 množimo $\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 2$ in od nje odštejemo prvo enačbo $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ ter dobimo $b^2 = 3$.

Nato še izračunamo $a^2 = 6$ in zapišemo enačbo elipse $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Hiperbola

Geometrijska definicija hiperbole: **Hiperbola je množica** vseh **točk** T v ravnini, **za katere je absolutna vrednost razlike razdalj do** dveh izbranih točk F_1 **in** F_2 **konstantna**:
$|d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a$.

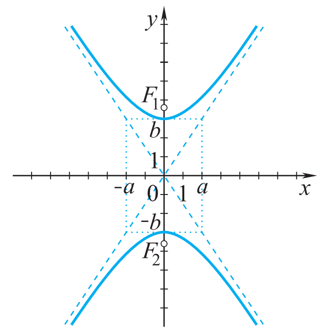


Enačba hiperbole s središčem $S(0, 0)$ (v središčni legi):
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Število $\boldsymbol{a}$ imenujemo **realna polos hiperbole**, število $\boldsymbol{b}$ pa **imaginarna polos hiperbole**. Točki $F_1(e, 0)$ in $F_2(-e, 0)$ sta **gorišči hiperbole**, število $\boldsymbol{e}$ pa **linearna ekscentričnost hiperbole** in velja $e^2 = a^2 + b^2$.

Temeni hiperbole sta točki $T_1(a, 0)$, $T_2(-a, 0)$, premici $y = \pm\frac{b}{a}x$ pa **asimptoti hiperbole**.

Krivulja z enačbo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$; ($a$, $b \in \mathbb{R}^+$) je tudi **hiperbola**, le da temeni in gorišči ležita na ordinatni osi in je ***b* realna polos hiperbole** ter ***a* imaginarna polos hiperbole**. Točki $T_1(0, b)$, $T_2(0, -b)$ sta **temeni** hiperbole, **asimptoti hiperbole** pa sta premici $y = \pm \frac{b}{a}x$. **Gorišči** hiperbole sta točki $F_1(0, e)$ in $F_2(0, -e)$, kjer je $e^2 = a^2 + b^2$.



1. Hiperbola v središčni legi z goriščema na abscisni osi ima realno polos 6 in imaginarno polos 3. Zapišimo enačbo hiperbole, koordinate temen in gorišč, enačbi asimptot ter narišimo hiperbolo.

Iz $a = 6$ in $b = 3$ zapišemo enačbo hiperbole $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$.

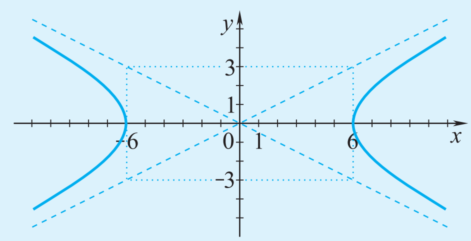
Koordinate temen so $T_1(6, 0)$ in $T_2(-6, 0)$.

Linearna ekscentričnost je

$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Koordinati gorišč sta $F_1(3\sqrt{5}, 0)$ in $F_2(-3\sqrt{5}, 0)$.

Enačbi asimptot sta $y = \frac{x}{2}$ in $y = -\frac{x}{2}$. Narišemo hiperbolo.



2. Točka $A(4, 0)$ je teme hiperbole v središčni legi, katere premica z enačbo $y = 2x$ je ena od njenih asimptot. Zapišimo enačbo hiperbole, koordinate temen in gorišč.

Iz $a = 4$ in $\frac{b}{a} = 2$ izračunamo $b = 8$ ter zapišemo enačbo hiperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Koordinate temen so $T_1(4, 0)$ in $T_2(-4, 0)$.

Linearna ekscentričnost $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Koordinati gorišč sta $F_1(4\sqrt{5}, 0)$ in $F_2(-4\sqrt{5}, 0)$.

3. Poiščimo enačbo množice točk, za katere je absolutna vrednost razlike razdalj do točk $(-4, 0)$ in $(4, 0)$ enaka 2.

Iskana množica točk je hiperbola z goriščema $F_1(-4, 0)$ in $F_2(4, 0)$ ter linearno ekscentričnostjo 4.

Iz $2a = 2$ dobimo $a = 1$.

Iz $e^2 = a^2 + b^2$ izračunamo $b^2 = e^2 - a^2 = 16 - 1 = 15$ in od tod $b = \sqrt{15}$.

Enačba hiperbole je $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{15} = 1$.

4. Zapišimo enačbo hiperbole z goriščema na abscisni osi, ki gre skozi točko $A(2, \sqrt{2})$, če sta simetrali lihih in sodih kvadrantov njeni asimptoti.

Iz enačb asimptot $y = \pm x$ zapišemo $a = b$ in v enačbo enakostranične hiperbole $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ vstavimo koordinate točke A $\frac{4}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1$. Od tod izračunamo $b = \sqrt{2}$ in nato $a = \sqrt{2}$.

Zapišemo enačbo hiperbole $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$.

5. Linearna ekscentričnost hiperbole z goriščema na abscisni osi in realno polosjo 4 je 5. Izračunajmo imaginarno polos hiperbole in zapišimo njeno enačbo.

Zapišemo $a = 4$ in $e = 5$ in iz $e^2 = a^2 + b^2$ izračunamo $b^2 = e^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$ ter $b = 3$.

Enačba hiperbole je $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

6. Zapišimo enačbo hiperbole, če je točka $T(0, 8)$ njeno teme, točka $F(0, -10)$ pa njeno gorišče.

Najprej zapišemo $b = 8$ in $e = 10$.
Iz $e^2 = a^2 + b^2$ izračunamo $a^2 = e^2 - b^2 = 100 - 64 = 36$ oz. $a = 6$.

Ker gorišče hiperbole leži na ordinatni osi, je enačba hiperbole $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1$.

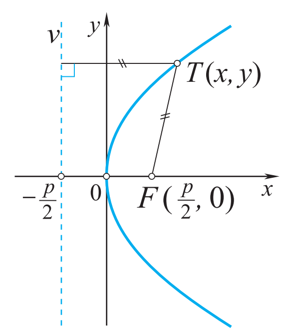
7. Zapišimo enačbo hiperbole z goriščema na abscisni osi, na kateri ležita točki $A(5, -1)$ in $B(-10, -4)$.

V enačbo hiperbole vstavimo koordinate točke A: $\frac{25}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ in točke B: $\frac{100}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$.

Prvo enačbo množimo s 4: $\frac{100}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 4$ in od nje odštejemo drugo enačbo $\frac{100}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$ ter dobimo $b^2 = 4$.

Nato še izračunamo $a^2 = 20$ in zapišemo enačbo hiperbole $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Parabola



Geometrijska definicija parabole: **Parabola je množica točk** T v ravnini, **ki so enako oddaljene od premice** v **in** od dane **točke** F: $d(T, v) = d(T, F)$.

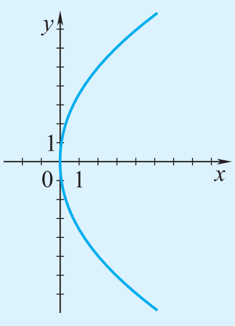
Enačba parabole s temenom $T(0, 0)$: $y^2 = 2px$.

Točko $F(\frac{p}{2}, 0)$ imenujemo **gorišče parabole**, premico v pa **vodnico parabole**.
Enačba vodnice parabole je $x = -\frac{p}{2}$.

Z zrcaljenjem parabole $y^2 = 2px$ prek simetrale lihih kvadrantov dobimo parabolo $x^2 = 2py$ oziroma bolj znano enačbo $y = ax^2$, ki ima gorišče $F(0, \frac{p}{2})$ oz. $F(0, \frac{1}{4a})$ in vodnico $y = -\frac{p}{2}$ oz. $y = -\frac{1}{4a}$.

1. Zapišimo enačbo parabole s temenom v izhodišču koordinatnega sistema in goriščem $F(3, 0)$ ter parabolo narišimo.

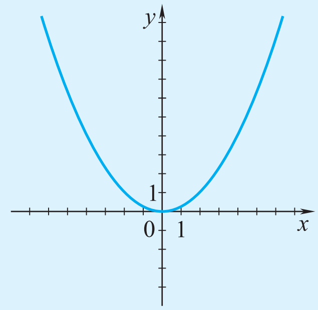
Iz $\frac{p}{2} = 3$ dobimo $p = 6$. Zapišemo enačbo parabole $y^2 = 12x$ in narišemo parabolo.



2. Parabola s temenom v točki (0, 0) ima gorišče v točki $F(0, 1)$. Zapišimo enačbo vodnice parabole in parabolo narišimo.

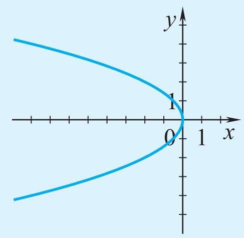
Iz $\frac{p}{2} = 1$ dobimo $p = 2$. Zapišemo enačbo vodnice $y = -1$ in enačbo parabole $x^2 = 4y$.

Parabolo narišemo.



3. Narišimo parabolo z enačbo $y^2 = -2x$.

Ker je $2p = -2$, je $p = -1$. Točka $F(-\frac{1}{2}, 0)$ je gorišče parabole.
Parabolo narišemo.



4. Zapišimo enačbo parabole, na kateri leži točka $A(\sqrt{3}, -6)$.

V enačbo $y^2 = 2px$ vstavimo koordinate točke A in dobimo $3 = 12p$ ter od tod $p = \frac{1}{4}$.
Enačba parabole je $y^2 = \frac{1}{2}x$.

5. Zapišimo enačbo množice točk, ki so enako oddaljene od premice $x = -4$ in točke $F(4, 0)$. Kateri točki v tej množici sta za 13 oddaljeni od točke F?

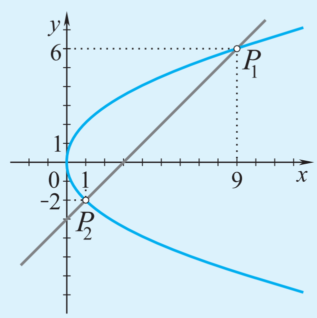
Iskana množica točk je parabola. Ker je $\frac{p}{2} = 4$, je $p = 8$ in enačba parabole je $y^2 = 16x$.

Ker je točka T tudi od vodnice $x = -4$ oddaljena za 13, je njena abscisa enaka 9.
V enačbi $y^2 = 16x$ nadomestimo x z 9 in dobimo enačbo $y^2 = 144$ z rešitvama $y_1 = 12$ in $y_2 = -12$.
Točki $T_1(9, 12)$ in $T_2(9, -12)$ sta za 13 oddaljeni od točke $F(4, 0)$.

6. V isti koordinatni sistem narišimo krivulji z enačbama $y^2 = 4x$ in $x - y - 3 = 0$ ter izračunajmo njuni presečišči.

Enačba $y^2 = 4x$ določa parabolo z goriščem v točki $F(1, 0)$, druga enačba $x - y - 3 = 0$ pa premico. Narišemo ju v istem koordinatnem sistemu.

Če iz enačbe premice izrazimo $x = y + 3$ in to vstavimo v enačbo parabole, dobimo $y^2 = 4(y + 3)$.
Enačbo preoblikujemo v $y^2 - 4y - 12 = 0$ in jo z razstavljanjem $(y - 6)(y + 2) = 0$ rešimo $y_1 = 6$, $y_2 = -2$.
Izračunamo še $x_1 = 6 + 3 = 9$ in $x_2 = -2 + 3 = 1$. Presečišči sta $P_1(9, 6)$ in $P_2(1, -2)$.



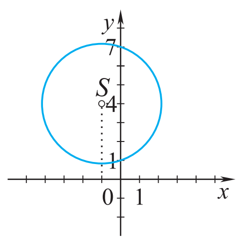
1. Zapišite enačbo krožnice s središčem v koordinatnem izhodišču, na kateri leži točka $A(3, -4)$. Daljica AB je premer dane krožnice. Zapišite koordinate točke B.

2. Zapišite enačbo krožnice, ki ima središče v točki $S(-2, 0)$ in poteka skozi točko $T(1, -2)$. V katerih točkah seka krožnica premico $y = 2$?

3. Zapišite enačbo množice točk, ki so za 10 oddaljene od točke $(2, -1)$. Točki $T_1(8, y_1 > 0)$ in $T_2(8, y_2 < 0)$ ležita na krožnici. Koliko sta ordinati točk T_1 in T_2?

4. V katerih točkah seka krožnica s središčem v točki $S(3, -2)$ in s polmerom $r = \sqrt{5}$ koordinatni osi?

5. Na sliki je narisana krožnica. Zapišite njeno enačbo.



6. Zapišite enačbo krožnice, ki gre skozi točko $A(-1, 5)$, njeno središče pa je v presečišču premic $x - y + 6 = 0$ in $x + y + 2 = 0$.

7. Dana je krožnica z enačbo $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$. Izračunajte njen polmer in koordinati središča. Zapišite enačbo koncentrične krožnice z dvakrat večjim polmerom.

8. V koordinatni sistem narišite krožnico, podano z enačbo $x^2 - 4x + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = 0$.

9. Natančno izračunajte ploščino kolobarja, ki ga določata krožnici $x^2 - 6x + y^2 = 0$ in $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$.

10. Zapišite koordinati središča krožnice in enačbo krožnice, če sta točki $A(1, 4)$ in $B(7,-2)$ krajišči njenega premera.

11. Zapišite enačbo krožnice, ki je včrtana kvadratu $ABCD$ z oglišči $A(3, 2)$, $B(3, -8)$, $C(-7, -8)$ in $D(-7, 2)$.

12. Zapišite enačbo krožnice, ki ima središče na premici $x = 3$ in se dotika premic $y = -6$ in $y + 4 = 0$.

13. Zapišite enačbo krožnice, ki ima središče na simetrali lihih kvadrantov in se v točki $T(0, 5)$ dotika ordinatne osi.

14. Zapišite enačbi krožnic, ki se dotikata koordinatnih osi in premice $y = 6$.

15. Poiščite polmer krožnice, ki ima središče v točki $S(1, 3)$ in se dotika premice $x = 5$. Enačbo krožnice zapišite v obliki $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$; $D, E, F \in \mathbb{R}$.

16. Za katero realno število F bo enačba $x^2 + y^2 - 2x + 6y + F = 0$ določala krožnico s polmerom 5?

17. Zapišite enačbo krožnice, ki ima središče na premici $y = \frac{1}{2}x + 3$ in poteka skozi točki $A(2, 4)$ in $B(-4, -2)$.

18. Dana je krožnica z enačbo $x^2 - 4x + y^2 = 0$. Izračunajte presečišča krožnice z danimi premicami.
a) $y - 2 = 0$
b) $x - y - 4 = 0$
c) $2x - 5y + 10 = 0$

19. Dana je krožnica z enačbo $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$.
a) Izračunajte njeno središče in polmer krožnice.
b) Natančno izračunajte dolžino tetive, ki jo na premici $y = -x + 2$ odreže dana krožnica.

20. Za katero realno število n bo premica $y = x + n$ tangenta na krožnico z enačbo $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$? Zapišite enačbi tangent.

21. Dani sta krožnici z enačbama $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ in $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 25 = 0$. Zapišite koordinate središč krožnic in izračunajte razdaljo med njima. Ugotovite, ali imata krožnici skupno točko.

22. V koordinatni sistem narišite množici točk $\mathcal{A} = \{(x, y); x^2 + y^2 \le 4\}$ in $\mathcal{B} = \{(x, y); |x| < 1\}$ ter označite njun presek. Ali je presek množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ konveksna množica?

23. Naj bosta $\mathcal{A} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}, x + y - 2 = 0\}$ in $\mathcal{B} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 2\}$ podmnožici ravnine.
a) Ugotovite, katere od danih točk $T(3, -1)$, $P(-1, 1)$, $Q(\sqrt{2}, 0)$ in $R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pripadajo množici $\mathcal{A}$ in katere množici $\mathcal{B}$.
b) V množici $\mathcal{A}$ poiščite tiste točke, ki ležijo na abscisni osi.
c) V množici $\mathcal{B}$ poiščite tiste točke, ki ležijo na ordinatni osi.
č) Zapišite presek množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

24. Zapišite enačbo krožnice, ki je očrtana trikotniku ABC z oglišči $A(-7, 0)$, $B(-5, 6)$ in $C(-1, -2)$.

25. Zapišite enačbo krožnice, ki ima središče na ordinatni osi in gre skozi točki $A(2, 0)$ in $B(-2, 6)$.

26. Izračunajte koordinate presečišč danih krožnic.
a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0,$
$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 6x - 16y + 55 = 0,$
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 15 = 0,$
$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 12 = 0$

27. Elipsa v središčni legi ima veliko polos 7 in malo polos 5. Zapišite enačbo elipse, koordinate temen in gorišč ter narišite elipso.

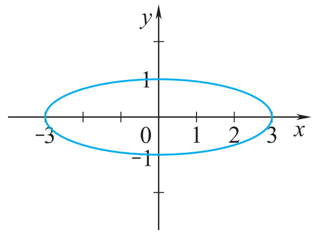
28. Točki $A(-2, 0)$ in $B(0, -3)$ sta temeni elipse v središčni legi. Zapišite enačbo elipse, koordinate temen in gorišč ter narišite elipso.

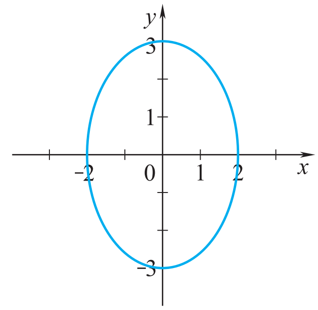
29. Zapišite enačbo elipse v središčni legi, ki ima gorišče v točki $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$ in je točka $T_1(4, 0)$ eno izmed njenih temen.

30. Premica $3x - 4y - 12 = 0$ poteka skozi dve temeni elipse v središčni legi. Napišite enačbo elipse in izračunajte koordinate njenih gorišč.

31. Zapišite koordinati temen in gorišč elips, podanih z enačbama:
a) $x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ b) $5x^2 + 3y^2 - 30 = 0$

32. Na sliki sta dani elipsi. Zapišite njuni enačbi in izračunajte koordinate gorišč.





33. Poiščite enačbo množice točk, za katere je vsota razdalj do točk $(-3, 0)$ in $(3, 0)$ enaka 12.

34. Linearna ekscentričnost elipse z goriščema na abscisni osi in veliko polosjo 4 je 2. Izračunajte malo polos elipse in zapišite enačbo elipse.

35. Zapišite enačbo elipse, če je točka $T(5, 0)$ njeno teme, točka $F(0, -5)$ pa njeno gorišče.

36. Elipsa je včrtana pravokotniku z oglišči $A(2, 3)$, $B(2, -3)$, $C(-2, 3)$ in $D(-2, -3)$. Izračunajte koordinate gorišč elipse. V katerih točkah seka premica $y = 2x - 3$ dano elipso?

37. Razdalja med goriščema elipse je $6\sqrt{3}$, mala polos pa je za 3 manjša od velike polosi. Poiščite enačbo elipse, če njeni gorišči ležita na abscisni osi.

38. Zapišite enačbo elipse v središčni legi, če točki $A(-2, 2\sqrt{3})$ in $B(\sqrt{6}, -3)$ ležita na elipsi.

39. Elipso z enačbo $x^2 + 3y^2 = 9$ zrcalite čez simetralo lihih kvadrantov. Zapišite enačbo dobljene elipse in koordinati njenih gorišč.

40. Dana je enačba elipse $x^2 + 9y^2 = 9$. Prva krožnica s središčem v izhodišču koordinatnega sistema ima polmer enak veliki polosi elipse, druga krožnica s središčem v izhodišču koordinatnega sistema pa ima polmer enak mali polosi elipse. Zapišite enačbi obeh krožnic in v koordinatnem sistemu narišite vse tri krivulje.

41. Krožnica ima središče v desnem gorišču elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ in se dotika ordinatne osi. Zapišite enačbo krožnice.

42. Izračunajte presečišči premice z enačbo $x + 4y + 4 = 0$ in elipse z enačbo $x^2 + 4y^2 - 32 = 0$.

43. Natančno izračunajte dolžino tetive, ki jo na elipsi $4x^2 + y^2 - 20 = 0$ odreže premica z enačbo $2x - 3y + 10 = 0$.

44. Krožnica se dotika ordinatne osi in ima središče v desnem temenu elipse $10x^2 + 5y^2 = 10$. Zapišite enačbo krožnice.

45. Izračunajte presečišča krožnice in elipse, ki sta podani z enačbama $x^2 + y^2 = 40$ in $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{16} = 1$.

46. Poiščite presečišča elips, podanih z enačbami:
a) $x^2 + 4y^2 = 8,\ x^2 + 3y^2 = 6$
b) $2x^2 + 3y^2 = 13,\ 3x^2 + y^2 = 9$

47. Hiperbola v središčni legi z goriščema na abscisni osi ima realno polos 3 in imaginarno polos 5. Zapišite enačbo hiperbole, koordinate temen in gorišč, enačbi asimptot ter narišite hiperbolo.

48. Poiščite enačbo množice točk, za katere je absolutna vrednost razlike razdalj do točk $(-6, 0)$ in $(6, 0)$ enaka 4.

49. Točka $A(0, -3)$ je teme hiperbole v središčni legi z asimptotama $y = \pm 3x$. Zapišite enačbo hiperbole, koordinate temen in gorišč ter narišite hiperbolo.

50. Linearna ekscentričnost hiperbole z goriščema na abscisni osi in imaginarno polosjo 3 je 4. Izračunajte realno polos hiperbole in zapišite njeno enačbo.

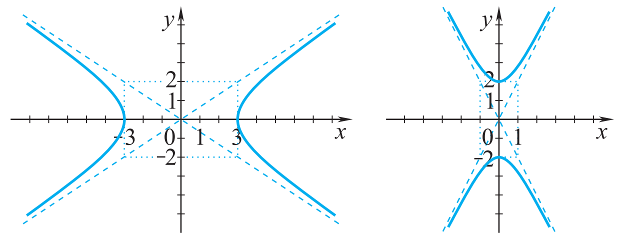
51. Zapišite enačbo hiperbole, če je točka $T(0, -4)$ njeno teme, točka $F(0, -6)$ pa njeno gorišče.

52. Zapišite enačbo hiperbole z goriščema na abscisni osi, na kateri ležita točki $A(3, -4)$ in $B(-2, \sqrt{6})$.

53. Zapišite enačbo enakostranične hiperbole z goriščem v točki $F_1(0, -8)$.

54. Zapišite koordinati temen in gorišč hiperbol, podanih z enačbama:
a) $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$ b) $3x^2 - y^2 + 12 = 0$

55. Na sliki sta narisani hiperboli. Zapišite njuni enačbi in izračunajte koordinate gorišč.



56. Premica $y = -2x$ je asimptota hiperbole z goriščema na abscisni osi, na kateri leži točka $T(\sqrt{3}, 2)$. Zapišite enačbo hiperbole.

57. Premica s smernim koeficientom $\frac{1}{2}$ je asimptota hiperbole z goriščema na ordinatni osi, na kateri leži točka $T(8, -2\sqrt{5})$. Zapišite enačbo hiperbole.

58. Hiperbolo z enačbo $x^2 - 3y^2 = 9$ zavrtimo za $90°$ okoli izhodišča. Zapišite enačbo dobljene hiperbole in koordinati njenih gorišč.

59. Dana je enačba stožnice $x^2 + Cy^2 = 4$, pri čemer je C poljubno, od 0 različno realno število.
Za kateri C bo ta enačba:
a) enačba krožnice
b) enačba elipse z malo polosjo 1
c) enačba hiperbole z linearno ekscentričnostjo $2\sqrt{2}$

60. Hiperbola z linearno ekscentričnostjo 5 ima realno polos enako veliki polosi elipse z enačbo $2x^2 + 10y^2 = 30$. Zapišite enačbo hiperbole.

61. Elipsa $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ in enakostranična hiperbola imata skupni gorišči. Zapišite enačbo hiperbole.

62. Izračunajte presečišči premice in hiperbole, ki sta podani z enačbama $2x - y - 6 = 0$ in $x^2 - 2y^2 - 8 = 0$.

63. V katerih točkah se sekata krožnica z enačbo $x^2 + y^2 = 106$ in hiperbola z enačbo $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$?

64. Katere točke na hiperboli z enačbo $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{3} = -1$ so za 5 oddaljene od izhodišča koordinatnega sistema?

65. Izračunajte presečišči hiperbol, podanih z enačbama $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ in $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = -1$.

66. V isti koordinatni sistem skicirajte krivulji, podani z enačbama $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ in $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = 1$. Izračunajte točne vrednosti presečišč teh dveh krivulj.

67. Zapišite enačbo parabole, ki je simetrična glede na abscisno os, ima teme v koordinatnem izhodišču in gre skozi točko $T(5, -10)$.

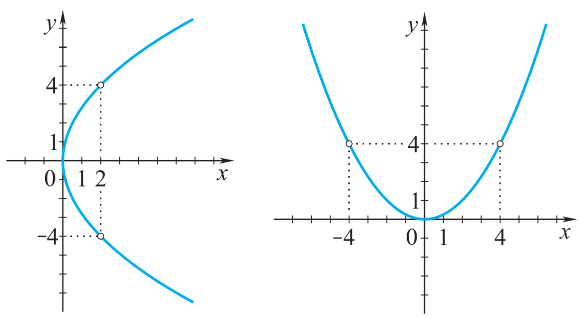
68. Zapišite enačbo množice točk, ki so enako oddaljene od točke $F(4, 0)$ in premice $x = -4$. Dano množico točk tudi narišite.

69. Parabola s temenom v točki $T(0, 0)$ ima gorišče v točki $F(-2, 0)$. Zapišite njeno enačbo in jo narišite.

70. Zapišite enačbo množice točk, ki so enako oddaljene od točke $F(0, 2)$ in premice $y = -2$. Dano množico točk tudi narišite.

71. Zapišite koordinate temena in gorišča ter enačbo vodnice parabol, podanih z enačbami:
a) $y^2 = 6x$
b) $y^2 = -9x$
c) $x^2 = 12y$

72. Na sliki sta narisani paraboli. Zapišite njuni enačbi in izračunajte koordinati gorišča.



73. Na paraboli z enačbo $y^2 = 10x$ poiščite točki, ki sta za 3 oddaljeni od njenega gorišča.

74. Izračunajte število p tako, da bo točka $T(2, -4\sqrt{3})$ ležala na paraboli $y^2 = 2px$. Narišite parabolo v koordinatnem sistemu in izračunajte oddaljenost točke T od gorišča parabole in od vodnice parabole.

75. Katere krivulje določajo dane enačbe?
a) $(x - 2y)(x + 2y) = 8 - 8y^2$
b) $(x - 2y)(x + 2y) = 8 - y^2$
c) $(x - 2)(x + 2) = 8 - y^2$
č) $(x - 2)(x + 2) = 4 - y$

76. Izračunajte presečišče parabole $y^2 = 8x$ in premice $4x - y - 4 = 0$.

77. Natančno izračunajte dolžino daljice, katere krajišči sta presečišči premice in parabole, ki sta podani z enačbama $y^2 = x$ in $y = -x + 2$.

78. Premica z enačbo $y = x + 3$ je tangenta na parabolo $y^2 = 2px$. Zapišite enačbo parabole in dotikališče tangente.

79. Izračunajte presečišče parabole in krožnice, ki sta podani z enačbama $y^2 = 5x$ in $(x - 5)^2 + y^2 = 25$.

80. V katerih točkah se sekata parabola $y^2 = 5x$ in elipsa $25x^2 + 96y^2 = 400$?

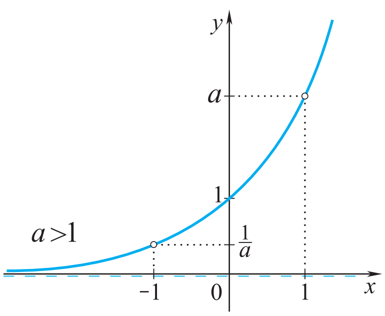
81. Izračunajte presečišča hiperbole $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{12} = 1$ in parabole $y^2 = 6x$.

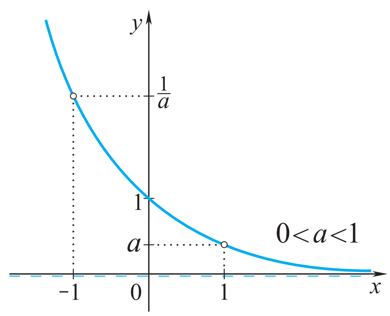
19. EKSPONENTNA FUNKCIJA

Eksponentna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **je dana s predpisom** $f(x) = a^x$, pri čemer je $a > 0$, $a \neq 1$.

Lastnosti eksponentne funkcije:

1. **Definicijsko območje** so vsa realna števila: $D_f = \mathbb{R}$, **zaloga vrednosti** so vsa pozitivna realna števila: $Z_f = (0, \infty)$.
2. Vsi grafi gredo skozi točko $T(0, 1)$.
3. Funkcija je navzdol omejena z 0.
4. Funkcija **je injektivna**: če je $x_1 \neq x_2$, potem je $f(x_1) \neq f(x_2)$.
5. Za graf eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ je **abscisna os vodoravna asimptota**.
6. Za $\boldsymbol{a > 1}$ **je funkcija naraščajoča**, za $\boldsymbol{0 < a < 1}$ **pa padajoča**.





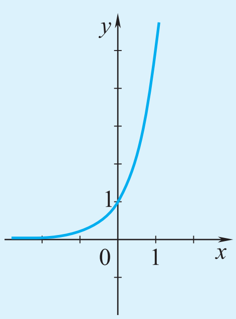
V matematiki velikokrat uporabljamo eksponentno funkcijo z **osnovo** $\boldsymbol{e}$: $f(x) = e^x$, pri čemer je
$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots \doteq 2^{\cdot}7182818$.

1. Zapišimo predpis za eksponentno funkcijo $f(x) = a^x$, za katero velja $f(-1) = 0^{\cdot}2$, in narišimo njen graf.

Zapišemo $f(-1) = a^{-1} = 0^{\cdot}2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$.

Od tod dobimo $a = 5$ in predpis za funkcijo $f(x) = 5^x$.

Narišemo njen graf.



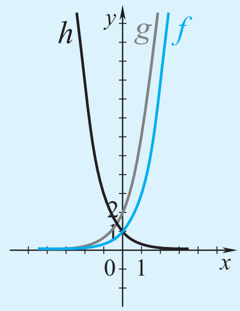
2. V isti koordinatni sistem narišimo grafa funkcij $f(x) = 3^x$, $g(x) = 2 \cdot 3^x$, $h(x) = (\frac{1}{3})^x$ in $s(x) = 3^{x+1}$.

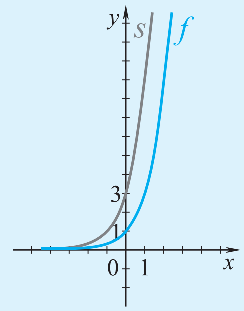
Najprej narišemo graf funkcije f.

Graf funkcije g narišemo tako, da graf funkcije f raztegnemo v smeri ordinatne osi za faktor 2.

Ker je $h(x) = (\frac{1}{3})^x = (3^{-1})^x = 3^{-x} = f(-x)$, lahko graf funkcije h narišemo tako, da graf funkcije f prezrcalimo čez ordinatno os.

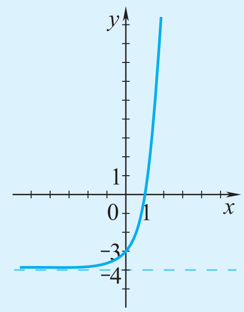
Ker je $s(x) = 3^{x+1} = f(x + 1) = f(x - (-1))$, graf funkcije s narišemo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo v smeri abscisne osi za 1 levo.





3. Narišimo graf funkcije $f(x) = 4^x - 4$ in zapišimo:

a) presečišči grafa s koordinatnima osema
b) enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije f
c) definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f



Graf funkcije f narišemo tako, da graf funkcije $x \mapsto 4^x$ vzporedno premaknemo v smeri ordinatne osi za 4 navzdol.

a) Presečišče grafa z ordinatno osjo je $(0, -3)$, z abscisno osjo pa $(1, 0)$.
b) Enačba vodoravne asimptote grafa funkcije f je $y = -4$.
c) Definicijsko območje funkcije f so vsa realna števila: $D_f = \mathbb{R}$, zaloga vrednosti pa $Z_f = (-4, \infty)$.

Eksponentna enačba

Eksponentne enačbe so enačbe, pri katerih **neznanka nastopa v eksponentu**.

I. Enačbe, pri katerih **vse potence lahko zapišemo z isto osnovo**, prevedemo v obliko $a^{I(x)} = a^{J(x)}$ $(a > 0)$, pri čemer sta I in J poljubna izraza. Z enačenjem eksponentov zapišemo enakovredno enačbo $I(x) = J(x)$. Postopke za reševanje takih enačb smo opisali v poglavju Racionalna števila.

II. Pri enačbah, v katerih sta pri različnih osnovah enaka eksponenta $a^{I(x)} = b^{I(x)}$, pa zapišemo enakovredno enačbo $I(x) = 0$ in jo rešimo.

1. Rešimo enačbe.

a) $25 \cdot 5^x = \frac{1}{5}$

Najprej z osnovo 5 zapišemo vse potence $5^2 \cdot 5^x = 5^{-1}$,
zmnožimo $5^{2+x} = 5^{-1}$
in zapišemo enačbo $2 + x = -1$ in rešitev $x = -3$.

b) $3^x \cdot \sqrt{27} = (\frac{1}{9})^x$

Najprej zapišemo $3^x \cdot \sqrt{3^3} = (3^{-2})^x$,
nato $3^x \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{-2x}$
in opravimo množenje potenc $3^{x+\frac{3}{2}} = 3^{-2x}$.
Zapišemo enačbo $x + \frac{3}{2} = -2x$ ter jo rešimo $x = -\frac{1}{2}$.

c) $4^x \cdot 0{\cdot}5^x : 2^{2x-1} = 16$.

Najprej z osnovo 2 zapišimo vse potence $(2^2)^x \cdot (2^{-1})^x : 2^{2x-1} = 2^4$,

odpravimo oklepaje $2^{2x} \cdot 2^{-x} : 2^{2x-1} = 2^4$,

opravimo množenje in deljenje potenc $2^{2x-x-(2x-1)} = 2^4$

in poenostavimo v $2^{-x+1} = 2^4$.

Zapišemo enačbo $-x + 1 = 4$ in jo rešimo $x = -3$.

2. Za katere x je $3^{x+2} - 3^{x-1} = 78$?

Na levi strani enačbe izpostavimo $3^{x-1}(3^3 - 1) = 78$

in zapišemo $26 \cdot 3^{x-1} = 26 \cdot 3$,

delimo s 26 in iz $3^{x-1} = 3^1$

zapišemo enačbo $x - 1 = 1$

in rešitev $x = 2$.

3. Rešimo enačbo $4^{1-x^2} = 5 : 5^{x^2}$.

Najprej poenostavimo desno stran enačbe $4^{1-x^2} = 5^{1-x^2}$

in zapišemo enačbo $1 - x^2 = 0$

ter jo z razstavljanjem $(1 - x)(1 + x) = 0$ rešimo $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$.

1. Zapišite predpis za eksponentno funkcijo $f(x) = a^x$, za katero velja $f(-2) = 0{\cdot}25$. Izračunajte, koliko je $f(3)$ in $f(\frac{2}{3})$.

2. Zapišite predpis za eksponentno funkcijo $f(x) = a^x$, za katero velja $f(-\frac{3}{2}) = 8$. Ali je $f(\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

3. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-1}$, $h(x) = 2^x - 1$

b) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x+1}$, $h(x) = 3^x + 2$

c) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, $g(x) = (\frac{1}{2})^{x-2}$, $h(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$

č) $f(x) = 4^{-x}$, $g(x) = 4^{-x-1}$, $h(x) = 4^{-x} - 1$

d) $f(x) = -3^x$, $g(x) = -3^{x+1}$, $h(x) = -3^x - 2$

4. Zapišite predpis za eksponentno funkcijo $f(x) = a^x$, za katero velja $f(-\frac{2}{3}) = 0{\cdot}25$, in narišite njen graf.

5. a) V katerih točkah graf funkcije $f(x) = 3^x - 3$ seka koordinatni osi? Zapišite enačbo asimptote grafa funkcije f.

b) Narišite njen graf. Zapišite definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f.

c) V isti koordinatni sistem narišite graf funkcije $g\colon x \mapsto |f(x)|$.

6. Zapišite ničlo funkcije $f(x) = -2^x + 1$ in enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije f ter narišite njen graf. Zapišite definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f.

7. Narišite graf funkcije $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ in rešite neenačbo $f(x) > \frac{1}{3}$.

8. Izračunajte presečišči grafa funkcije $f(x) = -2^{-x} + 2$ s koordinatnima osema, zapišite enačbo vodoravne asimptote in narišite njen graf. Na katerem intervalu je funkcija f pozitivna?

9. a) Narišite graf funkcije $f(x) = e^x$.

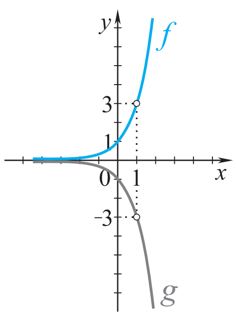
b) Graf funkcije g dobimo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo za 1 levo v smeri abscisne osi. Zapišite predpis za funkcijo g. Kolikšna je začetna vrednost funkcije g?

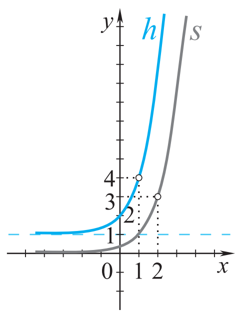
10. a) Narišite graf funkcije $f(x) = 2{\cdot}5^x$.
b) Funkcija $g(x) = f(x) + b$ ima ničlo $x = 1$. Izračunajte b, zapišite predpis za funkcijo g in narišite njen graf.

11. a) Izračunajte presečišči grafa funkcije $f(x) = 2 - 4^x$ s koordinatnima osema, zapišite enačbo vodoravne asimptote in narišite njen graf.
b) V isti koordinatni sistem narišite še graf funkcije $g(x) = |f(x)|$.

12. Dana je funkcija $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$.
a) Zapišite presečišči grafa funkcije f s koordinatnima osema.
b) Narišite graf funkcije f.

13. Na sliki so dani grafi eksponentnih funkcij f, g, h in s. Zapišite njihove predpise.





14. Rešite neenačbe.
a) $2^x - 2 > 0$
b) $2^{x-2} < 1$
c) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1 > 0$

15. Rešite enačbe.
a) $2^{x+3} = 1$
b) $3^{2x-1} = 729$
c) $9 \cdot 3^x = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{3}$
č) $3^{5-2x} = 27^{x+1}$
d) $2^{x+2} = 8\sqrt{2}$
e) $0{\cdot}008^x = 5^{-1}$
f) $0{\cdot}01^{2x-1} = 0{\cdot}0001$
g) $3^{x-1} - 9 \cdot \sqrt[3]{3} = 0$
h) $8^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 0{\cdot}25 : \frac{1}{2}$
i) $125^x \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x+3} = 0{\cdot}2$
j) $\left(\frac{3}{7}\right)^x \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-x-1} = \frac{3}{7}$

16. Rešite enačbe.
a) $5^x = 7^x$
b) $3^{2-\sqrt{x}} = 36 : 6^{\sqrt{x}}$

17. Rešite enačbe.
a) $3^{x-2} + 2 \cdot 3^x = 2\frac{1}{9}$
b) $15 \cdot 2^{x-2} = 44 + 2^x$
c) $2^{3x-2} + 4 \cdot 8^x = 17 \cdot 0{\cdot}5$
č) $9^x = \frac{2}{3} \cdot 3^{2x+1} - 3$
d) $3 \cdot \sqrt{4^x} = 4^{x+1} - 4^x$
e) $12 \cdot 4^{2x-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x} = 16^x + 32$

18. Grafično rešite enačbo $2^x - 6 = -x$ in rezultat računsko preverite.

19. Dana je funkcija $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$.
a) Narišite graf funkcije f.
b) Izračunajte presečišči grafa funkcije f s premicama $x = -1$ in $y = 2{\cdot}25$.

20. Dana je funkcija $f(x) = 0{\cdot}75^x - 1$.
a) Narišite graf funkcije f.
b) Rešite neenačbo $f(x) \leq -\frac{1}{4}$.

21. Dana je funkcija $f(x) = 9 \cdot 3^x - 3$.
a) Zapišite presečišči grafa funkcije f s koordinatnima osema.
b) Narišite graf funkcije f.
c) Izračunajte presečišče grafa funkcije f in premice z enačbo $6x - y + 6 = 0$.

22. Dani sta funkciji $f(x) = -2^x$ in $g(x) = 2x - 4$. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa obeh funkcij. S slike odčitajte koordinati njunega presečišča in ju preverite z računom.

23. Dani sta funkciji $f(x) = 4^{x-1}$ in $g(x) = 2^x$. Izračunajte koordinati njunega presečišča ter v isti koordinatni sistem narišite njuna grafa.

24. Dani sta funkciji $f(x) = x^2$ in $g(x) = 2^{-x+1}$. Zapišite koordinati njunega presečišča ter v isti koordinatni sistem narišite njuna grafa.

25. Dani sta funkciji $f(x) = 2^{x-2}$ in $g(x) = 2x^{-1}$. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa obeh funkcij. S slike odčitajte koordinati njunega presečišča in ju preverite z računom.

26. Rast števila gliv kvasovk je eksponentna in se ob optimalnih pogojih podvoji vsakih 5 minut. Na začetku opazovanja je bilo v vzorcu 1000 kvasovk. Zapišite funkcijo, ki opisuje število kvasovk v odvisnosti od časa t (v minutah), in izračunajte, kolikšno je število kvasovk v vzorcu po eni uri opazovanja.

20. LOGARITEM

Za pozitivno realno število *x* in poljubno število *a* ($a > 0$, $a \neq 1$) **je logaritem z osnovo *a* števila *x*** tisti eksponent ***y***, pri katerem je potenca z osnovo a enaka številu x: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$; $x > 0$; $a > 0$, $a \neq 1$.

Velja: $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a^y = y$, $a^{\log_a x} = x$ in $\log_a x_1 = \log_a x_2$ natanko takrat, ko je $x_1 = x_2$.

V matematiki največ uporabljamo logaritma z osnovo 10 (**desetiški logaritem**) in z osnovo e (**naravni logaritem**), ki sta tudi funkciji na kalkulatorjih. Oznaki:

$\log_{10} x = \log x$

$\log_e x = \ln x$

1. Izračunajmo $\log_2 16$, $\log_2 \frac{1}{4}$ in $\log_2 \sqrt{2}$.

Zapišemo $y = \log_2 16$ in z uporabo definicije logaritma dobimo $2^y = 16$.
Ker je $2^4 = 16$, je $y = \log_2 16 = 4$.
Iz $y = \log_2 \frac{1}{4}$ z uporabo definicije logaritma dobimo $2^y = \frac{1}{4} = 2^{-2}$.
Od tod je $y = \log_2 \frac{1}{4} = -2$.
Iz $y = \log_2 \sqrt{2}$ z uporabo definicije logaritma dobimo $2^y = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$.
Od tod je $y = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

2. Izračunajmo $\log_2 2^3$, $3^{\log_3 4}$, $\log 10^x$ in $e^{\ln 5}$.

Z upoštevanjem definicije logaritma dobimo $\log_2 2^3 = 3$, $3^{\log_3 4} = 4$, $\log 10^x = x$ in $e^{\ln 5} = 5$.

Za $a > 0$, $a \neq 1$, pozitivni realni števili x in y ter poljubno realno število n **veljajo pravila za logaritmiranje**:

1. **Logaritem produkta je vsota logaritmov posameznih faktorjev z enako osnovo**: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
2. **Logaritem kvocienta je razlika logaritmov deljenca in delitelja z enako osnovo**: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
3. **Logaritem potence je produkt eksponenta in logaritma osnove potence**: $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$.

1. Izračunajmo vrednosti izrazov $\log_a \frac{bc^2}{a}$ in $\log_a \frac{a^2\sqrt[3]{c}}{b^3}$, če je $\log_a b = 5$ in $\log_a c = 6$.

Z upoštevanjem pravil za logaritmiranje in danih vrednosti logaritmov zapišemo

$\log_a \frac{bc^2}{a} = \log_a b + \log_a c^2 - \log_a a = \log_a b + 2\log_a c - \log_a a = 5 + 2 \cdot 6 - 1 = 16$ in

$\log_a \frac{a^2\sqrt[3]{c}}{b^3} = \log_a a^2 + \log_a \sqrt[3]{c} - \log_a b^3 = 2\log_a a + \log_a c^{\frac{1}{3}} - 3\log_a b = 2 + \frac{1}{3}\log_a c - 3 \cdot 5 = 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 - 3 \cdot 5 =$
$= -11$.

2. Rešimo enačbe.

a) $\log_3 x = 4$

Z uporabo definicije zapišemo $x = 3^4 = 81$.

b) $\log_8 4 = x$

Z uporabo definicije zapišemo $8^x = 4$.

Zapišemo $(2^3)^x = 2^2$ in od tod iz $2^{3x} = 2^2$ zapišemo enačbo $3x = 2$ in rešimo $x = \frac{2}{3}$.

c) $4\log_{16} x = 3$

Enačbo delimo s 4: $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

in z uporabo definicije logaritma zapišemo $x = 16^{\frac{3}{4}}$

ter izračunamo $x = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$.

č) $\log(8 + \log x) = 1$

Uporabimo definicijo logaritma $8 + \log x = 10^1$,

preoblikujemo v $\log x = 2$

ter izračunamo $x = 10^2 = 100$.

d) $\ln 2 + \ln(x + 6) = 2\ln(x + 2) - \ln(x - 1)$

Uporabimo pravila logaritmiranja in zapišemo $2 \cdot (x + 6) = \frac{(x+2)^2}{x-1}$.

Odpravimo ulomek $2(x + 6)(x - 1) = (x + 2)^2$

in oklepaje $2x^2 - 2x + 12x - 12 = x^2 + 4x + 4$.

Enačbo uredimo $x^2 + 6x - 16 = 0$

ter jo z razstavljanjem v $(x + 8)(x - 2) = 0$ rešimo $x_1 = -8$, $x_2 = 2$.

Naredimo preizkus. Ker za $x_1 = -8$ drugi, tretji in četrti člen v enačbi $\ln 2 + \ln(-8 + 6) = 2\ln(-8 + 2) - \ln(-8 - 1)$ niso definirani, število -8 ni rešitev dane logaritemske enačbe.

Ker pa za $x_2 = 2$ velja $\ln 2 + \ln(2 + 6) = \ln(2 \cdot 8) = \ln 16$ in $2\ln(2 + 2) - \ln(2 - 1) = \ln \frac{4^2}{1} = \ln 16$, je število 2 rešitev dane logaritemske enačbe.

e) $\log_2(x + 21) - 3 = \log_2 x$

Najprej zapišemo $\log_2(x + 21) - \log_2 x = 3$ ter iz $\log_2 \frac{x+21}{x} = 3$ dobimo $\frac{x+21}{x} = 2^3$.

Odpravimo ulomek $x + 21 = 8x$,

preoblikujemo v $-7x = -21$

in zapišemo rešitev $x = 3$.

f) $3^x = 8$

Enačbo logaritmiramo $\log 3^x = \log 8$.

Upoštevamo pravila za logaritmiranje $x\log 3 = \log 8$,

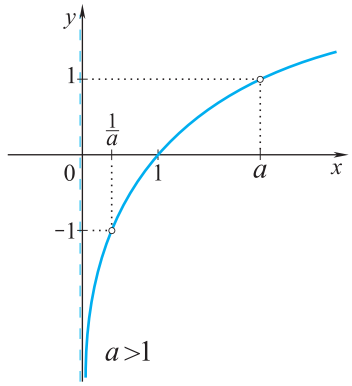
ter izračunamo $x = \frac{\log 8}{\log 3} \doteq 1{,}8928$.

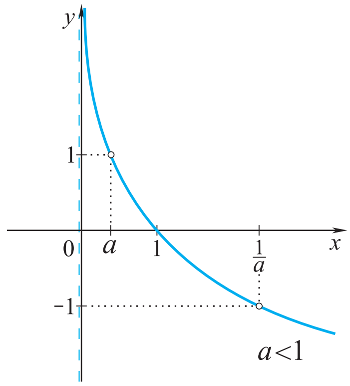
Logaritemska funkcija

Logaritemska funkcija $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, predpisana z $f(x) = \log_a x$, $(a > 0, a \neq 1)$ **je inverzna funkcija** k eksponentni funkciji $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$; $g(x) = a^x$.

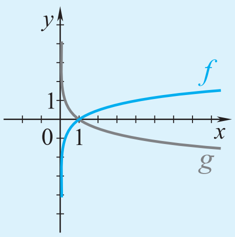
Lastnosti logaritemske funkcije:

1. **Definicijsko območje** logaritemske funkcije je množica vseh pozitivnih realnih števil: $D_f = (0, \infty)$, **zaloga vrednosti** pa množica vseh realnih števil: $Z_f = \mathbb{R}$.
2. Vsi grafi logaritemskih funkcij gredo skozi točko $T(1, 0)$.
3. Logaritemska funkcija je **neomejena**.
4. Funkcija **je injektivna**.
5. Če je $a > 1$, potem je za $0 < x < 1$ funkcija negativna, za $x > 1$ pa pozitivna.
   Če je $0 < a < 1$, potem je za $0 < x < 1$ funkcija pozitivna, za $x > 1$ pa negativna.
6. Za graf logaritemske funkcije je **ordinatna os navpična asimptota**.
7. Logaritemska funkcija je za $\boldsymbol{a > 1}$ **naraščajoča** in za $\boldsymbol{0 < a < 1}$ **padajoča**.





1. V isti koordinatni sistem narišimo grafa funkcij $f(x) = \log_4 x$ in $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.



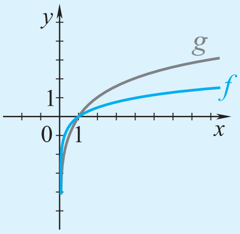
2. Narišimo grafe funkcij $f(x) = \log_4 x$, $g(x) = 2 \cdot \log_4 x$, $h(x) = \log_4 x - 1$ in $s(x) = \log_4 (x - 1)$.

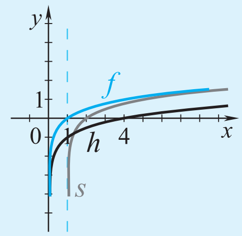
Najprej narišemo graf funkcije f.

Graf funkcije g narišemo tako, da graf funkcije f raztegnemo v smeri ordinatne osi za faktor 2.

Ker je $h(x) = \log_4 x - 1 = f(x) - 1$, graf funkcije h narišemo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo v smeri ordinatne osi za 1 navzdol.

Ker je $s(x) = \log_4 (x - 1) = f(x - 1)$, graf funkcije s narišemo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo v smeri abscisne osi za 1 desno.

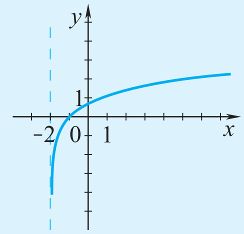




3. Narišimo graf funkcije $f(x) = \ln(x + 2)$ in zapišimo:

a) presečišči grafa s koordinatnima osema,
b) enačbo navpične asimptote grafa funkcije f,
c) definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f.

Graf funkcije f narišemo tako, da graf funkcije $x \mapsto \ln x$ vzporedno premaknemo v smeri abscisne osi za 2 levo.



a) Presečišče grafa z ordinatno osjo je $(0, \ln 2) \doteq (0, 0{\cdot}69)$, z abscisno osjo pa $(-1, 0)$.
b) Enačba navpične asimptote grafa funkcije f je $x = -2$.
c) Definicijsko območje funkcije f je $D_f = (-2, \infty)$, zaloga vrednosti so vsa realna števila: $D_f = \mathbb{R}$.

1. Natančno izračunajte.
a) $\log 100 - \log 10 + \log 1 + \log \sqrt{10}$
b) $\log_3 81 + \log_3 \frac{1}{9} - \log_3 \sqrt{27}$
c) $\log_2 2 + \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} + \log_2 0{\cdot}5$
č) $\log_4 64 + \log_4 \frac{24}{\sqrt{16}} - \log_4 3$

2. Izračunajte vrednosti številskih izrazov in rezultat zaokrožite na štiri mesta.
a) $\log_5 \frac{1}{5} + \log 5 + \ln 5$
b) $\ln e + \ln 1 + \ln 0{\cdot}25$

3. Natančno izračunajte $\log_{\frac{1}{2}} 8 + \log_{\frac{1}{4}} 2$.

4. Z uporabo definicije in lastnosti logaritma natančno izračunajte.
a) $\log_4 4^x$
b) $\log_4 64^x$
c) $\log 10^x$
č) $\log \sqrt[x]{10}$
d) $\ln e^3$
e) $3^{\log_3 5}$
f) $e^{\ln 2}$
g) $10^{\log \frac{1}{2}}$
h) $25^{\log_5 2}$
i) $\sqrt{27}^{\log_3 5}$
j) $4^{\log_2 5 - 1}$

5. Natančno izračunajte $10^{\log 2} + \log_4 \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt[3]{4}$.

6. Logaritmirajte.
a) $\log \frac{7a^3}{b^5}$
b) $\log \frac{10\sqrt{a}}{b^2 \sqrt[3]{c}}$

7. Izraz $\log_3 \frac{\sqrt{3a}}{9a^3}$ zapišite v obliki $m + n\log_3 a$; $m, n \in \mathbb{Q}$.

8. Izračunajte $\log \frac{100a^4 \sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}}$, če je $\log a = 4$, $\log b = 6$ in $\log c = 2$.

9. Izračunajte $\log_a \frac{a^3 \sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2}}$, če je $\log_a b = 8$ in $\log_a c = 9$.

10. Naj bo $\log_a 3 = \frac{1}{4}$. Izračunajte, koliko je $\log_a 81$.

11. Zapišite x, če je:
a) $\log x = 2\log a + \log b + 3\log c - \log 3 - 4\log d$
b) $\log x = 1 + 2\log a - \frac{1}{2}\log b$
c) $\log_b x = 2 - 2\log_b 5 - \log_b 3 + \frac{1}{2}\log_b a$

12. Rešite enačbe.
a) $\log_2 x = 3$
b) $\log_x 16 = 4$
c) $\log_8 0{\cdot}25 = x$
č) $\log_2 (\frac{1}{8}) = x$
d) $\log(x - 5) = 2$
e) $\log_x (6 - x) = 2$
f) $\log_{x-1}(x + 11) = 2$
g) $\log_9 \frac{x+1}{2} = 0$
h) $\log 1000 = x$
i) $\log 0{\cdot}1 = x$
j) $\ln x = 2$
k) $\ln 1 = x$
l) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt[3]{3} = x$
m) $\log_4 (1 - \frac{x}{2}) = 3$
n) $1 + \log_3 (3x - 5) = 0$

13. Rešite enačbo $\log_{\sqrt{2}} x = -3$ in rešitev zapišite v obliki $\frac{\sqrt{2}}{k}$; $k \in \mathbb{N}$.

14. Rešite enačbi.
a) $\log_3 (\log_2 x) = 1$
b) $\log_{\frac{1}{3}} (\log_2 (x + 1)) = -1$

15. Rešite enačbe.

a) $\log(2x+1)+\log(x+1)=\log(5x+1)$
b) $\log(x+2)+\log(x+3)=2\log(1-x)$
c) $\log_2(2x-1)+\log_2(x+3)-\log_2(x+7)=$
$=\log_2 x$
č) $\log 2+\log(3x+1)-\log(x+3)=\log(2x)$
d) $\ln(2x^2-5x-3)=2\ln(x+3)$
e) $\log(1-2x)-\log(1-x)=\log(1-5x)$
f) $\log(11x-1)-\log x=1$
g) $\log(x+4)+2-\log x=\log(4x+16)$
h) $3-\log_3 x=\log_3(x-6)$
i) $\dfrac{\ln x+\ln 9}{\ln(2+x)}=2$

16. Rešite enačbe in rešitev zaokrožite na 4 mesta.

a) $\log_{\sqrt{3}} x=3$
b) $3^x=5$
c) $10^{x+1}=5$
č) $6^{x-1}=5$
d) $2^{x+3}=10$
e) $e^{2x}=10$
f) $0{\cdot}5\cdot 5^{x+1}=4$
g) $5^x=3^{x+1}$

17. V istem koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij.

a) $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=\log_2(x-1)$,
$h(x)=\log_2 x-1$
b) $f(x)=\log_3 x$, $g(x)=\log_3(x+1)$,
$h(x)=\log_3 x+1$
c) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$,
$h(x)=\log_{\frac{1}{2}} x-2$
č) $f(x)=-\log_2 x$, $g(x)=-\log_2(x+1)$,
$h(x)=-\log_2 x-1$
d) $f(x)=-\log_4 x$, $g(x)=-\log_4(x-2)$,
$h(x)=-\log_4 x+1$

18. V katerih točkah graf funkcije $f(x)=\log_3(x+3)$ seka koordinatni osi? Narišite njen graf. Katere od točk $A(0,1)$, $B(\frac{1}{3},2)$ in $C(-\frac{8}{3},-1)$ ležijo na grafu funkcije f?

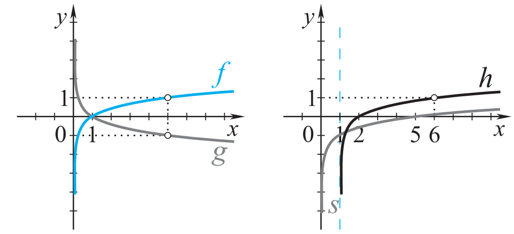
19. Izračunajte presečišči grafa funkcije $f(x)=-\log_6 x+1$ s koordinatnima osema, zapišite enačbo navpične asimptote in narišite njen graf.

20. Dani sta funkciji $f(x)=\log_4 x$ in $g(x)=|f(x)|$. Narišite njuna grafa in zanju zapišite definicijsko območje in zalogo vrednosti.

21. V isti koordinatni sistem narišite grafe funkcij $f\colon x\mapsto 2\cdot\log_5 x$ in $g\colon x\mapsto|2\cdot\log_5 x|$.

22. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x)=\ln x$ in $g(x)=f(x)-1$.

23. Na sliki so dani grafi logaritemskih funkcij f, g, h in s. Zapišite njihove predpise.



24. Narišite graf funkcije $f(x)=\log(x+5)$. Za katere x je funkcija f pozitivna?

25. Narišite graf funkcije $f(x)=\log_{\frac{1}{4}} x-1$ in rešite neenačbo $f(x)\le 0$.

26. Rešite neenačbi.

a) $\log_2 x<4$
b) $\log_{\frac{1}{3}} x+1>0$
c) $\log_6(x+4)>1$

27. Izračunajte presečišči grafa funkcije $f(x)=\log(x+2)$ s koordinatnima osema in narišite njen graf.

28. Izračunajte presečišče grafa funkcije $f(x)=\log_{\frac{1}{4}} x+1$ z abscisno osjo. V dani koordinatni sistem narišite graf funkcije f. Za kateri x je $f(x)=3$?

29. Narišite grafa funkcij $f(x)=\log_4 x$ in $g(x)=-\log_4 x+1$ ter izračunajte absciso njunega presečišča.

30. V isti koordinatni sistem narišite graf funkcije $f(x)=\ln x$ in premici z enačbama $y=2$ in $x=3$. Izračunajte koordinate presečišč grafa funkcije f in danih premic.

31. Dani sta funkciji $f(x)=\log_4 x$ in $g(x)=-x+5$. V isti koordinatni sistem narišite grafa obeh funkcij. S slike odčitajte koordinati presečišča grafov funkcij in rešitev preverite z računom.

32. Rešite enačbi. Pomagajte si z grafi.

a) $x + 5 = 4^{-x}$

b) $2^x - 1 = x^2$

33. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = 2^x + 2$ in $g(x) = \log_2(x + 2)$ ter zanju zapišite definicijsko območje in zalogo vrednosti.

34. Dana je funkcija $f(x) = 1{\cdot}5^{x-2}$.

a) Izračunajte $f(0)$, $f(2)$ in $f(3)$ ter narišite graf funkcije f.

b) Izračunajte presečišči grafa funkcije f s premicama $x = 4$ in $y = 2$.

35. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij $f(x) = 2^{-x}$ in $g(x) = 5^{x-1}$ in izračunajte presečišči njunih grafov. Koordinati presečišča zapišite na stotinko natančno.

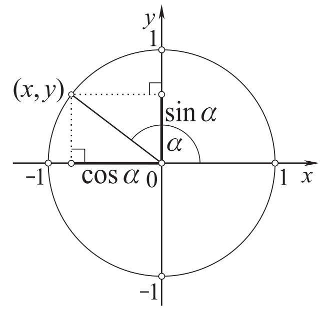
36. Dani sta funkciji $f(x) = 2 \cdot 3^x$ in $g(x) = 4^{-x}$. V istem koordinatnem sistemu narišite grafa obeh funkcij in izračunajte koordinati presečišča. Koordinati presečišča zapišite na dve mesti.

37. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkciji $f(x) = 3^{x-1}$ in $g(x) = x^{-1}$. Zapišite koordinati njunega presečišča.

38. Razpolovni čas (čas, v katerem povprečno razpade polovica prvotne količine elementa – razpolovna doba) radioaktivnega ogljika C^{14} je približno 5570 let. Formula $y = y_0 \cdot e^{-kt}$ opisuje razpad radioaktivnega elementa, pri čemer je y masa elementa, ki ostane po t letih, y_0 pa masa elementa v začetku opazovanja ($t = 0$). Izračunajte vrednost konstante k. Koliko odstotkov prvotne količine ogljika C^{14} je v opazovanem vzorcu še po 10 000 letih?

21. KOTNE FUNKCIJE

Definicija, lastnosti in zveze med kotnimi funkcijami



Definicija kotnih funkcij sinus in kosinus za poljuben kot: Točko (1, 0) zavrtimo okoli koordinatnega izhodišča za poljuben kot α.

Koordinati dobljene točke, ki sta odvisni od kota α (sta funkciji kota α) označimo z (x, y). Definiramo: Sinus kota α je enak ordinati dobljene točke, kosinus kota α je enak abscisi dobljene točke: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

Definiramo še:

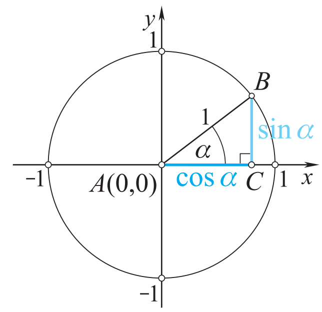
Funkcija **tangens** je kvocient funkcije sinus in kosinus: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha \neq 0$,

funkcija **kotangens** je kvocient funkcije kosinus in sinus: $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha \neq 0$.

Definicija kotnih funkcij za ostre kote v enotski krožnici se ujema z definicijo v pravokotnem trikotniku:

$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{1} = |BC|$, $\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AC|}{1} = |AC|$.

Vrednosti kotnih funkcij za kote 0°, 30°, 45°, 60° in 90° smo izračunali po definiciji kotnih funkcij ostrih kotov – v pravokotnem trikotniku v 7. poglavju Osnove geometrije.



Točke B, C, D, E, F, G in H dobimo, če točko $A(1, 0)$ zavrtimo okoli koordinatnega izhodišča za kote 30°, $\frac{\pi}{4}$, 60°, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ in 2π. Zapišimo koordinate dobljenih točk.

Zapišemo $B(\cos 30°, \sin 30°)$ in izračunamo $B(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

$C(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4})$, $C(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$D(\cos 60°, \sin 60°)$, $D(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$E(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2})$, $E(0, 1)$

$F(\cos\pi, \sin\pi)$, $F(-1, 0)$

$G(\cos\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2})$, $G(0, -1)$

$H(\cos 2\pi, \sin 2\pi)$, $H(1, 0)$

Osnovne zveze med kotnimi funkcijami:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

1. Poenostavimo izraz $\dfrac{\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x + \cos\pi}$.

Zapišemo $\dfrac{\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x + \cos\pi} = \dfrac{0 - 1\cdot\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x - 1} = \dfrac{-\sin x\cos x}{\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)} = \dfrac{-\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x} =$

$= \dfrac{-\sin x\cos x}{-\sin^2 x} = \cot x.$

2. Pokažimo, da je $(2 + \tan^2 x + \cot^2 x)\cdot(\sin x\cdot\cos x)^2 = 1$.

Zapišemo $(2 + \tan^2 x + \cot^2 x)\cdot(\sin x\cdot\cos x)^2 = (1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x)\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x =$

$= \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x\cdot\cos^2 x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x = 1.$

3. Natančno izračunajmo $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ in $\cot\alpha$, če je $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ in je $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Iz zveze $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ izrazimo $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 a}$ in izračunamo

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$.

Nato izračunamo še $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\dfrac{12}{5}$ in $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = -\dfrac{5}{12}$.

4. Natančno izračunajmo $\cos\alpha$ in $\sin\alpha$, če je $\tan\alpha = -\sqrt{2}$ in je $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Iz zveze $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ izrazimo $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1 + \tan^2\alpha}}$ in izračunamo $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{1+2}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Iz zveze $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ izrazimo $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ in izračunamo $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Kotne funkcije komplementarnih kotov α in $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$:

Sinus komplementarnega kota je enak kosinusu kota, kosinus komplementarnega kota je enak sinusu kota:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

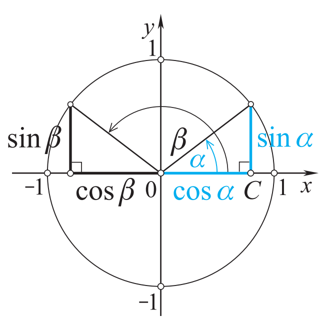
Tangens komplementarnega kota je enak kotangensu kota, kotangens komplementarnega kota je enak tangensu kota:

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

Kotne funkcije suplementarnih kotov α in $\beta = \pi - \alpha$:

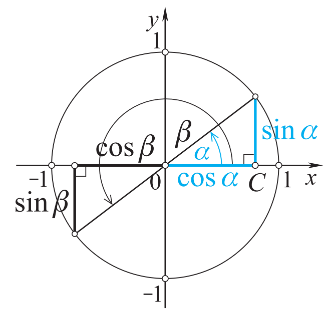
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$



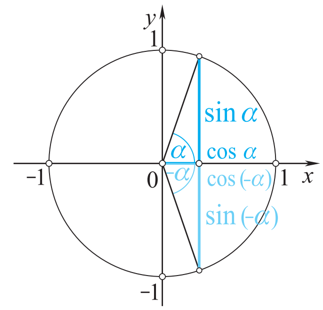
Kotni funkciji sinus in kosinus za kote med π in $\frac{3\pi}{2}$ lahko zapišemo z ostrimi koti po obrazcih:

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad\qquad$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$



Kotni funkciji sinus in kosinus za kote med $\frac{3\pi}{2}$ in 2π lahko zapišemo z ostrimi koti po obrazcih:

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad\qquad$ $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$



Kotni funkciji sinus in kosinus za nasprotne kote:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad\qquad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Kotni funkciji sinus in kosinus sta periodični funkciji z osnovno periodo 2π:

$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin\alpha$ $\qquad\qquad$ $\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos\alpha$ $\qquad$ $k \in \mathbb{Z}$

Kotni funkciji tangens in kotangens sta periodični z osnovno periodo π:

$\tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan\alpha$ $\qquad\qquad$ $\cot(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cot\alpha$ $\qquad$ $k \in \mathbb{Z}$

Opomba: Vse navedene formule veljajo tudi, če je kot α podan v stopinjah in je namesto π zapisano $180°$.

1. Natančno izračunajmo $\sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{8}$.

Upoštevamo obrazce za kotni funkciji sinus in kosinus za suplementarne in komplementarne kote in zapišemo

$$\sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\frac{\pi}{8} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) =$$
$$= \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

2. Izrazimo s kotno funkcijo ostrega kota in natančno izračunajmo.

a) $\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{25\pi}{6} - \cos\frac{13\pi}{3}$

b) $\sin\frac{10\pi}{3} - \cos\frac{19\pi}{4} + \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cot\frac{7\pi}{6}$

Izračunamo $\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{25\pi}{6} - \cos\frac{13\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) =$
$= -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$.

Zapišemo $\sin\frac{10\pi}{3} - \cos\frac{19\pi}{4} + \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cot\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 4\pi\right) - \tan\frac{\pi}{3} + \cot\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) =$
$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \tan\frac{\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{3} + \cot\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} =$
$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$.

Adicijski izreki:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

1. Natančno izračunajmo $\sin 15°$, $\cos 75°$ in $\tan 105°$.

Uporabimo adicijske izreke in izračunamo

$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \sin 30° \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$\tan 105° = \tan(45° + 60°) = \frac{\tan 45° + \tan 60°}{1 - \tan 45° \cdot \tan 60°} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3} = \frac{4 + 2 \cdot \sqrt{3}}{-2} =$

$= -2 - \sqrt{3}$.

2. Pokažimo, da velja $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) - \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}\,\sin\alpha$.

Izračunamo

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) - \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{6} - (\cos\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{3}) =$

$= \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha \cdot \frac{1}{2} - \cos\alpha \cdot \frac{1}{2} + \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\sin\alpha.$

Kotne funkcije dvojnih kotov:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

1. Natančno izračunajmo $\sin 2\alpha$, če je $\cot\alpha = -\frac{20}{21}$ in $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Iz $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ izrazimo $\sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \cot^2\alpha}$ in izračunamo

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{400}{441}}} = \sqrt{\frac{441}{841}} = \frac{21}{29}$.

Nato iz zveze $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ izrazimo $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ in izračunamo

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{441}{841}} = -\sqrt{\frac{400}{841}} = -\frac{20}{29}$.

Zapišemo še $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{21}{29} \cdot (-\frac{20}{29}) = -\frac{840}{841}$.

2. Poenostavimo izraz $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha}$.

Zapišemo $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\tan 2\alpha.$

Pretvarjanje vsote kotnih funkcij v produkt:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

Pretvarjanje produkta kotnih funkcij v vsoto:

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

1. Izraza $\cos 105° + \cos 15°$ in $\sin\frac{\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}$ zapišimo kot produkt in izračunajmo njuno natančno vrednost.

Uporabimo znana obrazca in izračunamo

$\cos 105° + \cos 15° = 2 \cdot \cos\frac{105° + 15°}{2}\cos\frac{105° - 15°}{2} = 2 \cdot \cos 60° \cos 45° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ter $\sin\frac{\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12} = 2 \cdot \cos\frac{\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2} = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{4}\sin(-\frac{\pi}{6}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

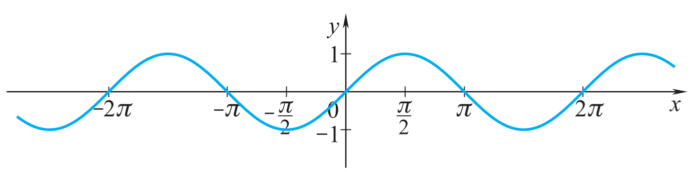
2. Izraza $\sin 105° \cdot \sin 15°$ in $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{12}$ zapišimo kot vsoto in izračunajmo njuno natančno vrednost.

Zapišemo $\sin 105° \cdot \sin 15° = -\frac{1}{2}(\cos(105° + 15°) - \cos(105° - 15°)) = -\frac{1}{2}(\cos 120° - \cos 90°) =$
$= -\frac{1}{2}(-\cos 60° - 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

in $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}) + \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12})) = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

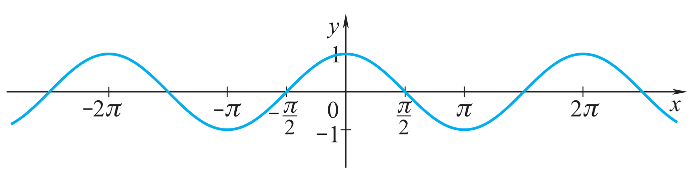
Grafi in lastnosti kotnih funkcij

I. $x \mapsto \sin x$



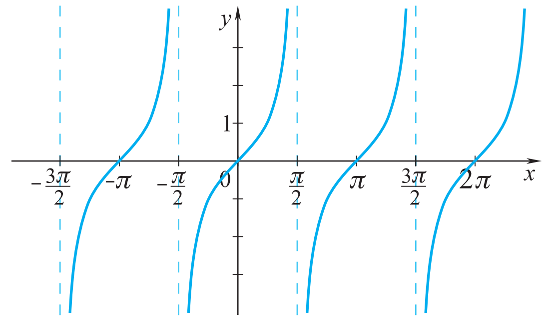
1. **Definicijsko območje** so vsa realna števila: $D_f = \mathbb{R}$.
2. **Zaloga vrednosti** je zaprti interval od −1 do 1; $Z_f = [-1, 1]$.
3. Je **periodična** z osnovno **periodo 2**π: $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$; $k \in \mathbb{Z}$.
4. Je **liha** funkcija: $\sin(-x) = -\sin(x)$; graf je simetričen glede na koordinatno izhodišče.
5. Ničle so $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. Maksimumi so $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
7. Minimumi so $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

II. $x \mapsto \cos x$



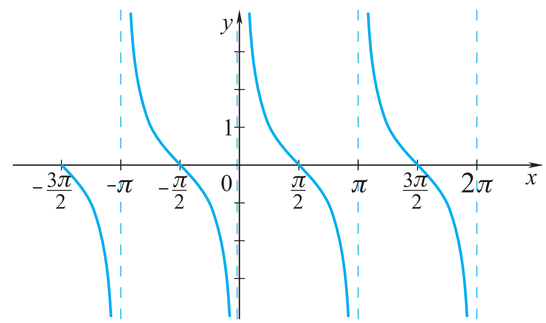
1. **Definicijsko območje** so vsa realna števila: $Df = \mathbb{R}$.
2. **Zaloga vrednosti** je zaprti interval od −1 do 1; $Z_f = [-1, 1]$.
3. Je **periodična** z osnovno **periodo 2**π: $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$; $k \in \mathbb{Z}$.
4. Je **soda** funkcija: $\cos(-x) = \cos x$; graf je simetričen glede na ordinatno os.
5. Ničle so $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
6. Maksimumi so $x = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
7. Minimumi so $x = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

III. $\boldsymbol{x \mapsto \tan x}$



1. **Definicijsko območje** so vsa realna števila, razen ničel funkcije kosinus: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
2. **Zaloga vrednosti** so vsa realna števila: $Z_f = \mathbb{R}$.
3. Je **periodična** z osnovno **periodo** π: $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha;\ k \in \mathbb{Z}$.
4. Je **liha** funkcija: $\tan(-x) = -\tan x$. Njen graf je simetričen glede na koordinatno izhodišče.
5. Ničle so $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.
6. Poli so v $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

IV. $\boldsymbol{x \mapsto \cot x}$



1. **Definicijsko območje** so vsa realna števila, razen ničel funkcije sinus: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
2. **Zaloga vrednosti** so vsa realna števila: $Z_f = \mathbb{R}$.
3. Je **periodična** z osnovno periodo π: $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha;\ k \in \mathbb{Z}$.
4. Je **liha** funkcija: $\cot(-x) = -\cot x$. Njen graf je simetričen glede na koordinatno izhodišče.
5. Ničle so $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.
6. Poli so v $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Funkcija $x \mapsto A\sin(\omega(x - \varphi))$ opisuje **sinusno nihanje**.

Število A imenujemo **amplituda sinusnega nihanja**, ω je **krožna frekvenca**, φ pa **fazni premik**.

Funkcija $x \mapsto A\sin(\omega(x - \varphi))$ ima **osnovno periodo** $\frac{2\pi}{\omega}$, **zaloga vrednosti** pa je interval $[-A, A]$.

Grafa funkcij $x \mapsto A\sin(\omega(x - \varphi)) + B$ in $x \mapsto A\cos(\omega(x - \varphi)) + B$ lahko narišemo bodisi s premiki ali raztegi (12. poglavje) bodisi z računanjem ničel funkcije in točk, v katerih doseže funkcija največjo oz. najmanjšo vrednost.

1. Za funkcije $f(x) = \frac{3}{2}\sin 2x$, $g(x) = -5\cos\frac{x}{2}$ in $h(x) = 4\sin(\frac{x}{3} + \pi) + 3$ zapišimo amplitudo in osnovno periodo ter zalogo vrednosti.

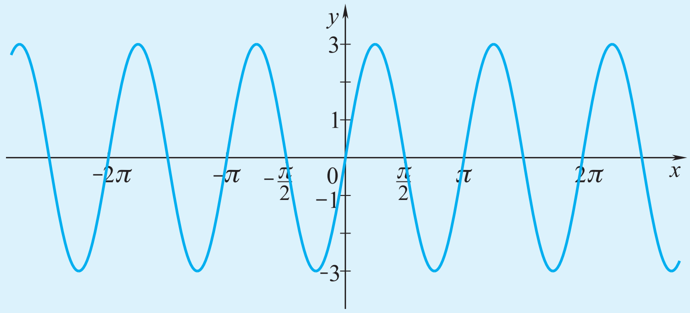
Amplituda funkcije f je $\frac{3}{2}$, osnovna perioda pa $\frac{2\pi}{2} = \pi$, zaloga vrednosti pa $Z_f = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Amplituda funkcije g je 5, osnovna perioda pa $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, zaloga vrednosti pa $Z_g = [-5, 5]$.

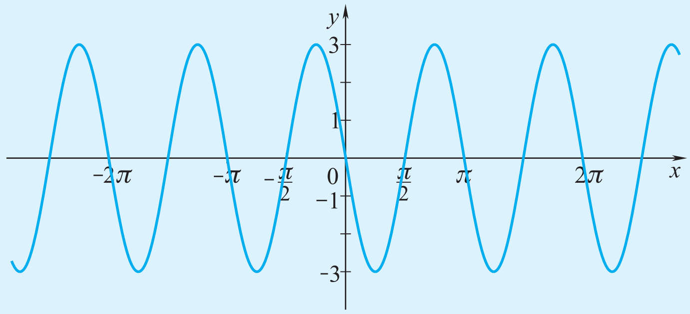
Amplituda funkcije h je 4, osnovna perioda pa $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$, zaloga vrednosti pa $Z_h = [-1, 7]$.

2. Narišimo grafe funkcij $f(x) = 3\sin 2x$, $g(x) = 3\sin(2x - \pi)$ in $h(x) = 3\sin(2x - \pi) + 3$.

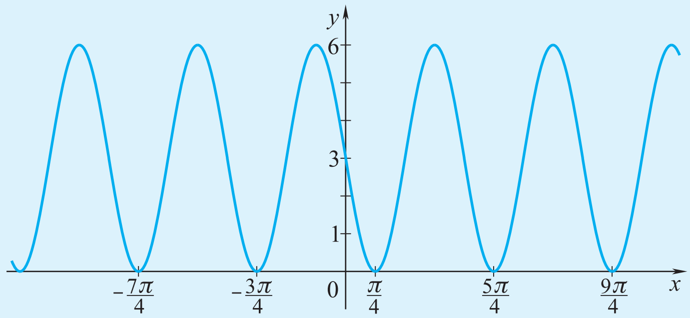
Amplituda funkcije f je 3, osnovna perioda pa $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Narišemo graf.



Ker je $g(x) = 3\sin(2(x - \frac{\pi}{2}))$, graf funkcije g narišemo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo za $\frac{\pi}{2}$ desno.



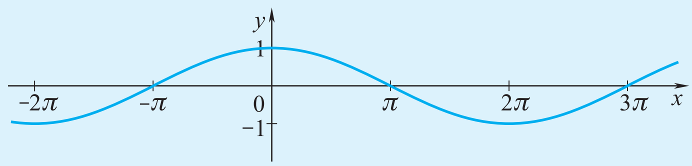
Graf funkcije h narišemo tako, da graf funkcije g vzporedno premaknemo za 3 navzgor.



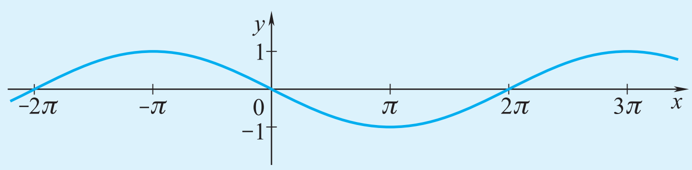
3. Narišimo grafa funkcij $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ in $g(x) = \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2})$.

Osnovna perioda funkcije je $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Narišemo graf.

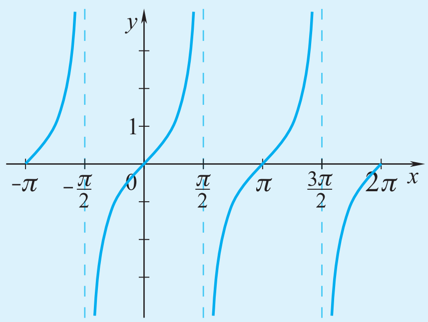


Ker je $g(x) = \cos(\frac{1}{2}(x + \pi))$, graf funkcije g narišemo tako, da graf funkcije f vzporedno premaknemo za π levo.

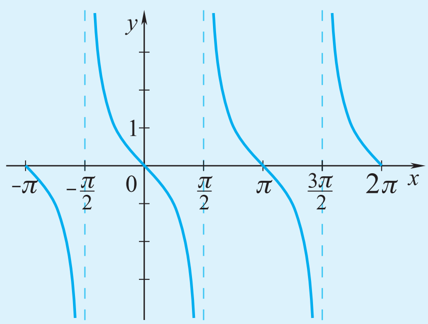


4. Narišimo grafa funkcij $f(x) = \tan x$ in $g(x) = -\tan x$.

Narišemo graf funkcije f.

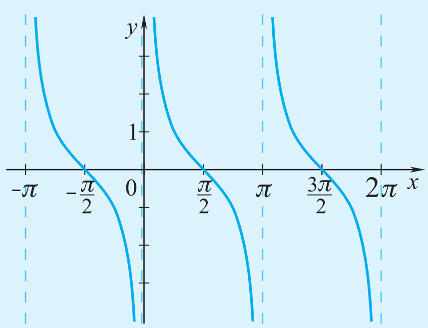


Graf funkcije g narišemo tako, da graf funkcije f zrcalimo čez abscisno os.

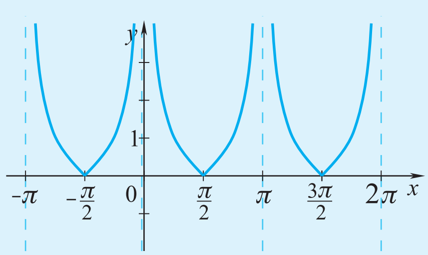


5. Narišimo grafa funkcij $f(x) = \cot x$ in $g(x) = |\cot x|$.

Narišemo graf funkcije f.



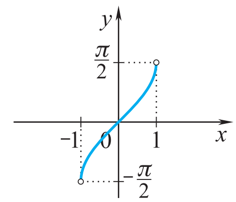
Graf funkcije g narišemo tako, da del grafa funkcije f, ki je nad abscisno osjo ali pa na abscisni osi, ohranimo, tisti del grafa funkcije f, ki je pod abscisno osjo, pa prezrcalimo čez abscisno os.



Krožne funkcije

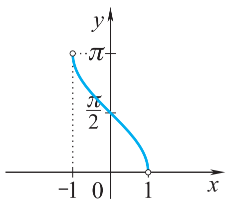
Funkcija arcsin: $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ **je inverzna funkcija k funkciji sinus na** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Velja: $\arcsin y$ je tak kot x med $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$, da je $\sin x = y$.



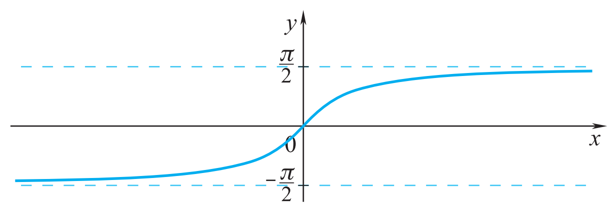
Funkcija arccos: $[-1, 1] \to [0, \pi]$ **je inverzna funkcija k funkciji kosinus na** $[0, \pi]$.

Velja: $\arccos y$ je tak kot x med 0 in π, da je $\cos x = y$.



Funkcija arctan: $\mathbb{R} \mapsto (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ **je inverzna funkcija k funkciji tangens na** $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Velja: $\arctan y$ je tak kot x med $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$, da je $\tan x = y$.



Izračunajmo $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos(-\frac{1}{2})$, $\arctan\sqrt{3}$ in $\arctan(-1)$.

$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$

$\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Trigonometrične enačbe

Trigonometrične enačbe so enačbe, ki jih lahko prevedemo v obliko $I(x) = a$; $a \in \mathbb{R}$;

izraz $I(x)$ je ena od kotnih funkcij $\sin x$, $\cos x$ in $\tan x$.

Rešitev trigonometrične enačbe je množica realnih števil (kotov), za katera ima kotna funkcija vnaprej predpisano vrednost.

Geometrijsko: Iščemo abscise presečišč grafa dane kotne funkcije in vzporednice k abscisni osi $y = a$.

Osnovne trigonometrične enačbe:

1. $\boldsymbol{\sin x = a}$; $a \in [-1, 1]$

   Rešitve so: $x = \arcsin a + 2k\pi$,
   $x = \pi - \arcsin a + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$; $a \in [-1, 1]$

Rešitve so: $x = \arccos a + 2k\pi,$
$x = -\arccos a + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

3. $\mathbf{tan}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$; $a \in \mathbb{R}$

Rešitve so: $x = \arctan a + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

1. Rešimo osnovne enačbe.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Enačba ima dve množici rešitev:

$x = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z},$

$x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$

Enačba ima dve množici rešitev:

$x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z},$

$x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

c) $\sin x = 0$

Enačba ima eno množico rešitev $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

č) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Enačba ima dve množici rešitev:

$x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z},$

$x = -\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Enačba ima dve množici rešitev:

$x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z},$

$x = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

e) $\cos x = 1$

Enačba ima eno množico rešitev $x = 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

f) $\tan x = 1$

Enačba ima eno množico rešitev:

$x = \arctan 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

g) $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Enačba ima eno množico rešitev:

$x = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + k\pi = -\frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

2. Rešimo enačbe.

a) $2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$

Enačbo preoblikujemo v $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Enačba ima dve množici rešitev:

$\frac{x}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ in od tod $x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$,

$\frac{x}{2} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ in od tod $x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

Enačba ima dve množici rešitev:

$2x - \frac{\pi}{3} = \arccos\frac{1}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ in od tod $x = \frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$,

$2x - \frac{\pi}{3} = -\arccos\frac{1}{2} + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ in od tod $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin 2x - \cos x = 0$

Enačbo preoblikujemo v $2\sin x\cos x - \cos x = 0$

oz. $\cos x(2\sin x - 1) = 0$.

Produkt dveh faktorjev je 0, če je vsaj eden od faktorjev 0. Zato zapišemo enačbi:

$\cos x = 0$

z rešitvijo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

$2\sin x - 1 = 0$ in od tod $\sin x = \frac{1}{2}$

z dvema množicama rešitev

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$,

$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

č) $2\sin x = \cos 2x + 3$

Upoštevamo, da je $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ter zapišemo $2\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x + 3$.

Uporabimo zvezo $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ in enačbo preoblikujemo v

$2\sin^2 x + 2\sin x - 4 = 0$,

jo delimo z $2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

in razstavimo $(\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$.

Rešitve dane enačbe so rešitve enačb:

$\sin x = 1$

z rešitvijo $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

$\sin x = -2$,

ki nima rešitve.

d) $\sin 3x - \sin x = 0$

Zapišemo kot produkt $2 \cdot \cos\frac{3x + x}{2}\sin\frac{3x - x}{2} = 0$ in od tod $2 \cdot \cos 2x \sin x = 0$.

Rešitve dane enačbe so rešitve enačb:

$\cos 2x = 0$

z rešitvijo $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$.

$\sin x = 0$

z rešitvijo $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

e) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Najprej zapišemo $\frac{1}{2}(\cos(x + \frac{\pi}{4} + x) + \cos(x + \frac{\pi}{4} - x)) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

in rešimo

$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$

3. Dana je funkcija $f(x) = 4\sin(x + \frac{\pi}{4})$.

a) Izračunajmo ničle in koordinate njenih maksimumov in minimumov.
b) Narišimo njen graf.
c) Izračunajmo abscise presečišč, v katerih graf funkcije f seka premico z enačbo $y = 2$.

a) Ničle so rešitve enačbe $4\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ oz. $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$.

Ničle so $x + \frac{\pi}{4} = k\pi$ oz. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Abscise maksimumov so rešitve enačbe $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$.

Te so $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oz. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

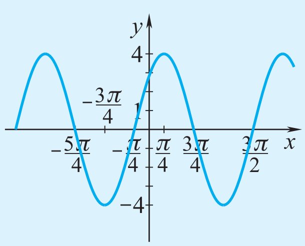
Funkcija f ima maksimume v točkah $M_k(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, 4); k \in \mathbb{Z}$.

Abscise minimumov so rešitve enačbe $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1$.

Te so $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oz. $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Funkcija f ima minimume v točkah $m_k(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, -4); k \in \mathbb{Z}$.

b) Narišemo graf.



c) Abscise presečišč grafa funkcije f s premico $y = 2$ so rešitve enačbe $4\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 2$ oz. $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

Množici rešitev sta dve:

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ in od tod $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ter

$x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ in od tod $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

1. Natančno izračunajte
$\sin\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{6}$.

2. Točke A, B, C, D, E, F in G dobimo, če točko $T(4, 0)$ zavrtimo okoli koordinatnega izhodišča za kote $\frac{\pi}{6}$, $45°$, $\frac{\pi}{3}$, $90°$, π, $270°$ in 2π. Zapišite koordinate dobljenih točk.

3. V enotski krožnici narišite kota α in β $(0 < \alpha, \beta < 180°)$, za katera je:
a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$
b) $\cos\beta = -\frac{1}{2}$

4. Za kot α velja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ in $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Natančno izračunajte $\cos\alpha$ in $\tan\alpha$.

5. Naj bo $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ in $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Ne da bi izračunali kot α, natančno izračunajte $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ in $\cot\alpha$.

6. Naj bo $\tan\alpha = 2$ in $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Natančno izračunajte $\cos\alpha$ in $\sin\alpha$.

7. Za kot α velja $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ in $\cot\alpha = -\frac{1}{5}$.
Natančno izračunajte $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ in $\tan\alpha$.

8. Koliko je $\tan x$, če je $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = 2$?

9. Pokažite, da velja $\frac{\cos^3 x}{\sin x - \sin^3 x} = \cot x$.

10. Poenostavite izraze.
a) $(\sin x \cdot \cos x)^2(\tan x + \cot x)^2$
b) $\frac{\cos x}{\tan x + 1} - \frac{\sin x}{\cot x + 1}$
c) $\sin 2x(\tan x + \cot x)$
č) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

11. Ugotovite, ali velja
$\frac{\cos(-\alpha)}{\sin\frac{\pi}{2} + \sin(-\alpha)} + \frac{\cos 0 - \sin\alpha}{\cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$.

12. Natančno izračunajte.
a) $\sin\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{6} + \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \cos\frac{3\pi}{8}$
b) $2\sin 210° + 4\cos 330° - 3\tan 30° - \cot 150°$
c) $4\sin 120° \cos(-60°) - \tan 240° - 2\cot 300°$
č) $\sin\frac{5\pi}{3} \cdot \cos\frac{5\pi}{6} + \sin^2\frac{3\pi}{4} \cdot \sin\frac{5\pi}{6}$
d) $\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{2}\right)^2$
e) $\frac{\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + \tan\frac{5\pi}{4}}{\sin\frac{4\pi}{3} \cdot \cos\frac{25\pi}{6} + \cot\frac{13\pi}{4}}$
f) $\cos\frac{13\pi}{3} + \sin\frac{11\pi}{4} - \tan(15\pi) + \cos\left(\frac{37\pi}{4}\right)$
g) $\frac{3\tan\frac{7\pi}{6} - \cot\frac{10\pi}{3}}{\sin\frac{19\pi}{3} - \cos\frac{7\pi}{6}}$
h) $\frac{\cos 510° \cdot \sin^2 210°}{\cos 930° \cdot \cos 315° \cdot \tan 120°}$

13. Točko B dobimo tako, da točko $A(1, 0)$ zavrtimo za kot $-120°$ okoli izhodišča. Zapišite koordinate točke B in izračunajte dolžino loka, ki ga pri danem vrtenju opiše točka A.

14. Natančno izračunajmo $\sin 2\alpha$, če je $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$ in za kot α velja $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

15. Poenostavite izraze.
a) $\frac{\sin x - \sin x \cdot \cos 2x}{\sin x \cdot \sin 2x}$
b) $\frac{\cos^2 x + \cos 2x - 2\cos x + \sin^2 x}{\sin 2x - 2\sin x}$
c) $\frac{\cos\pi \cdot \sin(-2x)}{\sin^2 x + \cos(-2x)}$
č) $\frac{\cos^2 x - \cos 2x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x \cdot \sin 2x}{2\cos x + 2\cos^2 x}$
d) $\frac{\cos 2x \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$
e) $\frac{\cot x \cdot (\sin x + \cos 2x - \cos^2 x)}{\sin 2x}$

16. Pokažite, da velja enakost
$\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos x$.

17. Preverite, ali velja
$\frac{\sin^2(\pi - x) - \cos 4\pi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\frac{3\pi}{2}} = \cos x$.

18. Natančno izračunajte.
a) $\sin 75°$
b) $\cos 15°$
c) $\tan 15°$
č) $\sin 105°$
d) $\cos\frac{11\pi}{12}$

19. Ugotovite, ali velja:

a) $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$

b) $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$

20. Natančno izračunajte $\cos(\alpha + \beta)$, če je $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$ in je $\frac{3\pi}{2} < \alpha, \beta < 2\pi$.

21. Če je α topi kot $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$ in $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, koliko je $\cos\alpha$ in koliko $\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})$?

22. Naj bo α topi kot in $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$. Natančno izračunajte $\sin 2\alpha$ in $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$.

23. Poenostavite izraz
$\sin(\pi - x) - \sin(\pi + x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) - \cos(\frac{\pi}{2} + x)$.

24. Pokažite, da velja enakost
$\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sin x$.

25. Ugotovite, ali za $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ velja

$$\frac{2\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) - 2\sin^3\alpha}{\sin(2\alpha + 6\pi)} = \cos\alpha.$$

26. Izraze zapišite kot produkt in izračunajte njihove natančne vrednosti.

a) $\sin 75° - \sin 15°$

b) $\cos 105° - \cos 45°$

c) $\cos 75° + \sin 75°$

č) $\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$

d) $\sin\frac{13\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12}$

27. Ugotovite, ali velja $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}$.

28. Izraze zapišite kot vsoto in izračunajte njihove natančne vrednosti.

a) $\sin 75° \sin 15°$

b) $\cos 105° \cdot \cos 15°$

c) $\sin 105° \cos 15°$

č) $\sin\frac{5\pi}{8} \cdot \sin\frac{\pi}{8}$

d) $\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{12}$

e) $\cos\frac{5\pi}{12} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$

29. Na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ narišite graf funkcije $f(x) = 3\sin x$ in zapišite njeno periodo in amplitudo. Na katerih intervalih je funkcija f pozitivna?

30. Na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ narišite graf funkcije $f(x) = -2\cos x$ in zapišite njeno periodo in amplitudo. Na katerih intervalih je funkcija f negativna?

31. Narišite grafe funkcij.

a) $\sin x + 1$

b) $\cos x - 1$

c) $|\tan x|$

č) $-\cot x$

32. Narišite grafe funkcij.

a) $\sin(\frac{x}{2})$

b) $\sin(x - \frac{\pi}{4})$

c) $\cos 2x$

č) $\cos(x + \frac{\pi}{4})$

d) $2\sin(x + \frac{\pi}{4})$

e) $-\cos(x + \frac{\pi}{2})$

f) $-\sin(2x + \pi)$

g) $1 + \sin 2x$

h) $1 - \cos(\frac{x}{2})$

i) $3\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$

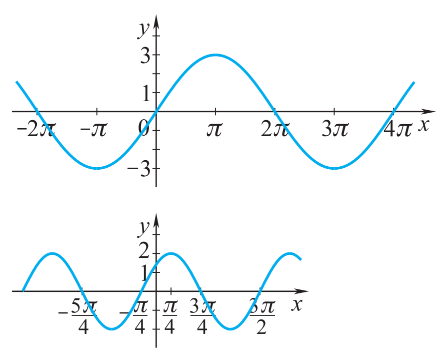
j) $3\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}) + 3$

33. Na intervalu $[-\pi, 3\pi]$ narišite graf funkcije $f(x) = -\cos\frac{x}{2}$. Rešite neenačbo $f(x) \leq 0$.

34. Na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ narišite graf funkcije $f(x) = -2\sin(x + \frac{\pi}{2})$. Rešite neenačbo $f(x) > 0$.

35. Narišite graf funkcije $f(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{4})$. Zaloga vrednosti funkcije $g(x) = Af(x)$; $A > 0$ je interval $[-3, 3]$. Zapišite A in predpis za funkcijo g in v isti koordinatni sistem narišite njen graf.

36. Na sliki sta dana grafa funkcij $f(x) = A\sin\omega x$ in $g(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$. Zapišite njuna predpisa. Koliko sta amplitudi in koliko osnovni periodi danih funkcij?



37. Funkcijo $f(x) = 2\sin x \cdot \cos(x + \frac{\pi}{2})$ zapišite v obliki $f(x) = A\cos\omega x + B$. Zapišite osnovno periodo funkcije f, amplitudo in zalogo vrednosti.

38. Funkcijo $f(x) = 2\cos^2 x$ zapišite v obliki $f(x) = A\cos\omega x + B$. Zapišite osnovno periodo funkcije f, amplitudo in zalogo vrednosti ter na intervalu $[-\pi, \pi]$ narišite njen graf.

39. Izračunajte.

a) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\arcsin 1$
c) $\arcsin(-\frac{1}{2})$
č) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$
d) $\arccos \frac{1}{2}$
e) $\arccos 0$
f) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$
g) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$
h) $\arccos(-1)$
i) $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$
j) $\arctan(-\sqrt{3})$
k) $\arctan(-1)$

40. Rešite enačbe.

a) $\sin x = \frac{1}{2}$
b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\tan x = \sqrt{3}$
č) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\cos x = -\frac{1}{2}$
e) $\tan x = -1$
f) $\sin x = 1$
g) $\cos x = 0$
h) $\sin x = -1$
i) $\cos x = -1$

41. Rešite enačbe.

a) $2\sin\frac{x}{3} - 1 = 0$
b) $2\cos 2x + 1 = 0$
c) $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
č) $\cos(3x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
d) $\tan(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$
e) $\sin^2 x = 1$

42. Rešite enačbe.

a) $\sin x = \sin x \cos x$
b) $2\sin x \cos x = 1$
c) $\cos x = \sin x$
č) $4\sin x \cos x - \sqrt{2} = 0$
d) $\sqrt{3}\sin x = \cos x$
e) $\cot x \sin x = 0$
f) $\sin 4x - \sin 4x \cos^2 x = 0$
g) $\sin 2x = -\sqrt{3}\sin x$
h) $\sqrt{3}\tan^2 x + \tan x = 0$
i) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$
j) $\cos x + \sin^2 x - \cos^2 x = 1$
k) $\cos(x + 90°) - \sin x = 1$

43. Rešite enačbe.

a) $\sin 3x + \sin x = 0$
b) $\cos x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$
c) $\sin 3x = \cos x$
č) $\sin 3x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}$
d) $\sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{4}$

44. Izračunajte ničle funkcije $f(x) = 2\cos x - 1$ in narišite graf $y = |f(x)|$.

45. Dana je funkcija $f(x) = \frac{2}{3}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$. Zapišite presečišča grafa funkcije f z osjo x in z osjo y. Koordinate naj bodo natančno izračunane.

46. Dana je funkcija $f(x) = -3\sin 2x$.

a) Izračunajte ničle funkcije f.
b) Izračunajte abscise točk, v katerih doseže funkcija f največjo vrednost, in točk, v katerih doseže funkcija f najmanjšo vrednost.
c) Na intervalu $[-\pi, \pi]$ narišite graf funkcije f.

47. Narišite graf funkcije $f(x) = 2\sin(\frac{x}{2})$ in izračunajte abscise presečišč grafa funkcije f s premico $y = 1$.

48.
a) Na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ narišite graf funkcije $f(x) = 4\cos(x - \frac{\pi}{4})$.
b) Izračunajte presečišča grafa funkcije f s premico $y = 2$.

49.
a) Na intervalu $[-\pi, \pi]$ narišite graf funkcije $f(x) = \tan x$.
b) Izračunajte presečišča grafa funkcije f s premico $y = -1$.
c) Rešite neenačbo $f(x) < -1$.

50. V isti koordinatni sistem na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ narišite grafa funkcij $x \mapsto \sin x$ in $x \mapsto \cos x$ ter izračunajte koordinate presečišč.

51. Dana je funkcija $f(x) = \sin x + \cos x$.

a) Izračunajte ničle funkcije f.
b) Funkcijo f zapišite v obliki $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$.
c) Zapišite zalogo vrednosti in osnovno periodo funkcije f.

52. V pravokotnem trikotniku ABC je $|BC| = 5$ cm in $|CA| = 12$ cm.

a) Natančno zapišite vrednosti kotnih funkcij sinus, kosinus, tangens in kotangens kota α.
b) Na minuto natančno izračunajte velikosti notranjih kotov trikotnika.

53. V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom v oglišču C je $a + b = 50$ cm in $\alpha = 35°$. Izračunajte velikosti kotov trikotnika in dolžine stranic trikotnika. Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti.

54. Obseg pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom v oglišču C in kotom $\alpha = 60°$ je $3 + \sqrt{3}$. Natančno izračunajte dolžine stranic trikotnika.

55. Ploščina trikotnika s stranicama $a = 6$ cm in $b = 8$ cm je 12 cm^2. Kolikšen kot oklepata stranici a in b? Zapišite obe možnosti.

56. V paralelogramu $ABCD$ je $a = 10$ cm, $b = 7$ cm in $\alpha = 50°$. Izračunajte dolžini diagonal. Rezultata zaokrožite na dve decimalni mesti.

57. V trikotniku ABC je $a = 5$ dm, $b = 7$ dm in $\alpha = 40°$. Izračunajte velikosti preostalih neznanih kotov trikotnika. Zapišite obe možnosti. Rezultate zaokrožite na minuto.

58. V trikotniku ABC je $a = 15$ cm, $b = 12$ cm in $\alpha = 2\beta$. Na minuto natančno izračunajte velikosti notranjih kotov trikotnika in na stotinko natančno izračunajte dolžino stranice c.

59. V trikotniku ABC meri polmer očrtanega kroga $R = 6$ cm, stranica $b = 10$ cm in $\alpha = 75°$. Na minuto natančno izračunajte velikosti notranjih kotov β in γ in na dve decimalni mesti natančno dolžini stranic a in c.

60. V trikotniku ABC je $a + b = 12$ cm in $\alpha = 60°$ ter $\beta = 25°$. Na stotinko natančno izračunajte dolžine stranic trikotnika.

22. ZAPOREDJA IN GEOMETRIJSKA VRSTA

Zaporedje je preslikava iz množice naravnih števil v realna števila: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $f(n) = a_n$.

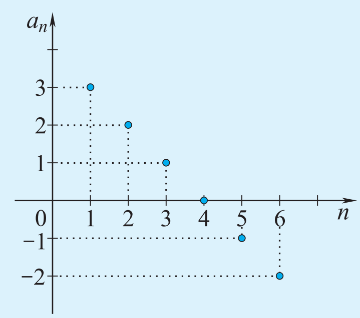
Zaporedne funkcijske vrednosti a_1, a_2, a_3 ... so **členi zaporedja**, a_n je **splošni člen**.

Graf zaporedja s splošnim členom a_n je množica vseh urejenih parov (n, a_n), pri čemer je $n \in \mathbb{N}$.

Graf zaporedja ponazorimo v koordinatnem sistemu s točkami, katerih abscisa je n, ordinata pa a_n.

1. Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n = 4 - n$. Zapišimo prvih šest členov zaporedja in narišimo graf zaporedja.

Zapišemo $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$, $a_5 = -1$ in $a_6 = -2$.
Narišemo graf.



2. Za zaporedje 0, 2, 6, 12, 20 ... zapišimo splošni člen in izračunajmo stoti člen.

Vsak člen zaporedja je produkt zaporednih celih števil $1 \cdot 0$, $2 \cdot 1$, $3 \cdot 2$, $4 \cdot 3$, $5 \cdot 4$ ..., zato je splošni člen zaporedja enak $a_n = n(n-1)$.
Stoti člen je $a_{100} = 100(100 - 1) = 9900$.

Zaporedje je **naraščajoče**, če velja $a_{n+1} \geq a_n$ za vsako naravno število n oz. $a_{n+1} - a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje je **padajoče**, če velja $a_{n+1} \leq a_n$ za vsako naravno število n oz. $a_{n+1} - a_n < 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje je **omejeno navzgor**, če obstaja tako realno število M, da je $a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število M je zgornja meja zaporedja.

Zaporedje je **omejeno navzdol**, če obstaja tako realno število m, da je $a_n \geq m$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število m je spodnja meja zaporedja.

Zaporedje je **omejeno**, če je omejeno navzgor in navzdol.

1. Zapišimo prvih pet členov zaporedja, podanega s splošnim členom $a_n = \frac{n+1}{n}$, in pokažimo, da je zaporedje padajoče. Zapišimo še zgornjo mejo.

Prvih pet členov zaporedja je $a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$, $a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$, $a_4 = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$, $a_5 = \frac{5+1}{5} = \frac{6}{5}$.

Ker je $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+1}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2)n - (n+1)^1}{n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$,

je dano zaporedje padajoče, s tem je prvi člen $a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$ največji in hkrati tudi zgornja meja zaporedja.

2. Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n = \frac{2n}{2n+1}$. Zapišimo prvih pet členov in pokažimo, da je zaporedje naraščajoče in omejeno.

Prvih pet členov zaporedja je $a_1 = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{4}{5}$, $a_3 = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{6}{7}$, $a_4 = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 4 + 1} = \frac{8}{9}$, $a_5 = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 5 + 1} = \frac{10}{11}$.

Ker je $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} - \frac{2n}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} - \frac{2n}{2n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1) - 2n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} =$
$= \frac{4n^2 + 2n + 4n + 2 - 4n^2 - 6n}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} > 0$, je zaporedje naraščajoče in je prvi člen najmanjši.

Zato je zaporedje navzdol omejeno z $\frac{2}{3}$, ker pa je $a_n = \frac{2n}{2n+1} < \frac{2n+1}{2n+1} = 1$, je zaporedje navzgor omejeno z 1.

Aritmetično zaporedje

Zaporedje je aritmetično, **če je razlika poljubnih sosednjih členov** $a_{n+1} - a_n$ **konstantna**.

To razliko označimo z d in jo imenujemo **diferenca aritmetičnega zaporedja**.

Od tod lahko zapišemo $a_{n+1} - a_n = d$ oziroma $a_{n+1} = a_n + d$.

Splošni člen aritmetičnega zaporedja je $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Za $\boldsymbol{d > 0}$ je zaporedje **naraščajoče** in omejeno navzdol s prvim členom.

Za $\boldsymbol{d = 0}$ je zaporedje **konstantno**.

Za $\boldsymbol{d < 0}$ je zaporedje **padajoče** in omejeno navzgor s prvim členom.

Število $\frac{a+b}{2}$ imenujemo **aritmetična sredina števil *a* in *b***. Vsak člen aritmetičnega zaporedja (razen prvega) je aritmetična sredina simetrično ležečih členov.

1. Zapišimo prvi člen, diferenco in splošni člen aritmetičnega zaporedja 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 ... Poiščimo še, koliko je stoti člen zaporedja.

Prvi člen je $a_1 = 4$. Ker je razlika med sosednjima členoma vedno 3, je diferenca zaporedja $d = 3$.
Splošni člen zaporedja je $a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1) \cdot 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$.
Stoti člen zaporedja je $a_{100} = 301$.

2. Izračunajmo diferenco aritmetičnega zaporedja, danega z $a_1 = -2$ in $a_6 = 8$.

Zapišemo $a_6 = a_1 + 5d = -2 + 5d = 8$.
Preoblikujemo $5d = 10$ in izračunamo $d = 2$.

3. Izračunajmo aritmetično sredino števil 10 in 30 ter $\log 5$ in $\log 20$.

Aritmetična sredina števil 10 in 30 je $\frac{10+30}{2} = \frac{40}{2} = 20$,

aritmetična sredina števil $\log 5$ in $\log 20$ pa $\frac{\log 5 + \log 20}{2} = \frac{\log 5 \cdot 20}{2} = \frac{\log 100}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

4. Pokažimo, da so števila $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+1$ zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Zapišimo diferenco zaporedja.

Ker je razlika sosednjih členov $\sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})-1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{1+\sqrt{2}} = 1$ in $\sqrt{2}+1-\sqrt{2} = 1$, so dana števila zaporedni trije členi aritmetičnega zaporedja. Diferenca zaporedja je $d = 1$.

5. Izračunajmo, za kateri x so $x+1$, $3x-2$, x^2-1 prvi trije členi aritmetičnega zaporedja. Zaporedje tudi zapišimo.

Ker je za aritmetično zaporedje razlika sosednjih členov enaka, lahko zapišemo
$3x-2-(x+1) = x^2-1-(3x-2)$.
Dobimo enačbo $x^2-5x+4=0$
in jo rešimo $(x-1)(x-4)=0$.
Za $x_1 = 1$ dobimo zaporedje 2, 1, 0 ..., za $x_2 = 4$ pa zaporedje 5, 10, 15 ...

6. Deseti člen aritmetičnega zaporedja je 53, vsota petega in osmega člena pa je 71. Zapišimo splošni člen zaporedja.

Zapišemo enačbi $a_{10} = a_1 + 9d = 53$ in $a_5 + a_8 = a_1 + 4d + a_1 + 7d = 2a_1 + 11d = 71$.
Iz prve enačbe izrazimo $a_1 = 53 - 9d$ in vstavimo v drugo enačbo $2(53-9d) + 11d = 71$,
jo preoblikujemo v $106 - 18d + 11d = 71$ in iz $-7d = -35$ dobimo $d = 5$.
Nato izračunamo $a_1 = 53 - 9d = 53 - 9 \cdot 5 = 8$ in zapišemo splošni člen zaporedja
$a_n = 8 + (n-1)5 = 8 + 5n - 5 = 5n + 3$.

7. Med števili 4 in 58 vrinemo 8 števil tako, da nastane končno aritmetično zaporedje. Izračunajmo diferenco zaporedja in ga zapišimo.

Prvi člen zaporedja je $a_1 = 4$. Ker vrinemo osem členov zaporedja, je deseti $(1+8+1)$ člen zaporedja $a_{10} = 58$. Zapišemo $a_{10} = a_1 + 9d$, vstavimo števila $58 = 4 + 9d$ in izračunamo diferenco zaporedja $d = 6$.
Zapišemo zaporedje 4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58.

Vsoto prvih *n* členov aritmetičnega zaporedja lahko izračunamo po obrazcu
$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ali $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$.

1. Izračunajmo vsoto prvih 100 lihih naravnih števil.

Zapišemo $a_1 = 1$ in $d = 2$. Vsota je $s_n = \frac{100}{2}(2 \cdot 1 + (100-1) \cdot 2) = 50 \cdot (2 + 198) = 10\,000$.

2. Izračunajmo vsoto končnega aritmetičnega zaporedja 17, 12, 7, 2, –3 ... –33.

Zapišimo $a_1 = 17$ in $d = -5$ in splošni člen zaporedja $a_n = 17 + (n-1)(-5) = 17 - 5n + 5 = 22 - 5n$.
Od tod iz $a_n = -33 = 22 - 5n$ izračunamo število členov zaporedja $n = 11$.
Vsota je $s_n = \frac{11}{2}(2 \cdot 17 + (11-1) \cdot (-5)) = \frac{11}{2} \cdot (-16) = -88$.

3. Končno aritmetično zaporedje s prvim členom $a_1 = 10$ in diferenco $d = 7$ ima vsoto $s_n = 34\,947$. Koliko členov ima zaporedje?

Zapišemo $s_n = \frac{n}{2}(2 \cdot 10 + (n - 1) \cdot 7) = 34\,947$,

preoblikujemo v $n(20 + 7n - 7) = 69\,894$

in od tod zapišemo kvadratno enačbo $7n^2 + 13n - 69\,894 = 0$.

Rešitev enačbe dobimo iz $n_{1,\,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-69894)}}{2 \cdot 7} = \frac{-13 \pm 1399}{14}$ oz. $n = 99$.

Zaporedje ima 99 členov.

Geometrijsko zaporedje

Zaporedje je geometrijsko, če je količnik poljubnih sosednjih členov $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ **konstanten**.

Ta količnik označimo s k in ga imenujemo **količnik geometrijskega zaporedja**.

Za vsako naravno število n lahko zapišemo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ oziroma $a_{n+1} = a_n \cdot k$.

Splošni člen geometrijskega zaporedja je $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$.

Geometrijsko zaporedje je **naraščajoče**, če je $a_1 > 0$ in $k > 1$ ali $a_1 < 0$ in $0 < k < 1$.

Geometrijsko zaporedje je **padajoče**, če je $a_1 < 0$ in $k > 1$ ali $a_1 > 0$ in $0 < k < 1$.

Število $\sqrt{a \cdot b}$ imenujemo **geometrijska sredina pozitivnih števil *a* in *b***. Vsak člen pozitivnega geometrijskega zaporedja je geometrijska sredina simetrično ležečih členov.

1. Zapišimo splošni člen geometrijskega zaporedja 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... in izračunajmo 11. člen zaporedja.

Ker je $a_1 = 1$ in $k = 2$, je splošni člen zaporedja $a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

Enajsti člen zaporedja je $a^{11} = 2^{11-1} = 2^{10} = 1024$.

2. Ugotovimo, ali so števila $4^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{64}$, $0{\cdot}5^{-1}$ zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Zapišimo količnik zaporedja.

Izračunamo $4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$, $\sqrt[3]{64} = 4$, $(0{\cdot}5)^{-1} = (\frac{1}{2})^{-1} = 2$.

Ker je kvocient sosednjih členov $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, so dana števila zaporedni členi geometrijskega zaporedja.

Količnik zaporedja je $k = \pm\frac{1}{2}$.

3. Izračunajmo geometrijsko sredino števil 9 in 81 ter $\sqrt{8}$ in $\sqrt{32}$.

Geometrijska sredina števil 9 in 81 je $\sqrt{9 \cdot 81} = 3 \cdot 9 = 27$,

geometrijska sredina števil $\sqrt{8}$ in $\sqrt{32}$ pa $\sqrt{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}} = \sqrt{2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}} = \sqrt{16} = 4$.

4. Za katero realno število x so $x - 1$, $x + 2$, $x + 6$ zaporedni členi geometrijskega zaporedja? Zapišimo količnik in zaporedje.

Ker je za geometrijsko zaporedje kvocient sosednjih členov enak, lahko zapišemo enačbo $\frac{x+2}{x-1} = \frac{x+6}{x+2}$.
Odpravimo ulomek $(x + 2)^2 = (x - 1)(x + 6)$
in oklepaje $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 5x - 6$
ter enačbo rešimo $x = 10$.
Členi zaporedja so 9, 12, 16, količnik pa je $k = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

5. Izračunajmo količnik geometrijskega zaporedja, za katerega velja $a_1 = 81$ in $a_6 = \frac{32}{3}$.

Zapišemo $a_6 = a_1 \cdot k^5 = 81 \cdot k^5 = \frac{32}{3}$.
Preoblikujemo v $k^5 = \frac{32}{343} = \frac{2^5}{3^5} = (\frac{2}{3})^5$ in zapišemo $k = \frac{2}{3}$.

6. Med števili 16 in 250 vrinimo dve števili tako, da nastane končno geometrijsko zaporedje. Izračunajmo količnik zaporedja in zapišimo člene.

Prvi člen zaporedja je $a_1 = 16$. Ker vrinemo dva člena, je četrti $(1 + 2 + 1)$ člen $a_4 = 250$.
Zapišemo $a_4 = a_1 \cdot k^3$, vstavimo števila $250 = 16 \cdot k^3$ in izračunamo količnik $k = \sqrt[3]{\frac{250}{16}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$.
Drugi člen zaporedja je $16 \cdot \frac{5}{2} = 40$, tretji člen pa $40 \cdot \frac{5}{2} = 100$.
Zaporedje ima člene 16, 40, 100 in 250.

7. Tretji člen geometrijskega zaporedja je 12, vsota drugega in četrtega člena pa je 26. Izračunajmo količnik geometrijskega zaporedja.

Zapišemo enačbi $a_3 = a_1 \cdot k^2 = 12$ in $a_2 + a_4 = a_1 \cdot k + a_1 \cdot k^3 = a_1(k + k^3) = 26$.
Iz prve enačbe izrazimo $a_1 = \frac{12}{k^2}$ in vstavimo v drugo enačbo $\frac{12}{k^2} \cdot (k + k^3) = 26$,
jo preoblikujemo v $6k + 6k^3 = 13k^2$
in iz $k(6k^2 - 13k + 6) = 0$; $k \neq 0$ dobimo $k_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12}$.
Zaporedji sta dve: prvo ima količnik $k_1 = \frac{2}{3}$, drugo pa $k_2 = \frac{3}{2}$.

Vsoto prvih *n* členov geometrijskega zaporedja izračunamo po formuli $s_n = \frac{a^1(k^n - 1)}{k - 1}$.

1. Izračunajmo vsoto prvih petih členov geometrijskega zaporedja, podanega s splošnim členom $a_n = 4 \cdot 3^n$.

Zapišemo $a_1 = 12$ in $k = 3$.
Vsoto prvih petih členov izračunamo po formuli $s_n = \frac{a^1(k^n - 1)}{k - 1} = \frac{12 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{12 \cdot (243 - 1)}{2} = 1452$.

2. Izračunajmo vsoto $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 1024$, če števila v vsoti sestavljajo končno geometrijsko zaporedje.

Prvi člen zaporedja je $a_1 = 1$, količnik pa $k = 2$.
Splošni člen zaporedja je $a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.
Iz zadnjega člena $1024 = 2^{10}$ ugotovimo, da ima dano končno zaporedje 11 členov.
Vsoto izračunamo po formuli $s_n = \frac{a^1(k^n - 1)}{k - 1} = \frac{1 \cdot (2^{11} - 1)}{2 - 1} = \frac{2048 - 1}{1} = 2047$.

3. Končno geometrijsko zaporedje s prvim členom $a_1 = 10$ in količnikom $k = 5$ ima vsoto $s_n = 2\,441\,410$. Koliko členov ima zaporedje?

Zapišemo $s_n = \frac{a^1(k^n - 1)}{k - 1} = \frac{10 \cdot (5^n - 1)}{5 - 1} = \frac{10 \cdot 5^n - 10}{4} = 2\,441\,410$,
preoblikujemo $10 \cdot 5^n - 10 = 97\,656\,240$
$10 \cdot 5^n = 97\,656\,250$
$5^n = 9\,765\,625$.
Iz $5^n = 5^{10}$ zapišemo $n = 10$. Zaporedje ima 10 členov.

Geometrijska vrsta

Vsoto vseh členov neskončnega geometrijskega zaporedja $a_1, a_1k, a_1k^2, a_1k^3$ ... imenujemo **neskončna geometrijska vrsta**: $a_1 + a_1k + a_1k^2 + a_1k^3 + ...$ in jo lahko izračunamo, če za diferenčni količnik zaporedja velja $\mathbf{-1 < k < 1}$. Dobimo jo po obrazcu: $s = \frac{a_1}{1 - k}$.

1. Izračunajmo vsoto neskončne geometrijske vrste $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + ...$

Zapišemo $a_1 = 1$ in $k = \frac{2}{3}$.
Vsoto izračunamo iz $s = \frac{a_1}{1 - k} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

2. Zapišimo geometrijsko vrsto, za katero je $a_1 = 6$ in $s = 9$.

Količnik izračunamo iz $s = \frac{a_1}{1 - k} = \frac{6}{1 - k} = 9$.
Preoblikujemo v $6 = 9 - 9k$ in izračunamo $k = \frac{1}{3}$.
Zapišemo $6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + ...$

3. Za kateri x bo vsota geometrijske vrste $x + x^2 + x^3 + ... = 4$?

Zapišemo $a_1 = x$ in $k = x$.
Iz $s = \frac{a_1}{1 - k} = \frac{x}{1 - x} = 4$
Zapišemo $x = 4 - 4x$ in izračunamo $x = \frac{4}{5}$.

Obrestni račun

S črko $\boldsymbol{G}$ označimo **glavnico** (kapital, vlogo, izposojeni znesek – dolg), s črko $\boldsymbol{o}$ **obresti**, s $\boldsymbol{p}$ **obrestno mero** in s črko $\boldsymbol{n}$ **obrestovalno dobo**. **Kapitalizacijska doba** je čas med dvema zaporednima pripisoma obresti.

Pri **navadnem obrestovanju** se ves čas obrestuje le glavnica.

Po n letih pri p % letni obrestni meri dobimo $o = n \cdot G \cdot p\,\% = \frac{n \cdot G \cdot p}{100}$ obresti.

Banka za hranilne vloge na vpogled ponuja 1˙5 % letno obrestno mero. Koliko evrov bodo znašale obresti za en mesec (30 dni), če smo vložili 200 000 evrov?

Obresti za eno leto bi znašale $o = 1 \cdot G \cdot \frac{p}{100}$,

za 30 dni pa $o = 1 \cdot G \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{30}{365} = 1 \cdot 200\,000 \cdot \frac{1{,}5}{100} \cdot \frac{30}{365} = 246{˙}58$ evra.

Pri **obrestnem obrestovanju** se ob koncu kapitalizacijske dobe obresti pripišejo k dotedanji glavnici in od takrat naprej se obrestujejo skupaj z njo. Če označimo **obrestovalni faktor** z $r = 1 + \frac{p}{100}$, potem zaporedne vrednosti glavnice G, $G_1 = G \cdot r$, $G_2 = G \cdot r^2$, $G_3 = G \cdot r^3$ ... po koncu kapitalizacijskih dob sestavljajo geometrijsko zaporedje in po n letih glavnica G naraste na $G_n = G \cdot r^n$.

1. Znesek, na katerega naraste vloga 1000 evrov po petih letih pri letni obrestni meri 2 % navadnega obrestovanja, primerjajmo z zneskom, ki ga dobimo pri obrestnem obrestovanju z enako obrestno mero z letnim pripisom obresti.

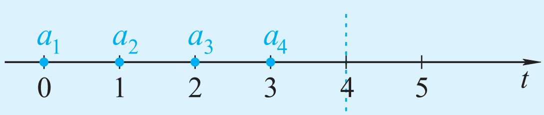
Pri navadnem obrestovanju po 5 letih dobimo $o = n \cdot G \cdot \frac{p}{100} = 5 \cdot 1000 \cdot \frac{2}{100} = 100$ evrov obresti in tako vloga naraste na 1100 evrov.

Pri obrestnem obrestovanju pa v petih letih vloga naraste na $G_5 = G \cdot r^5 = 1000 \cdot 1{˙}02^5 = 1104{˙}08$ evrov.

Torej v danem primeru pri obrestnem obrestovanju vloga naraste za 4˙08 evra več kot pri navadnem obrestovanju.

2. V banko vsako leto zapored vložimo po $a = 2500$ evrov. Te vloge banka obrestuje po 3 % letni obrestni meri z letnim pripisom obresti. Izračunajmo, koliko privarčujemo v štirih letih, če vlagamo na začetku leta, in koliko, če vlagamo na koncu leta.

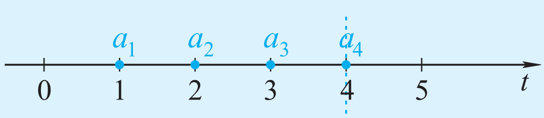
Za vlaganje na začetku leta narišimo številsko premico.



Zneski, ki jih privarčujemo, so členi geometrijskega zaporedja, zato lahko zapišemo

$S = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 = r(a + ar + ar^2 + ar^3) = r \cdot \frac{a(r^4 - 1)}{(r - 1)} = 1{˙}03 \cdot \frac{2500 \cdot (1{,}03^4 - 1)}{0{,}03} = 10\,772{˙}84$ EUR.

Za vlaganje na koncu leta narišimo številsko premico.



Zneski, ki jih privarčujemo, so členi geometrijskega zaporedja, zato je vsota vseh privarčevanih vlog

$S = a + ar + ar^2 + ar^3 = \frac{a(r^4 - 1)}{(r - 1)} = \frac{2500 \cdot (1{,}03^4 - 1)}{0{,}03} = 10\,459{˙}07$ EUR.

1. Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n = \frac{n-1}{n+1}$. Zapišite prvih šest členov zaporedja in narišite graf zaporedja.

2. Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n = \cos((n-1)\pi)$. Zapišite prvih šest členov zaporedja in narišite graf zaporedja.

3. Zapišite prvih šest členov zaporedij, podanih s splošnim členom $a_n = n^2 - 7n$. Kateri člen zaporedja je enak 44?

4. Zapišite prvih pet členov zaporedij, podanih s splošnim členom. Nato zapišite še lastnosti zaporedij.
   a) $a_n = 3n - 1$
   b) $a_n = 5 - n^3$
   c) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 5$
   č) $a_n = (-n)^n$

5. Za zaporedje zapišite splošni člen in izračunajte deseti člen.
   a) 7, 13, 19, 25, 31 ...
   b) 2, 4, 8, 16, 32 ...
   c) $2, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{8}, \frac{2}{25}, \frac{1}{18}, \frac{2}{49}$ ...

6. Za zaporedje $a_n = \frac{2n}{3n+1}$ ugotovite, ali je naraščajoče. Izračunajte, koliko členov zaporedja je manjših od $\frac{16}{25}$.

7. Za zaporedje $a_n = \frac{1}{1+3^n}$ pokažite, da je padajoče in omejeno.

8. Zapišite prvih šest členov aritmetičnega zaporedja, če je:
   a) $a_1 = 2,\ d = 6$
   b) $a_1 = 5,\ d = -3$
   c) $a_1 = \frac{1}{4},\ d = -1$
   č) $a_1 = -3,\ d = \frac{2}{5}$

9. Za aritmetično zaporedje $-5, -1, 3, 7$ ... zapišite diferenco in izračunajte njegov stoti člen.

10. Izračunajte diferenco in zapišite splošni člen aritmetičnega zaporedja, če je:
    a) $a_1 = 4,\ a_{17} = 260$
    b) $a_3 = 25,\ a_{10} = -3$
    c) $a_{10} = 0,\ a_{40} = -30$

11. Tretji člen aritmetičnega zaporedja je 10, osmi člen pa 25. Zapišite prvi člen in diferenco tega zaporedja. Kateri člen tega zaporedja je število 151?

12. Izračunajte 25. člen aritmetičnega zaporedja, v katerem je 7. člen 23, 35. člen pa 107.

13. Med števili 100 in 142 vrinite pet števil tako, da tvorijo vsa števila skupaj aritmetično zaporedje. Zapišite diferenco zaporedja in vrinjena števila.

14. Izračunajte, za katere n so n, $2(n+1)$, n^2 zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Zaporedje potem tudi zapišite.

15. Izračunajte, za katere x so $x^2 - 5$, $2x + 1$, $3x + 1$ zaporedni členi naraščajočega aritmetičnega zaporedja. Zaporedje potem tudi zapišite.

16. Izračunajte, za katere x so $\sqrt{x} + 1$, $2x$, $3x + 1$ zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Zaporedje tudi zapišite.

17. Izračunajte, za kateri x so $x + 4$, x, $\sqrt{x+2}$ prvi trije členi aritmetičnega zaporedja. Koliko je diferenca zaporedja?

18. Za kateri x bodo $\log_2 1$, $\log_2 x$, $\log_2(x+2)$ zaporedni členi aritmetičnega zaporedja? Zapišite diferenco zaporedja.

19. Kolikšna je vsota prvih 15-ih členov aritmetičnega zaporedja, danega z $a_{12} = 65$ in $d = 5$?

20. V aritmetičnem zaporedju je $a_4 = 22$ in $a_{10} = 4$. Izračunajte diferenco zaporedja in prvi člen. Kolikšna je vsota prvih 25 členov zaporedja?

21. Za aritmetično zaporedje velja $a_3 + a_7 = 4$, $a_2 + a_{14} = -8$. Koliko je prvi člen zaporedja?

22. Peti člen aritmetičnega zaporedja je za 8 večji od tretjega člena, vsota drugega in osmega člena tega zaporedja pa je 42. Izračunajte prvi člen a_1 in razliko d tega zaporedja.

23. V aritmetičnem zaporedju je prvi člen enak 3, n-ti člen pa je enak 703, vsota prvih n členov je 35 653. Izračunajte število n in diferenco d tega zaporedja.

24. Dano je aritmetično zaporedje z diferenco -4. Šesti člen tega zaporedja je enak petini drugega člena. Izračunajte prvi in deseti člen zaporedja.

25. V aritmetičnem zaporedju je prvi člen -10, deveti pa 14. Izračunajte 20. člen tega zaporedja in vsoto prvih 50 členov zaporedja.

26. Drugi člen aritmetičnega zaporedja je 119, stoti pa 1001. Izračunajte diferenco in prvi člen zaporedja ter vsoto prvih stotih členov.

27. Vsota prvih n členov aritmetičnega zaporedja je 610. Izračunajte n, če je prvi člen zaporedja 2, diferenca pa 3.

28. Izračunajte $1 + 4 + 7 + 10 + ... + 46$, če števila v vsoti tvorijo zaporedne člene aritmetičnega zaporedja.

29. Kolikokrat v enem dnevu (v 24 urah) zakuka kukavica, če zakuka vsako polno uro tolikokrat, kolikor je ura? (Pozor: ko je ura 15.00, torej 3 popoldan, kukavica zakuka 3-krat.)

30. Kolikšna je vsota prvih n členov aritmetičnega zaporedja, za katerega velja $a_2 + a_8 = -10$ in $a_5 + a_7 = 12$?

31. Koliko je vseh trimestnih naravnih števil, ki so deljiva z 20? Izračunajte vsoto teh števil.

32. Koliko je vseh trimestnih naravnih števil, ki dajo pri deljenju s 25 ostanek 5? Izračunajte še njihovo vsoto.

33. Za aritmetično zaporedje velja $a_5 = 28$ in $a_9 = 52$. Koliko členov tega zaporedja moramo sešteti, da dobimo vsoto 690?

34. Izračunajte prvi člen in diferenco aritmetičnega zaporedja, podanega z $a_{10} = 0$ in $s_{20} = -40$.

35. Zapišite splošni člen aritmetičnega zaporedja, za katerega je $a_{10} = 61$ in $s_{10} = 340$.

36. Koliko števil moramo vriniti med števili 9 in 321, da dobimo končno aritmetično zaporedje z vsoto 4125?

37. Dano je aritmetično zaporedje 18, 12, 6 ... Največ koliko začetnih členov tega zaporedja lahko seštejemo, da bo vsota še večja od -780?

38. Vsota prvih treh členov končnega aritmetičnega zaporedja je -3, vsota zadnjih treh členov pa 60. Zapišite zaporedje, če je vsota vseh njegovih členov 95.

39. Določeno vsoto denarja moramo razdeliti več ljudem tako, da prvi dobi 100 EUR, vsak naslednji pa 6 EUR manj kot prejšnji. Koliko je ljudi in kolikšno vsoto denarja moramo razdeliti, če zadnji dobi 28 EUR?

40. Janez se je odločil, da bo teden dni vsak dan tekel. Prvi dan je pretekel 3200 m, vsak naslednji dan pa 500 metrov več. Koliko je pretekel sedmi dan in koliko v tem tednu?

41. Notranji koti štirikotnika so zaporedni členi aritmetičnega zaporedja s prvim členom $45°$. Kolikšna je diferenca aritmetičnega zaporedja in koliko merijo koti štirikotnika?

42. Polmeri petih koncentričnih krogov sestavljajo aritmetično zaporedje. Površina krožnega kolobarja, ki ga tvorita največja kroga, je enaka ploščini srednjega kroga in je 36π. Izračunajte polmere krogov.

43. Starosti članov petčlanske družine so členi aritmetičnega zaporedja. Najmlajši sin ima 9 let. Njegova starost je prvi člen zaporedja. Starosti preostalih sinov sta tretji in četrti člen zaporedja, starosti mame in očeta pa enajsti in dvanajsti člen zaporedja. Koliko so stari preostali člani družine, če je vsota starosti vseh sinov enaka starosti očeta?

44. Zapišite prvih pet členov geometrijskega zaporedja.

a) $a_1 = 2$, $k = 3$

b) $a_1 = 8$, $k = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = -6$, $k = -2$

č) $a_1 = \frac{1}{5}$, $k = -1$

45. Zapišite splošni člen geometrijskega zaporedja, če je $a_1 = 1$ in $a_4 = 8$.

46. Izračunajte količnik geometrijskega zaporedja in zapišite splošni člen.

a) $a_1 = -4,\ a_7 = -256$ c) $a_4 = -54,\ a_5 = 162$

b) $a_1 = 81,\ a_6 = \frac{32}{3}$ č) $a_2 = 0.16,\ a_4 = 0.0064$

47. V geometrijskem zaporedju je $a_3 = a_5 = -1$. Zapišite splošni člen zaporedja.

48. Zapišite prvih šest členov geometrijskega zaporedja, če je $a_1 = 3,\ k = 2$. Kateri člen je enak 1536?

49. Izračunajte aritmetično in geometrijsko sredino danih števil a in b.

a) $a = 18,\ b = 2$

b) $a = \sqrt{12} - 2,\ b = 4 + \sqrt{48}$

c) $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1},\ b = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

50. Dano je zaporedje $x - 3,\ x + 1,\ x + 7$. Izračunajte x tako, da bo zaporedje geometrijsko. Nato zaporedje še zapišite.

51. Za katera števila x so $x,\ 1 - x,\ 12x^2$ prvi trije členi geometrijskega zaporedja?

52. Izračunajte, za katere x so $1,\ 1 + x,\ x^2 - 5$ zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Kolikšen je količnik zaporedja?

53. Izračunajte tretji člen a_3 geometrijskega zaporedja z začetnima členoma $a_1 = \sqrt{3}$ in $a_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{3}$. Člen a_3 zapišite v racionalizirani obliki.

54. Ali je zaporedje $a_1 = \sqrt{3} + 1,\ a_2 = \frac{6}{3-\sqrt{3}}$ in $a_3 = 3 + 3\sqrt{3}$ geometrijsko? Odgovor utemeljite.

55. Poiščite tista realna števila x, za katera so 3^x, 9^{x+1}, $\sqrt[3]{3^{-3x}}$ zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Zapišite količnik zaporedja.

56. Za kateri kot $\varphi \in [0, \pi]$ bodo $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}\cos\varphi$ zaporedni členi aritmetičnega zaporedja in za kateri kot $\varphi \in [0, \pi]$ bodo $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}\cos\varphi$ zaporedni členi geometrijskega zaporedja?

57. Prvi člen naraščajočega geometrijskega zaporedja je 3, peti pa 48. Zapišite količnik in splošni člen tega zaporedja ter ugotovite, koliko členov je manjših od 1000.

58. Med števili 16 in $\frac{1}{16}$ vrinite 7 števil tako, da nastane končno geometrijsko zaporedje. Zapišite zaporedje.

59. Izračunajte prvi člen geometrijskega zaporedja, za katerega velja $a_2 - a_1 = -4$ in $a_3 - a_1 = 8$.

60. Izračunajte vsoto prvih osmih členov geometrijskega zaporedja.

a) $a_1 = -8,\ a_2 = 4$

b) $a_3 = 25,\ a_8 = 78\,125$

c) $a_4 = 40,\ a_7 = 320$

61. Izračunajte vsoto in število členov danih geometrijskih zaporedij.

a) $a_1 = 4,\ a_n = \frac{1}{4},\ k = \frac{1}{2}$

b) $a_1 = \sqrt{2},\ a_n = -\frac{1}{32},\ k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $a_3 = 0.09,\ a_8 = 21.87,\ a_n = 0.01$

62. Izračunajte vsoto prvih 10 potenc števila 4.

63. Poiščite realno število x, za katero so števila $2x + 1,\ x + 14,\ x - 4$ prvi trije členi padajočega geometrijskega zaporedja. Natančno izračunajte vsoto prvih 6 členov tega zaporedja.

64. Izračunajmo, koliko je $1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - 3^5 + 3^6 - 3^7 + 3^8$.

65. Med števili 2 in $\frac{2}{243}$ vrinite 4 števila tako, da nastane končno geometrijsko zaporedje. Zapišite zaporedje in izračunajte njegovo vsoto.

66. Med števili 6 in 1536 vrinite 7 števil tako, da nastane končno naraščajoče geometrijsko zaporedje. Zapišite zaporedje in izračunajte njegovo vsoto.

67. Zapišite količnik in prvi člen geometrijskega zaporedja, za katerega je vsota prvih n členov enaka $s_n = 4(3^n - 1)$.

68. Zapišite štiri števila, ki tvorijo geometrijsko zaporedje, v katerem je vsota prvega in četrtega člena 49, vsota drugega in tretjega člena pa 14.

69. Zapišite štiričleno geometrijsko zaporedje, sestavljeno iz celih števil, v katerem je drugi člen za 35 manjši od prvega, tretji člen pa za 560 večji od četrtega.

70. Izračunajte prvi in peti člen geometrijskega zaporedja s količnikom 3, če je vsota prvih šestih členov 1820.

71. Produkt prvih treh členov geometrijskega zaporedja je 1728, njihova vsota pa 63. Izračunajte prvi člen in količnik zaporedja.

72. Prvi trije členi zaporedja so x, $x + 3$, $4x$.
a) Za kateri negativni x je zaporedje geometrijsko?
b) Za $x = 3$ izračunajte vsoto prvih dvajsetih členov geometrijskega zaporedja.
c) Kateri člen zaporedja 3, 6, 12 ima vrednost 24 576?

73. Izrazi $a = 2^{x-1}$, $b = 2^{2x-1}$, $c = 2^{4x+3}$ so trije členi zaporedja.
a) Za $x = 2$ sta a in b prva dva člena geometrijskega zaporedja. Kateri člen v tem zaporedju je c?
b) Določite x tako, da bodo a, b in c prvi trije členi geometrijskega zaporedja.

74. Vsota treh števil, ki tvorijo geometrijsko zaporedje, je 39. Če od tretjega števila (člena) odštejemo 9, nastane naraščajoče aritmetično zaporedje. Katera števila so to?

75. Vsota treh števil je 14. Če srednje število povečamo za 1, dobimo aritmetično zaporedje. Če pa srednje število zmanjšamo za 1, dobimo geometrijsko zaporedje. Poiščite ta tri števila.

76. Vsota treh števil, ki tvorijo geometrijsko zaporedje, je 13. Če prištejemo drugemu členu 2, zaporedje števil postane aritmetično. Kolikšen je količnik geometrijskega zaporedja?

77. Tri števila, katerih vsota je 15, so zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Če po vrsti tem številom prištejemo 1, 4 in 19, dobimo zaporedne člene geometrijskega zaporedja. Zapišite ta tri števila.

78. Neka vrsta bakterij se razmnožuje z deljenjem na dve bakteriji. Delitev bakterije na dve bakteriji se zgodi vsakih 20 minut. Kolikšno je število potomcev ene bakterije, če razmnoževanje bakterij poteka neovirano, v:
a) eni uri,
b) enem dnevu.

79. Prva dva člena zaporedja sta 4 in 8.
a) Določite naslednja dva člena tako, da bo nastalo zaporedje aritmetično. Kateri člen tega zaporedja ima vrednost 152?
b) Določite naslednja dva člena tako, da bo zaporedje geometrijsko. Kateri člen tega zaporedja ima vrednost 16 384?
c) Števili 4 in 8 sta prva dva člena zaporedja s splošnim členom $4n$; $n \in \mathbb{N}$. Ugotovite, ali je to zaporedje naraščajoče ali padajoče ter ali je omejeno. Odgovor pojasnite.

80. Dolžine stranic trikotnika tvorijo tričleno geometrijsko zaporedje. Poiščite dolžine stranic trikotnika, če je obseg trikotnika 152, razlika dolžin med najdaljšo in najkrajšo stranico pa 40 cm.

81. Dolžine robov kvadra so trije zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Ploščina osnovne ploskve kvadra je 8 cm^2, površina kvadra pa 112 cm^2.

82. Izračunajte vsoto neskončnih geometrijskih vrst, za katere je:
a) $a_1 = -3$, $k = \frac{1}{3}$
b) $a_1 = 7$, $k = -\frac{5}{7}$
c) $a_1 = \frac{1}{12}$, $k = \frac{3}{4}$

83. Izračunajte vsoto neskončnih geometrijskih vrst.
a) $75 + 30 + 12 + ...$
b) $6 + 2 + \frac{2}{3} + ...$
c) $4 - 3 + \frac{9}{4} - ...$
č) $1 - \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{2}{3} - ...$
d) $\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} + ...$
e) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{6} + ...$
f) $1 + \sin\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} + ...$
g) $1 - \cos\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} + ...$

84. Izračunajte $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + ...$, če števila v vsoti tvorijo geometrijsko zaporedje.

85. Izračunajte vsoto neskončne geometrijske vrste $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - ...$

86. Neskončno geometrijsko zaporedje s prvim členom $a_1 = 3$ ima vsoto 5. Izračunajte količnik zaporedja in vsoto prvih desetih členov zaporedja. Rezultat zaokrožite na štiri decimalke.

87. Izračunajte količnik neskončne geometrijske vrste s prvim členom 4 in vsoto 6.

88. Vsota neskončne geometrijske vrste je $\frac{10}{3}$, njen drugi člen pa $\frac{8}{15}$. Zapišite vrsto.

89. Vsota prvih treh členov neskončnega padajočega geometrijskega zaporedja s pozitivnimi členi je 10˙5, vsota neskončne vrste pa 12. Zapišite zaporedje.

90. Za kateri a_1 bo $a_1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} - ... = \frac{54}{7}$?

91. Rešite enačbo $3 + 9x + 27x^2 + ... = 12$, če je na levi strani geometrijska vrsta.

92. Zapišite neskončno geometrijsko zaporedje, ki ima vsoto $\frac{25}{4}$, vsota kvadratov njegovih členov pa je $\frac{625}{24}$.

93. Dana je geometrijska vrsta $\log_3 9 + \log_3 3 + \log_3 \sqrt{3} + ...$
a) Pokažite, da je vrsta res geometrijska.
b) Izračunajte prvi člen, količnik in vsoto vrste.

94. V letu 2000 sta podjetnika Janez in Jože izdelala enako število izdelkov, in sicer vsak po 100 000. Potem je Janez vsako leto povečal proizvodnjo za 10 %, Jože pa za 10 000 izdelkov.
a) Koliko izdelkov bo v letu 2007 izdelal Janez in koliko Jože?
b) Za koliko odstotkov je bila v letu 2002 Janezova proizvodnja večja od Jožetove in za koliko odstotkov bo Janezova proizvodnja večja od Jožetove v letu 2007?
c) Koliko izdelkov je v letih od 2000 do 2005 izdelal Janez in koliko Jože?

95. Koliko obresti dobi varčevalec po koncu petletnega varčevanja, če je na začetku varčevanja vložil 5000 EUR in banka obrestuje vlogo po 6˙25 % letni obrestni meri, obresti pa pripiše samo na koncu varčevalnega obdobja?

96. V banko smo za tri leta vložili sredstva, ki jih banka obrestuje po 5˙75 % letni obrestni meri, pripis obresti pa je na koncu varčevanja. Kolikšen znesek smo vložili v banko, če nam je ta na koncu izračunala 5175 EUR obresti?

97. Kolikšna je letna obrestna mera, če smo za 4 leta vložili 40 000 EUR in nam je banka po koncu varčevalne dobe izplačala 48 400 EUR sredstev in je vlogo obrestovala po navadnem obrestnem računu?

98. Banka vlogo 1000 EUR obrestuje po 4˙5 % letni obrestni meri z letnim pripisom obresti. Na koliko naraste vloga po petih letih? Koliko let moramo varčevati, da vloga naraste na 1486 EUR?

99. Banka vlogo 100 000 EUR najprej 2 leti obrestuje po 4 % letni obrestni meri z letnim pripisom obresti, nato pa 3 leta po 3˙5 % letni obrestni meri z letnim pripisom obresti. Na koliko naraste vloga po petih letih?

100. Banka ponuja 5 % letne obresti in letni pripis obresti. Kolikšno glavnico G moramo vložiti na začetku, da bomo imeli čez 4 leta 6000 EUR?

101. V banko smo vložili 10 000 EUR in čez 6 let dobili 12 653˙19 EUR. Kolikšna je bila letna obrestna mera, če je letni pripis obresti?

102. V banko vsako leto zapored vložimo po $a = 10\,000$ evrov. Te vloge banka obrestuje po 6 % letni obrestni meri z letnim pripisom obresti. Izračunajte, koliko privarčujemo v petih letih, če denar vlagamo na začetku leta.

103. Izračunajte, kolikšno rento bomo dobivali na koncu leta 20 let zapored, prvič čez pet let, če vložimo glavnico 10 000 EUR. Letna obrestna mera je 5 % in letni pripis obresti.

23. KOMBINATORIKA

Osnovni izrek kombinatorike (pravilo produkta): Naj bo proces odločanja takšen, da poteka v k zaporednih fazah, pri čemer je v prvi fazi n_1 mogočih odločitev, v drugi fazi n_2 mogočih odločitev ..., v k-ti fazi n_k mogočih odločitev, število izborov v posamezni fazi pa je neodvisno od tega, katere možnosti smo izbrali v predhodnih fazah. Potem je mogoče celotni izbor opraviti na $n = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ načinov.

1. Prodajalci ponujajo v akcijski prodaji avtomobil v treh različnih barvah (modri – M, rdeči – R in zeleni – Z) in dveh različnih paketih opreme (standard – S in luksus – L). Koliko različnih avtomobilov lahko ponujajo prodajalci? Zapišimo vse možnosti.

   Za vsak avtomobil lahko najprej ponudijo eno izmed 3 barv in nato enega izmed 2 paketov opreme. Zato je število vseh različnih avtomobilov enako $3 \cdot 2 = 6$.

   Vse možnosti so MS, ML, RS, RL, ZS in ZL.

2. V podjetju sestavljajo računalnike. Na voljo imajo tri vrste procesorjev, dve vrsti RAM-a, štiri različne vrste diskov in tri različne vrste grafičnih kartic. Koliko različnih računalnikov lahko sestavijo?

   Sestavijo lahko $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ različnih računalnikov.

3. V koordinatnem sistemu predstavljamo le točke, katerih koordinati sta celi števili. Koliko različnih točk lahko predstavimo v koordinatnem sistemu, če abscise izbiramo iz množice $\mathcal{A} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, ordinate pa iz množice $\mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$?

   Predstavimo lahko $7 \cdot 5 = 35$ različnih točk.

Pravilo vsote: Če se pri izbiranju lahko odločimo bodisi za eno od n_1 možnosti iz prve množice izborov ali za eno od n_2 možnosti iz druge množice izborov, ki so nezdružljivi z izbori iz prve množice, potem imamo v celoti $n = n_1 + n_2$ mogočih izborov.

1. Jana je za zabavo že izbrala pulover. Izbira še med tremi različnimi hlačami in dvema različnima kriloma. Na koliko načinov lahko izbere oblačilo?

   Ker lahko izbere bodisi izmed 3 hlač ene hlače bodisi izmed dveh kril eno krilo, ima skupaj $3 + 2 = 5$ različnih izborov oblačil.

2. V knjižnici so nam všeč tri kriminalke, ki so zapisane na DVD-ju, in štiri detektivske zgodbe, ki so zapisane na VHS-u. Ob evidentiranju gradiva za izposojo nam povedo, da lahko izberemo:
   a) le en film,
   b) le en film na DVD-ju in en film na VHS-u.
   Koliko različnih izborov filmov imamo na voljo v prvem primeru in koliko v drugem primeru?

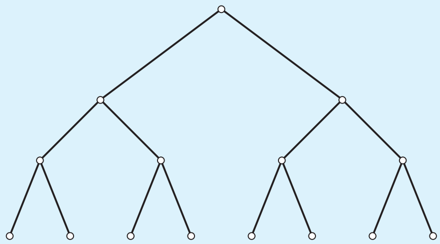
   V prvem primeru imamo na voljo $3 + 4 = 7$ različnih izborov filmov, v drugem primeru imamo na voljo $3 \cdot 4 = 12$ različnih izborov filmov.

3. V gostilni gostom ponujajo že sestavljena 2 različna »slow fooda« in 3 različne menije, ali pa gostje sami izbirajo med 8 predjedmi, 15 glavnimi jedmi, 10 vrstami solate in 7 sladicami. Izračunajmo, na koliko različnih načinov se lahko prehranjujemo.

   Prehranjujemo se lahko na $2 + 3 + 8 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 7 = 8405$ različnih načinov.

Shemo, s katero grafično prikažemo mogoče izbore danega odločanja, imenujemo **kombinatorično drevo**.

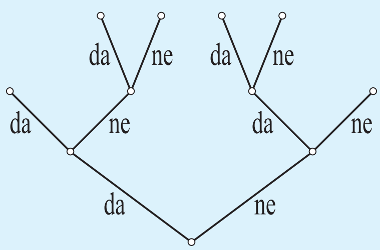
1. Narišimo kombinatorično drevo za turnir 8 teniških igralcev, na katerem zmagovalci posameznih dvobojev napredujejo v naslednje kolo. Koliko teniških dvobojev bo odigranih na turnirju?



Na turnirju bo odigranih 7 dvobojev.

2. Na izpitu dobimo zaporedoma dve vprašanji, če na eno od njiju ne znamo pravilno odgovoriti, dobimo še tretje vprašanje. Če pravilno odgovorimo na prvi dve vprašanji, opravljanje izpita zaključimo in izpit uspešno opravimo. Uspešno ga opravimo tudi, če pravilno odgovorimo na dve vprašanji od treh. Če nepravilno odgovorimo na prvi dve vprašanji, opravljanje izpita zaključimo in izpit seveda ne opravimo. Narišimo kombinatorično drevo in zapišimo, na koliko različnih načinov se lahko konča izpit.

Narišemo kombinatorično drevo za opravljanje izpita.



Izpit se lahko konča na 6 različnih načinov.

Permutacije brez ponavljanja: Permutacije brez ponavljanja so razporedi n različnih elementov dane množice v nize dolžine n. **Število permutacij brez ponavljanja** je $P_n = n!$ (n fakulteta ali n faktorsko), pri čemer je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... (n-1) \cdot n$ in $0! = 1$.

1. Izračunajmo, koliko različnih števil lahko zapišemo s števkami 2, 3, 4, 5, če vsako števko v zapisu števila uporabimo natanko enkrat.

Zapišemo lahko $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ različnih števil. Pri izračunu si pomagajmo s kalkulatorjem in tipko {$n!$}.

2. Izračunajmo, na koliko načinov lahko 7 ljudi stoji v vrsti pred blagajno.

Sedem ljudi lahko stoji pred blagajno na $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ različnih načinov.

3. Izračunajmo, koliko je permutacij brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, če:
a) ni nobenih dodatnih omejitev,
b) je 5 na prvem mestu,
c) je 7 na zadnjem mestu.

a) Če ni nobenih dodatnih omejitev, je vseh permutacij brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{A}$ enako $P_5 = 5! = 120$.
b) Vseh permutacij brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{A}$, v katerih je število 5 na prvem mestu, je $P_4 = 4! = 24$, saj preostale štiri elemente razporejamo na preostala štiri mesta.
c) Vseh permutacij brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{A}$, v katerih je število 7 na zadnjem mestu, je ravno tako $P_4 = 4! = 24$.

4. Izračunajmo, koliko je permutacij brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{B} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, če:
a) ni nobenih dodatnih omejitev,
b) je 68 na zadnjem mestu,
c) 0 ni na prvem mestu.

a) Če ni nobenih dodatnih omejitev, je vseh permutacij brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{B}$ enako $P_5 = 5! = 120$.
b) Vseh permutacij brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{B}$, v katerih je 68 na zadnjem mestu, je $P_3 = 3! = 6$, saj preostale tri elemente razporejamo na zadnja tri mesta.
c) Permutacije brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{B}$, v katerih 0 ni na prvem mestu, dobimo tako, da od števila vseh takih permutacij odštejemo število tistih, v katerih je število 0 na prvem mestu: $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$, ali z uporabo osnovnega izreka kombinatorike: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$.

Variacije brez ponavljanja: Nize po r različnih elementov izmed n elementov dane množice imenujemo variacije brez ponavljanja n elementov reda r. **Število variacij brez ponavljanja n elementov reda r je**
$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

1. Pisno izračunajmo V_{15}^{10} in rezultat preverimo s kalkulatorjem.

Izračunamo $V_{15}^{10} = \frac{15!}{(15-10)!} = \frac{15!}{5!} = 1\,089\,728\,640$ in rezultat preverimo s kalkulatorjem in uporabo tipk $\{2^{\text{nd}}\text{F}\}$ in $\{nPr\}$.

2. Iz števil 1, 2, 3, 4 sestavljamo dvomestna števila, v katerih posamezna števka nastopa kvečjemu enkrat. Koliko različnih števil lahko sestavimo? Zapišimo vse možnosti.

Sestavimo lahko $V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ različnih števil.
To so 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 in 43.

3. Izračunajmo, koliko je vseh variacij brez ponavljanja reda 3 z elementi množice $\mathcal{A} = \{a, e, i, o\ u\}$.

Izračunamo $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

4. Na atletskem tekmovanju je sodelovalo 20 tekmovalcev. Izračunajmo, na koliko načinov lahko tekmovalcem podelijo zlato, srebrno in bronasto medaljo, če posamezno medaljo lahko dobi le en tekmovalec.

Medalje lahko podelijo na $V_{20}^3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ načinov.

5. V učilnici je 32 stolov. Izračunajmo, na koliko načinov se nanje lahko posede 25 učencev.

Posedejo se lahko na $V_{32}^{25} = \frac{32!}{(32-25)!} = \frac{32!}{7!} = 5{\cdot}22 \cdot 10^{31}$ različnih načinov.

Variacije s ponavljanjem: Nize dolžine r izmed n elementov dane množice, v katerih lahko posamezni element nastopi večkrat, imenujemo variacije s ponavljanjem n elementov reda r. **Število variacij s ponavljanjem n elementov reda r je** ${}^{(p)}V_n^r = n^r$.

1. Izračunajmo, koliko različnih dvomestnih števil lahko zapišemo s števkami 1, 2, 3, 4, če posamezna števka v zapisu števila lahko nastopa tudi večkrat. Zapišimo vsa števila.

Sestavimo lahko ${}^{(p)}V_4^2 = 4^2 = 16$ različnih števil.
To so 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43 in 44.

2. Izračunajmo, koliko je vseh variacij s ponavljanjem 3 reda z elementi množice $\mathcal{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Izračunamo ${}^{(p)}V_5^3 = 5^3 = 125$.

3. Test ima 25 vprašanj, na katera odgovarjamo le z DA ali z NE. Izračunajmo, na koliko načinov je mogoče rešiti ta test.

Test je mogoče rešiti na ${}^{(p)}V_2^{25} = 2^{25} = 33\,554\,432$ različnih načinov.

4. Poiščimo število vseh različnih štirimestnih števil, ki jih lahko sestavimo s števkami 0, 2, 4, 6, 8, če je posamezna števka v številu lahko zapisana večkrat in število 0 ne more biti na prvem mestu.

Vsa različna štirimestna števila, v katerih število 0 ni na prvem mestu, izračunamo tako, da od števila vseh štirimestnih števil, zapisanih z zgornjimi števkami, odštejemo število vseh takih števil, ki imajo 0 na prvem mestu ${}^{(p)}V_5^4 - {}^{(p)}V_5^3 = 5^4 - 5^3 = 500$, ali pa z osnovnim izrekom kombinatorike: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$.

Kombinacije brez ponavljanja: Podmnožice z močjo r končne množice z močjo n $(r \leq n)$ imenujemo kombinacije n elementov reda r. **Število kombinacij brez ponavljanja n elementov reda r je**

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Izraz $\binom{n}{r}$ imenujemo **binomski simbol**. Binomski simbol $\binom{n}{r}$ pove število podmnožic moči r množice moči n.

Lastnosti binomskega simbola:

1. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
2. $\binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$
3. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

1. Pisno izračunajmo $\binom{20}{4}$ in $\binom{100}{98}$ ter rezultat preverimo s kalkulatorjem.

Zapišemo in izračunamo $\binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4845$ ter $\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} = 4950$.
Vrednost binomskega simbola preverimo z uporabo kalkulatorja, na katerem uporabimo tipko {*nCr*}.

2. Izračunajmo število kombinacij brez ponavljanja reda 3 iz množice z močjo 12.

Zapišemo $C_{12}^3 = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$.

3. Izračunajmo število vseh podmnožic s po dvema elementoma množice $\mathcal{A} = \{a, e, i, o, u\}$. Zapišimo te podmnožice.

Vseh podmnožic s po 2 elementoma je $C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$.

To so $\{a, e\}, \{a, i\}, \{a, o\}, \{a, u\}, \{e, i\}, \{e, o\}, \{e, u\}, \{i, o\}, \{i, u\}, \{o, u\}$.

4. Na polici je 12 knjig. Izračunajmo, na koliko načinov lahko s police vzamemo 4 knjige.

S police lahko vzamemo 4 knjige na $C_{12}^4 = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$ načinov.

5. Izračunajmo število vseh premic, ki jih določa 6 točk, katerih nobena trojica ni kolinearna.

Število vseh premic je $C_6^2 = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$.

6. Janez ima 4 prijatelje. Izračunajmo, na koliko načinov lahko povabi enega ali več prijateljev v kino.

To lahko stori na $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ načinov.

7. V kulturnem društvu je 35 žensk in 50 moških. Izračunajmo, na koliko načinov lahko izberejo 5-člansko vodstvo, v katerem sta dve ženski in trije moški.

Vodstvo lahko izberejo na $C_{35}^2 \cdot C_{50}^3 = \binom{35}{2} \cdot \binom{50}{3} = 595 \cdot 19\,600 = 11\,662\,000$, saj je število izborov žensk v predsedstvo neodvisno od števila izborov moških (pravilo produkta).

8. V razredu je 30 dijakov. Izračunajmo:
a) na koliko načinov lahko izberejo 3-člansko vodstvo,
b) na koliko načinov lahko izberejo predsednika, tajnika in blagajnika.

Tričlansko vodstvo lahko izberejo na $C_{30}^3 = \binom{30}{3} = 4060$ načinov,
predsednika, tajnika in blagajnika pa na $V_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!} = \frac{30!}{27!} = 24\,360$ načinov.

Binomski izrek: Za poljubni števili a in b ter naravno število n velja:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

oziroma $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

V razvoju binoma $(a+b)^n$ dobimo ***k*-ti člen** po formuli $\binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$.

Števila **Pascalovega trikotnika** so izračunane **vrednosti binomskih simbolov in koeficienti v razvoju binoma**:

$n = 0$ 1
$n = 1$ 1 1
$n = 2$ 1 2 1
$n = 3$ 1 3 3 1
$n = 4$ 1 4 6 4 1
$n = 5$ 1 5 10 10 5 1
$n = 6$ 1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$ 1 7 21 35 35 21 7 1
...

1. Razvijmo potenci binomov $(a+b)^4$ in $(2-y)^5$.

Zapišemo $(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

in $(2-y)^5 = \binom{5}{0}2^5(-y)^0 + \binom{5}{1}2^4(-y)^1 + \binom{5}{2}2^3(-y)^2 + \binom{5}{3}2^2(-y)^3 + \binom{5}{4}2^1(-y)^4 + \binom{5}{5}2^0(-y)^5 =$

$= 32 - 80y + 80y^2 - 40y^3 + 10y^4 - y^5$.

2. Dana je potenca binoma $(x+2i)^4$, pri čemer je i imaginarna enota.
a) Za $x = 2$ izračunajmo njegovo vrednost.
b) Razvijmo potenco danega binoma.

Za $x = 2$ je $(2+2i)^4 = ((2+2i)^2)^2 = (2^2 + 2\cdot 2\cdot 2i + (2i)^2)^2 = (4 + 8i - 4)^2 = (8i)^2 = 64i^2 = -64$

Zapišimo še $(x+2i)^4 = \binom{4}{0}x^4(2i)^0 + \binom{4}{1}x^3(2i)^1 + \binom{4}{2}x^2(2i)^2 + \binom{4}{3}x^1(2i)^3 + \binom{4}{4}x^0(2i)^4 =$

$= x^4 + 8x^3i - 24x^2 - 32xi + 16$.

3. Zapišimo četrti člen v razvoju binoma $(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x})^{10}$.

V splošni člen $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ vstavimo $n = 10$, $r = 4 - 1 = 3$ (ker ima prvi člen $r = 0$), $a = \sqrt{x^3}$ in $b = \sqrt[3]{x}$

ter izračunamo četrti člen $\binom{10}{3}\cdot(\sqrt{x^3})^7\cdot(\sqrt[3]{x})^3 = 120\cdot x^{\frac{21}{2}}\cdot x^{\frac{3}{3}} = 120x^{11}\cdot\sqrt{x}$.

1. Vinko ima v omari 3 hlače, 5 srajc in 4 puloverje. Na koliko različnih načinov se lahko obleče, če vedno uporabi vsako izmed vrst oblačil?

2. Na vrh Šmarne gore iz Tacna in Šmartnega pod Šmarno goro vodijo iz vsakega kraja 3 različne markirane poti. Na koliko različnih načinov lahko gremo na vrh Šmarne gore in se z nje tudi spustimo, če:
a) gremo navzgor in navzdol po isti poti,
b) če gremo navzdol po drugi poti, kot smo šli navzgor?

3. Špela ima za večerno prireditev izbrani dve svečani obleki ter 3 krila in 2 srajci. Na koliko različnih načinov se lahko obleče, če izbere bodisi obleko bodisi krilo in srajco?

4. Iz Genove lahko pridemo v Palermo na Sicilijo neposredno z letalom ali z ladjo, lahko pa se najprej odpravimo bodisi z avtom, avtobusom ali vlakom v Livorno, od koder so za Palermo tri različne ladijske linije. Na koliko različnih načinov lahko pridemo iz Genove v Palermo?

5. Iz števk 2, 4, 6 in 8 sestavljamo števila, tako da vsako števko v posameznem zapisu števila uporabimo kvečjemu enkrat. Koliko različnih števil lahko sestavimo?

6. Koliko števil, večjih od 2000, lahko zapišemo s števkami 0, 1, 2, 3, 4 in 5, če vsako števko lahko v posameznem zapisu števila uporabimo kvečjemu enkrat?

7. Iz množice števk $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ sestavljamo trimestna števila, ki se ne začenjajo z 0, a se števke lahko ponavljajo. Izračunajte, koliko števil med njimi je:
a) lihih,
b) manjših ali enakih 700.

8. Izračunajte.
a) $\frac{10!}{6!}$
b) $\frac{59! - 58!}{57!}$
c) $\frac{55! + 57!}{55!}$

9. Izračunajte število permutacij brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

10. Iz črk besede PETKA sestavljamo besede, tako da vsako črko uporabimo natanko enkrat. Koliko je takih besed?

11. Valerija ima v četrtek 7 ur pouka sedmih različnih predmetov. Koliko različnih razporedov predmetov ima lahko v četrtek?

12. Pri urejanju parka se je mestna uprava odločila, da ob glavno sprehajalno pot postavi 12 skulptur. Na koliko načinov lahko to stori?

13. V začetku šolskega leta smo si v šolskem skladu za 11 različnih predmetov izposodili 11 knjig. Doma smo iz njih naredili kupček, tako da smo knjige naložili drugo na drugo. Na koliko načinov lahko razporedimo knjige v tak kupček?
Na koliko načinov so lahko razporejene knjige v kupčku, če je matematična knjiga položena na vrhu?

14. Koliko permutacij brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se:
a) začne s 7,
b) začne s sodo števko,
c) konča s sodo števko?

15. Koliko permutacij brez ponavljanja elementov množice $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se:
a) ne začne s 4,
b) ne začne z 51,
c) ne konča s 531?

16. Na slalomsko progo se 10 smučarjev, od tega 6 moških in 4 ženske, spušča drug za drugim. Na koliko načinov se lahko spustijo po progi, če se najprej spustijo vse ženske, nato pa vsi moški?

17. Na knjižno polico bomo postavili 5 knjig malega formata in 3 knjige velikega formata. Na koliko načinov to lahko naredimo, če naj knjige enakega formata stojijo skupaj?

18. Na koliko načinov lahko na knjižni polici razporedimo 5 leksikonov, 4 slovarje in 3 atlase tako, da knjige iste skupine ostanejo skupaj?

19. V ravno vrsto z 9 stoli se želijo usesti 4 slavisti, 3 matematiki in 2 zgodovinarja. Na koliko načinov se lahko razporedijo, če:
a) ni nobene dodatne omejitve,
b) če naj predstavniki iste stroke sedijo skupaj,
c) če zgodovinarja ne smeta sedeti skupaj?

20. Izračunajte.
a) $4! \cdot V_{10}^{6}$
b) $\frac{V_{12}^{4}}{5!}$

21. Koliko je vseh variacij brez ponavljanja reda 3 z elementi množice $\mathcal{B} = \{a, b, c, d, e, f\}$?

22. Na koliko načinov lahko iz števk 1, 2, 3, 4, 5, 6 sestavimo štirimestna števila, če je v vsakem posameznem številu posamezna števka lahko zapisana kvečjemu enkrat?

23. Pred zgradbo stoji 15 oseb. Na koliko načinov lahko v zgradbo drug za drugim vstopijo 3 osebe?

24. Na koliko načinov se lahko 5 oseb razporedi na 10 stolov?

25. Iz črk α, β, γ in δ sestavljamo šifre – besede z največ štirimi črkami, pri čemer v posamezni šifri lahko posamezna črka nastopa kvečjemu enkrat. Koliko različnih šifer lahko sestavimo?

26. Koliko je vseh variacij s ponavljanjem reda 2 z elementi množice $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$? Zapišite jih.

27. Ključavnica za odpiranje sefa ima štiri kolobarje, na katerih so zapisane števke od 0 do 9. Na koliko načinov lahko izberemo šifro za odpiranje sefa?

28. Iz množice števk $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sestavljamo trimestna števila. Izračunajte, koliko takih števil lahko sestavimo, če:
a) se števke v posameznem zapisu števila ne smejo ponavljati,
b) se števke v posameznem zapisu števila lahko ponavljajo.

29. Koliko različnih števil, manjših od 1000, lahko zapišemo s števkami 4, 5, 6, 7, 8, 9, če v posameznem številu lahko določeno števko zapišemo tudi večkrat?

30. V pritličju hotela v dvigalo vstopi 8 turistov. Na koliko načinov lahko izstopijo iz dvigala, če ima hotel 5 nadstropij? V posameznem nadstropju lahko izstopi tudi več turistov hkrati.

31. Koliko različnih nizov dolžine 6 lahko sestavimo iz znakov ♠ in ♥?

32. Koliko različnih štirimestnih števil lahko zapišemo s števkami 1, 2 in 3? Koliko od teh števil je sodih?

33. Poiščite n, za katerega velja:
a) $\binom{n}{2} = 2n + 3$,
b) $\binom{n}{1} + \binom{n+2}{2} = 151$.

34. Koliko različnih podmnožic s po 4 elementi ima množica z 10 elementi?

35. Košarkarski trener ima na voljo 12 igralcev. Koliko različnih peterk lahko sestavi?

36. Pet prijateljev se je odločilo, da bodo odigrali teniški turnir, v katerem bo vsak igral eno igro z vsakim od prijateljev. Koliko iger bodo odigrali?

37. Največ koliko presečišč lahko določa 7 različnih premic, ki ležijo v isti ravnini?

38. Na hokejskem turnirju sodeluje 16 reprezentanc. V predtekmovanju so reprezentance razvrščene v 4 skupine po 4. Koliko tekem bo odigranih v predtekmovanju, če v vsaki skupini igra vsaka reprezentanca z vsako natanko enkrat?

39. Na matematičnem tekmovanju so se najbolj izkazali Nejc, Matej in Tomaž. Na koliko načinov lahko profesor matematike predlaga enega ali več izmed njih za državno tekmovanje?

40. Neka zgradba ima na eni strani 6 oken. Na koliko načinov je lahko osvetljeno eno ali več oken na tej strani zgradbe?

41. V kupčku je 32 igralnih kart. Iz njega naključno izberemo peterico kart. Koliko različnih peteric lahko izberemo? Koliko različnih peteric vsebuje srčevega kralja?

42. Iz kupa 32 običajnih igralnih kart hkrati izberemo 4 karte.
a) Koliko različnih četveric lahko izberemo?
b) Koliko različnih četveric vsebuje dva asa?
c) Koliko je različnih četveric, ki vsebujejo vsaj enega asa?

43. Na koliko načinov lahko iz skupine 100 gledalcev izberemo skupino desetih gledalcev, ki bodo prejeli spominske majice?

44. Na lepotnem tekmovanju bodo med 12 novinarji in 8 dekleti, ki so osvojile naslov Miss Slovenije, izbirali petčlansko komisijo, v kateri bodo trije novinarji in dve dekleti. Na koliko načinov lahko izberejo komisijo?

45. Na izpitnem listu je napisanih 10 vprašanj. Dijak mora odgovarjati na enega izmed prvih 3 vprašanj in na 5 izmed naslednjih 7 vprašanj. Koliko različnih izbir ima dijak na voljo?

46. V razredu je 8 fantov in 12 deklet. Na koliko načinov lahko sestavijo petčlansko delegacijo:
a) pri poljubni izbiri,
b) če naj bodo v njej 3 dekleta in 2 fanta,
c) če naj bo v njej vsaj eno dekle?

47. Društvo ima 32 članov. Na koliko načinov lahko izmed njih izberejo:
a) predsednika, tajnika in blagajnika,
b) tričlanski odbor, ki jih bo predstavljal?

48. Razvijte potence danih binomov.
a) $\left(x + \frac{2}{x}\right)^3$
b) $(3x - y)^6$
c) $(\sqrt{3} \cdot a - 2 \cdot b^3)^4$
č) $(2x + \sqrt{x})^5$
d) $(\sqrt{x} - 3\sqrt{x})^6$
e) $(2 + i)^4$
f) $(i - x)^5$

49. Ugotovite, ali velja
$(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2})^4 = 8\sqrt[4]{8} + 8\sqrt[4]{2} + 12\sqrt{2} + 6$.

50. Pokažite, da je $(1 - i)^6$ imaginarno število.

51. Zapišite peti člen v razvoju binoma $\left(\frac{x}{2} - \frac{4}{x^2}\right)^9$.

52. Dana je potenca binoma $(\sqrt[3]{2x} - 3)^6$.
a) Za $x = -4$ izračunajte njegovo vrednost.
b) Zapišite šesti člen v razvoju danega binoma.

53. Ugotovite, ali je četrti člen v razvoju binoma $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}\right)^{11}$ enak $-5280x^2$.

24. VERJETNOSTNI RAČUN

Poskus je vsako hoteno dejanje, ki poteka v skladu z množico pogojev (je realizacija kompleksa pogojev). **Dogodek** je vsak pojav, ki se pri danem poskusu lahko zgodi in ne spada v množico pogojev. Dogodke označujemo z velikimi tiskanimi črkami.

Dogodek je **gotov**, če se zgodi pri vsaki ponovitvi poskusa. Oznaka: G.

Dogodek je **nemogoč**, če se ne zgodi pri nobeni ponovitvi poskusa. Oznaka: N.

Dogodek je **slučajen**, če se pri nekaterih ponovitvah poskusa zgodi, pri nekaterih ponovitvah pa ne.

Dogodek A je **način** dogodka B, če se vsakič, ko se zgodi A, zgodi tudi B.

Če se je pri neki ponovitvi poskusa zgodil vsaj eden od dogodkov A ali B, rečemo, da se je zgodila **vsota dogodkov** A in B. Oznaka: $A \cup B$.

Če se pri neki ponovitvi poskusa zgodita dogodka A in B hkrati, rečemo, da se je zgodil **produkt dogodkov** A in B. Oznaki: $A \cap B$ ali $A \cdot B$.

Če se pri neki ponovitvi poskusa dogodek A ni zgodil, rečemo, da se je zgodil **nasprotni (komplementarni) dogodek** ali **negacija dogodka** A. Oznaka: A'.

Dogodka A in B sta **združljiva**, če se lahko zgodita hkrati.

Dogodka A in B sta **nezdružljiva**, če se ne moreta zgoditi hkrati. Za **nezdružljiva dogodka** A in B velja $A \cap B = N$.

Dogodek C je **sestavljen**, če ga lahko zapišemo kot vsoto dveh ali več slučajnih dogodkov: $C = A \cup B$.

Dogodek, ki ni sestavljen, imenujemo **elementarni dogodek** ali **izid.**

Množico dogodkov $S = \{A_1, A_2 \dots A_n\}$ imenujemo **popoln sistem dogodkov**, če se pri vsaki ponovitvi poskusa zgodi natanko eden izmed njih.

Množico vseh v danem poskusu možnih dogodkov imenujemo **algebra dogodkov** in jo označimo: $\mathcal{P}G$.

1. Naj bo opazovani poskus met običajne igralne kocke.
a) Zapišimo vse elementarne dogodke danega poskusa.
b) Zapišimo dva različna popolna sistema dogodkov.
c) Ugotovimo, ali je dogodek $A = \{\text{pade vsaj 5 pik}\}$ način dogodka $B = \{\text{pade sodo število pik}\}$.
č) K dogodku $C = \{\text{pade sodo število točk}\}$ zapišimo nasprotni dogodek.
d) Dogodka $D = \{\text{padejo več kot 4 pike}\}$ in $F = \{\text{padejo največ 3 pike}\}$ sta sestavljena dogodka. Zapišimo ju kot vsoto elementarnih dogodkov.
e) Za dogodka $H = \{\text{pade liho število pik}\}$ in $K = \{\text{padejo manj kot 3 pike}\}$ zapišimo produkt dogodkov in ugotovimo, ali sta dogodka nezdružljiva.

a) Vsi elementarni dogodki danega poskusa so: $E_1 = \{\text{pade 1 pika}\}$, $E_2 = \{\text{padeta 2 piki}\}$, $E_3 = \{\text{padejo 3 pike}\}$, $E_4 = \{\text{padejo 4 pike}\}$, $E_5 = \{\text{pade 5 pik}\}$ in $E_6 = \{\text{pade 6 pik}\}$.
b) Popolna sistema dogodkov sta množici $S_1 = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ in $S_2 = \{A_1, A_2\}$, pri čemer sta dogodka $A_1 = \{\text{pade sodo število pik}\}$ in $A_2 = \{\text{pade liho število pik}\}$.
c) Dogodek A ni način dogodka B, kajti če pade 5 pik, se zgodi dogodek A, ne zgodi pa se dogodek B.
č) K dogodku $C = \{\text{pade sodo število točk}\}$ je $C' = \{\text{pade liho število točk}\}$ nasprotni dogodek.
d) Zapišemo $D = \{\text{padejo več kot 4 pike}\} = E_5 \cup E_6$ in $F = \{\text{padejo največ 3 pike}\} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$.
e) Zapišemo $H \cap K = E_1$ in ker njun produkt ni nemogoč dogodek, sta dogodka H in K združljiva.

2. Naj bo opazovani poskus slučajni izbor ene igralne karte iz običajnega kupa 32 igralnih kart.

a) Izračunajmo število vseh elementarnih dogodkov danega poskusa in jih nekaj tudi zapišimo.

b) K dogodkoma A = {izbrana karta je kralj} in B = {izbrana karta ni srce} zapišimo nasprotna dogodka.

c) Dogodkoma C = {izbrana karta je rdeče barve} in D = {izbrana karta je as} zapišimo vsoto dogodkov in produkt dogodkov.

a) Vseh elementarnih dogodkov je 32; npr. E_1 = {izbrana karta je srčeva 7}, E_2 = {izbrana karta je karina 7} ...

b) Nasprotna dogodka sta A' = {izbrana karta ni kralj} in B' = {izbrana karta je srce}.

c) Vsota dogodkov je $C \cup D$ = {izbrana karta je rdeče barve ali as}, produkt dogodkov je $C \cap D$ = {izbrana karta je as rdeče barve}.

3. Iz običajnega kupa 32 igralnih kart hkrati naključno izberemo dve igralni karti.

a) Izračunajmo število vseh elementarnih dogodkov danega poskusa in jih nekaj tudi zapišimo.

b) K dogodku A = {vsaj ena izbrana karta je kralj} zapišimo nasprotni dogodek.

c) Za dogodka C = {izbrani karti sta rdeče barve} in D = {izbrani karti sta asa} zapišimo vsoto dogodkov in produkt dogodkov.

a) Vseh elementarnih dogodkov je $C_{32}^{2} = \binom{32}{2} = 496$; npr E_1 = {izbrani karti sta srčeva 7 in karina 7}, E_2 = {izbrani karti sta srčeva 7 in križeva 7} ...

b) Nasproten dogodek je A'= {nobena izbrana karta ni kralj}.

c) Vsota dogodkov je $C \cup D$ = {izbrani karti sta rdeče barve ali asa}, produkt dogodkov je $C \cap D$ = {izbrani karti sta srčev in karin as}.

Klasična definicija verjetnosti: Naj bo v nekem poskusu popoln sistem dogodkov, sestavljen iz n, izidov in naj bo dogodek A vsota katerihkoli m od teh izidov. Potem je **verjetnost dogodka A** kvocient med številom m za dogodek A ugodnih izidov in številom n vseh izidov danega poskusa: $P(A) = \frac{m}{n}$.

1. Pri metu običajne igralne kocke izračunajmo verjetnosti dogodkov A = {pade 6 pik}, B = {pade sodo število pik} in C = {pade vsaj pet pik}.

Izračunamo: $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. Izračunajmo verjetnosti dogodkov A, B in C pri slučajnem izboru ene igralne karte iz običajnega kupa 32 kart, če je:

a) A = {izbrana karta je kralj},

b) B = {izbrana karta je rdeče barve},

c) C = {izbrana karta je kralj rdeče barve}.

a) $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

b) $P(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

c) $P(C) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

3. Iz števk 3, 4, 5, 6, 7, 8 naključno sestavljamo trimestna števila brez ponavljanja števk. Kolikšna je verjetnost:
a) $A = \{$da bomo na slepo sestavili število 876$\}$,
b) $B = \{$da bomo na slepo sestavili število, deljivo s 5$\}$,
c) $C = \{$da bomo na slepo sestavili število, deljivo z 2$\}$?

a) $P(A) = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{120}$

b) $P(B) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{6}$

c) $P(C) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}$

4. Na polico želimo zložiti 4 matematične in 3 fizikalne knjige. Izračunajmo verjetnost, da bodo pri naključnem zlaganju knjig na polico stale matematične knjige skupaj in fizikalne knjige skupaj.

Število vseh dogodkov je 7!, število ugodnih dogodkov pa je $2 \cdot 4! \cdot 3! = 288$.

Zato je $P(A) = \frac{288}{5040} = 0{\cdot}0571$.

5. V škatli je 10 enakih kroglic, oštevilčenih s številkami od 1 do 10. Hkrati slučajno izberemo dve kroglici. Izračunajmo verjetnosti dogodkov:
a) $A = \{$izbrani kroglici imata številki 1 in 2$\}$,
b) $B = \{$izbrani kroglici imata sodi številki$\}$.

a) Vseh elementarnih dogodkov v danem poskusu je $\binom{10}{2} = 45$, zato lahko izračunamo $P(A) = \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45}$.

b) $P(B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$.

Računanje verjetnosti:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(G) = 1$
3. $P(N) = 0$
4. $P(A') = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1. Računalnik iz množice naravnih števil $n \leq 1000$ naključno izbere eno število. Izračunajmo verjetnosti dogodkov:
a) $A = \{$izbrano število je deljivo z 10$\}$,
b) $B = \{$izbrano število ni deljivo z 10$\}$.

a) Izračunamo $P(A) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$.

b) Ker je dogodek B nasproten dogodku A, je $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

2. V posodi imamo 6 belih in 8 črnih kroglic. Na slepo izvlečemo tri kroglice. Izračunajmo verjetnosti dogodkov:
a) $A = \{$izbrane kroglice so bele$\}$,
b) $B = \{$vsaj ena izbrana kroglica je črna$\}$.

a) Izračunamo $P(A) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{20}{364} = \frac{5}{91}$.

b) Dogodek $\{$nobena izbrana kroglica ni črna$\} = \{$vse kroglice so bele$\} = A$ je nasproten dogodku $B = \{$vsaj ena izbrana kroglica je črna$\}$, zato je $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{91} = \frac{86}{91} \doteq 0{\cdot}945$.

3. V razredu s 15 fanti in 17 dekleti učitelj naključno izbere dva dijaka. Kolikšne so verjetnosti dogodkov:
a) $A = \{$izbrana sta en fant in eno dekle$\}$,
b) $B = \{$izbrana sta dva fanta$\}$,
c) $C = \{$izbrano je vsaj eno dekle$\}$?

a) Izračunamo $P(A) = \dfrac{\binom{15}{1} \cdot \binom{17}{1}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{15 \cdot 17}{496} \doteq 0{,}5141$.

b) $P(B) = \dfrac{\binom{15}{2}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{105}{496} \doteq 0{,}2117$.

c) Ker je dogodek $\{$izbrano ni nobeno dekle$\} = \{$izbrana sta dva fanta$\} = B$ nasproten dogodku C, je $P(C) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}2117 = 0{,}7883$.
Za dogodek C pa velja tudi $C = \{$izbrano je eno dekle in en fant$\} \cup \{$izbrani sta dve dekleti$\}$, zato je
$P(C) = \dfrac{\binom{15}{1} \cdot \binom{17}{1} + \binom{17}{2}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{15 \cdot 17 + 136}{496} = \dfrac{391}{496} \doteq 0{,}7883$.

4. Iz običajnega kupa 32 kart smo že izbrali tri karte: dva kralja in enega asa. Na slepo izberemo hkrati še dve karti. Izračunajmo verjetnost, da bosta med izbranima kartama en kralj in en as.

V kupčku z 29 kartami sta še dva kralja in trije asi, zato je $P(A) = \dfrac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{29}{2}} = \dfrac{2 \cdot 3}{406} \doteq 0{,}01478$.

5. V škatli je 100 enakih kroglic, oštevilčenih s številkami od 1 do 100. Hkrati slučajno izberemo eno kroglico. Izračunajmo verjetnosti dogodkov:
a) $A = \{$izbrana kroglica ima številko 100$\}$,
b) $B = \{$izbrana kroglica je deljiva s 5$\}$,
c) $C = \{$izbrana kroglica je deljiva z 8$\}$,
č) $D = \{$izbrana kroglica je deljiva s 5 in z 8$\}$,
d) $F = \{$izbrana kroglica je deljiva s 5 ali z 8$\}$.

a) $P(A) = \dfrac{1}{100}$
b) $P(B) = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$
c) $P(C) = \dfrac{12}{100} = \dfrac{3}{25}$
č) $P(D) = P(B \cap C) = \dfrac{2}{100} = \dfrac{1}{50}$
d) $P(F) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{25} - \dfrac{2}{100} = \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$

6. Iz običajnega kupa 32 igralnih kart hkrati naključno izberemo dve igralni karti. Izračunajmo verjetnosti dogodkov:
a) $A = \{$izbrani sta dve karti rdeče barve$\}$,
b) $B = \{$izbrani sta dve dami$\}$,
c) $C = \{$izbrani karti sta rdeče barve ali dami$\}$.

a) Izračunamo $P(A) = \dfrac{\binom{16}{2}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{120}{496} \doteq 0{,}2419$.

b) $P(B) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{6}{496} \doteq 0{,}0121$.

c) Zapišemo $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{120}{496} + \dfrac{6}{496} - \dfrac{1}{496} \doteq 0{,}2520$.

1. Iz običajnega kupa 32 kart smo že izbrali štiri karte: dva kralja in dve dami. Izračunajmo verjetnost, da bo naslednja na slepo izbrana karta kralj ali dama.

2. V škatli so listki s številkami od 50 do 69. Na slepo izberemo en listek. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
   a) $A = \{$število na listku je sodo$\}$,
   b) $B = \{$število na listku sestavljata enaki števki$\}$.

3. Iz množice naravnih števil, manjših od 100, naključno izberemo eno število. Kolikšna je verjetnost, da je to število sodo, ki ni deljivo z osem?

4. Iz množice naravnih števil $n \leq 100$ naključno izberemo eno število. Kolikšna je verjetnost, da je to število deljivo z 2 ali s 5?

5. Dvakrat zaporedoma vržemo igralno kocko. Prvič smo vrgli 6 pik. Kolikšna je verjetnost, da tudi drugič vržemo 6 pik?

6. Enkrat vržemo igralno kocko. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
   a) $A = \{$pade število pik, ki je deljivo s 3$\}$,
   b) $B = \{$pade sodo število pik$\}$,
   c) $C = \{$pade število pik, ki je bodisi sodo bodisi deljivo s 3$\}$.

7. Kolikšna je verjetnost, da pri enem metu igralne kocke pade praštevilo ali pa število, manjše od 5?

8. Trikrat zaporedoma vržemo igralno kocko. Kolikšna je verjetnost, da vsaj enkrat pade 6 pik?

9. Hkrati vržemo dve igralni kocki. Kolikšne so verjetnosti naslednjih dogodkov:
   a) $A = \{$na obeh kockah pade 6 pik$\}$,
   b) $B = \{$vsota pik obeh kock je 7$\}$,
   c) $C = \{$na obeh kockah sta številki večji od 3$\}$.

10. V oddelku z 32 dijaki se vsak dijak uči vsaj en tuji jezik. Angleški jezik se uči 24 dijakov, nemški jezik pa 18 dijakov. Naključno izberemo enega učenca. Kolikšna je verjetnost, da se izbrani dijak uči oba tuja jezika?

11. Iz kupa 32 kart na slepo izberemo eno karto. Kolikšna je verjetnost, da je izbrana karta pik ali kralj?

12. Iz števk 1, 2, 4, 5, 8 sestavljamo štirimestna števila s samimi različnimi števkami. Naj bo $\mathcal{M}$ množica vseh takih štirimestnih števil. Koliko elementov ima množica $\mathcal{M}$? Kolikšna je verjetnost, da bo naključno izbrano število iz množice $\mathcal{M}$ deljivo s 5?

13. Iz črk besede ODLIČNJAK sestavljamo besede, tako da vsako črko uporabimo natanko enkrat. Koliko je takih besed? Izračunajte verjetnost, da naključno sestavljena beseda vsebuje besedico DIJAK (črke D, I, J, A, K morajo stati skupaj v tem vrstnem redu).

14. Blaž povabi v cirkus še dva sošolca in štiri sošolke, ki se naključno usedejo na 7 praznih sedežev v vrsti.
    a) Na koliko različnih načinov se lahko posedejo?
    b) Izračunajte verjetnost, da sedijo fantje skupaj in dekleta skupaj.

15. Na letalu so v vsaki vrsti razporejeni trije sedeži levo od prehoda in trije sedeži desno od prehoda. Trije zakonski pari se naključno razporedijo v eno vrsto. Kolikšna je verjetnost dogodka, da sedijo možje skupaj in žene skupaj?

16. Dana je množica $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Množica $\mathcal{B}$ je množica štirimestnih števil (število 0 ne more biti na prvem mestu), ki jih sestavljamo iz elementov množice $\mathcal{A}$, pri čemer vsako števko uporabimo kvečjemu enkrat.
    a) Koliko elementov ima množica $\mathcal{B}$?
    b) Koliko števil iz množice $\mathcal{B}$ je večkratnikov števila 5?
    c) Iz množice $\mathcal{B}$ naključno izberemo eno število. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali število, ki je večje od 3000 in manjše od 5000?

17. Iz množice števk $\{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ sestavljamo trimestna števila, katerih števke se ne morejo ponavljati.
    a) Izračunajte, koliko števil lahko sestavimo.
    b) Izračunajte, kolikšna je verjetnost, da je naključno izbrano število deljivo z 2.
    c) Izračunajte, kolikšna je verjetnost, da je vsota števk naključno izbranega števila enaka 9.

18. Iz množice števk $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ računalnik naključno sestavlja trimestna števila, pri čemer je lahko v posameznem številu posamezna števka zapisana tudi večkrat. Kolikšna je verjetnost:
a) da sestavi število 555,
b) da je sestavljeno število manjše od 400?

19. V prvi škatli so 3 bele in 6 zelenih, v drugi škatli pa je 6 belih in 4 zelene kroglice. Na slepo izvlečemo eno kroglico iz prve škatle in eno iz druge škatle. Kolikšna je verjetnost, da sta:
a) obe izvlečeni kroglici zeleni,
b) kroglici različne barve?

20. Na sedmih ploščicah so napisane črke O, D, L, I, Č, E, N (na vsaki ploščici po ena črka). Na slepo hkrati izberemo tri ploščice. Kolikšna je verjetnost, da iz njih lahko sestavimo besedo NOČ?

21. Pri žrebanju Lota med števili od 1 do 39 naključno izberejo 7 števil.
a) Naključno izpolnimo en navadni listek s sedmimi števili. Kolikšna je verjetnost, da bomo zadeli »sedmico« in kolikšna je verjetnost, da bomo zadeli »štirico«?
b) Naključno izpolnimo en kombinirani listek z desetimi števili. Kolikšna je verjetnost, da bomo zadeli »sedmico« in kolikšna je verjetnost, da bomo zadeli »štirico«?

22. Iz kupa 32 kart na slepo izberemo tri karte. Kolikšne so verjetnosti dogodkov:
a) $A = \{$vse tri karte so desetke$\}$,
b) $B = \{$vse tri karte so kare$\}$,
c) $C = \{$vsaj ena karta je 7$\}$?

23. Na 15 listkih, ki so shranjeni v posodi, so zapisana števila od 1 do 15. Naključno iz posode izvlečemo dva listka. Izračunajte verjetnost dogodka A, da je vsaj na enem od izvlečenih listkov zapisano število, ki je večje od 10.

24. Iz skupine 20 moških in 14 žensk naključno izberemo štiri osebe. Kolikšna je verjetnost, da je v tej skupini izbranih oseb vsaj ena ženska?

25. V razredu z 18 dekleti in 11 fanti naključno sestavljajo petčlanski odbor, ki bo pripravil poslovilno slovesnost. Izračunajte verjetnost, da bosta v tem odboru zastopana oba spola.

26. V škatli imamo 3 bele, 5 rdečih in 6 modrih kroglic. Naključno izberemo 3 kroglice hkrati. Izračunajte verjetnost dogodkov:
a) $A = \{$kroglice so različne barve$\}$,
b) $B = \{$vsaj ena kroglica je rdeča$\}$.

27. Na ribiški ladji imajo 8 trnkov s plovci in 2 trnka brez plovca. V morje naključno vržemo 6 trnkov. Kolikšna je verjetnost, da v morje nismo vrgli vse trnke s plovci?

28. Iz običajnega kupa 32 igralnih kart hkrati naključno izberemo dve igralni karti. Izračunajmo verjetnosti dogodkov:
a) $A = \{$izbrani karti sta črne barve$\}$,
b) $B = \{$izbrani sta dve devetki$\}$,
c) $C = \{$izbrani karti sta črne barve ali devetki$\}$,
č) $D = \{$ena izbrana karta je rdeče barve, druga pa črne$\}$.

29. Dijak se je od 50 vprašanj naučil odgovore na 40 vprašanj. Na izpitu dobi štiri vprašanja. Kolikšna je verjetnost, da bo pravilno odgovoril vsaj na dve vprašanji?

30. Iz množice $\mathcal{M} = \{4k - 1;\ k \in \mathbb{N},\ k < 8\}$ na slepo izberemo dve števili. Zapišite elemente množice $\mathcal{M}$ in izračunajte verjetnosti dogodkov:
a) $A = \{$obe izbrani števili sta deljivi s 3$\}$,
b) $B = \{$vsaj eno izbrano število je deljivo s 3$\}$.

31. Pri proizvodnji 2000 žarnic so naključno izbrali vzorec 50 žarnic in jih testirali.
a) Koliko neuporabnih žarnic lahko pričakujemo v celotni proizvodnji, če so v tem vzorcu 3 neuporabne žarnice?
b) V daljšem časovnem obdobju nadzora proizvodnje so ugotovili, da so v povprečju v seriji 50 žarnic 3 neuporabne. Kolikšna je verjetnost, da pri slepem izboru 3 žarnic iz vzorca s 50 žarnicami izberemo vse tri neuporabne žarnice, in kolikšna je verjetnost, da pri slepem izboru 3 žarnic iz vzorca s 50 žarnicami izberemo vse 3 uporabne žarnice?

25. STATISTIKA

Osnovni statistični pojmi. Grupiranje, urejanje in prikazovanje podatkov

Populacija je končna ali neskončna množica, ki jo statistično proučujemo.

Vzorec je končna podmnožica populacije.

Enota je posamezen element populacije.

Statistični znaki (spremenljivke) so značilnosti posameznih enot, ki nas v danem primeru zanimajo, **statistični parametri** pa značilnosti populacije kot celote.

Včasih za lažjo obravnavo populacije celotni interval vrednosti statističnega znaka razdelimo v manjše intervale, ki jih imenujemo **razredi** (sredine razredov označimo z x_k).

Absolutna frekvenca f_k pove število enot, ki spadajo v k-ti razred, **relativna frekvenca** f_k° pa delež teh enot. Če je N število vseh enot v populaciji, potem velja $f_k^\circ = \frac{f_k}{N}$.

Pridobljene in urejene podatke grafično prikazujemo s frekvenčnim kolačem, poligonom ali histogramom.

Na šolski akciji zbiranja starega papirja so zabeležili naslednje mase prinesenega papirja (v kg): 105, 120, 144, 151, 82, 85, 91, 124, 199, 196, 100, 52, 68, 77, 83, 167, 155, 192, 187, 175, 156, 74, 55, 96, 137, 139, 171, 117, 88, 181, 164, 146, 92, 84, 51, 134, 157, 113, 66, 57. Podatke grupirajmo v 6 razredov, izračunajmo absolutno in relativno frekvenco posameznega razreda in podatke grafično predstavimo.

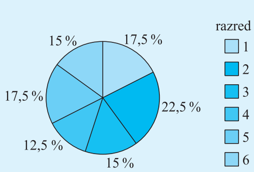
Razlika med največjo in najmanjšo maso je 199 kg – 50 kg = 149 kg, zato bomo naredili 6 razredov s širino 25 kg.

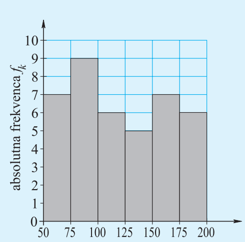
Nato preštejemo število enot v posameznem razredu in zapišemo absolutne frekvence f_k.

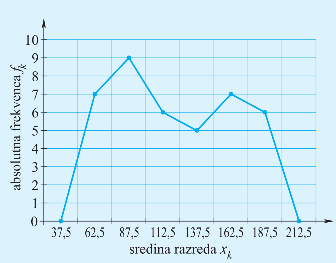
Izračunamo še relativne frekvence $f_k^0 = \frac{f_k}{N}$, pri čemer je N število vseh enot ($N = 40$).

Razred	Masa (v kg)	Sredina razreda x_k	Absolutna frekvenca f_k	Relativna frekvenca f_k^0
1	50–75	62·5	7	0·175
2	75–100	87·5	9	0·225
3	100–125	112·5	6	0·150
4	125–150	137·5	5	0·125
5	150–175	162·5	7	0·175
6	175–200	187·5	6	0·150
		SKUPAJ	40	1·000

Narišemo frekvenčni kolač, histogram in poligon (linijski diagram).







Srednja vrednost in standardni odklon

Aritmetična sredina ali **srednja vrednost številčno izraženega statističnega znaka** pove vrednost, ki bi jo dobili, če bi vsoto vseh vrednosti statističnega znaka enakomerno razdelili na vse enote v celotni populaciji.

Če z $x_1, x_2 \ldots\ x_N$ označimo vrednosti, ki jih statistični znak zavzame na posameznih enotah dane populacije, potem aritmetično sredino izračunamo po obrazcu $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$.

Dolžina državne meje Republike Slovenije s Hrvaško je 670 km, z Madžarsko 102 km, z Avstrijo 318 km in z Italijo 280 km (Vir: Statistični urad Republike Slovenije). Izračunajmo, kolikšna je povprečna dolžina državne meje Slovenije s sosednjimi državami.

Izračunamo $\bar{x} = \frac{670 + 102 + 318 + 280}{4} = 342{\cdot}5$ km.

Če statistični znak zavzame isto vrednost na več enotah populacije ali pa je vrednost statističnega znaka razdeljena v razrede, potem izračunamo **tehtano aritmetično sredino** po formuli: $\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_rx_r}{N}$.

Tu so $x_1, x_2 \ldots x_r$ sredine razredov, $f_1, f_2 \ldots f_r$ pa frekvence razredov.

1. Borzni posrednik je 5 delnic kupil po 373·00 EUR, 8 delnic po 374·20 EUR, 3 delnice po 371·80 EUR in 5 delnic po 368·90 EUR. Izračunajmo, po koliko evrov je povprečno kupil posamezno delnico.

Borzni posrednik je v povprečju posamezno delnico kupil po

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 373{,}00 + 8 \cdot 374{,}20 + 3 \cdot 371{,}80 + 5 \cdot 368{,}90}{21} = 372{\cdot}31 \text{ evra.}$$

2. Pri matematičnem testu so trije dijaki bili ocenjeni z nzd(1), sedem dijakov z zd(2), šest dijakov z db(3), 7 dijakov s pd(4), preostali dijaki pa z odl(5). Izračunajmo, koliko dijakov je bilo ocenjenih z odlično oceno, če je bila povprečna ocena testa 3·0.

Zapišemo $\bar{x} = \frac{3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + n \cdot 5}{23 + n} = 3{\cdot}0$

in s preoblikovanjem v $3 + 14 + 18 + 28 + 5n = 69 + 3n$

rešimo dobljeno enačbo $n = 3$.

Odlično oceno so dobili trije dijaki.

Standardni odklon σ ali **standardna deviacija** vrednosti številčno izraženega statističnega znaka od aritmetične sredine pove, za koliko se statistični znak v povprečju odklanja od srednje vrednosti. Standardno deviacijo izračunamo po obrazcu $\sigma = \sqrt{\frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + f_r(x_r - \bar{x})^2}{N}}$.

Pregledovali smo dosežene koše košarkarskih klubov, ki tekmujejo v ligi Goodyear, in po 14. kolu dobili naslednje podatke, ki smo jih že uredili po razredih.

Razred	Število doseženih košev	Sredina razreda x_k	Absolutna frekvenca f_k
1	1000–1040	1020	1
2	1040–1080	1060	3
3	1080–1120	1100	4
4	1120–1160	1140	6
		Skupaj	14

Izračunajmo povprečno število doseženih košev in standardni odklon.

Povprečno število doseženih košev je $\bar{x} = \frac{1 \cdot 1020 + 3 \cdot 1060 + 4 \cdot 1100 + 6 \cdot 1140}{14} \doteq 1103$, standardni odklon pa

$$\sigma = \sqrt{\frac{1 \cdot (1020-1103)^2 + 3 \cdot (1060-1103)^2 + 4 \cdot (1100-1103)^2 + 6 \cdot (1140-1103)^2}{14}} \doteq 38˙4.$$

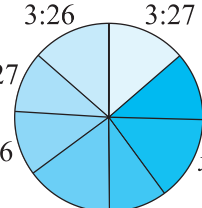
1. Pri matematičnem testu so Jure, Rok in Žiga dobili prav dobro 4, Matej pa odlično 5. Izračunajte njihovo povprečno oceno.

2. V letu 2005 je deset najbolj uspešnih avtomobilskih znamk doseglo naslednje število prodanih avtomobilov: 13 761, 6693, 6080, 4694, 4270, 2988, 2738, 2719, 2142 in 1786 (Vir: Delo). Izračunajte povprečno prodajo najboljših desetih avtomobilskih znamk.

3. Izračunajte povprečni čas najboljših petih tekmovalk slaloma na Zlati lisici, ki so dosegle naslednje čase: 1:48:34, 1:49:31, 1:49:43, 1:49:52, 1:50:06.

4. Pri igri Človek ne jezi se smo beležili število pik na igralni kocki. Izračunajte, kolikokrat je padla enica, če je dvojka padla petkrat, trojka sedemkrat, štirica osemkrat, petica šestkrat in šestica desetkrat in je povprečje pik na kocki vseh metov znašalo 3˙6.

5. Spodnji diagram prikazuje dolžino skladb (v minutah in sekundah) na glasbeni zgoščenki. Izračunajte dolžino skladbe x, če je povprečna dolžina skladb na zgoščenki 3 minute in 5 sekund.



6. V prvem razredu devetletke so izmerili višino učencev. Dobili so naslednje vrednosti (v cm): 105, 106, 107, 108, 108, 109, 109, 110, 111, 112, 112, 112, 113, 114, 116, 116, 116, 117, 117, 118, 119, 120, 120, 121, 121, 122, 123, 124.
   a) Podatke grupirajte v 5 frekvenčnih razredov širine 4.
   b) Iz grupiranih podatkov izračunajte povprečno višino učencev.
   c) Podatke prikažite s frekvenčnim histogramom ali frekvenčnim poligonom.

7. Isto maso je stehtalo 6 dijakov. Njihove meritve so: 13˙52 kg, 13˙50 kg, 13˙77 kg, 13˙65 kg, 13˙57 kg in 13˙72 kg. Izračunajte srednjo vrednost meritve in standardni odklon.

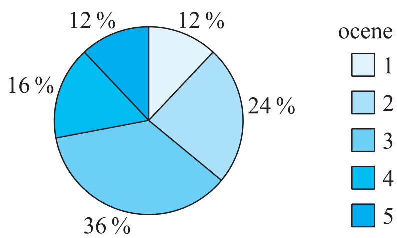
8. V maratonskem klubu so v zadnjem tednu zabeležili naslednje število pretečenih kilometrov za posamezne maratonce in podatke uredili po razredih.

Razred	1	2	3	4	SKUPAJ
Število pretečenih kilometrov	0–50	50–100	100–150	150–200	
Sredina razreda x_k	25	75	125	175	
Absolutna frekvenca f_k	9	6	7	3	**25**

Izračunajte povprečno število pretečenih kilometrov in standardni odklon.

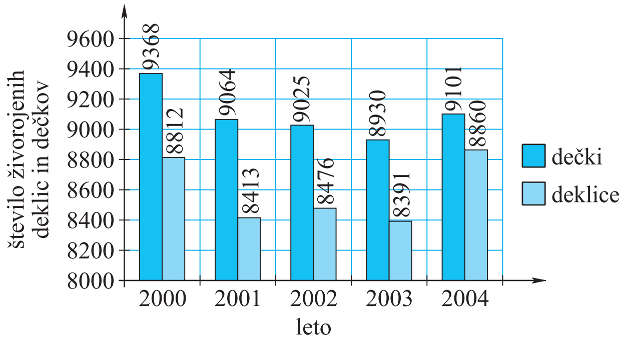
9. Tovarna proizvaja tri vrste hladilnikov. V maju so prodali 356 hladilnikov po 520˙00 EUR za posamezen hladilnik, 290 hladilnikov po 610˙00 EUR in 180 hladilnikov po 720˙00 EUR. Izračunajte povprečno ceno prodanega hladilnika v maju in standardni odklon prodaje v maju.

10. Pri preverjanju znanja 25 dijakov iz statistike je bil dosežen naslednji uspeh, predstavljen na spodnjem frekvenčnem kolaču.



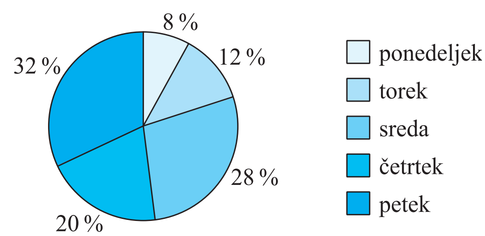
a) Izračunajte število dijakov, ki so pridobili posamezno oceno, in rezultate prikažite s tabelo, frekvenčnim histogramom in frekvenčnim poligonom.
b) Izračunajte povprečno oceno in standardni odklon.

11. Spodnji histogram prikazuje število živorojenih deklic in dečkov v R Sloveniji v letih od 2000 do 2004 (Vir: Statistični urad RS).



a) Za to obdobje izračunajte povprečno število rojenih dečkov in povprečno število rojenih deklic ter njuna standardna odklona.
b) Za vsako leto izračunajte, koliko odstotkov več je bilo dečkov kot deklic, in to prikažite s frekvenčnim poligonom.

12. Trgovca Miha in Janez sta v zadnjem tednu prodala enako število koles. Spodnja tabela prikazuje število prodanih koles po posameznih dnevih, ki jih je v zadnjem tednu uspel prodati trgovec Miha, spodnji frekvenčni kolač pa prikazuje delež prodanih koles po posameznih dnevih tega tedna, ki jih je uspel prodati trgovec Janez.



Število prodanih koles po posameznih dnevih – Miha

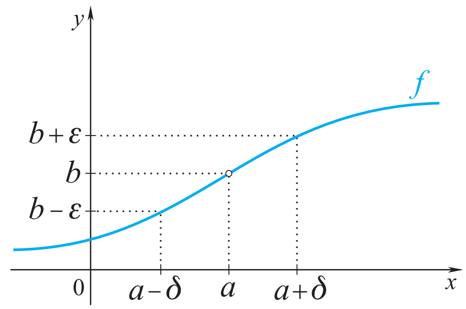
Ponedeljek	5
Torek	6
Sreda	11
Četrtek	x
Petek	13

Za Miho in Janeza izračunajte število prodanih koles za posamezen dan, in to prikažite s tabelo in s frekvenčnim poligonom, če veste, da sta v torek prodala enako število koles.

26. ODVOD

Limita funkcije

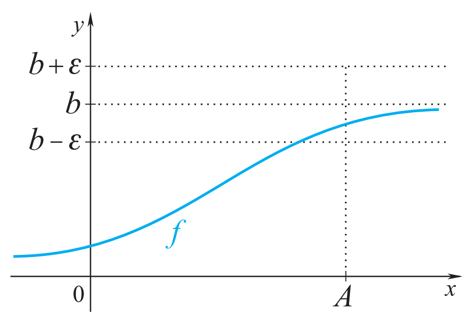
Limita funkcije: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, če za vsako pozitivno realno število ε obstaja pozitivno realno število δ, tako da iz $|x - a| < \delta$ in $x \neq a$ sledi $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Pravila za računanje limite:

1. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$; $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Limita v neskončnosti: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, če za vsako pozitivno realno število ε obstaja tako veliko pozitivno realno število A, da za $x > A$ velja $|f(x) - b| < \varepsilon$.



Če je $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ ali $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, potem rečemo, da je premica $y = b$ **vodoravna asimptota** za graf funkcije f.

Za dani funkciji $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$ in $g(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 3x + 1}$ zapišimo enačbi vodoravnih asimptot.

Ker sta pri funkciji f stopnji polinomov v števcu in imenovalcu enaki, kvocient vodilnih koeficientov (glej poglavje Racionalne funkcije) določa enačbo asimptote; $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2$, zato je premica z enačbo $y = 2$ vodoravna asimptota za graf funkcije f.

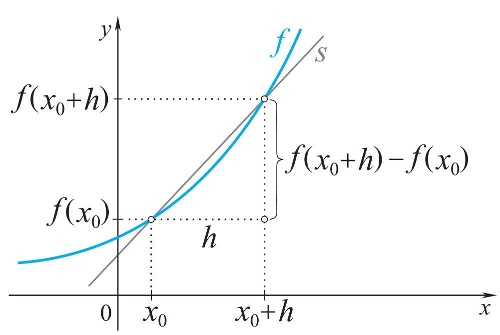
Ker je pri funkciji g stopnja polinoma v števcu manjša od stopnje polinoma v imenovalcu, je $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - 2}{x^2 + 3x + 1} = 0$, zato je premica z enačbo $y = 0$ vodoravna asimptota za graf funkcije g.

Definicija in geometrijski pomen odvoda

Naj bo $f\colon A \to \mathbb{R}$; $A \subset \mathbb{R}$ in točki x_0, $x_0 + h \in A$.

Diferenčni količnik funkcije f v točki x_0: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Diferenčni količnik funkcije f v točki x_0 je enak smernemu koeficientu sekante na graf funkcije f skozi točki z abscisama x_0 in $x_0 + h$.



Dana je funkcija $f(x) = x^2$.

a) Zapišimo diferenčni količnik funkcije v točki $x_0 = 1$.

b) Zapišimo enačbo sekante na graf funkcije f v točkah z abscisama $x_0 = 1$ in $x_1 = 3$ in enačbo sekante na graf funkcije f v točkah z abscisama $x_0 = 1$ in $x_1 = 2$.

c) V isti koordinatni sistem narišimo graf funkcije f in obe sekanti.

Zapišemo $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$.

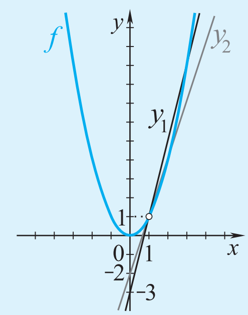
Za sekanto v točkah z abscisama $x_0 = 1$ in $x_1 = 3$ je $h = 2$ in smerni koeficient $k_1 = 2 + h = 2 + 2 = 4$.

Če izračunamo $y_0 = f(x_0) = f(1) = 1$ in v $y - y_0 = k_1(x - x_0)$ vstavimo podatke $y - 1 = 4(x - 1)$, dobimo enačbo sekante $y_1 = 4x - 3$.

Za sekanto v točkah z abscisama $x_0 = 1$ in $x_1 = 2$ je $h = 1$ in smerni koeficient $k_1 = 2 + 1 = 2 + 1 = 3$.

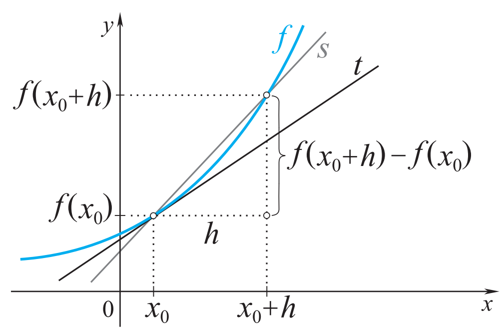
Če v $y - y_0 = k_1(x - x_0)$ vstavimo podatke $y - 1 = 3(x - 1)$, dobimo enačbo sekante $y_2 = 3x - 2$.

Narišemo sliko.



Definicija odvoda:

Če obstaja limita $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, jo imenujemo **odvod funkcije f v točki x_0** in pišemo $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.



Če je funkcija f **odvedljiva v vsaki točki** definicijskega območja A, pravimo, da je f **odvedljiva** funkcija. V tem primeru dobimo novo funkcijo $f': A \to \mathbb{R}$, ki jo imenujemo **odvod** funkcije f.

Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = x^2$ in izračunajmo $f'(3)$.

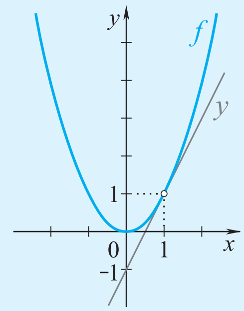
Zapišemo $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} =$
$= \lim\limits_{h \to 0}(2x+h) = 2x$ in izračunamo $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Geometrijski pomen odvoda:

Odvod funkcije f v točki z absciso x_0 je enak **smernemu koeficientu tangente** na graf funkcije **f v točki z absciso x_0**. Od tod lahko zapišemo **enačbo tangente** na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Zapišimo enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = x^2$ v točki $x_0 = 1$ in v isti koordinatni sistem narišimo graf funkcije f in iskano tangento.



Zapišemo $y_0 = f(x_0) = f(1) = 1$.

Ker je $f'(x) = 2x$, je smerni koeficient tangente enak $k = f'(x_0) = f'(1) = 2$.

Če v $y - y_0 = k_1(x - x_0)$ vstavimo podatke $y - 1 = 2(x - 1)$, dobimo enačbo tangente $y = 2x - 1$.

Narišemo sliko.

Pravila za odvajanje vsote, razlike, produkta in kvocienta funkcij in produkta funkcije s številom:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $g \neq 0$
4. $(k \cdot f)' = k \cdot f'$; k je konstanta

Odvodi elementarnih funkcij:

1. $(k)' = 0$; k je konstanta
2. $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$; $r \in \mathbb{R}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $\cos x \neq 0$
6. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; $\sin x \neq 0$
7. $(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$; $k \in \mathbb{R}$
8. $(\ln|kx|)' = \frac{1}{x}$; $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
9. $(a^x)' = a^x \ln a$

1. Izračunajmo odvode danih funkcij.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 4$

$f'(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = 3x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x - 1$

$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 1 = 12x^3 - 2x^2 + 1$

c) $f(x) = x^{-2} - \frac{1}{x}$

$f'(x) = (x^{-2} - x^{-1})' = -2x^{-3} - (-1) \cdot x^{-2} = -2x^{-3} + x^{-2}$

č) $f(x) = \sqrt{x} + 3 \cdot \sqrt[3]{x}$

$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}} + 3 \cdot x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 3 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f(x) = x^2(x - 1)$

$f'(x) = 2x(x - 1) + x^2 \cdot x = 2x^2 - 2x + x^3 = x^3 + 2x^2 - 2x$

e) $f(x) = (3x + 1)(x^2 - x)$

$f'(x) = 3(x^2 - x) + (3x + 1)(2x - 1) = 3x^2 - 3x + 6x^2 - 3x + 2x - 1 = 9x^2 - 4x - 1$

f) $f(x) = \frac{1 - x}{3x + 1}$

$f'(x) = \frac{-1(3x + 1) - (1 - x) \cdot 3}{(3x + 1)^2} = \frac{-3x - 1 - 3 + 3x}{(3x + 1)^2} = -\frac{4}{(3x + 1)^2}$

g) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 3}$

$f'(x) = \frac{2(x^2 - 3) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6 - 4 \cdot x^2}{(x^2 - 3)^2} = \frac{-2x^2 - 6}{(x^2 - 3)^2}$

2. Izračunajmo odvode funkcij.

a) $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2e^{2x}$

b) $f(x) = \ln(3x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x^2 + 2^x$

$f'(x) = 2x + 2^x \ln 2$

č) $f(x) = 2 \sin x - \cos x$

$f'(x) = 2 \cos x - (-\sin x) = 2 \cos x + \sin x$

d) $f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = (2 \sin x \cos x)' = 2 \cos x \cdot \cos x + 2 \sin x \cdot (-\sin x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x$

e) $f(x) = (1 - \cos x) \sin x + x$

$f'(x) = -(-\sin x) \sin x + (1 - \cos x) \cos x + 1 = \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x + 1 = \sin^2 x + \cos x + \sin^2 x =$
$= 2 \sin^2 x + \cos x$

f) $f(x) = \frac{\sin x - x}{\cos x + 1}$

$f'(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1) - (\sin x - x)(-\sin x)}{(\cos x + 1)^2} = \frac{\cos^2 x - 1 + \sin^2 x - x \sin x}{(\cos x + 1)^2} = \frac{-x \sin x}{(\cos x + 1)^2}$

g) $f(x) = \cot x(\tan x - 1)$

$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}(\tan x - 1) + \cot x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right) + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\sin x \cos x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x \cos x} =$
$= \frac{1}{\sin^2 x}$

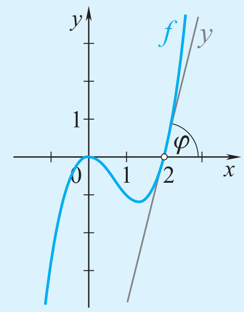
3. Zapišimo enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ v točki z absciso $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Zapišemo $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ in izračunamo $y_0 = f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$ ter odvod $f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$.

Ker je $k = f'(-\frac{1}{2}) = -x^{-2} = \frac{-1}{(-\frac{1}{2})^2} = -4$, lahko iz $y - y_0 = k_1(x - x_0)$ zapišemo $y + 2 = -4(x + \frac{1}{2})$

in dobimo enačbo tangente $y = -4x - 4$.

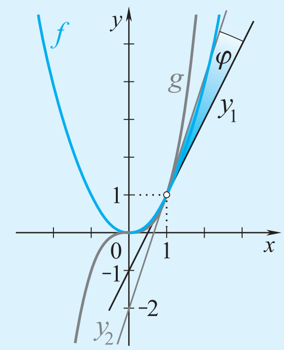
4. Narišimo graf funkcije $f(x) = x^3 - 2x^2$ in izračunajmo kot, pod katerim graf funkcije seka abscisno os v $T(x_0 > 0, 0)$.



Graf funkcije f seka abscisno os v ničlah.
Zato iz $f(x) = x^2(x - 2)$ dobimo ničle $x_{1,2} = 0$ in $x_3 = x_0 = 2$.

Izračunamo $f\,'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x = 3x^2 - 4x$.
Iz $k = f\,'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4$ in $\tan\varphi = k$
zapišemo $\tan\varphi = 4$ in izračunamo kot $\varphi = 75°58'$.

5. Zapišimo koordinate presečišč in izračunajmo kota, pod katerima se sekata grafa funkcij $f(x) = x^2$ in $g(x) = x^3$.



Narišemo krivulji in iz grafa razberemo presečišči $P_1(0, 0)$ in $P_2(1, 1)$.

Izračunamo odvoda $f\,'(x) = 2x$ in $g'(x) = 3x^2$.
V točki $P_1(0, 0)$ je $f\,'(0) = 0$ in $g'(0) = 0$. Grafa funkcij f in g se dotikata, kot med njima je $\varphi = 0°$.
V točki $P_2(1, 1)$ je $f\,'(1) = 2$ in $g'(1) = 3$. Iz $\tan\varphi = \left|\frac{3-2}{1+3\cdot 2}\right| = \frac{1}{7}$ dobimo kot med krivuljama $\varphi = 8°8'$.

Odvod sestavljene funkcije:

Če je funkcija f odvedljiva v točki x in funkcija g odvedljiva v točki $f(x)$, potem je sestavljena funkcija $g \circ f$ odvedljiva v točki x in je
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f\,'(x)$.

1. Izračunajmo odvode funkcij.

a) $f(x) = (3x + 1)^2$

$f\,'(x) = 2 \cdot (3x + 1) \cdot 3 = 6(3x + 1)$

b) $f(x) = (1 - x)^3$

$f\,'(x) = 3 \cdot (1 - x)^2(-1) = -3(1 - x)^2$

c) $f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt[3]{6x - 1}$

$$f\,'(x) = \left((2x)^{\frac{1}{2}} - (6x - 1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot (6x - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6 = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}$$

č) $f(x) = \frac{(2x - 1)^2}{x^2 - 1}$

$$f\,'(x) = \frac{2(2x-1)\cdot 2(x^2-1) - (2x-1)^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{4(2x-1)(x^2-1) - 2x(2x-1)^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2(2x-1)(2(x^2-1) - x(2x-1))}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2(2x-1)(2x^2 - 2 - 2x^2 + x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2(2x-1)(x-2)}{(x^2-1)^2}$$

d) $f(x) = \ln(x - 2)$

$f\,'(x) = \frac{1}{x - 2}$

e) $f(x) = \cos 2x$

$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 = -2\sin 2x$

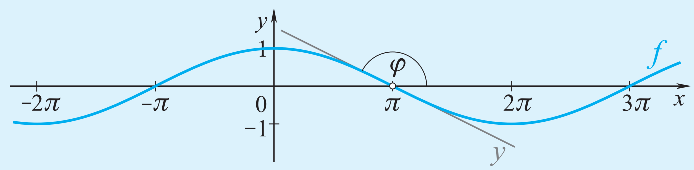
f) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

$$f'(x) = \frac{2\cos 2x(1+\cos 2x) - \sin 2x(-2\sin 2x)}{(1+\cos 2x)^2} = \frac{2\cos 2x + 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x}{(1+\cos 2x)^2} = \frac{2\cos 2x + 2}{(1+\cos 2x)^2} = \frac{2(\cos 2x + 1)}{(1+\cos 2x)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+\cos 2x}$$

2. Narišimo graf funkcije $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ in izračunajmo naklonski kot tangente na graf funkcije f v točki $T(\pi, 0)$.

Narišemo sliko.



Izračunamo odvod $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

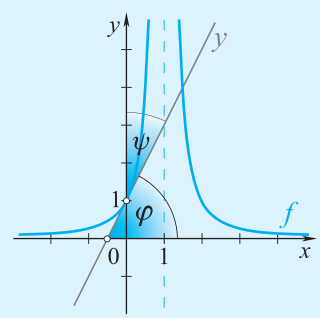
in smerni koeficient tangente

$k = f'(\pi) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$.

Iz $\tan\varphi_1 = -\frac{1}{2}$ dobimo $\varphi_1 = -26°34'$ in naklonski kot tangente $\varphi = 180° - 26°34' = 153°26'$.

3. Narišimo graf funkcije $f(x) = (x-1)^{-2}$ in izračunajmo kot, pod katerim graf funkcije seka ordinatno os.

Narišemo graf funkcije f.



Graf funkcije seka ordinatno os v točki $(0, f(0)) = (0, 1)$.

Izračunamo $f'(x) = -2(x-1)^{-3}$ in $k = f'(0) = -2(0-1)^{-3} = (-2)(-1) = 2$.

Iz $\tan\varphi = 2$ izračunamo naklonski kot tangente na graf funkcije v presečišču z ordinatno osjo $\varphi = 63°26'$.

Kot med grafom funkcije f in ordinatno osjo je komplementaren temu kotu, zato je $\psi = 90° - \varphi = 90° - 63°26' = 26°34'$.

4. Poiščimo točko, v kateri je tangenta na graf funkcije $f(x) = (2x-1)^2$ vzporedna premici z enačbo $y = 12x$.

Izračunamo odvod $f'(x) = 2(2x-1)\cdot 2 = 4(2x-1)$.

V dotikališču $T(x_0, y_0)$ grafa funkcije f in tangente je smerni koeficient tangente enak smernemu koeficientu vzporednice: $k = 12$.

Zapišemo enačbo $4(2x_0 - 1) = 12$,

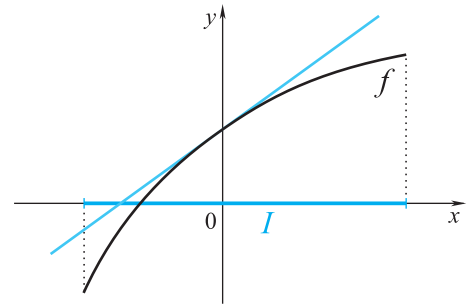
jo preoblikujemo v $2x_0 - 1 = 3$ in rešimo $x_0 = 2$.

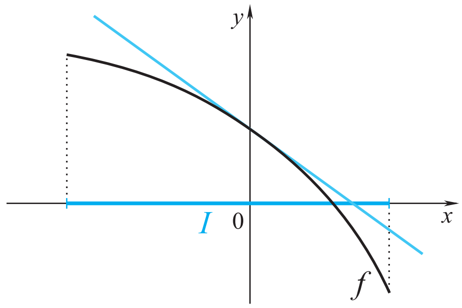
Izračunamo še $y_0 = f(x_0) = f(2) = (2\cdot 2 - 1)^2 = 3^2 = 9$ in zapišemo $T(2, 9)$.

Uporaba prvega odvoda. Ekstremi funkcij

Če je na intervalu *I* odvod *f* ' povsod pozitiven, je funkcija *f* na intervalu *I* naraščajoča.

Če je na intervalu *I* odvod *f* ' povsod negativen, je funkcija *f* na intervalu *I* padajoča.



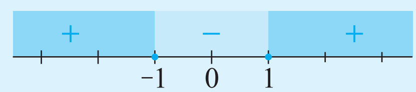


1. Zapišimo intervale, na katerih je polinom $p(x) = x^3 - 3x$ naraščajoča funkcija, in intervale, na katerih je padajoča funkcija.

Izračunamo $p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.

Ničli odvoda sta $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$.

Izračunamo $f'(0) = -3 < 0$, narišemo številsko premico in zapišemo predznak odvoda.



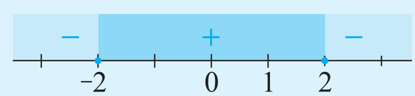
Polinom je naraščajoča funkcija na $(-\infty, -1)$ in $(1, \infty)$, padajoča pa na $(-1, 1)$.

2. Izračunajmo intervale, na katerih je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ naraščajoča, in intervale, na katerih je padajoča.

Izračunamo $f'(x) = \frac{1(x^2 + 4) - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{(2 - x)(2 + x)}{(x^2 + 4)^2}$.

Ničli odvoda sta $x_1 = 2$ in $x_2 = -2$.

Izračunamo $f'(0) = \frac{4 - 0^2}{(0^2 + 4)^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} > 0$, narišemo številsko premico in zapišemo predznak odvoda.



Funkcija f je padajoča na $(-\infty, -2)$ in $(2, \infty)$ ter naraščajoča na $(-2, 2)$.

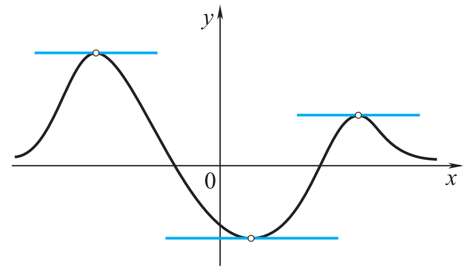
3. Zapišimo definicijsko območje funkcije $f(x) = 2x\sqrt{x}$ in pokažimo, da je funkcija f naraščajoča na $(0, \infty)$.

Ker je kvadratni koren definiran le za nenegativna realna števila, je $D_f = [0, \infty)$.

Zapišemo $f(x) = 2x\sqrt{x} = 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{2}}$ in izračunamo $f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}$.

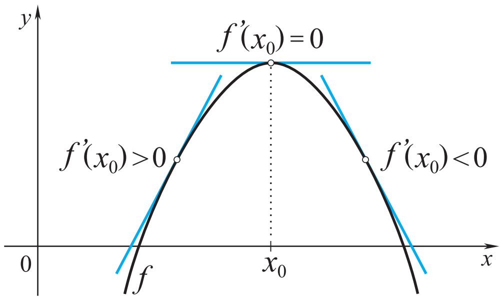
Izračunamo $f'(1) = 3\sqrt{1} = 3 > 0$. Ker je ničla odvoda le $x = 0$, je odvod f' na celotnem definicijskem območju pozitiven, zato je funkcija f na $(0, \infty)$ naraščajoča.

Točko x_0 imenujemo **stacionarna točka** funkcije f, če je $f\,'(x_0) = 0$. **V stacionarnih točkah je tangenta** na graf funkcije f **vodoravna**. Če ima funkcija f v notranji točki definicijskega območja x_0 **lokalni ekstrem**, potem je $\boldsymbol{f\,'(x_0) = 0}$ (potrebni pogoj za lokalni ekstrem). **Lokalne ekstreme odvedljive funkcije iščemo med ničlami prvega odvoda**.

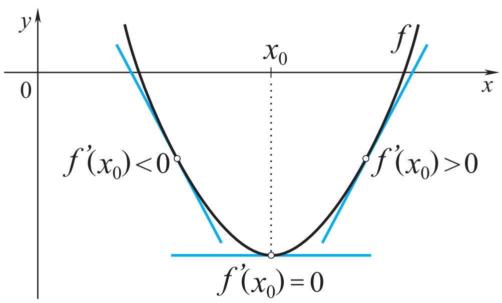


Naj bo $f\,'(x_0) = 0$. Velja:

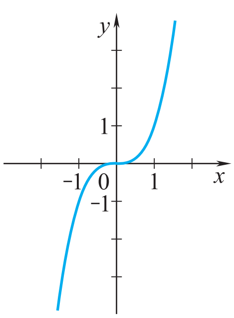
1. Če je v dovolj majhni okolici točke x_0 **levo** od x_0 **odvod $f\,'$ pozitiven**, **desno** od x_0 pa **odvod $f\,'$ negativen**, potem ima funkcija f **v točki x_0 lokalni maksimum** (zadostni pogoj za lokalni maksimum).

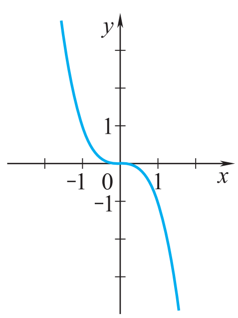


2. Če je v dovolj majhni okolici točke x_0 **levo** od x_0 **odvod $f\,'$ negativen**, **desno** od x_0 pa **odvod $f\,'$ pozitiven**, potem ima funkcija f **v točki x_0 lokalni minimum** (zadostni pogoj za lokalni minimum).



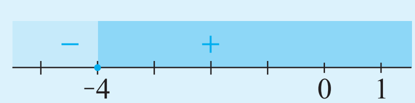
3. Če odvod $f\,'$ po prehodu skozi točko x_0 **ne spremeni predznaka**, potem funkcija f v točki x_0 **nima ekstrema**.





1. Izračunajmo teme $T(p, q)$ kvadratne funkcije $f(x) = x^2 + 8x + 10$.

Izračunamo $f\,'(x) = 2x + 8$ in poiščemo stacionarno točko (ničlo odvoda). Iz $2x + 8 = 0$ dobimo $p = x_0 = -4$.
Ordinata temena je $q = f(p) = f(-4) = (-4)^2 + 8(-4) - 10 = 16 - 32 + 10 = -6$.
Izračunamo $f\,'(0) = 2 \cdot 0 + 8 = 8 > 0$ in s številsko premico ugotovimo predznak odvoda.



Kvadratna funkcija f ima teme v točki $T(-4, -6)$ (lokalni minimum).

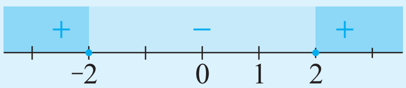
2. Poiščimo lokalne ekstreme polinoma $p(x) = x^3 - 12x$.

Izračunamo $p'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$.

Stacionarni točki sta $x_1 = 2$ in $x_2 = -2$.

Pripadajoči ordinati sta $y_1 = p(x_1) = p(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$
in $y_2 = p(x_2) = p(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = -8 + 24 = 16$.

Izračunamo $p'(0) = -12 < 0$, narišemo številsko premico in zapišemo predznak odvoda.



Ker je levo od $x_2 = -2$ odvod pozitiven in desno od $x_2 = -2$ negativen, ima polinom p v točki $(-2, 16)$ lokalni maksimum.

Ker je levo od $x_1 = 2$ odvod negativen in desno od $x_1 = 2$ pozitiven, ima polinom p v točki $(2, -16)$ lokalni minimum.

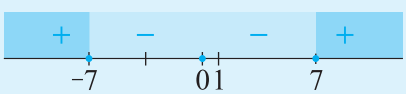
3. Poiščimo lokalne ekstreme racionalne funkcije $f(x) = \frac{x^2 + 49}{7x}$.

Izračunamo $f'(x) = \frac{2x \cdot 7x - (x^2 + 49) \cdot 7}{49x^2} = \frac{14x^2 - 7x^2 - 343}{49x^2} = \frac{7x^2 - 343}{49x^2} = \frac{7(x^2 - 49)}{49x^2} = \frac{(x - 7)(x + 7)}{7x^2}$.

Stacionarni točki sta $x_1 = 7$ in $x_2 = -7$.

Pripadajoči ordinati sta $y_1 = f(x_1) = f(7) = \frac{7^2 + 49}{7 \cdot 7} = 2$ in $y_2 = f(x_2) = f(-7) = \frac{(-7)^2 + 49}{7(-7)} = -2$.

Izračunamo $f'(1) = -\frac{48}{7} < 0$, narišemo številsko premico in zapišemo predznak odvoda.



Ker je levo od $x_2 = -7$ odvod pozitiven in desno od $x_2 = -7$ negativen, ima racionalna funkcija f v točki $(-7, -2)$ lokalni maksimum.

Ker je levo od $x_1 = 7$ odvod negativen in desno od $x_1 = 7$ pozitiven, ima racionalna funkcija f v točki $(7, 2)$ lokalni minimum.

4. Ugotovimo, ali ima polinom $p(x) = x^4 - x^3$ v točki $(0, 0)$ lokalni minimum.

Izračunamo $p'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$.

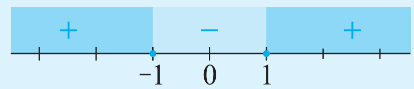
Ničle odvoda so $x_{1,2} = 0$ in $x_3 = \frac{3}{4}$.

Število 0 je stacionarna točka polinoma p. Vendar, ker je dvojna ničla odvoda p', odvod p' v točki 0 ne spremeni predznaka. Tako polinom p v točki $(0, 0)$ nima lokalnega minimuma.

5. Poiščimo ničle, začetno vrednost in narišimo graf polinoma $p(x) = x^3 - 3x + 2$.

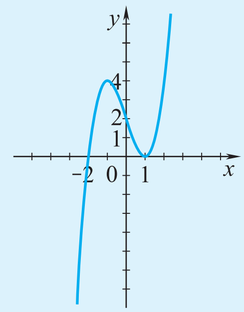
Ničle poiščemo s Hornerjevim algoritmom. Možnosti za racionalne ničle so: ± 1, ± 2.

	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	0
1		1	2	
	1	2	0	
−2		−2		
	1	0		



Ničle so $x_{1,2} = 1$ in $x_3 = -2$.
Začetna vrednost je $p(0) = 2$.
Izračunamo $p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.
Stacionarni točki sta $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$.
Pripadajoči ordinati sta $y_1 = p(x_1) = p(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$
in $y_2 = p(x_2) = p(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4$.
Izračunamo $p'(0) = -3 < 0$, narišemo številsko premico in zapišemo predznak odvoda.

V točki $(-1, 4)$ ima polinom p lokalni maksimum, v točki $(1, 0)$ pa lokalni minimum.
Narišemo graf polinoma.

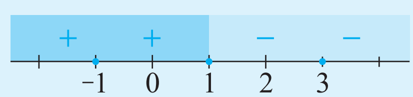


6. Poiščimo ničle, začetno vrednost in narišimo graf funkcije $f(x) = \dfrac{12}{x^2 - 2x - 3}$.

Ničel nima racionalna funkcija.
Poli racionalne funkcije so ničle imenovalca $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$.
Pola sta $x_1 = 3$ in $x_2 = -1$.
Začetna vrednost je $f(0) = -4$.

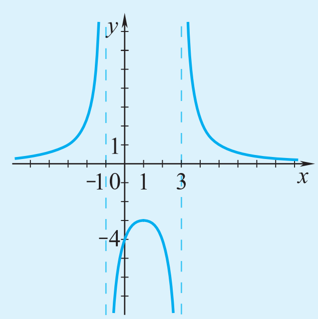
Izračunamo $f'(x) = \dfrac{0 \cdot (x^2 - 2x - 3) - 12(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 3)^2} = \dfrac{-24x + 24}{(x^2 - 2x - 3)^2} = \dfrac{-24(x - 1)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$.

Stacionarna točka je $x_1 = 1$.
Pripadajoča ordinata je $y_1 = f(x_1) = f(1) = \dfrac{12}{1^2 - 2 \cdot 1 - 3} = \dfrac{12}{-4} = -3$.



Izračunamo $f'(0) = \frac{8}{3} > 0$, narišemo številsko premico in zapišemo predznak odvoda.

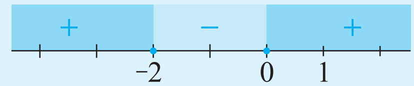
V točki $(1, -3)$ ima racionalna funkcija f lokalni maksimum.
Narišemo graf racionalne funkcije.



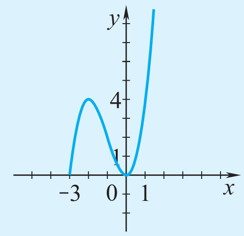
Globalne ekstreme funkcije *f* na intervalu $[a, b]$ poiščemo tako, da najprej poiščemo lokalne ekstreme funkcije f na danem intervalu, nato izračunamo vrednosti funkcije f v krajiščih danega intervala in jih primerjamo z vrednostmi funkcije v ekstremnih točkah.

Poiščimo točke, v katerih funkcija $f(x) = x^3 + 3x^2$ na intervalu $[-3, 3]$ doseže največjo oz. najmanjšo vrednost.

Izračunamo $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$.
Stacionarni točki sta $x_1 = 0$ in $x_2 = -2$.
Izračunamo $f'(1) = 9 > 0$, narišemo številsko premico in zapišemo predznak odvoda.



Ordinati ekstremov sta $y_1 = f(0) = 0$ in $y_2 = f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 = -8 + 12 = 4$.
V točki $(0, 0)$ ima funkcija f lokalni minimum, v točki $(-2, 4)$ pa lokalni maksimum.
Izračunamo še
$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 = -27 + 27 = 0$ in $f(3) = (3)^3 + 3(3)^2 = 27 + 27 = 54$.
Na intervalu $[-3, 3]$ doseže funkcija f največjo vrednost za $x = 3$, najmanjšo vrednost pa za $x = 0$ ali $x = -3$.



1. Zapišite naklonske kote premic.
a) $y = x$
b) $y = -x$
c) $y = 3x - 2$
č) $y = -2x + 1$
d) $y = 2$
e) $x = 1$
f) $2x - 3y + 1 = 0$

2. V isti koordinatni sistem narišite simetralo lihih kvadrantov in premico z enačbo $x + 2y - 6 = 0$ ter izračunajte njuno presečišče in kot med njima.

3. Izračunajte presečišče in kot med premicama z enačbama $-3x + y - 3 = 0$ in $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$. Narišite sliko.

4. V isti koordinatni sistem skozi točko $T(2, 0)$ narišite premici z naklonskima kotoma $135°$ in $63°26'6''$ in zapišite njuni enačbi. Kolikšna je ploščina trikotnika, ki ga dani premici oklepata z ordinatno osjo?

5. Zapišite enačbo sekante na graf funkcije $f(x) = x^2 + 2x$ v točkah z abscisama $x_1 = -1$ in $x_2 = 2$. V isti koordinatni sistem narišite graf funkcije f in sekanto.

6. Zapišite diferenčni količnik funkcije $f(x) = x^3$ v točki $x_0 = 1$. Koliko je $f'(1)$?

7. Zapišite diferenčni količnik funkcije $f(x) = 2x^2 + x$ v poljubni točki x in izračunajte $f'(x)$. Koliko je $f'(-2)$?

8. Izračunajte po definiciji odvoda funkcij.
a) $f(x) = x^2 - 1$
b) $f(x) = x^3$

9. Zapišite odvode funkcij.
a) $f(x) = \frac{x^2}{6} - 3x + 2$
b) $f(x) = x^4 - \sqrt{2}x^3 + 0{\cdot}5x$
c) $f(x) = ax^3 + b$
č) $f(x) = x^{-2} + 5$
d) $f(x) = 1 - x^{-3}$
e) $f(x) = \frac{2}{x}$
f) $f(x) = \frac{1}{(2x)^2}$
g) $f(x) = (3x - 1)(2x + 5)$
h) $f(x) = (x - 2)(x^2 + 5x + 2)$
i) $f(x) = 5x^2(x - x^2)$
j) $f(x) = (x - 3)^2$
k) $f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}$
l) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$
m) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

10. Izračunajte odvod funkcije $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 1}$. Koliko je $f'(-2)$?

11. Dana je funkcija $f(x) = x^3(x + 4)$. Izračunajte odvod funkcije f. Za kateri x bo $f'(x) = 0$?

12. Izračunajte odvod funkcije $f(x) = kx + n$. Za katero število k bo $f'(2) = 4$?

13. Izračunajte odvod kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Za kateri števili a in b bo $f'(1) = 3$ in $f'(-1) = -5$?

14. Telo se giblje po premici, tako da je $s(t) = 5t + t^2$, pri čemer je čas t merjen v sekundah, opravljena pot $s(t)$ pa v metrih. Zapišite predpis, ki opisuje hitrost telesa v v odvisnosti od časa t, če je hitrost telesa v enaka odvodu poti s po času t. Kolikšna je hitrost telesa v času $t_0 = 5$ s.

15. Zapišite odvode funkcij.

a) $f(x) = 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x^2}$
b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
c) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[5]{x^2}}$
č) $f(x) = x^2\sqrt{x}$
d) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$
e) $f(x) = \sin x + 2\cos x + 2$
f) $f(x) = \tan x - x$
g) $f(x) = \sin x\,(1 - \cos x)$
h) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$
i) $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$

16. Dana je funkcija $f(x) = (2x - 1)^2$. Poenostavite predpis za funkcijo f in izračunajte njen odvod. Za kateri x bo $f'(x) = 4$?

17. Dana je funkcija $f(x) = a(x^2 - 3x - 1)$. Izračunajte odvod funkcije f. Za kateri a bo $f'(4) = -10$?

18. Poenostavite predpis za funkcijo $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ in ugotovite, ali velja $f'(x) = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}} + \frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$.

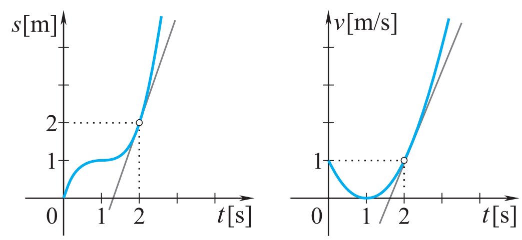
19. Dana je funkcija $f(x) = \frac{\tan x - 1}{\tan x}$. Izračunajte $f'(x)$ in $f'(\frac{\pi}{3})$.

20. Izračunajte $f'(\frac{\pi}{4})$, če je $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$.

21. Oddaljenost s od izhodišča koordinatnega sistema telesa, ki se giblje po ravni črti, je t sekund po začetku gibanja enaka $s = 6t - t^2$ metrov.

a) Izračunajte oddaljenost in hitrost telesa v času $t = 2$ s.
b) Koliko sekund po začetku gibanja bo hitrost v telesa enaka 0? Koliko metrov je takrat telo odmaknjeno od izhodišča?

22. Telo se giblje po ravni črti. Prvi graf prikazuje opravljeno pot telesa s v odvisnosti od časa t in tangento na graf v času $t = 2$ s, drugi graf pa hitrost telesa v v času t in tangento na graf v času $t = 2$ s.



a) Kaj določa smerni koeficient tangente na graf poti s v poljubni točki grafa in kaj določa smerni koeficient tangente na graf hitrosti v v poljubni točki grafa?
b) Iz grafov razberite, kolikšna je hitrost telesa v v času $t = 2$ s in kolikšen pospešek telesa a v času $t = 2$ s?

23. Narišite graf funkcije $f(x) = x^2 - 1$ in zapišite enačbo tangente na graf funkcije f v točki z absciso $x_0 = 2$.

24. Narišite graf funkcije $f(x) = x^{-1} - 1$ in zapišite enačbo tangente na graf funkcije f v presečišču z abscisno osjo.

25. Zapišite odvode sestavljenih funkcij.

a) $f(x) = (4x - 1)^3$
b) $f(x) = (2x + 3)^4$
c) $f(x) = \frac{1}{4x - 3}$
č) $f(x) = (3 - x^2)^{-1}$
d) $f(x) = \sqrt{2x}$
e) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$
f) $f(x) = x\sqrt{1 - x}$
g) $f(x) = \sqrt[3]{1 - 3x}$
h) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x}}$

26. Izračunajte odvod funkcije $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$. Koliko je $f'(-6)$?

27. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$. Izračunajte odvod funkcije f. Za kateri x bo $f'(x) = \frac{1}{4}$?

28. Zapišite odvode sestavljenih funkcij.

a) $f(x) = \sin(3x)$
b) $f(x) = \cos 2x$
c) $f(x) = \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2})$
č) $f(x) = e^{3x}$
d) $f(x) = \frac{1-e^x}{e^x}$
e) $f(x) = 3^x + x^3$
f) $f(x) = 2^{1-x}$
g) $f(x) = \ln x + \ln(5x) + 5x + 5$
h) $f(x) = (1-x)\ln x$
i) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

29. Dana je funkcija $f(x) = \ln \frac{x}{e^x}$. Izračunajte $f'(x)$. Koliko je $f'(1)$?

30. Ugotovite, ali je $(\frac{\tan x - \cot x}{4})' = \frac{1}{\sin^2 2x}$.

31. Dana je funkcija $f(x) = A \sin 2x$; $A \in \mathbb{R}$. Za katero realno število A bo $f'(\frac{\pi}{12}) = 3$?

32. Zapišite enačbo tangente na graf dane funkcije v točki T_0.

a) $f(x) = x^2 - 5x - 2$; $T_0(2, y_0)$
b) $f(x) = x(x+1)$; $T_0(2, y_0)$
c) $f(x) = \sqrt{x}$; $T_0(4, y_0)$
č) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $T_0(-1, y_0)$

33. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$.

a) Zapišite definicijsko območje funkcije f.
b) Izračunajte enačbo tangente na graf funkcije v točki, v kateri graf funkcije f seka os x.

34. Zapišite enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 - 1$ v točki $T(2, y_1)$.

35. Dan je polinom $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - x + 2$. Zapišite presečišče grafa polinoma z ordinatno osjo in izračunajte enačbo tangente na graf polinoma v presečišču z ordinatno osjo. Enačbo tangente zapišite v vseh treh oblikah.

36. Narišite graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 3x - 4$ in zapišite enačbo tangente na graf funkcije f v točki A $(x < 0, 0)$.

37. Narišite graf funkcije $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{x} - 1$ in izračunajte smerni koeficient tangente na graf funkcije f v presečišču z abscisno osjo. Kolikšen je naklonski kot dane tangente?

38. Zapišite enačbo tiste tangente, ki se krivulje $y = \frac{x+2}{1-x}$ dotika v presečišču z ordinatno osjo.

39. V kateri točki parabole $y = x^2$ ima tangenta na parabolo smerni koeficient enak -6?

40. Dana je funkcija $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \tan x$. Narišite graf funkcije f in izračunajte, za katere x imajo tangente na graf funkcije f smerni koeficient 4.

41. V kateri točki je tangenta na krivuljo z enačbo $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ vzporedna premici $y = -x + 3$?

42. Ali obstaja na grafu funkcije $f(x) = (2x + \frac{5}{4})^2$ točka, v kateri bo tangenta vzporedna simetrali lihih kvadrantov?

43. Zapišite dotikališči in enačbi tangent na graf funkcije $f(x) = x^3 - 2x + 1$, ki sta vzporedni premici $x - y - 2 = 0$.

44. Za katero realno število b bo premica $y = -4x - 3$ tangenta na graf funkcije $f(x) = x^2 + b$? Zapišite dotikališče tangente.

45. Zapišite enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{3-x}{x-1}$, ki ima naklonski kot $135°$. Zapišite še koordinati dotikališča tangente.

46. Pokažite, da je premica z enačbo $y = 2x + 2$ tangenta na graf funkcije $f(x) = 1 + e^{2x}$ v točki $T(0, y_0)$.

47. Točka $T_0(1, y_0)$ leži na grafu funkcije $f\colon x \mapsto x - \ln x$. Izračunajte y_0 in zapišite enačbo tangente na graf funkcije f v točki T_0.

48. Za katero realno število a bo premica s smernim koeficientom $k = -4$ v točki $D(2, y_0)$ tangenta na parabolo $y = a(x-4)^2 - 3$? Zapišite koordinati dotikališča D.

49. Dana je funkcija $f(x) = (x-1)^{-2}$.
a) Narišite graf funkcije f.
b) Izračunajte naklonski kot tangente na graf funkcije f v presečišču z ordinatno osjo.

50. Narišite graf funkcije $f(x) = x^3 + 1$ in izračunajte naklonski kot tangente na graf funkcije f v presečišču z abscisno osjo.

51. Narišite graf funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ in izračunajte kot, pod katerim graf funkcije f seka abscisno os. Kot zapišite na stotinko stopinje natančno.

52. Na intervalu $[0, 2\pi]$ narišite graf funkcije $f(x) = 1 + \sin x$ in izračunajte $x \in [0, 2\pi]$, v katerem ima tangenta na graf funkcije smerni koeficient $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Rezultat zaokrožite na 4 decimalna mesta.

53. Narišite graf funkcije $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ na intervalu $[0, \pi]$ in na minuto natančno izračunajte kot, pod katerim graf funkcije seka abscisno os.

54. Narišite graf funkcije $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ in na minuto natančno izračunajte kot, pod katerim graf funkcije seka ordinatno os.

55. Narišite graf funkcije $f(x) = 3^x - 1$ in na minuto natančno izračunajte kot, pod katerim graf funkcije seka abscisno os.

56. Dana je funkcija $f(x) = -2\ln x$.
a) Narišite graf funkcije f.
b) V kateri točki in pod kolikšnim kotom graf funkcije f seka abscisno os?
c) V kateri točki grafa funkcije f je tangenta na graf vzporedna simetrali sodih kvadrantov?

57. Dana je funkcija $f(x) = (x+2)^{-1}$.
a) Narišite graf funkcije f.
b) Izračunajte, pod katerim kotom graf funkcije f seka ordinatno os.

58. Narišite graf funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ in izračunajte presečišče in kot, pod katerim graf funkcije seka abscisno os.

59. Natančno izračunajte presečišči s koordinatnima osema in na minuto natančno kota, pod katerim graf funkcije $f(x) = x^3 - 2$ seka koordinatni osi.

60. Dana je parabola $y = x^2$.
a) V kateri točki in pod katerim kotom seka premica $x = 3$ dano parabolo?
b) V katerih točkah in pod katerima kotoma seka premica $y = 4$ dano parabolo?

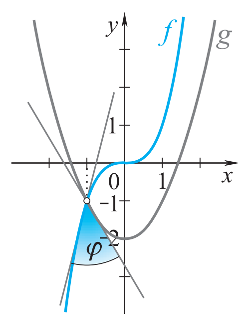
61. Izračunajte presečišči in kota, pod katerim premica $y = x + 3$ seka parabolo $y = x^2 + 1$.

62. Izračunajte presečišči in kota, pod katerim se sekata paraboli z enačbama $y = \frac{x^2}{2}$ in $y = \frac{x^2}{4} + 1$.

63. Izračunajte presečišči in kota, pod katerim se sekata grafa funkcij $f(x) = (x-2)^2$ in $g(x) = -x^2 + 6x - 4$.

64. Grafa funkcij $f(x) = x^{-1}$ in $g(x) = x^3$ se sekata v točki $T(x_0 > 0, y_0)$. Izračunajte presečišče in kot med krivuljama.

65. Na sliki sta narisana grafa potenčne funkcije $f(x) = ax^3$ in kvadratne funkcije $g(x) = x^2 - c$.

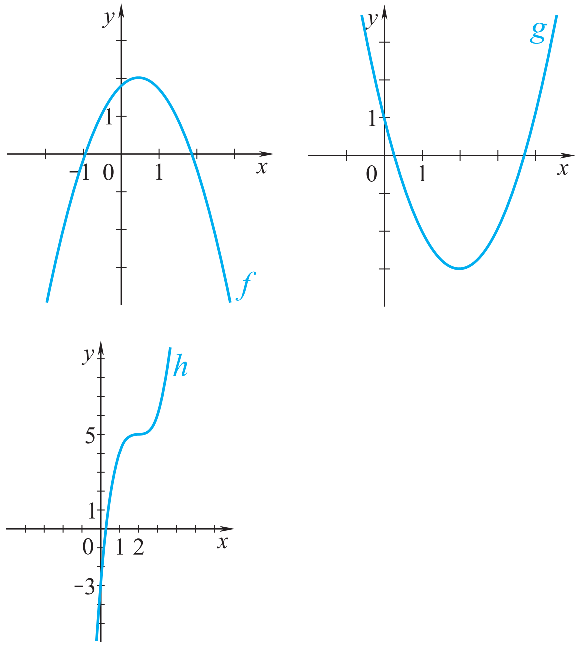


a) Zapišite njuna predpisa in koordinati presečišča.
b) Izračunajte kot med krivuljama v presečišču.

66. Pokažite, da se grafa funkcij $f(x) = \ln x$ in $g(x) = -\ln x$ sekata pod pravim kotom.

67. Izračunajte presečišče in kot, ki ga oklepata grafa funkcij $f(x) = e^x$ in $g(x) = e^{-2x}$. Kot zapišite na stotinko stopinje.

68. Na slikah so dani grafi funkcij f, g in h. Zapišite predznak prvega odvoda danih funkcij v točkah z abscisama $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$.



69. Izračunajte odvod kvadratne funkcije $f(x) = (x + 3)(5 - x)$ in zapišite intervale, na katerih funkcija narašča, in intervale, na katerih pada.

70. Zapišite intervale naraščanja in padanja danih polinomov.

a) $p(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3$
b) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$
c) $p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$
č) $p(x) = -x^4 + 8x^2$

71. Na katerem intervalu funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ pada? Kje pada funkcija $g(x) = x^{-3}$? Pomagajte si s predznakom njunih odvodov.

72. Zapišite definicijsko območje funkcije $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ in ugotovite, na katerih intervalih je naraščajoča in na katerih intervalih padajoča.

73. Zapišite definicijsko območje funkcije $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}$, izračunajte njen odvod in ugotovite, na katerih intervalih narašča in na katerih intervalih pada.

74. Zapišite intervale naraščanja in padanja racionalne funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 13}{x^2 - x - 6}$.

75. Pokažite, da je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$ na vseh intervalih, na katerih je definirana, padajoča.

76. Na katerem intervalu je funkcija $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$ naraščajoča?

77. Funkcija $f(x) = \sin 2x$ je definirana na intervalu $[-\pi, \pi]$. Izračunajte njen odvod in zapišite intervale, na katerih je funkcija f naraščajoča. Narišite njen graf.

78. Zapišite definicijsko območje funkcije $f(x) = x\sqrt{x}$ in pokažite, da je funkcija f na $\mathbb{R}^+$ naraščajoča.

79. Dana je funkcija $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Zapišite njeno definicijsko območje.
b) Izračunajte odvod funkcije f.
c) Zapišite območji naraščanja ter padanja funkcije f.

80. Dana je funkcija $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

a) Zapišite njeno definicijsko območje.
b) Izračunajte odvod funkcije f.
c) Zapišite območji naraščanja ter padanja funkcije f.

81. Zapišite točke, v katerih so tangente na graf polinoma $p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ vzporedne abscisni osi.

82. Izračunajte koordinati temena kvadratne funkcije $f(x) = -x^2 - 10x + 6$.

83. Zapišite koordinate lokalnih ekstremov polinomov.

a) $p(x) = x^3 - 3x$
b) $p(x) = x^2(x^2 - 8)$
c) $p(x) = -\frac{3x^3}{2} + 3x^2 + 6x - 12$
č) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 20$
d) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

84. Zapišite koordinate lokalnih ekstremov racionalnih funkcij.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{x^2-6x-1}{x^2+2x+3}$

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+9}$ č) $f(x) = \frac{4x^2+4x-3}{x^2-4x+3}$

85. Dana je funkcija $f(x) = \frac{2x}{x+3}$. Z računom pokažite, da funkcija nima lokalnih ekstremov.

86. Funkcija $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ je definirana na intervalu $[-4\pi, 4\pi]$. Izračunajte njen odvod in koordinati maksimumov. Narišite njen graf.

87. Dana je funkcija $f(x) = \sin x - \cos x$.
a) Izračunajte ničle funkcije f.
b) Izračunajte odvod funkcije f.
c) Na intervalu $[0, \pi]$ poiščite ekstrem funkcije f.

88. Poiščite lokalni ekstrem funkcije $f(x) = \frac{1}{e} \cdot \frac{e^x}{x}$.

89. Poiščite lokalni ekstrem funkcije $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$.

90. Za funkcijo $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ zapišite definicijsko območje, izračunajte njen odvod in zapišite koordinati lokalnega ekstrema.

91. Ugotovite, ali ima funkcija $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ lokalni ekstrem.

92. Poiščite najmanjšo in največjo vrednost polinoma $p(x) = x^3 - 3x + 2$ na intervalu $[0, 2]$.

93. Poiščite najmanjšo in največjo vrednost polinoma $p(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ na intervalu $[-3, 5]$.

94. Dan je polinom $p(x) = x^2(x+3)$.
a) Zapišite ničle polinoma p.
b) Izračunajte odvod polinoma p in zapišite njegove lokalne ekstreme.
c) Narišite graf.

95. Dan je polinom $p(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$. Izračunajte ničle in koordinati ekstremov ter narišite graf tega polinoma.

96. Dan je polinom $p(x) = x^3 - 3x - 2$. Izračunajte ničle in stacionarne točke ter narišite graf tega polinoma.

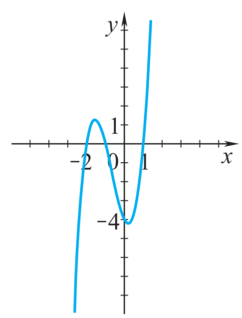
97. Dan je polinom $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$.
a) Izračunajte ničle polinoma.
b) Izračunajte odvod polinoma in zapišite lokalne ekstreme polinoma.
c) Narišite graf polinoma.

98. Dan je polinom $p(x) = 4x^2(1 - x^2)$.
a) Izračunajte ničle polinoma.
b) Izračunajte odvod polinoma in zapišite lokalne ekstreme polinoma.
c) Narišite graf polinoma.

99. Izračunajte ničle in ekstreme polinoma $p(x) = x^3(3x+4)$ in narišite njegov graf.

100. Izračunajte ničle in ekstreme polinoma $p(x) = 3x^5 - 5x^3$ in narišite njegov graf.

101. Na sliki je dan graf polinoma $p(x) = a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Zapišite predpis za polinom p in na stotinko natančno izračunajte abscise lokalnih ekstremov.



102. Poiščite ničle, pole, začetno vrednost, enačbo vodoravne asimptote, koordinati lokalnega maksimuma in narišite graf funkcije $f(x) = \frac{8}{x^2-4}$.

103. Dana je racionalna funkcija $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+5}$.
a) Zapišite ničle, pole, začetno vrednost in enačbo asimptote.
b) Izračunajte odvod funkcije f in koordinati ekstremov.
c) Narišite graf.

104. Poiščite ničle, pole, začetno vrednost, enačbo vodoravne asimptote, koordinati lokalnega maksimuma in narišite graf funkcije $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$.

105. Poiščite ničle, pole, enačbo asimptote in koordinati lokalnih ekstremov ter narišite graf funkcije $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 9}$.

106. Poiščite ničle, pole, enačbo asimptote in koordinati lokalnih ekstremov ter narišite graf funkcije $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x}$. Nasvet: funkcijo $f(x)$ zapišite z ulomkom.

107. Poiščite ničle, pole, enačbo asimptote in koordinati lokalnih ekstremov ter narišite graf funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x}$.

108. Poiščite ničle, pole, začetno vrednost, enačbo asimptote in koordinati lokalnih ekstremov ter narišite graf funkcije $f(x) = \frac{30 + 6x}{9 - x^2}$.

109. Poiščite ničle, pole, začetno vrednost, enačbo asimptote in koordinati lokalnih ekstremov ter narišite graf funkcije $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - x - 2}$.

110. Poiščite ničle, pole, enačbo vodoravne asimptote, koordinati lokalnih ekstremov in narišite graf funkcije $f(x) = \left|\frac{4x}{x^2 + 4}\right|$. Nasvet: najprej narišite graf funkcije $g(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$.

111. Dana je funkcija $f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x} - x$. Zapišite definicijsko območje, izračunajte odvod funkcije f in koordinati ekstremov in skicirajte njen graf, če so $x_1 = -3\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3\sqrt{3}$ njene ničle.

27. NEDOLOČENI INTEGRAL

Naj bo f definirana na intervalu $[a, b]$. Če je F taka funkcija, definirana na istem intervalu $[a, b]$, da je $F' = f$, potem rečemo, da je F **nedoločeni integral funkcije f. Nedoločeni integral je določen le do aditivne konstante**, zato velja: če poznamo en nedoločeni integral za funkcijo f, potem vsakega drugega dobimo tako, da prvemu prištejemo konstanto, in to zapišemo: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

1. Pokažimo, da je funkcija $F(x) = 3x^4 + x^2 - x + C$ nedoločeni integral funkcije $f(x) = 12x^3 + 2x - 1$, in to zapišimo z integralskim znakom.

Izračunajmo $F'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 2 \cdot x - 1 = 12x^3 + 2x - 1$.

Ker je $F'(x) = f(x)$, je funkcija F nedoločeni integral funkcije f, in to zapišemo

$\int (12x^3 + 2x - 1)\,dx = 3x^4 + x^2 - x + C.$

2. Pokažimo, da veljajo dane enakosti.

a) $\int dx = x + C$

$(x + C)' = 1$

b) $\int 2x\,dx = x^2 + C$

$(x^2 + C)' = 2x$

c) $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$

$(x^3 + C)' = 3x^2$

č) $\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + C$

$(-x^{-1} + C)' = -(-1 \cdot x^{-2}) = x^{-2}$

d) $\int x^{-1}\,dx = \ln x + C$

$(\ln x + C)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$

e) $\int e^x\,dx = e^x + C$

$(e^x + C)' = e^x$

f) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$(\sin x + C)' = \cos x$

g) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$(-\cos x + C)' = -(-\sin x) = \sin x$

h) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$(\tan x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

i) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$(-\cot x + C)' = (-\frac{\cos x}{\sin x})' = -\frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

Nedoločeni integrali:

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \in \mathbb{R}, r \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C \qquad (k \in \mathbb{R})$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

Izračunajmo.

a) $\int e^{3x}\,dx$

$\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + C$

b) $\int 5^x\,dx$

$\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$

Nedoločeni integral vsote in razlike funkcij ter produkta funkcije s številom:

1. $\int (f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
2. $\int (k \cdot f(x))\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$; ($k$ je konstanta)

1. Izračunajmo nedoločena integrala.

a) $\int (12x^{-2})\,dx$

b) $\int (6x^2 + 8x - 3)\,dx$

a) $\int (12x^{-2})\,dx = 12 \cdot \int x^{-2}\,dx = 12 \cdot (-x^{-1}) + C = -12x^{-1} + C$

b) $\int (6x^2 + 8x - 3)\,dx = \int (6x^2)\,dx + \int (8x)\,dx - \int 3\,dx = 2\int (3x^2)\,dx + 4\int 2x\,dx - 3\int dx = 2x^3 + 4x^2 - 3x + C$

2. Izračunajmo nedoločeni integral polinoma $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ in racionalne funkcije $g(x) = \frac{1-x}{x^2}$.

Izračunamo $\int (x^3 - 3x^2 - 4x + 12)\,dx = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 12x + C$

in $\int \frac{1-x}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = \int \left(x^{-2} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x| + C = -\frac{1}{x} - \ln|x| + C.$

3. Izračunajmo nedoločene integrale.

a) $\int (x^4 - x^{-3} + x^{\frac{1}{4}})\,dx$

$$\int (x^4 + x^{-3} + x^{\frac{1}{4}})\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = \frac{x^4}{4} - \frac{x^{-2}}{2} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$$

b) $\int (x-3)(x^2+4)\,dx$

$$\int (x-3)(x^2+4)\,dx = \int (x^3 - 3x^2 + 4x - 12)\,dx = \frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^2}{2} - 12x + C = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 12x + C$$

c) $\int \frac{x^3+x+1}{x}\,dx$

$$\int \frac{x^3+x+1}{x}\,dx = \int (x^2 + 1 + \frac{1}{x})\,dx = \frac{x^3}{3} + x + \ln|x| + C$$

č) $\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})\,dx$

$$\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})\,dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}})\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C) = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$$

d) $\int \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}\,dx$

$$\int \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$$

e) $\int \frac{\sin 2x}{2\cos x}\,dx$

$$\int \frac{\sin 2x}{2\cos x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{2\cos x}\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

f) $\int \tan^2 x\,dx$

$$\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)\,dx = \tan x - x + C$$

g) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\,dx$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-2\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int (\frac{1}{\sin^2 x} - 2)\,dx = -\cot x - 2x + C$$

4. Zapišimo predpis za funkcijo f, za katero je $f(-3) = 6$, njen odvod pa je funkcija $f'(x) = x^2$.

Zapišemo $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$

Ker je $f(-3) = 6$, lahko zapišemo enačbo $\frac{(-3)^3}{3} + C = 6.$

Iz $-9 + C = 6$ dobimo $C = 15$.

Zapišemo $f(x) = \frac{x^3}{3} + 15.$

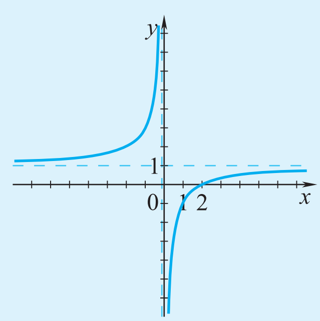
5. Poiščimo predpis za funkcijo f z ničlo 2 in narišimo njen graf, če je $f'(x) = 2x^{-2}$.

Zapišemo $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2x^{-2}\,dx = 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C = -2x^{-1} + C.$

Ker je $f(2) = 0$, lahko zapišemo enačbo $-2\cdot 2^{-1} + C = 0$ z rešitvijo $C = 1$.

Zapišemo $f(x) = -\frac{2}{x} + 1$ oz. $f(x) = \frac{x-2}{x}$.

Narišemo graf.



1. Pokažite, da je funkcija $F(x) = \frac{x^3}{3} + x - 2\sqrt{x} + C$ nedoločeni integral funkcije $f(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, in to zapišite z integralskim znakom.

2. Pokažite, da je $F(x) = x^2 - 3x + 7$ tisti nedoločeni integral funkcije $f(x) = 2x - 3$, za katerega velja $F(2) = 5$.

3. Zapišite množico funkcij, katerih odvod je funkcija $f(x) = x^2$.

4. Izračunajte nedoločene integrale in rezultate preverite z odvodom.

a) $\int (3x^2 + x)\,dx$

b) $\int 4\,dx$

c) $\int x^2(x^3 - 1)\,dx$

č) $\int (2x - 1)^2\,dx$

d) $\int (2 + x)^3\,dx$

e) $\int (\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3})\,dx$

f) $\int 2x(x - x^{-3})\,dx$

g) $\int \frac{x+3}{x}\,dx$

h) $\int (\frac{1-x}{x})^2\,dx$

i) $\int \frac{x^2 - 16}{x - 4}\,dx$

j) $\int \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}\,dx$

k) $\int \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}\,dx$

5. Izračunajte nedoločene integrale in rezultate preverite z odvodom.

a) $\int x^{\frac{2}{5}}\,dx$

b) $\int x^{-\frac{1}{4}}\,dx$

c) $\int \sqrt[3]{2x}\,dx$

č) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int (3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5\sqrt[3]{x^2})\,dx$

f) $\int \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x}}\,dx$

g) $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2\,dx$

h) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx$

6. Zapišite predpis za funkcijo F, katere odvod je funkcija $f(x) = 12x^2$, graf funkcije F pa gre skozi točko $T(2, 8)$.

7. Zapišite predpis za funkcijo F z ničlo $x_1 = -1$, katere odvod je funkcija $f(x) = 6x - 1$.

8. Poiščite predpis za kvadratno funkcijo f z začetno vrednostjo -2 in narišite njen graf, če je $f'(x) = 4x$.

9. Iz množice polinomov zapišite predpis in narišite graf tistega polinoma p, ki gre skozi koordinatno izhodišče in ima odvod $p'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$.

10. Graf funkcije g gre skozi točko $(-2, 12)$. Smerni koeficient tangente na graf funkcije g v poljubni točki (x, y) je podan z $g'(x) = 6x - 3$. Zapišite predpis za funkcijo g.

11. Izračunajte nedoločeni integral racionalne funkcije $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

12. Ugotovite, ali velja

$$\int \frac{(x-3)^2}{x}\,dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 9\ln|x| + C.$$

13. Izračunajte $\int \frac{x}{x+2}\,dx + 2\int \frac{dx}{x+2}$.

14. Pokažite, da je $\int \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}\,dx = 6\sqrt[6]{x} + C$.

15. Z odvodom pokažite, da je

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx = \ln(x^2 + 1) + C.$$

16. Ali je $F(x) = (\sqrt{x} - 1)^4 + C$ nedoločeni integral funkcije $f(x) = \frac{2(\sqrt{x} - 1)^3}{\sqrt{x}}$?

17. Racionalizirajte imenovalec in integrirajte

$$\int \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}\,dx.$$

18. Izračunajte $F(2)$, če je $F(x) = \int \frac{(2 - \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx$ in $F(3) = 27$.

19. Pokažite, da velja $\int \frac{1 - \ln x}{x^2}\,dx = \frac{\ln x}{x} + C$.

20. Izračunajte nedoločene integrale in rezultate preverite z odvodom.

a) $\int (e^x + 1)\,dx$

b) $\int e^{x+1}\,dx$

c) $\int e^{2x}\,dx$

č) $\int (\frac{1}{2})^x\,dx$

d) $\int 3^{1+x}\,dx$

e) $\int 4^{-x+1}\,dx$

f) $\int (x^3 - 3^x + 3x + 3)\,dx$

21. Izračunajte nedoločene integrale in rezultate preverite z odvodom.

a) $\int (1 - \sin x)\, dx$

b) $\int (4 - 3\cos x)\, dx$

c) $\int \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}\, dx$

č) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x}\, dx$

d) $\int \cot^2 x\, dx$

e) $\int \frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx$

f) $\int \frac{2}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx$

g) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\, dx$

h) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx$

22. Zapišite nedoločeni integral F funkcije $f(x) = \cos x - \sin x$, za katerega je $F(\frac{\pi}{2}) = 6$.

23. Ali je $F(x) = x\cos x + C$ nedoločeni integral funkcije $f(x) = \cos x - x\sin x$?

24. Zapišite predpis za funkcijo f, za katero je $f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$, njen odvod pa je funkcija $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

25. Pokažite, da je funkcija $F(x) = \sin^3 x + C$ nedoločeni integral funkcije $f(x) = 3\sin^2 x \cos x$. Pri katerem C bo graf funkcije F šel skozi točko $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$?

26. Ali velja

$$\int \frac{1}{\sin^2 x - \cos^2 x}\, dx - \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}\, dx = x + C?$$

27. Z računom pokažite, da je

$$\int (\sin \tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{\cos^2 x})\, dx =$$

$$= \cot 2x - \tfrac{1}{3}\cos x + C.$$

28. Katera funkcija f z odvodom $f'(x) = 2\sin x$ seka ordinatno os pri -2? Narišite njen graf.

29. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

a) Zapišite njeno definicijsko območje.

b) Izračunajte odvod funkcije f in pokažite, da funkcija f nima lokalnega ekstrema.

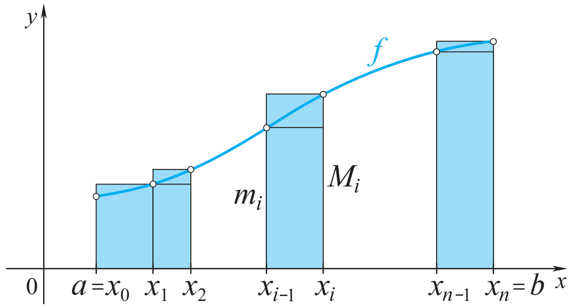
c) Zapišite ničlo in pol funkcije f ter enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije f in narišite njen graf.

č) Izračunajte $\int f(x)\, dx$.

28. DOLOČENI INTEGRAL

Definicija določenega integrala zvezne funkcije *f* na intervalu $[a, b]$

Interval $[a, b]$ poljubno razdelimo na n manjših podintervalov $[x_{i-1}, x_i]$. Z m_i označimo najmanjšo vrednost ter z M_i največjo vrednost funkcije f na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, z Δx_i pa širino podintervala $[x_{i-1}, x_i]$. Določeni integral zvezne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je število, kateremu se od spodaj vedno bolj bližajo spodnje vsote $S = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ (vsota ploščin včrtanih pravokotnikov – glej sliko)



in od zgoraj zgornje vsote $Z = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ (vsota ploščin očrtanih pravokotnikov), ko gre širina Δx_i vsakega od delitvenih intervalov proti 0 in število teh delitvenih intervalov raste prek vsake meje.

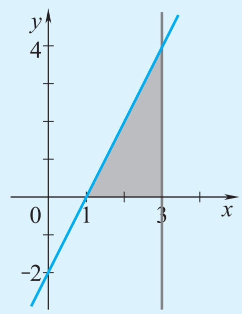
Določeni integral zvezne funkcije f na intervalu $[a, b]$ označimo z $\int_a^b f(x)\,dx$.

Geometrijski pomen določenega integrala:

Določeni integral nenegativne funkcije f **je enak ploščini lika** med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$.

Izračunajmo ploščino trikotnika, ki ga omejujo abscisna os ter premici $y = 2x - 2$ in $x = 3$. Račun zapišimo z določenim integralom.

Narišemo sliko.

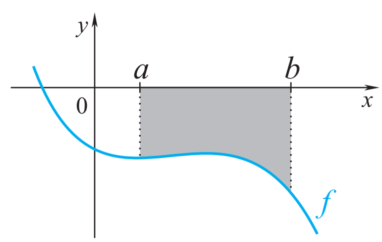


Iz slike razberemo, da je nastali trikotnik pravokoten s katetama 2 in 4, zato je ploščina trikotnika enaka $S = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$.

Zapišemo še $S = \int_1^3 (2x - 2)\,dx = 4$.

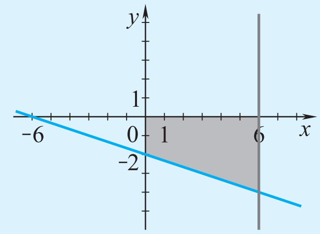
Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ negativna, potem je določeni integral enak nasprotni vrednosti ploščine lika med grafom funkcije f in abscisno osjo.

$S = -\int_a^b f(x)\,dx$



Izračunajmo ploščino trapeza, ki ga omejujejo koordinatni osi in premici $y = -\frac{x}{3} - 2$ in $x = 6$. Račun zapišimo z določenim integralom.

Narišemo sliko.



Iz slike razberemo, da nastane trapez z osnovnicama dolžine 2 in 4 ter višino dolžine 6.

Ploščina trapeza je enaka $S = \frac{(a + c) \cdot v}{2} = \frac{(2 + 4) \cdot 6}{2} = 18$.

Zapišemo še $S = -\int_0^6 (-\frac{x}{3} - 2)\, dx = 18$.

Osnovne lastnosti integralskega računa:

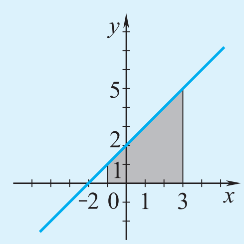
1. $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
2. $\int_a^b (k \cdot f(x))\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$ (k je konstanta)
3. $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
4. $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
5. $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$ $(a \le c \le b)$

1. Izračunajmo $\int_{-1}^3 (x + 2)\, dx$ in $\int_{-1}^3 (3x + 6)\, dx$ ter $\int_3^{-1} (x + 2)\, dx$.

Narišemo sliko.

Iz slike vidimo, da je ploščina lika med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[-1, 3]$ enaka danemu določenemu integralu. Zato najprej izračunamo ploščino trapeza $S = \frac{4(1 + 5)}{2} = 12$ in od tod zapišemo

$\int_{-1}^3 (x + 2)\, dx = 12$.

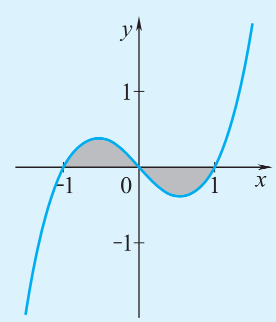


Izračunamo še $\int_{-1}^3 (3x + 6)\, dx = \int_{-1}^3 (3(x + 2)\, dx = 3 \cdot \int_{-1}^3 (x + 2)\, dx = 3 \cdot 12 = 36$

in $\int_3^{-1} (2x + 1)\, dx = -\int_{-1}^3 (2x + 1)\, dx = -12$.

2. Izračunajmo $\int_{-1}^1 (x^3 - x)\, dx$.

Z razstavljanjem $p(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$ poiščemo ničle polinoma $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ ter narišemo njegov graf.



Iz slike razberemo $\int_0^1 (x^3 - x)\, dx = -\int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx$, zato je

$\int_{-1}^1 (x^3 - x)\, dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx + \int_0^1 (x^3 - x)\, dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx - \int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx = 0$.

Osnovni izrek integralskega računa (Newton-Leibnitz):

Če je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$ in je F nedoločeni integral funkcije f, potem je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

1. Izračunajmo dane določene integrale.

a) $\int_2^5 2x\,dx$

$$\int_2^5 2x\,dx = x^2\Big|_2^5 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$$

b) $\int_1^3 (x^2 + 1)\,dx$

$$\int_1^3 (x^2 + 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1\right) = 9 + 3 - \frac{1}{3} - 1 = 10\tfrac{2}{3}$$

c) $\int_{-2}^2 (x + 1)^2\,dx$

$$\int_{-2}^2 (x + 1)^2\,dx = \int_{-2}^2 (x^2 + 2x + 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right)\Big|_{-2}^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 2\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 4 + 2 - \left(-\frac{8}{3} + 4 - 2\right) = \frac{8}{3} + 4 + 2 + \frac{8}{3} - 4 + 2 = 9\tfrac{1}{3}$$

č) $\int_{-1}^2 \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx$

$$\int_{-1}^2 \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx = \int_{-1}^2 (x^3 - x^{-3})\,dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^{-2}}{2}\right)\Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^4}{4} + \frac{2^{-2}}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^{-2}}{2}\right) = 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 3\tfrac{3}{8}$$

d) $\int_1^5 \frac{x^2 - 1}{x^2}\,dx$

$$\int_1^5 \frac{x^2 - 1}{x^2}\,dx = \int_1^5 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^5 (1 - x^{-2})\,dx = \left(x - \frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^5 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^5 = 5 + \frac{1}{5} - \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 3\tfrac{1}{5}$$

e) $\int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$

$$\int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = (x + \ln|x|)\Big|_1^e = (e + \ln e) - (1 + \ln 1) = e + 1 - (1 + 0) = e$$

f) $\int_1^8 \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$

$$\int_1^8 \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\Big|_1^8 = \frac{3\cdot 8^{\frac{2}{3}}}{2} - 3\cdot\frac{1^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{3\cdot 4}{2} - \frac{3}{2} = 4\tfrac{1}{2}$$

g) $\int_0^{64} \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)dx$

$$\int_0^{64} \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)dx = \int_0^{64} \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\right)\Big|_0^{64} = \frac{2\cdot 64^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{3\cdot 64^{\frac{4}{3}}}{4} - \left(\frac{2\cdot 0^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{3\cdot 0^{\frac{4}{3}}}{4}\right) =$$

$$= \frac{2\cdot 512}{3} - \frac{3\cdot 256}{4} - (0 - 0) = \frac{4096 - 2304}{12} = \frac{1792}{12} = 149\tfrac{1}{3}$$

h) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 \left(1+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left(x+2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4 = \left(x+2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4 = 4+2\cdot 2-(1+2\cdot 1) = 5$$

2. Izračunajmo dane določene integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^2-e^0}{2} = \frac{e^2-1}{2}$$

b) $\displaystyle\int_{-1}^2 6^x\,dx$

$$\int_{-1}^2 6^x\,dx = \frac{6^x}{\ln 6}\Big|_{-1}^2 = \frac{6^2-6^{-1}}{\ln 6} = \frac{36-\frac{1}{6}}{\ln 6} = \frac{215}{6\ln 6}$$

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

č) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin x)\,dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin x)\,dx = (x+\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}\,dx$

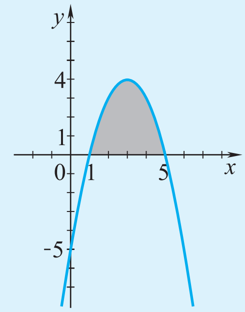
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}\,dx = \sqrt{3}\,\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\,\tan\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\,\tan 0 = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 1$$

e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cot x}{\sin 2x}\,dx$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cot x}{\sin 2x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x}{\sin x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = (-\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\cot\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\cot\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3. Izračunajmo ploščino lika, ki ga omejujeta graf funkcije $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ in abscisna os.

Zapišemo $f(x) = -(x^2 - 6x + 5) = -(x - 1)(x - 5)$ in narišemo graf kvadratne funkcije.
Izračunamo ploščino lika

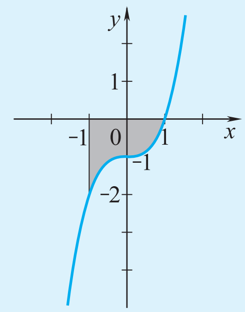


$$S = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right)\Big|_1^5 =$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + 3\cdot 5^2 - 5\cdot 5\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1\right) = -\frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = 10\frac{2}{3}.$$

4. Izračunajmo ploščino lika, ki ga na intervalu $[-1, 1]$ omejujeta graf funkcije $f(x) = x^3 - 1$ in abscisna os.

Najprej narišemo graf potenčne funkcije.
Izračunamo ploščino lika

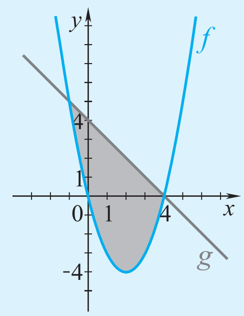


$$S = -\int_{-1}^{1} (x^3 - 1)\,dx = -\left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big|_{-1}^{1} = -\left(\left(\frac{1^4}{4} - 1\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} + 1 = 2.$$

5. Poiščimo ploščino lika, ki ga omejujeta graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2 - 4x$ in graf linearne funkcije $g(x) = -x + 4$.

Zapišemo $f(x) = x(x - 4)$. Ničli kvadratne funkcije sta $x_1 = 0$ in $x_2 = 4$.
Ničla linearne funkcije je $x = 4$, začetna vrednost je $g(0) = 4$.
V isti koordinatni sistem narišemo grafa obeh funkcij.



Nato izračunamo abscise presečišč grafov funkcij.
Zapišemo enačbo $x^2 - 4x = -x + 4$, jo preoblikujemo v $x^2 - 3x - 4 = 0$ in z razstavljanjem $(x - 4)(x + 1) = 0$ rešimo $x_1 = 4$ in $x_2 = -1$.
Izračunamo ploščino lika med grafoma funkcij f in g

$$S = \int_{-1}^{4} (g(x)) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{4} (-x + 4 - x^2 + 4x)\,dx = \int_{-1}^{4} (-x^2 + 3x + 4)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{-1}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{3\cdot 4^2}{2} + 4\cdot 4\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{3\cdot(-1)^2}{2} + 4\cdot(-1)\right) = -\frac{64}{3} + 24 + 16 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 = 20\frac{5}{6}.$$

1. Izračunajte ploščine trikotnikov, ki jih s koordinatnima osema oklepajo dane premice, in račune zapišite z določenim integralom.

a) $y = x + 4$
b) $y = -x + 5$
c) $y = -x - 3$
č) $x - 3y - 6 = 0$

2. Izračunajte.

a) $\int_{-3}^{0} (2x + 6)\,dx$
b) $\int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 3\right)dx$
c) $\int_{-3}^{3} |x|\,dx$
č) $\int_{-4}^{8} \left(-\frac{x}{4} - 2\right)dx$

3. Dana je linearna funkcija $f(x) = 2x - 6$.

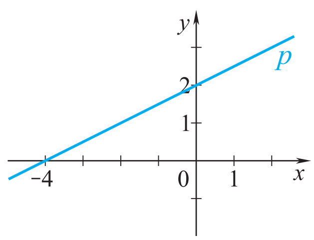
a) Premica p je graf funkcije f. Zapišite vse tri oblike enačbe premice p.

b) Pod kolikšnim kotom seka premica p koordinatni osi?

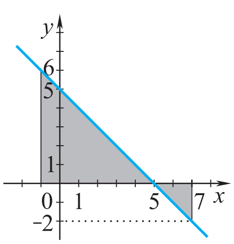
c) Izračunajte ploščino trikotnika, ki ga premica p oklepa s koordinatnima osema.

č) Koliko je $\int_0^3 (2x - 6)\,dx$?

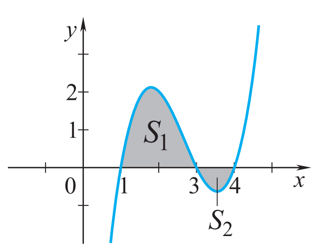
4. Premica p na sliki je graf funkcije f. Izračunajte $\int_{-4}^{2} f(x)\,dx$.



5. Izračunajte ploščino lika na sliki in račun zapišite z integralom.



6. Slika prikazuje graf funkcije f. Z določenima integraloma zapišite ploščini likov S_1 in S_2 ter nato z njima izrazite $\int_1^4 f(x)\,dx$.



7. Na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ narišite graf funkcije $f(x) = \cos x$ in izračunajte $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx$.

8. Z največjo vrednostjo M in najmanjšo vrednostjo m, ki ju na danem intervalu doseže dana funkcija:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, ocenite $\int_0^3 (-x^2 + 2x + 8)\,dx$,

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, ocenite $\int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 + 4)\,dx$.

9. Izračunajte.

a) $\int_1^2 (3x^3 + 19)\,dx$

b) $\int_{-5}^{5} dx$

c) $\int_{-2}^{2} x(x^2 + 1)\,dx$

č) $\int_{-1}^{2} (4 - x)^2\,dx$

d) $\int_2^3 (2x - 1)^3\,dx$

e) $\int_1^e (\frac{1}{x} - x^{-2})\,dx$

f) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{x^2 + 1}{x^4}\,dx$

g) $\int_1^3 \frac{x(x + 1)}{x^2}\,dx$

h) $\int_1^e \frac{2dx}{x}$

10. Izračunajte.

a) $\int_0^4 2\sqrt{x}\,dx$

b) $\int_1^4 (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

c) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx$

č) $\int_1^9 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int_1^8 \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

e) $\int_1^{64} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}{x}\,dx$

11. Pokažite, da je $\int_1^4 \frac{x^3 + 3x - 4}{x^2}\,dx = \frac{9}{2} + 6\ln 2$.

12. Integrirajte $\int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 1}{x}\,dx$ in rezultat zaokrožite na dve mesti.

13. Izračunajte.

a) $\int_{-1}^{1} e^x\,dx$

b) $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx$

c) $\int_1^2 2 \cdot 3^x\,dx$

č) $\int_0^1 4^{x+1}\,dx$

d) $\int_0^2 2^{-x}\,dx$

14. Izračunajte.

a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) \, dx$

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot \cos x \, dx$

č) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\, dx}{\cos^2 x}$

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \, dx$

f) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx$

g) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (4\cot^2 x) \, dx$

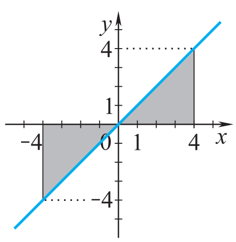
h) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$

15. Pokažite, da velja $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x}{\cos^2 x} \, dx = \pi - 2$.

16. Ploščino lika na sliki smo izračunali na naslednji način

$$S = \int_{-4}^{4} x \, dx = x^2 \Big|_{-4}^{4} = 4^2 - (-4)^2 = 16 - 16 = 0,$$

ki je očitno napačen. Odpravite napako in pravilno z določenim integralom izračunajte ploščino lika.



17. Izračunajte ploščino lika, ki ga graf funkcije $f(x) = x^2 - 4$ oklepa z abscisno osjo.

18. Dana je funkcija $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.
a) Izračunajte ničlo, začetno vrednost in koordinati temena ter narišite graf funkcije f.
b) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta graf funkcije f in abscisna os.

19. Izračunajte ploščino lika, ki ga graf funkcije $f(x) = 3x^2 + 6x$ oklepa z abscisno osjo.

20. Koliko meri ploščina lika, ki ga omejuje parabola z enačbo $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ in premice $y = 0$, $x = 1$ in $x = 3$?

21. Narišite graf funkcije $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$ in izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo premice $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ in graf funkcije f.

22. Dana je funkcija $f(x) = x^3 + 1$.
a) Izračunajte ničlo in začetno vrednost ter narišite graf funkcije f.
b) Pod kolikšnim kotom graf funkcije f seka abscisno os?
c) Kolikšna je ploščina lika, ki ga na intervalu $[-1, 2]$ omejujeta abscisna os in graf funkcije f?

23. Narišite graf funkcije $f(x) = (x + 2)^3$ in pokažite, da je ploščina lika, ki ga oklepa graf s koordinatnima osema, 4.

24. Za katero realno število a bo ploščina lika med grafom funkcije $f(x) = ax^2$ in abscisno osjo na intervalu $[0, 2]$ enaka 16?

25. Graf funkcije $f(x) = x^3 + b$ ($b > 0$) in koordinatni osi omejujejo lik s ploščino $\frac{3}{4}$. Izračunajte število b.

26. Dan je polinom $f(x) = x^2(x + 2)$.
a) Zapišite ničle dane funkcije in narišite graf polinoma.
b) Izračunajte ploščino lika med grafom polinoma p in abscisno osjo.

27. Koliko meri ploščina lika med grafom polinoma $p(x) = x^2 - x^3$ in premico $y = 0$?

28. Narišite graf polinoma $p(x) = -x^3 + x^2 + 5x + 3$ in izračunajte ploščino lika, ki ga graf polinoma oklepa z abscisno osjo.

29. Dan je polinom $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.
a) Izračunajte ničle in začetno vrednost in polinom p.
b) Izračunajte odvod polinoma p in koordinate lokalnih ekstremov ter narišite graf polinoma p.
c) Kolikšna je ploščina lika, ki ga oklepata abscisna os in graf polinoma p?

30. Dana je funkcija $f(x) = x^{-1} - 1$.

a) Zapišite ničlo in pol dane funkcije in narišite njen graf.

b) Izračunajte ploščino lika, ki ga na intervalu $[1, 4]$ omejujeta graf funkcije f in abscisna os.

31. Narišite graf funkcije $f(x) = \frac{2}{x^2}$ in izračunajte $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{x^2}\,dx$.

32. Narišite graf funkcije $f(x) = \frac{3}{x^3}$ in izračunajte ploščino lika med grafom funkcije in abscisno osjo na intervalu $[1, 3]$.

33. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x-2}{x}$.

a) Izračunajte ničlo, pol in enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije f ter narišite njen graf.

b) Pokažite, da je ploščina lika, ki ga na intervalu $[2, 5]$ omejujeta abscisna os in graf funkcije f, enaka $S = 3 - 2 \cdot \ln \frac{5}{2}$.

34. Dana je funkcija $f(x) = \frac{5(1-x)}{x^2}$.

a) Izračunajte ničlo, pol in enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije f ter narišite njen graf.

b) Na tisočinko natančno izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo abscisna os, graf funkcije f in premica $x = 2$.

35. Dana je funkcija $f(x) = 3^x - 3$.

a) Izračunajte ničlo, začetno vrednost in enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije f ter narišite graf funkcije f.

b) Pod kolikšnim kotom graf funkcije f seka abscisno os?

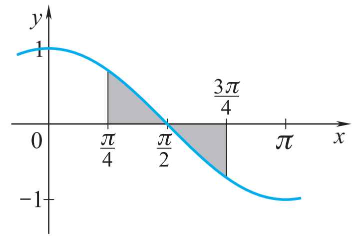
c) Kolikšna je ploščina lika, ki ga oklepata koordinatni osi in graf funkcije f?

36. Narišite graf funkcije $f(x) = e^x + 1$ in natančno izračunajte ploščino lika, ki ga na intervalu $[0, 1]$ omejujeta graf funkcije f in abscisna os.

37. Narišite graf funkcije $f(x) = 2^{-x}$ in izračunajte ploščino lika med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[0, 4]$. Rezultat zaokrožite na stotinko.

38. Ugotovite, ali velja $\int_0^1 2^{1-x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}$.

39. Na sliki je narisan graf funkcije $f(x) = \cos x$. Izračunajte ploščino osenčenega lika.



40. Na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ narišite graf funkcije $f(x) = 2\cos x$ in izračunajte ploščino lika, ki ga na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ omejujeta graf funkcije in abscisna os.

41. Na intervalu $[0, 2\pi]$ narišite graf funkcije $f(x) = \sin x$ in izračunajte $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$. Koliko meri ploščina lika na danem intervalu med grafom funkcije $g(x) = |f(x)|$ in abscisno osjo?

42. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta parabola in premica.

a) $y = x^2$ in $y = 2x$

b) $y = -x^2 + 2x$ in $y = -x$

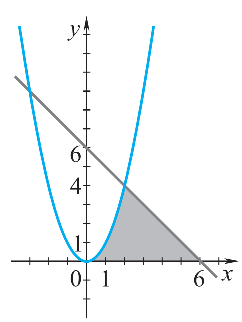
c) $y = (x-3)^2$ in $y = 4$

č) $y = -x^2 + 10x - 16$ in $x - y + 2 = 0$

43. V isti koordinatni sistem narišite paraboli $y = x^2 - 1$ in $y = 3x^2 - 3$. Zapišite njuni presečišči ter izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta.

44. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta grafa kvadratnih funkcij $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ in $g(x) = x^2 + 1$.

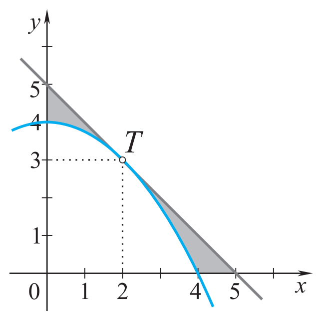
45. Izračunajte ploščino lika s slike, če sta dani krivulji parabola $y = x^2$ in premica $y = 6 - x$.



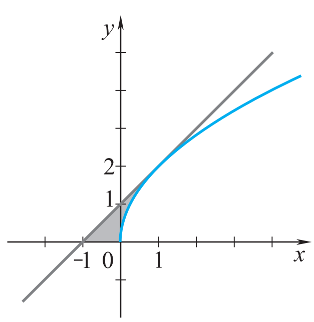
46. V isti koordinatni sistem narišite grafa funkcij $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $g(x) = 2 - x$ ter izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta dana grafa z abscisno osjo.

47. Narišite graf funkcije $f(x) = |x - 3|$ in izračunajte ploščino lika, ki ga na intervalu $[0, 4]$ omejujeta graf funkcije f in abscisna os.

48. Na sliki sta narisani parabola $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ in premica $y = -x + 5$, ki je v točki $T(2, 3)$ tangenta na parabolo. Izračunajte ploščino označenega lika s slike.



49. Na sliki je narisana krivulja $y = 2\sqrt{x}$ in premica $y = x + 1$, ki je tangenta na dano krivuljo. Izračunajte koordinati dotikališča in izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta dani krivulji in abscisna os.



50. Narišite graf funkcije $f(x) = 2x(x + 2)(x - 1)$ in graf funkcije $g(x) = |f(x)|$. Izračunajte ploščino lika, ki ga na intervalu $[-2, 1]$ omejujeta graf funkcije g in abscisna os.

29. PREGLEDNA TESTA

I. test

1. Natančno pisno izračunajte $1\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{12} \cdot 12^0 \cdot (\frac{1}{6})^{-1} - 2^{-3}$.

2. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 4$. Izračunajte ničli, začetno vrednost ter teme te funkcije in narišite njen graf.

3. Stranica kvadrata $ABCD$ meri 4 cm. Točka E deli stranico BC v razmerju $|BE| : |EC| = 3 : 1$. Vektor $\overrightarrow{AE}$ izrazite z vektorjema $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ ter izračunajte $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}$.

4. Rešite enačbo $\log_3 x + \log_3(x - 8) = 2$.

5. Za trikotnik ABC velja $S = 27\ \text{cm}^2$, $|AB| : |AC| = 3 : 4$ in $\sphericalangle BAC = \alpha = 30°$. Izračunajte dolžini stranic AB in AC.

6. Rešite enačbo $\sqrt{3}\ \sin x = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$.

7. Hiperbolo z enačbo $x^2 - 4y^2 = 4$ zavrtimo za $90°$ okoli izhodišča. Zapišite enačbo dobljene hiperbole in koordinati njenih gorišč.

8. Dani sta premici z enačbama $3x - 2y + 2 = 0$ in $ax + 3y - 5 = 0$, pri čemer je a realno število. Za katero realno število a bosta premici vzporedni in za katero realno število a bosta premici pravokotni?

9. V aritmetičnem zaporedju je tretji člen enak 11, deseti člen pa je štirikratnik drugega člena. Zapišite splošni člen zaporedja.

10. Janez je na mizi naredil tri kupčke igralnih kart, ki so bile s hrbtno stranjo obrnjene navzgor. V prvem kupčku so bili vsi štirje asi, v drugem srčev, pikov in karin kralj, v tretjem srčeva, pikova in karina dama. Na slepo je iz vsakega kupčka vzel eno karto. Kolikšna je verjetnost, da so bile vse tri izvlečene karte iste igralne barve (vse tri bodisi srca bodisi piki bodisi kare)?

11. Izračunajte ničlo in koordinati maksimuma in minimuma funkcije $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

12. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta parabola $y = 2 - x^2$ in premica $y = -2$.

II. test

1. Kateri večkratniki števila 12 so delitelji števila 504?

2. Ali točke $A(3, 7)$, $B(-7, -13)$ in $C(66, 133)$ ležijo na isti premici? Odgovor utemeljite.

3. V trikotniku ABC za stranici AB in BC velja $|AB| : |BC| = 1 : 3$. Točka E leži na stranici AC, točka F pa leži na stranici BC, tako da je daljica EF vzporedna stranici AB in $|EF| = |FB| = 6$ cm. Izračunajte dolžini stranic AB in BC.

4. Izraz $\dfrac{(-9)^2 \cdot 27^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{144} \cdot 4^{-2} \cdot 0{,}125^{\frac{1}{3}}}$ zapišite v obliki $a\sqrt[n]{b}$, pri čemer je a celo število, b in n pa sta naravni števili.

5. Za katero kompleksno število z je $(2 + i)z = \bar{z} + 4i$?

6. Dana je točka $A(2, -3, 1)$. Točka $M(3, 3, -1)$ je razpolovišče daljice AB. Zapišite komponente vektorja $\overrightarrow{AM}$ in koordinate točke B.

7. Rešite enačbo $4^{x+1} - 4^x = 12 \cdot 4^{3x}$. Rešitev zapišite v obliki ulomka.

8. Dana je funkcija $f(x) = \sin(2x - \pi)$. Na intervalu $(-\pi, \pi)$ narišite grafa funkcij $x \mapsto f(x)$ in $x \mapsto |f(x)|$.

9. Plašč enakostraničnega stožca meri 72π cm^2. Koliko meri polmer stožca in koliko meri prostornina stožca? Rezultata zapišite v natančni obliki.

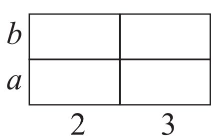
10. Za kateri realni števili x bodo števila $2, x^2, 3x$ zaporedni členi končnega aritmetičnega zaporedja? Zapišite zaporedji.

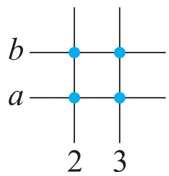
11. Slovenska košarkarska reprezentanca bo na turnirju na evropskem prvenstvu igrala v skupini z BiH, Grčijo in Francijo. Vsaka reprezentanca iz skupine igra z vsako natanko enkrat. Koliko tekem bo odigranih v tej skupini? Andrej je na slepo kupil vstopnico za ogled tekme te skupine. Kolikšna je verjetnost, da bo gledal tekmo, v kateri bo igrala slovenska reprezentanca?

12. Narišite graf funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Izračunajte kot, pod katerim graf funkcije f seka abscisno os. Rezultat zapišite na minuto natančno.

1. Množice

1. $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, $\mathcal{A} = \{2, 3, 7, 8, 11, 12, 15, 16\}$, $\mathcal{B} = \{3, 4, 6, 7, 12, 13, 14\}$
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{3, 7, 12\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, $\mathcal{A}^c = \{1, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 14, \}$, $\mathcal{B}^c = \{1, 2, 5, 8, 9, 10, 11, 15, 16\}$
2. $\mathcal{A} = \{a, b, c, č, d, e, f, g, h, i\}$, $\mathcal{B} = \{a, e, i, o, u\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{a, e, i\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{a, b, s, č, d, e, f, g, h, i, o, u\}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{b, c, č, d, f, g, h\}$ in $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{o, u\}$ **3.** **a)** $\mathcal{A} = \{2\}$ **b)** $\mathcal{B} = \{-5, 5\}$ **c)** $C = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$ **č)** $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ **d)** $\mathcal{E} = \{2, 7, 12, 17\}$
4. $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1\}$, $\mathcal{A} \times \mathcal{A} = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ **5.** **a)** $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0, 2, 4\}$
b) $C = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{-4, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ **c)** $\mathcal{D} = C \setminus \mathcal{B} = \{-4, -2\}$ **6.** **a)** $\mathcal{B}^c = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $m(\mathcal{B}^c) = 5$
b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{2, 4\}$, $m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 2$ **c)** $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = 8$ **č)** $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{0, 6, 8\}$, $m(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) = 3$
7. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{n \in \mathbb{N}; n < 10\}$, $\mathcal{A}^c = \{10, 11, 12, 13, 14, ...\} = \{n \in \mathbb{N}; n > 10\}$ **8.** $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{1\}$,
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{2\}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{3, 5, 7\}$, $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7)\}$ in
$C = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \{2, 3, 5, 7\}$ **9.** **a)** Da. **b)** Da. **c)** Ne. **č)** Da. **10.** **a)** $m(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = 8$, $m(\mathcal{B} \times \mathcal{B}) = 4$
b) $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1)\}$, $\mathcal{B} \times \mathcal{B} = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$ **c)** Ne. Da.
č) Da. **11.** $\mathcal{A} = \{4, 8, 12\}$, $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{4, 12\}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{1, 2, 3, 6\}$
12. **a)** $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N}; n \mid 48\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ **b)** $\mathcal{B} = \{2, 3\}$ **c)** Da.
č) $\mathcal{B} \times \{a, b\} = \{(2, a), (3, a), (2, b), (3, b)\}$ **d)** $(a, 2) \notin \mathcal{B} \times \{a, b\}$





13. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$, $\mathcal{B} = \{-8, -7, -6, -5, 5, 6, 7, 8, \}$ Ker je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{5, 6\} \neq \emptyset$, množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ nista disjunktni.
14. $\mathcal{A} = \{5, 10, 15\}$, $\mathcal{B} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{10, 15\}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{5\}$ **15.** **a)** $\mathcal{A} = \{-3, -1, 1, 3\}$, $\mathcal{B} = \{-2, 1, 4\}$ **b)** $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{1\}$, $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})^c = \{-4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4\}$ **16.** $\mathcal{A} = \{-1, 3\}$, $\mathcal{B} = \{3\}$, $C = \{-2, -1, 2\}$, $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup C) = \{-2, -1, 2, 3\}$, $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap C = \emptyset$
17. **a)** $\mathcal{A} = \{2k; k \in \mathbb{Z}\}$ **b)** $\mathcal{B} = \{2k - 1; k \in \mathbb{Z}\}$ **c)** $C = \{6k; k \in \mathbb{Z}\}$ **č)** $\mathcal{D} = \{6k + 1; k \in \mathbb{Z}\}$ **18.** **a)** $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$
b) $m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = m(\mathcal{A}) + m(\mathcal{B}) - m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 16 + 24 - 8 = 32$ **19.** **a)** 200 **b)** 142 **c)** $200 + 142 - 28 = 314$
20. **a)** $m(\mathcal{A}) = 62 - 6 = 56$ **b)** $m(\mathcal{B}) = 41 - 4 = 37$ **c)** $m(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = 56 + 37 - 18 = 75$
21. **a)** $\mathcal{A} = \{5n; n \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, 20, 25 ...\}$ **b)** $\mathcal{B} = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$, $m(\mathcal{B}) = 6$ **c)** $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{5, 10, 25, 50\}$, $m(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 4$
č) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{1, 2, 5, 10, 15, 20, 25, 30 ...\}$ **22.** **a)** $Q, R \in \mathcal{A}$, $Q \in \mathcal{B}$ **b)** $(1, 0)$ **c)** $(0, 1), (0, -1)$
č) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{(0, 1), (1, 0)\}$ **23.** **a)** Prehranjujemo se lahko na $5 \cdot 3 = 15$ različnih načinov.
b) $\{(č, k), (r, k), (h, k), (p, k), (o, k), (č, s), (r, s), (h, s), (p, s), (o, s), (č, v), (r, v), (h, v), (p, v), (o, v)\}$ **24.** Vsaj en abonma obiskuje 51 dijakov, oba abonmaja pa 17 dijakov. **25.** Z nobeno od teh dejavnosti se ne ukvarja 45 dijakov. **26.** $237 + 379 - 41 + 108 = 683$. V telefonski anketi so izprašali 683 ljudi. **27.** Dva fanta nista uspela izdelati 1. letnika. **28.** Povišanega holesterola v krvi nima 24 ljudi s prekomerno maso.

2. Naravna števila

1. **a)** 784 **b)** 308 **2.** $(18 + 13) \cdot 7 + 3 \cdot 18 = 271$ Dobimo 271. **3.** $(5 \cdot 39 + 2 \cdot 57) \cdot 9 = 2781$ Dobimo 2781.
4. Za izdelavo zunanjega ometa hiše sta bili porabljeni 602 delovni uri. **5.** Marko je privarčeval 3300 EUR, Tine pa 3520 EUR. Torej je Tine privarčeval več denarja. Čez eno leto bo Marko privarčeval 6820 EUR, torej več kot Tine, ki bo privarčeval 5150 EUR.
6. **a)** V letu 2004 je bilo 640 več živorojenih otrok kot v letu 2003. **b)** Največ v letu 2000, najmanj v letu 2003. Razlika je znašala 859 otrok. **c)** V tem obdobju je bilo 105 973 vseh živorojenih otrok. **7.** Živa je v celem tednu pretekla 20 km.
8. Letna količina pridelanih jabolk znaša približno 23 ton. **9.** **a)** 611 **b)** 1932 **10.** **a)** $5x^3 + 4x^2$ **b)** $2x^6 + 6x$
c) $7a^8$ **č)** $x^{12} + 17x^7 + (2 + x)^7$ **d)** $2 \cdot 2^7 + 2^8 = 2^9$ **11.** **a)** $2^8x^{14} = 256x^{14}$ **b)** a^7b^{12} **c)** $9x^8y^7$ **č)** $27a^7b^{15}$
d) $2^9a^{10}b^{11}$ **e)** $3888x^{13}y^{15}$ **12.** **a)** $3 \cdot 8^2 \cdot 24^3 = 3 \cdot (2^3)^2 \cdot (3 \cdot 8)^3 = 3 \cdot 2^6 \cdot (3 \cdot 2^3)^3 = 3 \cdot 2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^9 = 2^{15} \cdot 3^4$
b) $4 \cdot 48 \cdot 18^3 = 2^2 \cdot 16 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 9)^3 = 2^2 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3^2)^3 = 2^2 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3^6 = 2^9 \cdot 3^7$
13. $(5 \cdot 10^3)^2 \cdot (4 \cdot 10^4)^3 = 5^2 \cdot 10^6 \cdot 4^3 \cdot 10^{12} \cdot 2 \cdot 10 = 25 \cdot 4^3 \cdot 2 \cdot 10^{19} = 25 \cdot 4 \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 10^{19} = 100 \cdot 32 \cdot 10^{19} = 32 \cdot 10^{21}$ **14.** $2^8x^9y^{13}$
15. $7 \cdot 2^{10}$ **16.** $3^{15} + 2 \cdot 3^{17} + 3^{19} = 3^{15}(1 + 2 \cdot 3^2 + 3^4) = 3^{15}(1 + 18 + 81) = 100 \cdot 3^{15}$ **17.** $26 \cdot 3^n$ **18.** Dano število je deljivo z 2, 3, 4 in 6. **19.** **a)** 0, 2, 4, 6, 8 **b)** 1, 4, 7 **c)** 2, 6 **č)** 0, 5 **d)** 4 **e)** 7 **20.** **a)** 2, 5, 8 **b)** 8
c) Nobeno. **21.** $\mathcal{A} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$, $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 10, 15, 30\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{3, 6, 15, 30\}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{1, 2, 5, 10\}$
22. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathcal{B} = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{1, 3, 5, 15\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{1, 3, 5, 7\}$, $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \setminus C = \{7\}$
23. **a)** $\mathcal{A} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $\mathcal{B} = \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{6, 12, 15, 18\}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{3, 9\}$
24. **a)** $\mathcal{A} = \{4, 8, 12, 16, 20 ...\} = \{4n; n \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N}; 4 \mid n\}$, $\mathcal{B} = \{6, 12, 18, 24 ...\} = \{6n; n \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N}; 6 \mid n\}$
b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N}; (4 \mid n) \wedge (6 \mid n)\}$ je množica naravnih števil, ki so deljiva s 4 in s 6, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N}; (4 \mid n) \vee (6 \mid n)\}$ je množica naravnih števil, ki so deljiva z vsaj enim od števil 4 ali 6. **25.** **a)** $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N}; (2 \mid n) \vee (3 \mid n)\}$
b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{n \in \mathbb{N}; (2 \mid n) \wedge (3 \mid n)\} = \{n \in \mathbb{N}; 6 \mid n\} = \{6k; k \in \mathbb{N}\}$ **26.** **a)** $7^n + 4 \cdot 7^{n+1} + 7^{n+2} = 7^n(1 + 4 \cdot 7 + 7^2) = 78 \cdot 7^n = 13 \cdot 6 \cdot 7^n$ Da. **b)** $6^{n+2} + 6^{n+1} + 3 \cdot 6^n = 6^n(6^2 + 6 + 3) = 45 \cdot 6^n = 15 \cdot 3 \cdot 6^n$ Da. **27.** **a)** Zapišemo $n = 2k - 1$; $k \in \mathbb{N}$ in izračunamo $n^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k - 1) + 1$. **b)** Iz prejšnjega zapisa dobimo, da je ostanek pri deljenju kvadrata lihega naravnega števila s 4 enak 1. **28.** Iz $b = 12k$ in $c = 8n$ lahko zapišemo $2b + 3c = 2 \cdot 12k + 3 \cdot 8n = 24k + 24n = 24(k + n)$. **29.** Dolžina garaže je 585 cm.

30. **a)** $\mathcal{A} = \{2k;\ k \in \mathbb{N}\}$ **b)** $\mathcal{B} = \{2k - 1;\ k \in \mathbb{N}\}$ **c)** $C = \{9k;\ k \in \mathbb{N}\}$ **č)** $\mathcal{D} = \{9k + 5;\ k \in \mathbb{N}\}$ **31.** $n = 10 \cdot 9 + 6 = 96$. Ker je $96 = 4 \cdot 23 + 4$, je ostanek pri deljenju števila n s 23 enak 4. **32.** Najmanjše število je $96 = 12 \cdot 8 + 0$, največje pa $103 = 12 \cdot 8 + 7$. **33.** Ker je $a = k \cdot 36 + 25 = k \cdot 9 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 7 = 9 \cdot (4k + 2) + 7$, je ostanek pri deljenju števila a z 9 enak 7. **34.** **a)** $n = 5 \cdot 5 + 4 = 29$ **b)** $29 = 4 \cdot 7 + 1$ Naredil bi 4 skupine po sedem dijakov, en dijak bi mu ostal. **35.** Iz $n = 20k + 7 = 15(k + 5) + 2$ lahko izračunamo $k = 14$ in od tod $n = 14 \cdot 20 + 7 = 287$. Obrtnikova dnevna proizvodnja je 287 srajc. **36.** 95 **37.** **a)** $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ **b)** $184 = 2^3 \cdot 23$ **c)** $432 = 2^4 \cdot 3^3$ **č)** $528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$ **d)** $1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ **38.** $135 = 3^3 \cdot 5$ Število 135 je deljivo z naslednjimi večkratniki števila 5: 5, 15, 45 in 135. **39.** $448 = 2^6 \cdot 7$ Število 448 je deljivo z naslednjimi potencami števila 2: 2, 4, 8, 16, 32 in 64. **40.** **a)** $\mathcal{A} = \{2, 3, 5\}$, $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$, $C = \{3, 5\}$, $\mathcal{D} = \{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$ **b)** $C \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{B}$ **41.** **a)** $D = 36$, $v = 432$ **b)** $D = 1$, $v = 9240$ **c)** $D = 56$, $v = 6160$ **č)** $D = 90$, $v = 56\,700$ **d)** $D = 12$, $v = 2520$ **e)** $D = 15$, $v = 44\,460$ **42.** $576 = 2^6 \cdot 3^2$, $1296 = 2^4 \cdot 3^4$ Ker je $D(576, 1296) = 144$ so največji štirje delitelji danih števil 144, 72, 48 in 36. **43.** **a)** $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 112, 16, 24, 48\}$, $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap C = \{1, 2, 3, 6\}$ **b)** Največji element množice $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap C$ je število 6, ki je največji skupni delitelj števil 48, 24 in 54. **44.** $a = 7$, $b = 21$ **45.** $a = 3$, $b = 18$, $a = 6$, $b = 9$ **46.** **a)** $a = 4$, $b = 16$ **b)** $a = 4$, $b = 48$, $a = 12$, $b = 16$ **47.** Dobimo največji skupni delitelj števil 432 in 1056, to je 48. **48.** Dobimo število 1. **49.** $a = 34$, $b = 51$ ali $a = 17$, $b = 102$ **50.** Ker je $88 = 2^3 \cdot 11$ in $224 = 2^5 \cdot 7$, bosta Merkur in Venera zopet prvič v istem položaju po $v(88, 224) = 2^5 \cdot 7 \cdot 11 = 2464$ dneh, kar je približno 6˙75 let. **51.** 2˙5 ure = 150 minut = $2 \cdot 3 \cdot 52$ minut, $3\frac{1}{3}$ ure = 200 minut = $2^3 \cdot 5^2$ minut, $v(150, 200) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$ minut = 10 ur. Prvič bosta s postaje kraja A zopet hkrati odpeljala čez 10 ur, to je ob 14.40. **52.** $936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$, $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$, $D(936, 2160) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$ Največja možna masa enega kosa je 72 g. **53.** $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$, $96 = 2^5 \cdot 3$; Največja dolžina plošče je lahko $D(144, 108, 96) = 2^2 \cdot 3$ dm = 12 dm.

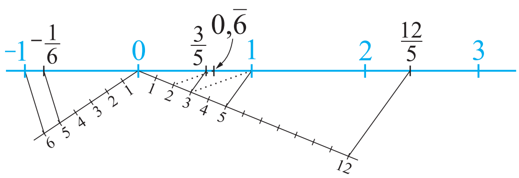
3. Cela števila

1. **a)** 16 **b)** -493 **c)** -76 **č)** 15 **2.** $(3 \cdot 81 - 5 \cdot 17) \cdot 6 + 113 = 1061$ **3.** $7 \cdot (237 - 323) + 2 \cdot (-97) + (-256) = -1052$ **4.** $(7 \cdot 19 + 2 \cdot 73) \cdot 5 - 10 \cdot 139 = 5$, $5^4 = 625$ **5.** $13 \cdot 31 + 3 \cdot 85 - 666 = -8$, $(-8)^3 = -512$ **6.** -2^{12} **7.** $3^9 \cdot 2^{11} - 3^{11} \cdot 2^9 - 6^9 = 3^9 \cdot 2^9 \cdot 2^2 - 3^2 \cdot 3^9 \cdot 2^9 - 6^9 = (3 \cdot 2)^9 \cdot 2^2 - 3^2(3 \cdot 2)^9 - 6^9 = 6^9 \cdot 4 + 9 \cdot 6^9 - 6^9 = 12 \cdot 6^9 = 2 \cdot 6 \cdot 6^9 = 2 \cdot 6^{10}$ **8.** Ker je $3 \cdot (-9)^6 + 5 \cdot (-27)^4 + (-81)^3 = 3 \cdot 9^6 + 5 \cdot 27^4 - 81^3 = 3 \cdot 3^{12} + 5 \cdot 3^{12} - 3^{12} = 3^{12}(3 + 5 - 1) = 7 \cdot 3^{12}$, število 7 deli dano število. **9.** $-x^{11}$, 2048 **10.** **a)** $-a^6$ **b)** $-8a^{17}b^8$ **c)** $-72x^8y^7$ **č)** $324a^{10}b^{15}$ **11.** $2^3 \cdot 3^2 \cdot x^{11}y^{11}$ **12.** Pravilno je $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^n \cdot (-2)^{n+1} = 2^2 \cdot (-2^3) \cdot (-2)^{n+n+1} = -2^{2+3}(-2)^{2n+1} = -2^5 \cdot (-2^{2n+1}) = 2^{5+2n+1} = 2^{6+2n}$ **13.** **a)** $22 \cdot 3^n$ **b)** $-44 \cdot 5^n$ **14.** **a)** Da, saj je $7^n + 4 \cdot 7^{n-1} + 7^{n+2} = 6 \cdot 59 \cdot 7^{n-1}$ **b)** Da, saj je $6^{n+2} + 6^{n-1} + 3 \cdot 6^n = 5 \cdot 47 \cdot 6^{n-1}$ **15.** $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{-3, -2, -1\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{-4\}$ **16.** Dana števila so 3, -2, 33, 0, -1, -99, -100, 81, 32, njim nasprotna pa -3, 2, -33, 0, 1, 99, 100, -81, -32 in urejena $100 > 99 > 2 > 1 > 0 > -3 > -32 > -33 > -81$. **17.** $(-10)^3 < -6^3 < (-3)^3 < 3 \cdot (-2)^3 < -2^4 < -3^2 < (-1)^6 < (-3)^2$ **18.** **a)** $3x^2 + 11x + 6$ **b)** $6a^2 - 22a + 20$ **c)** $u^3 - 9u^2 - 4u + 36$ **č)** $11x^3 + 3x$ **19.** **a)** $x(4x^2 - y^2)$ **b)** $a(6a^2 + a - 6)$ **c)** $2a^2b(a^2 + 3ab - 2b^2)$ **č)** $(x - 2)(x + 3)$ **d)** $(a - b)(a - 2b)$ **e)** $(x + 1)(x^2 + 1)$ **f)** $(a - 4)(a^2 + 4)$ **20.** **a)** $x^2 + 2x + 1$ **b)** $a^2 - 6a + 9$ **c)** $4 - 4b + b^2$ **č)** $9x^2 + 6xy + y^2$ **d)** $x^2 - 4xy + 4y^2$ **e)** $4x^2 + 20xy + 25y^2$ **f)** $1 - 4ab + 4a^2b^2$ **g)** $a^4 - 8a^2b + 16b^2$ **h)** $a^2 + 6ab^2c + 9b^4c^2$ **21.** **a)** $(a + 4)^2$ **b)** $(x - 1)^2$ **c)** $(z - 5)^2$ **č)** $(1 + 3xy)^2$ **22.** **a)** $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ **b)** $x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$ **c)** $u^3 - 6u^2v + 12v^2 - 8v^3$ **č)** $1 + 12a + 48a^2 + 64a^3$ **d)** $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$ **e)** $64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$ **f)** $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$ **g)** $125x^3 + 75x^2yz^2 + 15xy^2z^4 + y^3z^6$ **h)** $27a^3 - 54a^2b^2 + 36ab^4 - 8b^6$ **23.** **a)** $125x^3 - 75x^2y + 15xy^2 - y^3$ **b)** -343 **24.** **a)** $(x - 2)(x + 2)$ **b)** $(a - 1)(a + 1)$ **c)** $(b - 6c)(b + 6c)$ **č)** $(2x - 7y)(2x + 7y)$ **d)** $(a + b - 3)(a + b + 3)$ **e)** $(5 - x + y)(5 - x - y)$ **25.** **a)** $(x + 1)(x + 2)$ **b)** $(a - 4)(a - 6)$ **c)** $(x - 2)(x + 1)$ **č)** $(a - 6)(a + 4)$ **d)** $(1 - 2b)(1 - 10b)$ **e)** $20 - a - a^2 = -(a^2 + a - 20) = -(a + 5)(a - 4)$ **f)** $-(x - 1)(x + 16)$ **g)** $(x - 7y)(x + 3y)$ **h)** $(x - y)(x - 15y)$ **i)** $(x^2 + 4)(x - 1)(x + 1)$ **26.** **a)** $(a - 4b)(a + 3b)$ **b)** -68 **27.** **a)** $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$ **b)** $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ **c)** $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$ **č)** $(3x - 4y)(9x^2 + 12xy + 16y^2)$ **d)** $(1 - ab)(1 + ab + a^2b^2)$ **e)** $(5x + y)(25x^2 - 5xy + y^2)$ **f)** $(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$ **g)** $(2 - x)(64 + 32x + 16x^2 + 8x^3 + 4x^4 + 2x^5 + x^6)$ **28.** **a)** $4x^2(x^2 - 16) = 4x^2(x - 4)(x + 4)$ **b)** $5a(1 - 25a^2) = 5a(1 - 5a)(1 + 5a)$ **c)** $a^2(a + 8)(a + 4)$ **č)** $b(b - 3)(b - 10)$ **29.** **a)** $x^2y(x + 6y)(x - y)$ **b)** $2xy^2(x - 2y)(x - 3y)$ **c)** $-x^3y(x - 12y)(x + y)$ **č)** $3x^2y(x - 3y)(x - 4y)$ **d)** $(x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2)$ **e)** $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 9)$ **f)** $ab(a - 3b)(a^2 + 3ab + 9b^2)$ **g)** $16a(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$ **h)** $4a^3b(a - 4b)(a^2 + 4ab + 16b^2)$ **i)** $ab^2(3a + 5b)(9a^2 - 15ab + 25b^2)$ **j)** $a(a + 1)(a - 3)(a + 3)$ **k)** $(x - y)(x + y)(4x^2 + 1)$ **l)** $2(2y - x)(16y^4 + 8y^3x + 4y^2x^2 + 2yx^3 + x^4)$ **30.** **a)** Ker je $a^4 - 2a^3 - 35a^2 = a^2(a - 7)(a + 5)$, $a - 7$ deli dani izraz. **b)** Ker je $n^3 - 19n^2 - 42n = n(n - 21)(n + 2)$, $n - 6$ ne deli danega izraza.
c) Ker je $25x^4 - 25x^2y^2 - x^2 + y^2 = (x - y)(x + y)(5x - 1)(5x + 1)$, je dani izraz deljiv s $5x + 1$.
31. **a)** $a^2 - 16 = (a - 4)(a + 4)$, $a^2 + 3a - 28 = (a + 7)(a - 4)$, $D = a - 4$ ter $v = (a - 4)(a + 4)(a + 7)$
b) $a^2 + 8a + 16 = (a + 4)^2$, $a^3 + 64 = (a + 4)(a^2 - 4a + 16)$, $D = a + 4$, $v = (a + 4)^2(a^2 - 4a + 16)$

c) $4a^3 - 4a = 4a(a-1)(a+1)$, $8a^5 - 8a^2 = 8a^2(a-1)(a^2+a+1)$, $D = 4a(a-1)$, $v = 8a^2(a-1)(a+1)(a^2+a+1)$ **č)** $D = 4x(x+1)$, $v = 16x^2(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$ **32.** $\mathcal{A} = 3(x+8)(x-4)$, $\mathcal{B} = (10-x)(100+10x+x^2)$ Za $x = 10$ je $\mathcal{A} = 324$ in $\mathcal{B} = 0$.
33. Da, saj je $16n^2 + 8n + 25 = (4n+1)^2 + 24$. Najmanjša vrednost izraza je 25 in jo dobimo pri $n = 0$. **34. a)** $(x-2)(x-1)$ **b)** $-3(x+1)(x-2)$ **c)** $x(x+1)(x+10)$ **35. a)** $(n-2)(n+9)$ **b)** 42 **c)** $n = 2$ in $n = -9$
36. $25(x+1)^2 = (5(x+1))^2$ **37. a)** $18ab\,(3b-2a)$ **b)** 3888 **38.** Izraz poenostavimo v $(5a+b)^2$. Zato je vrednost izraza nenegativno celo število. **39. a)** $16n(n+3)$ **b)** Vrednost izraza je sestavljeno število. **c)** 0 **40. a)** $3(n+1)(n-5)$
b) Če zapišemo $n = 2k-1$, pri čemer je k celo število, potem je
$3(n+1)(n-5) = 3(2k-1+1)(2k-1-5) = 3 \cdot 2k(2k-6) = 3 \cdot 2k \cdot 2(k-3) = 12k(k-3)$.

4. RACIONALNA ŠTEVILA

1. $0{,}\overline{6} = \frac{2}{3}$



2. a) $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$, $-\frac{3}{7} > -\frac{4}{9}$, $\frac{7}{3} > \frac{9}{4}$ **b)** $-\frac{5}{6} > -\frac{7}{5}$, $\frac{5}{6} < \frac{7}{5}$, $-\frac{6}{5} < -\frac{5}{7}$
c) $\frac{3}{4} > -\frac{1}{9}$, $-\frac{3}{4} < \frac{1}{9}$, $\frac{4}{3} > -9$
3. $-\frac{11}{12} < -\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < -\frac{2}{3} < 1\frac{1}{2} < 1\frac{7}{12} < \frac{13}{8} < \frac{11}{6}$ **4. a)** $3\frac{4}{9}$
b) $\frac{11}{27}$ **c)** $8\frac{1}{4}$ **č)** $4\frac{1}{2}$

5. Ker je $\frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2} > 0$ in $b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0$, je število $\frac{a+b}{2}$ med številoma a in b. **6. a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $1\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{1}{12}$ **č)** $\frac{4}{3}$ **d)** 8 **e)** $-\frac{2}{3}$ **f)** $11\frac{3}{4}$ **7.** Ostane nam še 9028,8 EUR. **8.** Napolnimo lahko 108 pločevink. **9.** Vseh dobitnikov priznanj je bilo 24, vsi so dobili po $\frac{1}{24}$ skupnega zneska. **10.** Površina zemljišča je 940 m^2, obseg pa $135\frac{1}{6}$ m. **11. a)** $\frac{a}{b}$ **b)** $-\frac{1}{a+1}$ **c)** $-\frac{2+a}{a}$ **č)** $\frac{2(a+1)}{a+3}$ **d)** $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$ **e)** $\frac{x+3}{x(x^2+3xy+9)}$
f) $\frac{y^2}{2(x+2y)}$ **g)** $\frac{3}{x+3}$ **h)** $\frac{1}{x-1}$ **12. a)** $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{1}{a(a+2)}$ **c)** $\frac{3a+2}{a(a+1)}$ **č)** $\frac{2x+1}{6(2x-1)}$ **d)** $\frac{2}{x(x-1)}$
e) $\frac{6}{x(x+3)}$ **f)** $-\frac{a+1}{2(a-2)}$ **g)** $\frac{2(a-1)}{(a+4)(a^2+4)}$ **13.** Izraz poenostavimo in dobimo -1. **14. a)** x^2 **b)** $\frac{x+1}{x+2}$
c) $\frac{x-6}{x-3}$ **č)** $\frac{a-2}{a}$ **d)** $\frac{2-a}{4a^2}$ **e)** $\frac{a^2+2a+4}{a^2-2a+4}$ **f)** $\frac{x-1}{(x+3)^2}$ **g)** $\frac{1}{x(x-1)}$ **h)** $\frac{x}{x-2}$ **i)** $a-1$ **j)** $\frac{x-1}{x}$
k) $-\frac{1}{ab}$ **l)** $-x-2$ **15.** $\frac{10x}{x^2-2x+4}$ **16.** $\frac{x+2}{x-1}$, $\frac{1}{4}$ **17. a)** $\frac{1}{4}$ **b)** 1 **18.** $-\frac{5}{6}$
19. $(-2)^3 < -2^{-3} = (-2)^{-3} < (-3)^{-2} < 4^{-1} < (-13)^0 < (\frac{1}{4})^{-2}$ **20. a)** $a^{-4}b^6$ **b)** $2^{-5}a^9b^{-1}$ **c)** $\frac{3}{2}x^8y^{-5}$ **č)** $-\frac{1}{10}a^4b^{-6}$
d) $2^{-1}a^3b^{-2}$ **e)** $3a^6$ **f)** $3a^{-7}b^5$ **g)** $3 \cdot 2^5 \cdot x^{17}y^{-7}$ **h)** $-15 \cdot 4^{x-1}$ **21.** $3^2 \cdot 7 = 63$ **22.** $2a^{-7}b^{13}$ **23.** $2^2a^0b^3$
24. a) $\frac{(a-b)(a+b)}{ab}$ **b)** $\frac{(a-3b)(a+b)}{a^2b^2}$ **c)** $\frac{(x+6y)(x-3y)}{x^2y^2}$ **č)** $\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{a^3b^3}$
25. Da, saj je $5^{m-1} - 3 \cdot 5^{m-2} - 5^{m+1} = 5^{m-2}(5 - 3 - 5^3) = -123 \cdot 5^{m-2} = -41 \cdot 3 \cdot 5^{m-2}$. **26. a)** $\frac{7}{4}$ **b)** $\frac{1}{50}$ **c)** $\frac{29}{9}$
č) $\frac{64}{99}$ **d)** $\frac{136}{45}$ **27. a)** 20 **b)** 625 **28. a)** -1 **b)** -2 **c)** 1 **č)** $\frac{2}{3}$ **d)** 2 **e)** $-\frac{3}{16}$
29. $\frac{11}{16}$ **30.** $2^2 \cdot 3^{-1} \cdot b^2$ **31.** 127 **32.** Vrednost izraza je 128 000. **33.** $-\frac{1}{ab}$, 2 **34. a)** $x = 5$ **b)** $x = \frac{9}{4}$
c) $x = 2$ **č)** $x = -\frac{1}{2}$ **d)** $x = -17$ **35. a)** $x_1 = 1, x_2 = 0$ **b)** $x_1 = 5, x_2 = -5$ **c)** $x_1 = -4, x_2 = 0$ **č)** $x_1 = 5, x_2 = 2$
d) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 4$ **e)** $x_{1,2} = -1$ **36. a)** $x = -\frac{4}{3}$ **b)** $x = -2$ **c)** $x = 4$ **č)** $x = 7$ **37. a)** $x = -\frac{1}{4}$
b) $x = 5$ **c)** Enačba nima rešitve. **č)** $x = 1$ **d)** $x = 3$ **e)** Enačba nima rešitve. **38.** Za $x = 15$ je vrednost izraza na levi strani enačbe enaka $\frac{1}{10}$, prav toliko je vrednost izraza na desni strani enačbe. **39.** Iz $\frac{x+3}{2x(x-3)} + \frac{1}{6x} = \frac{x+3}{3x(x-3)}$ izključimo rešitvi $x \neq 0$ in $x \neq 3$, nato rešimo enačbo in dobimo $x = 0$, kar pa ni rešitev. **40.** $\mathcal{A} = \{-5, 3\}$, $\mathcal{B} = \{3\}$, $C = \{-3, 1, 3\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup C = \{-5, -3, 1, 3\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap C = \{3\}$ **41.** $n = 15$ **42.** To je $\frac{11}{16}$. **43.** Peti dan je pretekel 3600 metrov.
44. Srečala se bosta po 48 minutah. **45.** Janez je zbral 36 avtomobilov, Miha 12 in Andrej 24. **46.** V skladu je bilo zbranih 4800 EUR. Najboljši tekmovalec dobi 3200 EUR, drugi 800 EUR in tretji 600 EUR. **47.** Nakupna cena jagod je bila 6 EUR za kilogram. **48. a)** Da ima agencija pokrite stroške izleta, se ga mora udeležiti 40 oseb. **b)** Pri polni zasedenosti avtobusa ima agencija 112 EUR dobička. **49.** Petra ima 10 let. **50.** Tina ima 12 let, Jana pa 18. **51.** Dolžina igrišča je 20 m, širina pa 12 m. **52. a)** $x = -1, y = 1$ **b)** $x = 2, y = -4$ **c)** Sistem enačb nima rešitve. **č)** $x = 0, y = -2$ **d)** $x = 3, y = 2$

53. **a)** $A = -1, B = 2$ **b)** $A = 1, B = -1$ **54.** $a = 104, b = 18$ **55.** $a - 2b = 4, b + 2a = 58, a = 24, b = 10$ **56.** $n = 97$

57. $a = 458, b = 73$ **58.** Imeli smo ulomek $\frac{525}{1225}$ in smo ga krajšali s 175. **59.** 330 **60.** 30 m, 84 m **61.** 54, 18

62. Prvi stroj zmelje 120 kg moke na uro, drugi stroj pa 90 kg moke na uro. **63.** Okno stane 240 evrov, balkonska vrata pa 270 evrov. **64.** Hitrost rečnega toka je 3˙6 km/h. **65.** **a)** $x = 1, y = -1, z = 1$ **b)** $x = 1, y = -1, z = 2$ **c)** $x = 2, y = 1, z = -1$ **č)** $x = 2, y = 4, z = 5$ **66.** Bratje imajo 16, 18 in 24 let. **67.** 3˙60 EUR **68.** 22˙5 minute. **69.** 10 **70.** Prevozimo lahko še 341˙8 km. **71.** Prevozimo lahko 89˙5 km. **72.** Iz 4 kg svežih orehov smo po sušenju dobili 3 kg suhih orehov. **73.** Pridobili smo 148˙5 kJ. **74.** **a)** Energijska vrednost 15 g mlečne čokolade znaša 361˙2 kJ. **b)** Z zaužitjem 10 dkg mlečne čokolade pridobi 30 % vse potrebne energijske vrednosti. **75.** **a)** Cisterna se bo praznila 78 minut. **b)** Čas praznjenja cisterne so skrajšali za 24 minut. **76.** V 12 urah. **77.** 8 delavcev mora delati po 9 ur na dan. **78.** Šest obiralcev sadja obere 12 dreves v 5 urah in 20 minutah. **79.** Če bosta tlakovala dvorišče oba, bo delo opravljeno v 3 urah in 45 minutah. **80.** Ob 12.00. **81.** **a)** V 24 urah. **b)** V 32 urah. **82.** 274˙56 EUR **83.** 6˙8 % **84.** 7˙5 % **85.** Zmagovalec je Janez, ki je dobil 24˙1 % vseh glasov. **86.** Cena sodčka nafte je porasla za 5˙9 %. **87.** Vseh anketirancev je bilo 210, od tega 42 za Španijo, 63 za Grčijo, 21 za Italijo, 16 za Hrvaško in 68 za Korziko. **88.** 190, 142˙5, 156˙75, 43˙25; 21˙6 % **89.** 80 EUR **90.** 65 EUR **91.** **a)** 40 EUR **b)** 13˙04 % **92.** 80 EUR **93.** Ne. Cena leksikona brez popusta znaša 111˙11 EUR. **94.** 350 EUR; 17˙50 EUR **95.** 43 800 EUR **96.** **a)** 60 EUR **b)** 19˙5 %. **97.** 8 % **98.** V društvu je 40 članov. Samo balina 22 članov, samo igra pikado pa 14. **99.** 44 % **100.** 43˙75 % **101.** 3˙2 %. **102.** 1325 EUR **103.** Čez eno leto bo imel Jure na banki 2060 EUR, čez 4 leta pa 2251˙02 EUR. **104.** 16 **105.** 150 **106.** Prvi dobi 600 EUR, drugi 450 EUR in tretji 300 EUR. **107.** Žan dobi 73˙5 EUR, Jure 54˙6 EUR in Nejc 81˙90 EUR.

108. **a)**

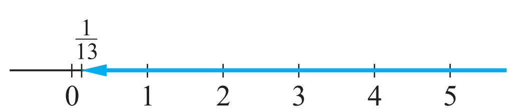
	Leto 2002	Leto 2003	Leto 2004	Leto 2005	Skupaj leta od 2002 do 2005
Tovarna *A*	1 000 000	1 120 000	1 254 400	1 404 928	4 779 328
Tovarna *B*	1 000 000	1 120 000	1 240 000	1 360 000	4 720 000

b) V letu 2005 je bila proizvodnja tovarne *A* za 3˙30 % večja od proizvodnje tovarne *B*. **c)** Skupna proizvodnja tovarne *A* je bila za 1˙26 % večja od skupne proizvodnje tovarne *B*. **109.** 3 kg **110.** 42 litrov **111.** 50 litrov **112.** Zmešati moramo 5 litrov 30 % kisline in 20 litrov 55 % kisline. **113.** $a = 60, b = 84$

5. Realna števila

1. **a)** 1˙565 **b)** 1˙6 **2.** **a)** 23˙7355 **b)** 23˙735 **3.** $a + b = 5˙31$; $a - b = 3˙45$; $a \cdot b = 4˙07$; $a : b = 4˙71$
4. $-5 < a + b < 10$, $-6 < a - b < 9$, $-18 < a \cdot b < 24$ **5.** **a)** $A = (-2, 3)$ **b)** $B = [1, 4]$ **c)** $C = (-1, 2]$ **č)** $D = (-\infty, 5)$ **d)** $E = [2, \infty)$ **6.** **a)** $(-2, 1) \cap (-1, 4) = (-1, 1)$, $(-2, 1) \cup (-1, 4) = (-2, 4)$
b) $[-4, -1] \cap [-3, 2] = [-3, -1]$, $[-4, -1] \cup [-3, 2] = [-4, 2]$ **c)** $[1, 2] \cap (-1, 1) = \emptyset$, $[1, 2] \cup (-1, 1) = (-1, 2]$
č) $(-2, \infty) \cap [-5, 5] = (-2, 5]$, $(-2, \infty) \cup [-5, 5] = [-5, \infty)$ **d)** $(-\infty, 4] \cap (2, 6) = (2, 4]$, $(-\infty, 4] \cup (2, 6) = (-\infty, 6)$
7. **a)** $A = (-3, 3) \cap [-1, 5] = [-1, 3)$ **b)** $B = (-3, 3) \cup [-1, 5] = (-3, 5]$ **c)** $C = [-1, 5] - (-3, 3) = [3, 5]$
č) $D = \mathbb{R}^+ - [-1, 5] = (5, \infty)$ **d)** $E = \mathbb{R} - (-3, 3) = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ **e)** $F = (5, \infty)$
8. **a)** $x < 4$ oz. $x \in (-\infty, 4)$

b) $x > \frac{1}{13}$ oz. $x \in (\frac{1}{13}, \infty)$



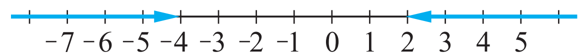
c) $x \geq 1$ oz. $x \in [1, \infty)$

9. $x \geq \frac{14}{13}$ **10.** **a)** $x \leq 0$ oz. $x \in (-\infty, 0]$ **b)** $x > \frac{7}{11}$ oz. $x \in (\frac{7}{11}, \infty)$ **c)** $x \leq -1$ oz. $x \in (-\infty, -1]$ **č)** $x > -9$ oz. $x \in (-9, \infty)$
11. Rešitev prve neenačbe je $x < 7$ oz. $A = \{x \in \mathbb{R}, x < 7\} = (-\infty, 7)$, rešitev druge neenačbe je $x > 2$ $B = \{x \in \mathbb{R}; x > 2\} = (2, \infty)$ oz. $A \cap B = (2, 7)$. **12.** **a)** $\frac{1}{3} < x < 3$ **b)** $\frac{7}{3} < x < \frac{12}{5}$ **c)** $2 < x \leq \frac{10}{3}$ **13.** $0 \leq x < 1$ oz. $x \in [0, 1)$ **14.** **a)** $x = \frac{2a+3}{5}$
b) $a > 11$ **15.** **a)** $x \leq -2m$ **b)** $m = -\frac{1}{2}$ **16.** 24 **17.** 4 **18.** **a)** -5 **b)** $-\frac{25}{36}$ **19.** $2 - \sqrt{2}$
20. **a)** $24 - \sqrt{5}$ **b)** 10 **c)** 1 **21.** **a)** $|7 - 4| = 3$ **b)** $|5 - (-1)| = 6$ **c)** $|-12 - (-3)| = 9$
22. Za $a \geq 3$ je $|a - 3| = a - 3$ ter zato $a + |a - 3| = a + a - 3 = 2a - 3$. Za $a < 3$ je $|a - 3| = -(a - 3) = -a + 3$ ter zato $a + |a - 3| = a - a + 3 = 3$.
23. Za $a > 0$ je $|a| = a$ ter zato $\frac{|a|+1}{|a|} + \frac{|a|-1}{a} = \frac{a+1}{a} + \frac{a-1}{a} = 2$. Za $a < 0$ je $|a| = -a$ ter zato $\frac{|a|+1}{|a|} + \frac{|a|-1}{a} = \frac{-a+1}{-a} + \frac{-a-1}{a} = -\frac{2}{a}$.
24. **a)** $x_1 = 5, x_2 = -5$ **b)** $x_1 = 3, x_2 = -3$ **c)** Enačba nima rešitve. **č)** $x_1 = 3, x_2 = -1$ **d)** $x_1 = 4, x_2 = 2$
e) $x_1 = -\frac{5}{9}, x_2 = -\frac{7}{9}$ **f)** $x = 0$ **g)** $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$ **h)** Enačba nima rešitve. **i)** $x_1 = -7, x_2 = \frac{3}{5}$ **j)** $x_1 = 1, x_2 = -3$

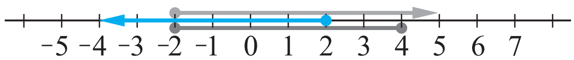
25. **a)** $x \in (-1, 7)$ **b)** $x \in [-5, 1]$ **c)** $x \in (1, \frac{5}{3})$ **č)** $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ **d)** $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$
e) $x \in (-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$

26. $A = \{x \in \mathbb{R};\ |x - 2| < 3\} = \{x \in \mathbb{R};\ -1 < x < 5\} = (-1, 5)$

27. $B = \{x \in \mathbb{R};\ |x - (-1)| > 3\} = \{x \in \mathbb{R};\ |x + 1| > 3\} = (-\infty, -4) \cup (2, \infty)$



28. **a)** $A = \{x \in \mathbb{R};\ -4 < x \le 2\} = (-4, 2]$, $B = \{x \in \mathbb{R};\ -2 \le x < 5\} = [-2, 5)$, $C = \{x \in \mathbb{R};\ |x - 1| \le 3\} = [-2, 4]$



b) $A \cap B = [-2, 2]$, $A \cup B = (-4, 5)$ **c)** $C \not\subset A$, $C \subset B$

29. **a)** 51 **b)** 60 **30.** **a)** $9\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $5\sqrt{3}$ **č)** $5\sqrt[3]{3}$ **31.** **a)** $(x - 3)(x + 3)$ **b)** $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
c) Dani izraz v množici realnih števil se ne da razstaviti. **č)** $(x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2})$ **d)** $(x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$
e) $(x + 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ **32.** **a)** $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$ **b)** $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$ **33.** **a)** $3\sqrt{6}$ **b)** $9 + 2\sqrt{2}$
c) -15 **č)** -30 **d)** 12 **e)** -21 **f)** $\frac{2}{15}$ **34.** $\frac{7}{15}\sqrt{\frac{2}{3}}$ **35.** **a)** $0^{\cdot}56$ **b)** 5 **36.** $26 - 15\sqrt{3}$

37. Da, 13. **38.** **a)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **b)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **c)** $2 + \sqrt{3}$ **č)** $3 + \sqrt{2}$ **d)** $-7 - 3\sqrt{3}$ **e)** $19 - 6\sqrt{10}$ **39.** Da.

40. $B : A = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, $\frac{B^2}{A} = \frac{-4 + 3\sqrt{2}}{8}$ **41.** **a)** $7\sqrt{3} - 2$ **b)** $\sqrt{2} - 3$ **42.** $1 - 3\sqrt{3}$ **43.** $11\sqrt{2} - 8$ **44.** **a)** $\sqrt{a} - \sqrt{b}$
b) $\frac{17}{6}$ **45.** **a)** $x = 2$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = -1$ **č)** $x = 5$ **d)** $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ **e)** $x = 2$ **f)** $x = 3\sqrt{2}$
46. $x_1 = 16$, $x_2 = 1$ **47.** **a)** $x = -2$ **b)** $x = -2$ **c)** $x = 0$ **č)** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ **d)** $x = 4$ **e)** $x = 9$
48. **a)** $A = \{-4, 6\}$ **b)** $B = (1, 5)$ **c)** $C = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ **č)** $D = \{1, 3\}$, $B \cap D = \{3\}$ **49.** **a)** 2 **b)** $5\sqrt{5}$
c) $2 \cdot \sqrt[4]{2}$ **č)** $\sqrt[3]{3}$ **d)** 4 **e)** 3 **f)** $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ **50.** **a)** $a \cdot \sqrt[12]{a}$ **b)** $\sqrt{a}$ **c)** $4\sqrt{a}$ **č)** $a\sqrt[12]{a}$
d) $\sqrt[6]{2^5 a b^{-1}}$ **e)** $\sqrt[4]{a^2 b^3}$ **f)** $\sqrt[3]{\frac{2a}{b^2}}$ **g)** $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$ **51.** 7 **52.** $\frac{3\sqrt{a}}{b}$, 6 **53.** **a)** $2\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{8}{3}$ **c)** 1
č) 101 **d)** 8 **e)** 40 **54.** **a)** a^{-1} **b)** a^{-2} **c)** a **č)** $a^{\frac{1}{3}}$ **55.** **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** 4

56. $\left(\frac{(-3)^0}{5}\right)^{-2} \cdot 7^{\frac{1}{2}} + \frac{75}{2 - \sqrt{7}} + 2 \cdot 0{,}008^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot \sqrt{7} + \frac{75(2 + \sqrt{7})}{(2 - \sqrt{7})(2 + \sqrt{7})} + 2 \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-\frac{2}{3}} = 25\sqrt{7} - 50 - 25\sqrt{7} + 2 \cdot 25 = 0$

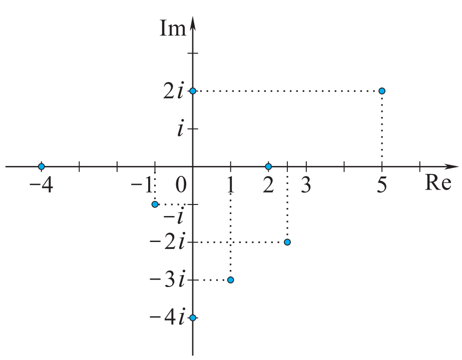
57. $3^{-1} \cdot a^{-\frac{21}{4}} \cdot b^{\frac{17}{12}}$ **58.** **a)** $a^{-\frac{1}{4}} b^{-1}$ **b)** 1 **59.** $x = 1000$ **60.** $3x\sqrt{x}$, 81

61. $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} - 3a^{\frac{2}{3}}}\right) \cdot (1 - 3a^{-1}) = \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}(a - 3)}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{a}\right) = \frac{1}{a - 3} \cdot \frac{a - 3}{a} = \frac{1}{a} = a^{-1}$

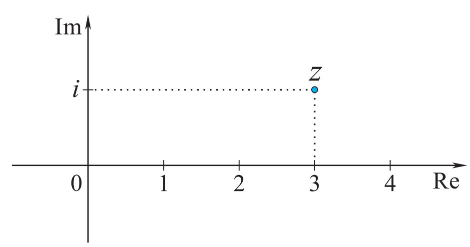
6. Kompleksna števila

1. $\mathrm{Re}\,(9 - 3i) = 9$, $\mathrm{Im}\,(9 - 3i) = -3$, $\mathrm{Re}\,(3 + i) = 3$, $\mathrm{Im}\,(3 + i) = 1$, $\mathrm{Re}\,(-6 - 2i) = -6$, $\mathrm{Im}\,(-6 - 2i) = -2$, $\mathrm{Re}\,(1) = 1$, $\mathrm{Im}\,(1) = 0$
$\mathrm{Re}\,(-10i) = 0$, $\mathrm{Im}\,(-10i) = -10$

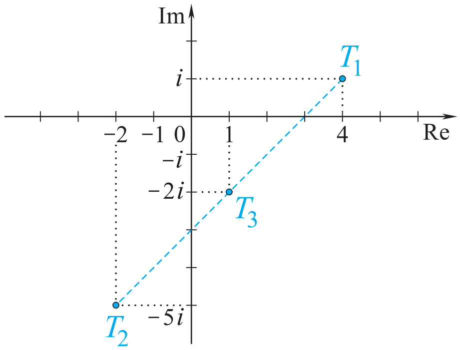
2.



3. $z = -2 + 7i$. **4.** $z = 3 + i$

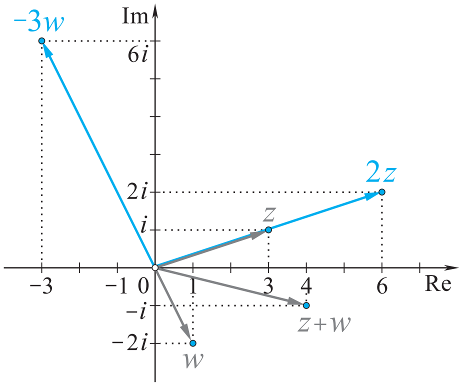


5. $T_3 = 1 - 2i$



6. **a)** -1 **b)** $-6 + 4i$ **7.** $-2i$

8.



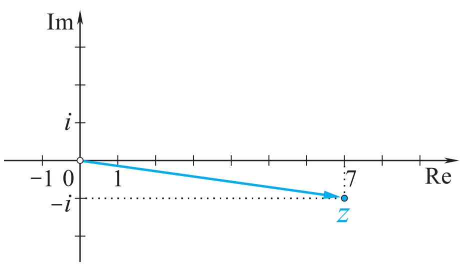
9. **a)** $x = 3, y = -5$ **b)** $x = 2, y = -1$ **10.** $z + w = 14 + 2i$, $z - w = 8i$, $z^2 = 24 + 70i$, $z \cdot w = 64 + 14i$ **11.** **a)** $14 + 2i$ **b)** $\frac{65}{4}i$ **c)** $9 + 5i\sqrt{3}$ **č)** $8 - 6i$ **d)** $-2 - \frac{3}{2}i$ **e)** $-11 - 2i$ **12.** $16i$ **13.** **a)** $6 + 10i$ **b)** $-11 - i$ **c)** $1 - 4i$ **č)** $14 - 35i$ **14.** $z = -46 - 9i$, $\mathrm{Im}\, z = -9$ **15.** $-4 - 4i$ **16.** $x = 8$ **17.** $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

18. **a)** $(x - 2)(x + 2)$ **b)** $(a + bi)(a - bi)$ **c)** $(3x + 10)(3x - 10)$ **č)** $(4x + i)(4x - i)$ **d)** $(0{\cdot}5x + i)(0{\cdot}5x - i)$ **e)** $(x\sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ **f)** $a(a - i\sqrt{3})(a + i\sqrt{3})$ **g)** $(x + 1)(x + 2i)(x - 2i)$ **h)** $(x + 1)(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})$ **i)** $(x - 3)(x + 3)(x - 2i)(x + 2i)$ **19.** **a)** $x_1 = 5, x_2 = -5$ **b)** $x_1 = 5i, x_2 = -5i$ **c)** $x_1 = \frac{5}{3}i, x_2 = -\frac{5}{3}i$ **č)** $x_1 = 0, x_2 = 4i, x_3 = -4i$ **d)** $x_1 = i\sqrt{6}, x_2 = -i\sqrt{6}$ **e)** $x_1 = 2i\sqrt{2}, x_2 = -2i\sqrt{2}$ **f)** $x_1 = -1, x_2 = 3i, x_3 = -3i$ **g)** $x_1 = 1, x_2 = 3i\sqrt{2}, x_3 = -3i\sqrt{2}$

20. $z + \bar{z} = 10$, $z - \bar{z} = -6i$, $z \cdot \bar{z} = 34$, $(\bar{z})^2 = 16 + 30i$ **21.** $z + 2w = 1 - 6i$, $\overline{z - w} = -8 - 6i$, $\overline{z - w} - w^2 = 2 + 22i$, $z \cdot \overline{w} - 4z^2 = -107 + 66i$ **22.** **a)** $15 + 9i$ **b)** $18 - 3i$ **23.** $z = 5 + 7i$ **24.** $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = -5 - 4i$ **25.** $z = 2 - 4i$

26. $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 2 + i$ **27.** $x = 26$ **28.** $z^{-1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ **29.** **a)** $3 + 4i$ **b)** $4 + 3i$ **c)** $-1 - 3i$ **č)** $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

30. $7 - i$



31. **a)** $\frac{4}{5}$ **b)** $-\frac{1}{2} + 5i$ **c)** $1 - \frac{1}{2}i$ **32.** 4

33. $\mathrm{Re}\, z = -1$, $\mathrm{Im}\, z = -2$ **34.** $z_1 = 3\overline{z_2} = \frac{7}{2} - 6i$, $z_1 \cdot z_2 = 4 + \frac{i}{2}$, $z_1 : z_2 = -\frac{8}{5} - \frac{14}{5}i$ **35.** **a)** $-31 - 20i$ **b)** $-1 - 2i$ **36.** $z = 8 - 2i$, $\mathrm{Im}\, z = -2$ **37.** $a = 5$ **38.** **a)** $|4 - 3i| = 5$ **b)** $|1 - i| = \sqrt{2}$ **c)** $|24 - 7i| = 25$ **č)** $|-3 - 6i| = 3\sqrt{5}$ **d)** $|-2 + 2i\sqrt{2}| = 2\sqrt{3}$ **39.** $a_1 = 2$, $a_2 = -2$ **40.** $\overline{z_2} = 4 + 3i$, $|z_1| = 5\sqrt{10}$ in $\frac{z_1}{z_2} = 1 + 3i$

41. $w = \frac{12}{5} - \frac{21}{5}i$ **42.** $64 - 104i$ **43.** **a)** $z = 3 - i$, $w = -2 + i$ **b)** $\sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ **c)** $z \cdot w + \frac{z}{\overline{w}} = -6 + 6i$

44. $|z| = \frac{1}{5}$ **45.** $\left|\frac{2i}{1 - i\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{2i(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}\right| = \left|\frac{2i(1 + i\sqrt{3})}{4}\right| = \left|\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right| = \frac{\sqrt{3 + 1}}{2} = 1$ **46.** $10 - 3i$ **47.** **a)** $14 - 3i$ **b)** $17 + 4i$ **48.** $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = -4 - 3i$ **49.** $z_1 = -6 + i$, $z_2 = 4 + i$ **50.** Oglišča kvadrata so $z_1 = 4i$, $z_2 = -4i$, $z_3 = 4$, $z_4 = -4$. Stranica kvadrata meri $4\sqrt{2}$.

7. Osnove geometrije

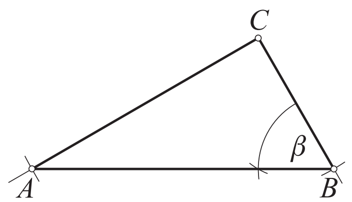
1. Konveksne so množice A, B, D in E. **2.** Pari sosednjih kotov so α, β; β, γ; γ, δ; δ, η in η, α. Pari sokotov so β, γ in δ, γ. Sovršna pa sta kota β in δ. **3.** **a)** $\alpha + \beta = 161°3'$, $\alpha - \beta = 47°47'$ **b)** $\gamma + \delta = \frac{2\pi}{3}$, $\gamma - \delta = \frac{\pi}{3}$ **4.** **a)** $\beta = 55°41'$, $\gamma = 145°41'$ **b)** $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{3\pi}{4}$ **5.** **a)** $\alpha = 1{\cdot}2479$ **b)** $\beta = 2{\cdot}1588$ **c)** $\delta = 0{\cdot}4413$ **č)** $\gamma = 1{\cdot}5293$ **6.** **a)** $\alpha = 30{\cdot}0287° = 30°1'44''$ **b)** $\gamma = 60°$ **c)** $\delta = 150°$ **č)** $\beta = 85{\cdot}9437° \doteq 85°56'37''$ **7.** $\alpha = 65°$ **8.** $\alpha = 80°$ **9.** **a)** $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 40°$, $\delta = 140°$ **10.** Osnovnica meri 30 cm, kraka pa 40 cm. **11.** Velja $\Delta BAD \cong \Delta ABE$ in $\Delta DCB \cong \Delta ECA$. Ker je $\Delta BAD \cong \Delta ABE$, je $|AD| = |BE|$. **12.** Ker je $\Delta CVB \cong \Delta DVA$, je trikotnik CDV enakokrak.

13. **a)** $\triangle ABT \cong \triangle ADT$, ker imata trikotnika paroma skladne stranice. **b)** Točka T leži na diagonali AC, saj je $\measuredangle TAB \cong \measuredangle TAD$ in oba merita 45°. **14.** / **15.** Točka T je presečišče simetrale kota in simetrale daljice BC. **16.** / **17.** Simetrala kota. **18.** / **19.** / **20.** Narišemo daljico AB in krožnico s središčem v točki A in polmerom 2·5 cm. Na poltraku, ki gre skozi točko B in ima vrh v točki A, poiščimo točko C, za katero je $d(B, C) = 2{\cdot}5$ cm. Tangenta na krožnico je simetrala daljice AC. **21.** / **22.** / **23.** / **24.** / **25.** / **26.** / **27.** / **28.** / **29.** / **30.** / **31.** / **32.** / **33.** / **34.** / **35.** / **36.** / **37.** / **38.** / **39.** / **40.** / **41.** **a)** $\alpha = 23°6'$, $\gamma = 62°29'$, $\alpha' = 156°54'$, $\beta' = 85°35'$ **b)** $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{11\pi}{24}$, $\alpha' = \frac{5\pi}{8}$, $\gamma' = \frac{13\pi}{24}$ **42.** $\beta = 49°21'$, $\gamma = 82°15'$ **43.** $\alpha = 36°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 84°$, $\varepsilon = 54°$ **44.** $\alpha = 63°2'$, $\beta = 69°7'$, $\varphi = 47°55'$ **45.** $\alpha = 90°36'$, $\beta = 53°52'$, $\alpha' = 89°24'$, $\gamma' = 144°29'$, $\varphi = 44°42'$ **46.** 100° **47.** 105°, 45°, 30°, $\measuredangle ASB = 60°$ **48.** 72°, 48°, 60° **49.** $\measuredangle ABC = 35°$, $\measuredangle ACB = 90°$, $\measuredangle BAC = 55°$, $\measuredangle SCA = 55°$, $\measuredangle SCB = 35°$, $\measuredangle CSB = 110°$ **50.** $|AD| : |DF| = 5 : 4$ **51.** / **52.** / **53.** Ker imata trikotnika paroma skladne kote, sta podobna. **54.** Ker je 30 : 18 = 20 : 12 = 25 : 15 = 5 : 3, sta trikotnika podobna. Koeficient podobnosti je $\frac{5}{3}$. **55.** $a' = 8$ cm **56.** 10 cm, 20 cm, 25 cm **57.** $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, $|DE| = 6$ cm **58.** 1·5 cm, 4·5 cm **59.** 121 cm, 132 cm, 143 cm **60.** $d(A, B) = 7$ km, $d(B, C) = 4$ km, $d(A, C) = 5$ km, $a' = 1{\cdot}6$ cm, $b' = 2$ cm, $c' = 2{\cdot}8$ cm **61.** $|EF| = 8$, $|DE| = 9$ **62.** $\triangle AEB \sim \triangle FGD$, $|AE| = 15$ cm **63.** Trikotnik AEF je enakostraničen, tako da vsi notranji koti merijo 60°, stranice pa 10 cm. **64.** $\triangle AFD \cong \triangle BFE \cong \triangle CDE$, $|AE| = 24$ cm **65.** 6 cm, 2 cm. **66.** $|CD| = 6$ cm **67.** $|DC| = 8$ cm **68.** $c = 12$ cm, $R = \frac{c}{2} = 6$ cm **69.** $a = b = 9\sqrt{2}$ cm **70.** $x = 14$ **71.** $a = b = 4\sqrt{2}$ cm, $c = 8$ cm **72.** $a = 10$ cm, $b = 24$ cm **73.** $a = 4\frac{5}{7}$ cm, $c = 9\frac{2}{7}$ cm **74.** 1·5 dm, 3·6 dm **75.** $a = b = 39$ cm **76.** $v = 6\sqrt{3}$ cm, $a = 10\sqrt{3}$ cm **77.** $b = 9$ cm **78.** $d = 8\sqrt{2}$ cm, $a = 10\sqrt{2}$ cm $\doteq 14{\cdot}1$ cm **79.** $e = 30$ cm **80.** $v = 6$ cm **81.** $b = 3$ cm, $c = 3{\cdot}75$ cm **82.** $r = \frac{15}{8}$ cm $= 1{\cdot}875$ cm **83.** Druga kateta meri 16 cm, notranja kota pa 36°52′ in 53°8′. **84.** $|AC| = 7$ cm, $\measuredangle CBA = 16°16'$ **85.** $v = 21{\cdot}95$ m **86.** $\beta = 22°37'$, $\alpha = 67°23'$, $c = 13$ dm, $v_c = 4{\cdot}62$ dm **87.** $c = 49{\cdot}7$ dm, $a_1 = 15{\cdot}8$ dm **88.** $\alpha = 14{\cdot}48°$, $\beta = 75{\cdot}52°$, $b = 8\sqrt{15} \doteq 30{\cdot}98$ cm, $c = 32$ cm **89.** $\gamma = 96{\cdot}4°$, $\alpha = \beta = 41{\cdot}8°$, $c = 4\sqrt{5}$ cm **90.** $a = 4$, $\gamma = 90°$ **91.** $c = 32{\cdot}9$ cm **92.** $v_c = 1{\cdot}68$ dm, $v_a = 1{\cdot}29$ dm **93.** $c = 4\sqrt{11}$ cm, $\alpha = \beta = 56°27'$, $\gamma = 67°13'$ **94.** $d = 24$ cm, $b = 12\sqrt{3}$ cm, $S = 144\sqrt{3}$ cm^2 **95.** $|DE| = 10$ cm, $|AE| = 13{\cdot}45$ cm, $\varphi = 48°1'$ **96.** $|AE| = 8{\cdot}06$ dm, $\varphi = 74{\cdot}74°$ **97.** $v_a = 4{\cdot}35$ cm **98.** $\alpha = \gamma = 72°13'$, $\beta = \delta = 107°47'$, $\varphi = 17°47'$ **99.** $v = 8{\cdot}49$ cm, $f = 9{\cdot}18$ cm **100.** $a = 3{\cdot}15$ cm, $f = 1{\cdot}92$ cm **101.** $v = 7{\cdot}25$ cm **102.** $\alpha = \beta = 63°26'$, $\gamma = \delta = 116°43'$ **103.** $\alpha = 131°49'$, $v = 2\sqrt{5}$ cm **104.** $f = 12{\cdot}3$ cm, $\measuredangle ABC = 28°57'$ **105.** $a = 8\sqrt{3}$ cm **106.** $b = 26{\cdot}6$ cm, $v_b = 10{\cdot}7$ cm **107.** $a = 40{\cdot}3$ cm **108.** $t = 13{\cdot}86$ cm, $l = 16{\cdot}76$ cm **109.** $|AB| = 11{\cdot}6$ cm, $l = 4\pi$ cm $\doteq 12{\cdot}6$ cm **110.** $t = 14$ cm, $d = 5$ cm **111.** $l = 8\pi$ cm $\doteq 25{\cdot}1$ cm **112.** $t = 1{\cdot}78$ dm **113.** $t = 30{\cdot}64$ cm **114.** $\varphi = 47°45'$ **115.** $\varphi = 17°27'$ **116.** Točka A opiše lok dolžine 20·2 cm, točka B opiše lok dolžine 11·0 cm. **117.** 45°, 60°, 75°; 47·12 mm, 62·83 mm, 78·54 mm **118.** $d = 10{\cdot}5$ cm **119.** $\varphi = 162°$, $N = 170$ **120.** Osemkotnik ima 20 diagonal. **121.** $|AC| = 3\sqrt{3}$ cm, $|AD| = 6$ cm, $\varphi = 30°$ **122.** $\alpha = 108°$, $a = 11{\cdot}62$ cm **123.** $a = 20{\cdot}5$ cm

8. METRIČNA GEOMETRIJA V RAVNINI

1. $S = 196$ cm^2 **2.** $S = 33{\cdot}75$ m^2 **3.** 8 dm, 5 dm **4.** $S = 42{\cdot}04$ cm^2 **5.** $\alpha = 80°18'$, $S = 62{\cdot}1$ cm^2 **6.** $S = 1638$ cm^2 **7.** $a = 10$ cm, $b = 4$ cm, $e = 13{\cdot}1$ cm **8.** $a = 30$ mm, $S = 864$ mm^2 **9.** $S = 32\sqrt{3}$ dm^2 **10.** $S = 96$ cm^2 **11.** **a)** $e = 24$ cm, $a = 13$ cm **b)** $v = 9{\cdot}2$ cm, $\alpha = 45°14'$ **12.** $S = 360$ cm^2, $c = 38{\cdot}4$ cm **13.** 35·7 % **14.** 8 dm, 15 dm in 17 dm **15.** $S = 173{\cdot}2$ cm^2, $a = 15{\cdot}2$ cm **16.** $v = 15{\cdot}65$ cm, $S = 219{\cdot}1$ cm^2 **17.** $a' = 20$ cm, $S' = 192$ cm^2 **18.** $c' = 8$ cm **19.** 8 cm **20.** $\beta = 87°16'$ **21.** $c = 7{\cdot}2$ cm, $v_a = 5{\cdot}8$ cm **22.** $v = 2{\cdot}3$ cm, $|AC| = 7{\cdot}3$ cm **23.** $a = 10$ cm, $f = 7{\cdot}68$ cm **24.** **a)** $c = 5{\cdot}85$ cm **b)** $|AD| = 13{\cdot}95$ cm **25.** **a)** $v = 2{\cdot}8$ cm, $S = 14{\cdot}1$ cm^2 **b)** $f = 3{\cdot}6$ cm **c)** Poveča se za 7·5 %. **26.** $\varphi = 75°31'$ **27.** $d = 19{\cdot}8$ cm **28.** $|AB| = 33{\cdot}9$ cm **29.** **a)** $\gamma = 130°$ **b)** $c = 4{\cdot}3$ cm **c)** $|BE| = 6{\cdot}56$ cm **30.** $|AB| = 4{\cdot}36$ cm, $|CD| = 4{\cdot}07$ cm, $\measuredangle CDA = 47°4'$ **31.** **a)** $c = \sqrt{21}$ cm **b)** $t_a = \sqrt{19}$ cm **c)** 3 : 5 **32.** **a)** $o = 38$, $S = 59{\cdot}9$ cm^2 **b)** $\gamma = 92°52'$ **33.** Ploščina trikotnika meri $15\sqrt{3}$ cm^2, tretja stranica pa meri $2\sqrt{19}$ cm. **34.** 56°27′ **35.** $S = 6\sqrt{6}$ cm^2, $v_a = \frac{12\sqrt{6}}{5}$ cm **36.** $a = 33{\cdot}2$ cm, $\beta = 42°8'$, $\alpha = 62°52'$ **37.** $b = 2{\cdot}08$ dm, $c = 1{\cdot}80$ dm **38.** I. $a = 10{\cdot}6$ cm, $\gamma = 75°11'$, $\alpha = 39°49'$ II. $a = 2{\cdot}9$ cm, $\gamma = 104°49'$, $\alpha = 10°11'$ **39.** **a)** $\alpha = 60°$, $\beta = 40°$, $\gamma = 80°$ **b)** $a = 10{\cdot}55$ cm, $b = 7{\cdot}83$ cm **40.** I. $c = 1{\cdot}41$ cm, $o = 12{\cdot}41$ cm, $S = 2{\cdot}72$ cm^2, II. $c = 7{\cdot}78$ cm, $o = 18{\cdot}78$ cm, $S = 15{\cdot}00$ cm^2 **41.** $\alpha = 35°29'$, $\gamma = 76°16'$, $c = 8{\cdot}36$ cm, $r = 1{\cdot}8$ cm, $R = 4{\cdot}3$ cm, $S = 19{\cdot}41$ cm^2

42. **a)**



b) $\alpha = 38°13'$, $\gamma = 81°47'$, $c = 8$ cm, $S = 17{\cdot}3$ cm^2

43. $\alpha = 53°8'$, $R = \frac{25}{8}$ cm $= 3{\cdot}125$ cm **44.** $\gamma_1 = 30°$ ali $\gamma_2 = 150°$

45. $9{\cdot}15$ cm in $4{\cdot}50$ cm **46.** $r = 3$ cm **47.** Ploščina trikotnika se zmanjša za 9 %. **48.** $a = 20$ cm, $c = 24$ cm **49.** **a)** $a = 25{\cdot}3$ cm, $\alpha = 87°39'$, $\beta = 27°1'$ **b)** $S = 132{\cdot}1$ cm^2 **c)** $r = 4{\cdot}4$ cm, $R = 12{\cdot}7$ cm **č)** $b' = 0{\cdot}5$ cm

50. **a)** $\alpha = 53°8'$, $\beta = 78°17'$, $\gamma = 48°35'$ **b)** $S = 7{\cdot}3$ cm^2

51. $S = 96$ dm^2, $o = 20$ dm + 10 dm + 12 dm + 6 dm = 48 dm

52. $v = 4{\cdot}8$ cm, $S = 26{\cdot}4$m^2 **53.** $S = 912$ cm^2, $b = d = 25$ cm **54.** $S = 24$ cm^2, $e = 7{\cdot}2$ cm, $\gamma = 126°52'$ **55.** $v = 8{\cdot}4$ cm, $S = 92{\cdot}4$ cm^2 **56.** $S = 56$ cm^2, $\measuredangle BAE = 53°8'$ **57.** 13 : 11 **58.** $a = 5$ cm, $b = 12$ cm **59.** **a)** $\alpha = 50°17'$ **b)** $|AB| = 31{\cdot}4$ cm, $|CD| = 17{\cdot}4$ cm **60.** $S = 144$ cm^2 **61.** $e = 2$ cm, $f = 70$ cm **62.** Izračunajte ploščino deltoida $ABCD$, za katerega je $|AB| = 24$ cm, $|AD| = 7$ cm in $|BD| = 25$ cm. **63.** $S = 786{\cdot}8$ mm^2 **64.** $o = 21{\cdot}4$ cm, $S = 32{\cdot}1$ cm^2

65. **a)** $R = \frac{c}{2} = 3$ cm **b)** Ploščina kroga je večja od ploščine trikotnika za $81{\cdot}4$ %. **66.** $d = 8$ cm **67.** **a)** $l = 10{\cdot}5$ dm **b)** $S = 31{\cdot}4$ dm^2 **68.** $l = 1$ m, $S = 2$ m^2 **69.** $135°$, $o = (9\pi + 24)$ cm $\doteq 52{\cdot}27$ cm **70.** $S = 5{\cdot}6$ cm^2 **71.** $S = 6{\cdot}9$ cm^2, $o = 14{\cdot}76$ cm **72.** $r = 5{\cdot}74$ cm, $S = 38{\cdot}8$ cm^2 **73.** $144°$, $N = 35$, $S = 423{\cdot}2$ cm^2 **74.** $a = 8{\cdot}68$ cm, $S = 273{\cdot}6$ cm^2 **75.** $S = 3{\cdot}32$ m^2 **76.** $S = 656$ cm^2 **77.** Vse 5-kotnikove diagonale so enako dolge in merijo $1{\cdot}62$ m.

9. METRIČNA GEOMETRIJA V PROSTORU

1. $V = 112{\cdot}5$cm^3, $V' = 1000V = 112\,500$ cm^3 $= 112{\cdot}5$ dm^3 **2.** $v = 10$ cm, $P = 592$ cm^2 **3.** $\varphi = 50°12'$ **4.** $|AC| = 5$ dm, $|AG| = 13$ dm, $\varphi = 67°23'$ **5.** $a = 18$ cm, $b = 27$ cm, $c = 36$ cm **6.** $V = 2197$ cm^3 **7.** $V = 157\,464$ cm^3. V zaboj lahko zložimo 216 kock z robom 8 cm. **8.** $\measuredangle BEC' = 63°26'$ **9.** $|BI| = 5$ cm, $|IJ| = 8$ cm, $|IK| = 8$ cm **10.** **a)** $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 60°$ **b)** $b = 13{\cdot}66$ cm, $c = 12{\cdot}25$ cm **c)** $V = 295{\cdot}8$ cm^3 **11.** $v = 8$ cm, $V = 480$ cm^3, $P = 424$ cm^2 **12.** $\measuredangle BDC = 25{\cdot}8°$ **13.** $a = 4$ cm, $P = 203$ cm^2 **14.** $P = 1130$ cm^2, $\varphi = 135°$ **15.** **a)** $f = 9{\cdot}82$ cm **b)** $v = 9{\cdot}78$ cm, $V = 955$ cm^3 **16.** $P = 680$ cm^2 **17.** $V = 4608$ cm^3 **18.** $P = 384$ cm^2, $V = 384$ cm^3 **19.** $V = 231$ cm^3 **20.** $V = 420$ cm^3, $P = 398{\cdot}2$ cm^2 **21.** $P = 430{\cdot}9$ cm^2, $V = 632{\cdot}7$ cm^3 **22.** $V = 60{\cdot}3$ cm^3 **23.** $\varphi = 109°28'$ **24.** $V = 2$ dm^3 **25.** $P = 325{\cdot}15$ cm^2 **26.** $V = 46{\cdot}5$ dm^3 **27.** **a)** $\beta = 53°25'$, $\gamma = 66°35'$, $a = 7{\cdot}55$ cm, $S = 24{\cdot}25$ cm^2 **b)** $V = 97$ cm^3 **28.** $v = 4{\cdot}89$ cm, $V = 31{\cdot}5$ cm^3 **29.** Tretja stranica piramide meri $2\sqrt{3} \doteq 3{\cdot}46$ dm, $V = 2{\cdot}58$ dm^3. **30.** $V = 32$ cm^3 **31.** **a)** $S = 110$ cm^2 **b)** $v_s = 6{\cdot}93$ cm, $v = 4{\cdot}2$ cm **c)** $\varphi = 37°18'$ **č)** $V = 154$ cm^3, $P = 249$ cm^2 **32.** $V = 0{\cdot}28$ m^3, $P = 3{\cdot}91$ m^2 **33.** $P = 271{\cdot}2$ dm^2, $V = 344{\cdot}8$ dm^3 **34.** $r = 16$ dm, $V = 16\,085$ dm^3 **35.** $V = 8143$ cm^3 **36.** $V = 69{\cdot}7$ cm^3, $P = 173{\cdot}1$cm^2 **37.** $V = 686\pi$ cm^3 **38.** $r = 5{\cdot}42$ cm, $v = 10{\cdot}84$ cm **39.** $V = 8363$ cm^3 **40.** V loncu je približno 10 litrov vode. **41.** **a)** $v = 32{\cdot}5$ cm **b)** $34{\cdot}7$ dm^2 **42.** **a)** $V = 1{\cdot}5$ litra **b)** $a = 197$ mm, $b = 112$ mm **c)** $P = 332\,964$ mm^2 $\doteq 33{\cdot}3$ dm^2, $V = 1{\cdot}1$ litra

43. **a)** $a = 3$ cm, $v = 12$ cm, $V = 108$ cm^3 **b)** $r = 1{\cdot}91$ cm, $v = 12$cm, $V = 138$ cm^3 **c)** Za $21{\cdot}7$ %.

44. **a)** $V = V_k - V_v = 125\,000$ cm^3 $- 98\,175$ cm^3 $= 26\,825$ cm^3 **b)** $p = 21{\cdot}46$ % **c)** $P = 11\,780$ cm^2 **45.** $P = 1005$ dm^2

46. Prostornina valja je za $39{\cdot}5$ % manjša od prostornine prizme. **47.** $P = 120$ dm^2, $V = 81$ dm^3 **48.** $V = 3{\cdot}5$ m^3, $S_{pl} = 9{\cdot}8$ m^2

49. $P = 96\pi$ cm^2, $V = 96\pi$ cm^3, $\varphi = 73°44'$ **50.** $P = 731$ cm^2, $V = 216\pi$ cm^3 $= 697$ cm^3 **51.** $V = 226{\cdot}7$dm^3, $P = 235{\cdot}6$ dm^2

52. $P = 3{\cdot}64$ m^2 **53.** $P = 938{\cdot}3$ cm^3 **54.** $v = 93{\cdot}3$ cm, $V = 61\,065$ cm^3 **55.** $P = 603{\cdot}2$ dm^2 **56.** $r = 2$ cm, $v = 2\sqrt{3}$ cm, $V = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3 **57.** $r = 6$ cm **58.** $r = 8$ cm, $S_{pr} = 19\sqrt{3}$ cm^2, $V = \frac{256\pi}{3}$ cm^3 **59.** $V = 1{\cdot}8$ dm^3 $= 1{\cdot}8$ litra **60.** $S_{pl} : S_o = 2 : 1$

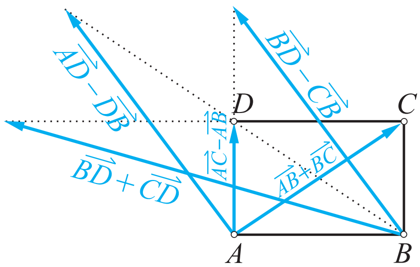
61. $v = 16$ cm **62.** $P = 15{\cdot}6$ dm^2, $V = 5{\cdot}8$ dm^3 **63.** **a)** $P = 380{\cdot}1$ cm^2, $V = 221{\cdot}8$ cm^3 **b)** $m = 1198{\cdot}9$ g $\doteq 1{\cdot}2$ kg

64. $V = 0{\cdot}094$ m^3 **65.** $2R = 1{\cdot}24$ m **66.** Lunina prostornina je 2 % prostornine Zemlje. **67.** $r = 87{\cdot}36$ cm, $v = 174{\cdot}72$ cm

68. $S_{pr} = 27\pi$ cm^2

10. VEKTORJI

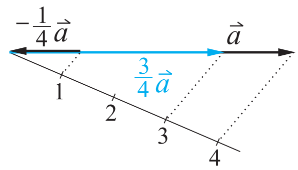
1.



2. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD'}$,

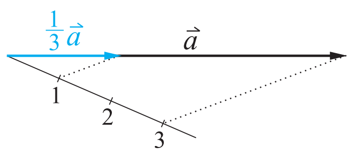
$\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{A'A} = \vec{0}$, $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{B'A'}$

3.

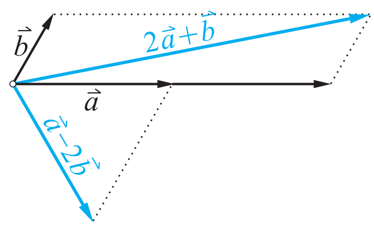


4. $2\vec{e} - \frac{1}{3}(\vec{f} + 4\vec{e}) = \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

5. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{a} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})\vec{a} = \frac{2}{6}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a}$

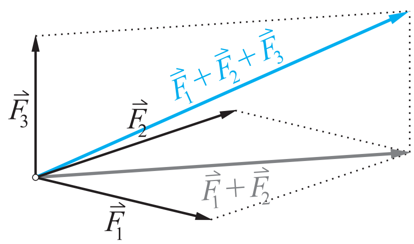


6.



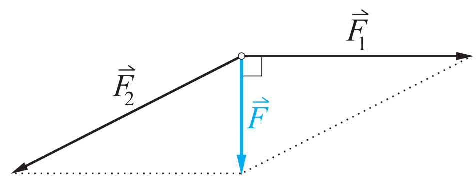
7. /

8. **a)** **b)** $\vec{F} = \vec{F}_1$

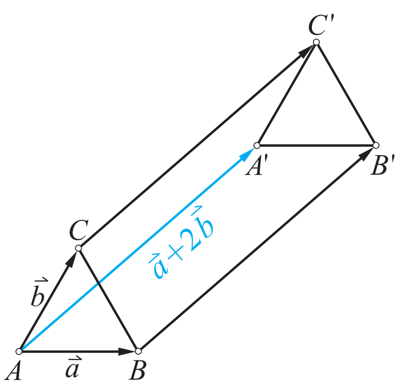


9. $F_1 = 580$ N, $F_2 = 230$ N

10. $F_2 \doteq 45$ N, $\varphi \doteq 63°$



11. Vektor $\vec{e} = \frac{1}{3}\vec{a}$ je enotski vektor v smeri vektorja $\vec{a}$.



12. **a)** $\vec{b} = 3\vec{a}$, $\vec{c} = -2\vec{a}$, $\vec{d} = 3\vec{a}$, $\vec{e} = -\vec{a}$

b) $\vec{b} = \vec{d}$, $\vec{e} = \frac{1}{3}\vec{d}$, $\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{d}$

13. $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}$

14. $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

15. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{a}$,

$\overrightarrow{BE} = -\frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b}$

16. $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = 2\vec{a} - \vec{b}$,

$\overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{BE} = -\frac{5}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

Ker je $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$, je $m = -\frac{1}{4}$, $n = -\frac{3}{4}$.

17. $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

18. $\overrightarrow{EG} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

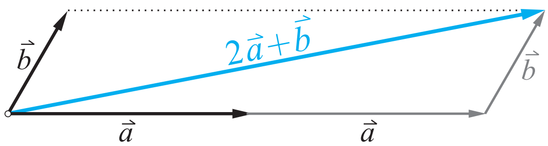
19. **a)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10\sqrt{2}$ **b)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12\sqrt{3}$ **c)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ **č)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **d)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -22$ **e)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -16$ **f)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8.0816$

g) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -29{\cdot}11$

20. $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = -63$

21. $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})} = \sqrt{a^2 + 4ab\cos 45° + 4b^2} = \sqrt{424} \doteq 20{\cdot}6$

22. $|2\vec{a} + \vec{b}| = 3\sqrt{21}$, $\varphi = 49{\cdot}11^\circ$



23. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = -21 + 9\sqrt{3}$ **24.** $\varphi = 60^\circ$

25. $|\vec{a} - \vec{a}| = 3\sqrt{3}$ enote

26. $\overrightarrow{MB} = \vec{a} - \frac{5}{7}\vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$, $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 54$

27. $\overrightarrow{FD} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{FB} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FB} = 24$

28. $|\vec{v}| = \sqrt{153}$, $\varphi = 14^\circ 2'$ **29.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 15$, $S = 10{\cdot}5$

30. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BN} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = (\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}) \cdot (-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}) =$

$= -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}^2 + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = 0 + 9 + 0 - 0 + 0 + 36 = 45$

31. $\vec{r}_S = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$, $\vec{r}_T = \vec{a} + 2\vec{b}$ **32.** $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} = (-1, 1)$, $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j} = (3, -5)$, $2\vec{b} = -4\vec{i} + 6\vec{j} = (4, 6)$

33. $\vec{a} + \vec{b} = (-2, 5)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-4, -1)$, $-2\vec{a} = (6, -4)$, $\vec{a} + 2\vec{b} = (-1, 8)$ **34.** $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (-1, 7)$, $\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = (-3, 1)$, $\vec{r}_{AC} = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) = (1, 2)$ **35.** $\overrightarrow{AB} = (-2, 2)$, $\overrightarrow{BA} = (2, -2)$, $\overrightarrow{CD} = (1, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-5, 0)$, $\overrightarrow{DB} = (2, 5)$, $\overrightarrow{R_{AD}} = (2, \frac{1}{2})$

36. $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ **37.** $D(4, 4)$ **38.** **a)** $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 13$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$, $\varphi = 75^\circ 45'$ **b)** $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$, $\varphi = 126^\circ 52'$ **c)** $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{5}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$, $\varphi = 180^\circ$ **39.** $\vec{e} = \frac{1}{5}(-4, -3) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ **40.** $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3)$, $\varphi = 94^\circ 44'$ **41.** $|\vec{a} - 2\vec{b}| = |(-6, -8)| = 10$ **42.** **a)** $k_1 = -5$, $k_2 = 5$ **b)** $k = -\frac{5}{7}$ **43.** $\varphi = 56^\circ 19'$

44. **a)** $\varphi = 137^\circ 44'$ **b)** $\vec{r}_D = (2, 14)$ **45.** $\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k} = (4, 1, -7)$, $\vec{a} - \vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k} = (-2, -3, 5)$, $\frac{2}{3}\vec{b} = 2\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j} - 4\vec{k} = (2, \frac{4}{3}, -4)$ **46.** $\vec{a} + \vec{b} = (0, 3, 2)$, $\vec{b} - \vec{a} = (-4, 5, -4)$, $2\vec{a} = (6, -4, 8)$, $3\vec{a} + 2\vec{b} = (2, 5, 7)$

47. $\vec{r}_C = \vec{r}_A + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} = (4, -1, -4)$ **48.** **a)** $R_{AB}(3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ **b)** $\overrightarrow{AB} = (4, 11, -3)$ **c)** $B'(-3, -15, 5)$ **49.** $A(3, 1, 2)$

50. $-\frac{2}{3}\vec{a} = -\frac{2}{3}(3, 0, -6) = (-2, 0, 4) = \vec{b}$ **51.** $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ **52.** $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ **53.** $d(A, B) = 3\sqrt{5}$

54. $|CD| = d(C, D) = 3\sqrt{3}$ **55.** **a)** $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 9$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$, $\varphi = 46^\circ 57'$ **b)** $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\varphi = 0^\circ$ **c)** $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -14$, $\varphi = 158^\circ 58'$ **56.** $\vec{k} = (0, 0, 1)$, $\varphi = 42^\circ 2'$ **57.** $\vec{x} = (3, -3, 2)$, $\varphi = 64{\cdot}76^\circ$

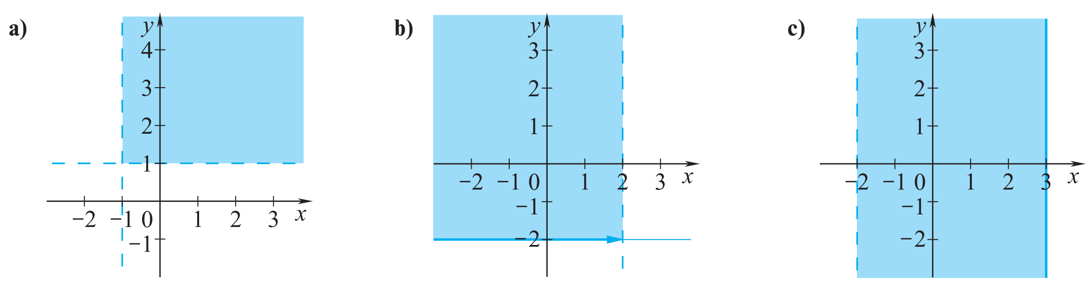
58. $\vec{u} = (2, 0, -4)$, $\vec{v} = (-6, 8, -8)$, $|\vec{v}| = 2\sqrt{41}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$ **59.** **a)** $R(3, 1, 2)$ **b)** $\vec{r}_R = (3, 1, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (2, -6, 2)$, $\varphi = 80^\circ 44'$

60. **a)** $b_3 = -2$ **b)** $b_3 = 20$ **61.** $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ **62.** $y = 2$, $z = \frac{3}{4}$ **63.** $m = 2$ **64.** $k_1 = 1$, $k_2 = 3$

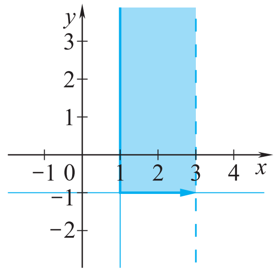
65. **a)** $D(6, 2, 2)$ **b)** $\varphi = 67{\cdot}4^\circ$

11. Pravokotni koordinatni sistem v ravnini

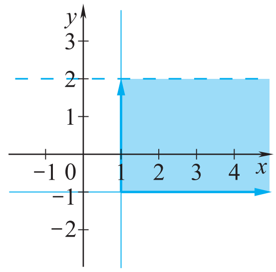
1.



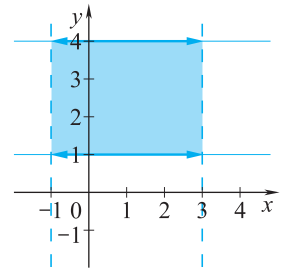
č)



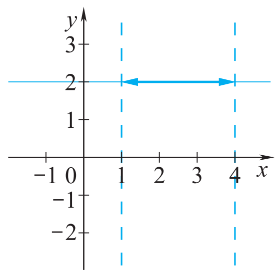
d)



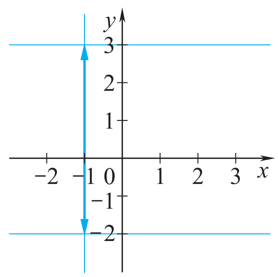
e)



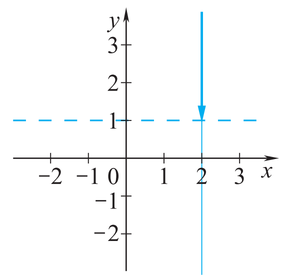
f)



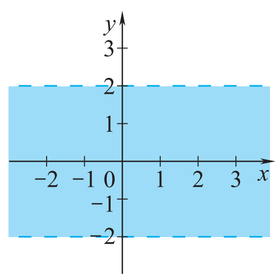
g)



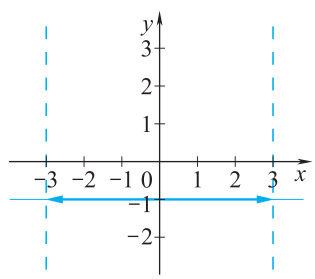
h)



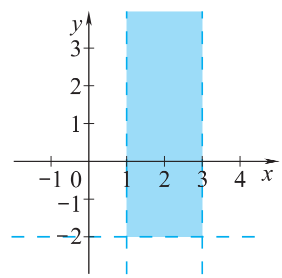
i)



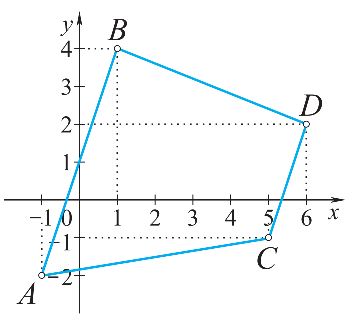
j)



k)



2. **a)** $-2 < x < 3$, $-1 \leq y \leq 2$ **b)** $1 < x \leq 4$, $y < 3$ **3.** **a)** $A'(-2, -4)$, $B'(3, 2)$ **b)** $A'(2, 4)$, $B'(-3, -2)$ **c)** $A'(2, -4)$, $B'(-3, 2)$
4. **a)** $D(-3, 2)$, $E(-1, 5)$ **b)** $P'(5, 4)$ **5.** $B_1(3, -4)$ **6.** $D(1, -3)$, $S = 16$ **7.** **a)** $d(A, B) = 13{\cdot}5$ **b)** $o = 28{\cdot}5$
8. $d(T, P) = 2\sqrt{3}$ **9.** $|AB|^2 + |AC|^2 = 10 + 90 = 100 = |BC|^2$ **10.** Ne. Trikotnik je enakokrak, a ni pravokoten. **11.** **a)** $D(5, 0)$
b) $|AC| = 10$, $|BD| = 8{\cdot}94$ **12.** $B_1(-2, 5)$, $B_2(10, 5)$ **13.** $P_1(8, -26)$, $P_2(8, 4)$ **14.** $d(A, B) = 2\sqrt{13}$, $R(1, -4)$
15. $B(3, -5)$ **16.** $B(-3, 0)$, $C(-1, 2)$, $D(1, 4)$ **17.** $A(4, -3)$, $B(6, -2)$, $C(8, -1)$ **18.** **a)** Orientacija trikotnika je pozitivna, ploščina je $S = 12$. **b)** Orientacija trikotnika je negativna, ploščina je $S = 7$. **19.** $A'(2, 6)$, $B'(-3, -7)$ in $C'(1, -5)$; $S = 21$
20. $S = 25{\cdot}5$



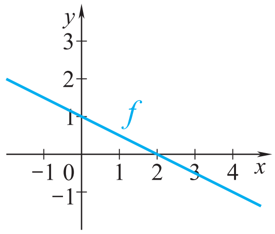
21. $S = 23{\cdot}5$ Ploščina trikotnika je za $57{\cdot}4$ % večja od ploščine štirikotnika.
22. **a)** $S = 1$ **b)** $R_{BC} = (-2, 3)$, $d(A, R_{BC}) = \sqrt{29}$ **23.** $S = 8$
b) $t_{AC} = 2\sqrt{10}$ **24.** Da, saj je ploščina trikotnika ABC enaka 0.
25. Ker je ploščina trikotnika ABC različna od 0, točke A, B in C niso kolinearne (ne ležijo na isti premici). **26.** $x = 2$ **27.** $C(2, 2)$
28. Abscisno os seka v točki $M(6, 0)$, ordinatno os pa v $N(0, 2)$.
29. **a)** $|AC| = |BC| = 5$ **b)** $N(0, \frac{10}{3})$ **30.** **a)** $|BD| = 3\sqrt{10}$ **b)** $R(3, 2)$
c) Abscisno os seka v $M(-2, 0)$, ordinatno os v $N(0, -1)$. **31.** $y = 4$
32. $C(4, 0)$ **33.** $B_1(2, -2)$, $B_2(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$

34. Ker je $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = \sqrt{10}$, so točke A, B, C in D oglišča romba s ploščino $S = 8$.

12. Funkcije

1. **a)** Ničla je $x = \frac{1}{3}$, začetna vrednost pa $f(0) = -1$. **b)** Ničli sta $x_1 = 5$, $x_2 = -4$, začetna vrednost pa $f(0) = -20$.
c) Ničle so $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, začetna vrednost pa $f(0) = -4$. **2.** **a)** Abscisno os seka v $(-6, 0)$, ordinatno os v $(0, 4)$.
b) Abscisno os seka v $(5, 0)$ in $(-3, 0)$, ordinatno os v $(0, 15)$. **c)** Abscisno os seka v $(-1, 0)$ in $(0, 1)$, ordinatno os v $(0, \frac{1}{2})$.

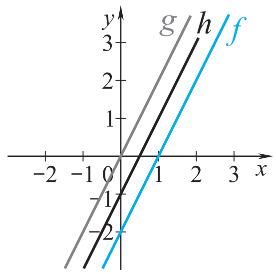
3. Polinom je pozitiven na intervalih $(-1, 1)$ in $(1, \infty)$, negativen pa na intervalu $(-\infty, -1)$.
4. Funkcija f je negativna na intervalu $(2, \infty)$, pozitivna pa na intervalu $(-\infty, 2)$.



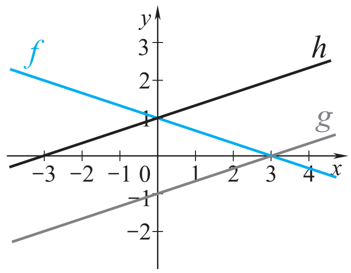
5. Polinom narašča na intervalih $(-1, 0)$ in $(0, 1)$, pada pa na intervalih $(-\infty, -1)$ in $(1, \infty)$.
6. Funkcija f ni ne liha ne soda, funkcija g je soda $(g(-x) = g(x))$, funkcija h pa liha $(h(-x) = -h(x))$.
7. Funkcija f je periodična z osnovno periodo 2π.
8. Funkcija f je navzdol omejena z 0, funkcija g je omejena, navzdol je omejena z 0 in navzgor z 2.
9. $(f + g)(x) = x^3 + 4x - 1$ in $(f + g)(-2) = -17$, $(f - g)(x) = -x^3 + 2x + 3$ in $(f - g)(-2) = 7$,
$(f \cdot g)(x) = 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x - 2$ in $(f \cdot g)(3) = 60$
10. Funkcija f ima v točki $(0, 0)$ lokalni minimum, v točkah $(-1, 1)$ in $(1, 1)$ pa globalna maksimuma. Funkcija g ima v točki $(2, -3)$ lokalni maksimum, v točki $(0, 1)$ pa lokalni minimum.

11. Definicijsko območje so vsa realna števila ($D_f = \mathbb{R}$), zaloga vrednosti je zaprti interval od 0 do 2: ($Z_f = [0, 2]$). Ima ničlo $x = 1$, začetno vrednost $f(0) = 1$, je pozitivna na $\mathbb{R} - \{1\}$, naraščajoča na intervalih $(-\infty, -1)$ in $(1, \infty)$, padajoča na intervalu $(-1, 1)$, je omejena, navzgor z 2 in navzdol z 0, ni ne liha ne soda, ne injektivna ne surjektivna. Globalni maksimum funkcije f je v točki $(-1, 2)$, globalni minimum pa v točki $(1, 0)$.

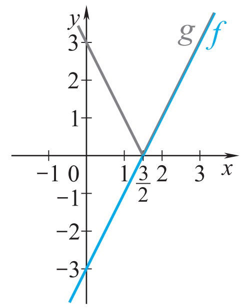
12. $g(x) = f(x + 1) = 2(x + 1) - 2 = 2x$,
$h(x) = f(x) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$



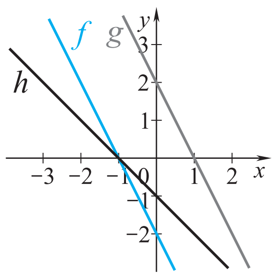
13.



14.

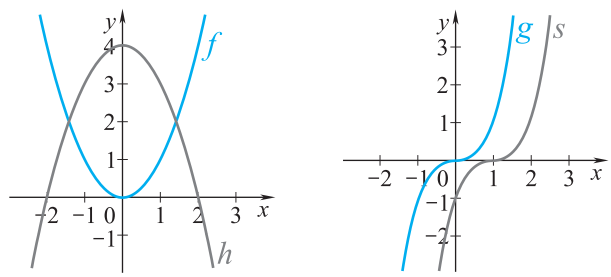


15. Ničla je $x = -1$, začetna vrednost je $f(0) = -2$.

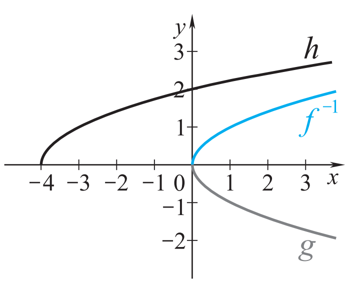


16. $g(x) = f(x - 6) = -\frac{1}{2}(x - 6) + 2 = -\frac{1}{2}x - 1$ ali $g(x) = f(x) - 3 = -\frac{1}{2}x - 1$

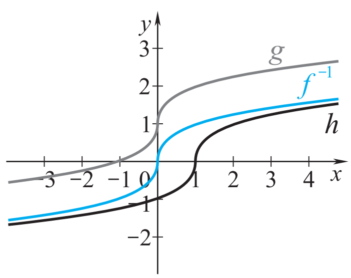
17. $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $h(x) = -x^2 + 4$ in $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $s(x) = (x - 1)^3$



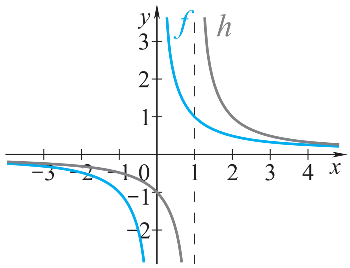
18. $g\colon [0, \infty) \to [0, -\infty)$, $g(x) = -\sqrt{x}$,
$h\colon [-4, \infty) \to [0, \infty)$, $h(x) = x + 4$

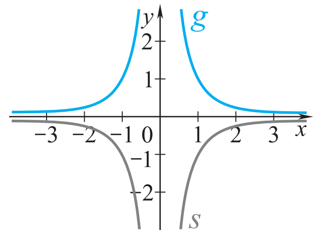


19. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = \sqrt[3]{x} + 1$,
$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

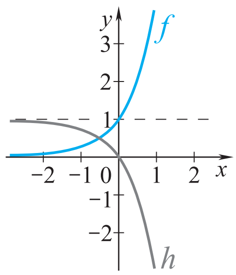


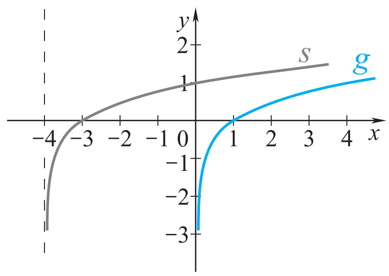
20. $h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$; $h(x) = (x-1)^{-1}$, $s\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $s(x) = -x^{-2}$



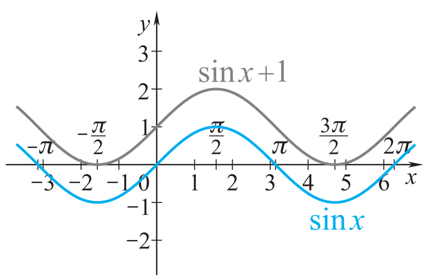


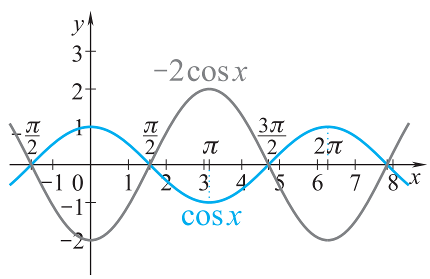
21. $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $h(x) = -4^{x} + 1$ in $s\colon (-4, \infty) \to \mathbb{R}$; $s(x) = \log_4(x+4)$

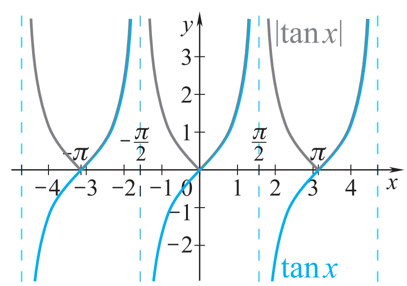




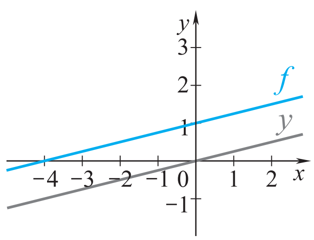
22.



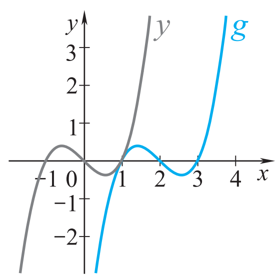




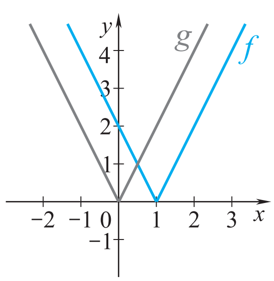
23. Premik za 4 desno; $y = f(x-4) = \frac{1}{4}(x-4) + 1 = \frac{1}{4}x$.



Premik za 2 levo; $y = g(x+2) = x(x+1)(x-1)$.



24. Premik za 1 levo; $g(x) = f(x+1) = |2(x+1) - 2| = |2x|$.

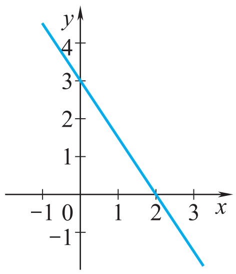


13. Linearna funkcija

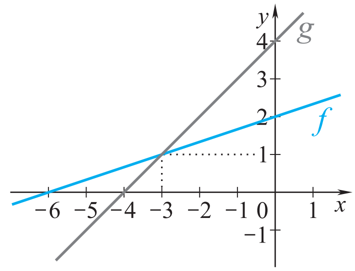
1. $k = -2$, $n = 4$, $f(x) = -2x + 4$ **2.** $f(x) = \frac{5}{3}x + 5$ **3.** **a)** $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ **4.** $f(x) = -\frac{3}{4}x + 3$

5. $f(x) = x - 2$

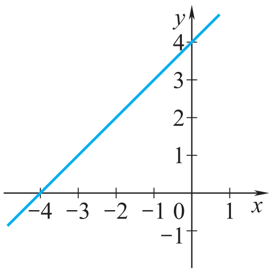
6. Ničla je $x = 2$, začetna vrednost je $f(0) = 3$.
Presečišče s premico $y = 6$ je točka $(-2, 6)$, s premico $x = 4$ pa $(4, -3)$



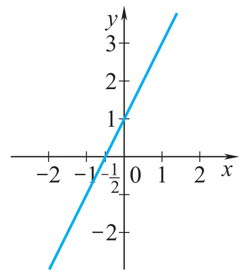
7. $P(-3, 1)$



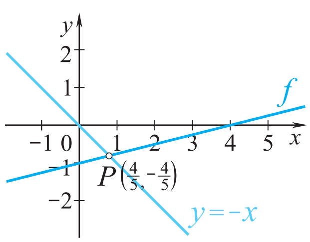
8. Ničla $x = -4$, začetna vrednost je $f(0) = 4$. Za $x > -4$ je $f(x) > 0$.



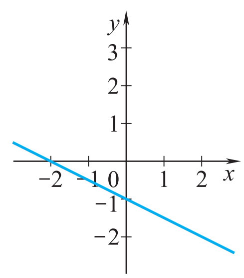
9. $x \leq -\frac{1}{2}$



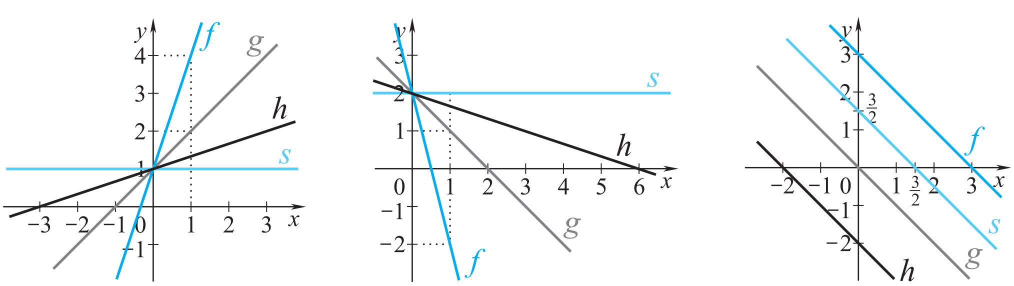
10. Funkcija f je negativna za $x < 4$. Graf funkcije seka simetralo sodih kvadrantov v točki $P(\frac{4}{5}, -\frac{4}{5})$.



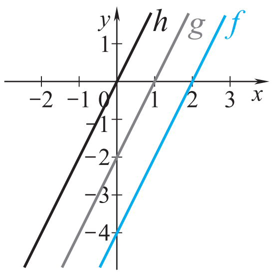
11. $x \geq -4$



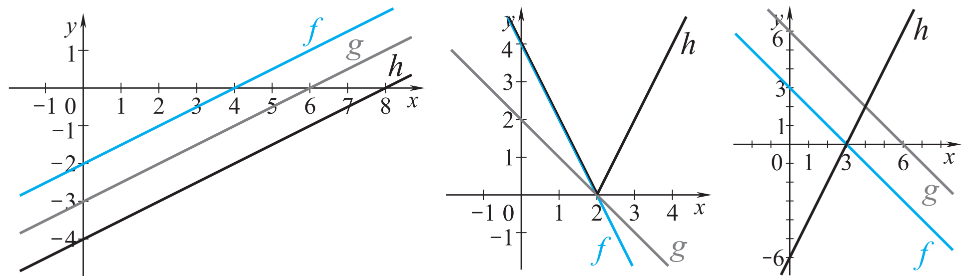
12.



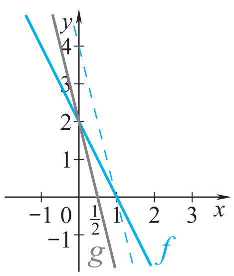
13. $g(x) = 2x - 2$, $h(x) = 2x$



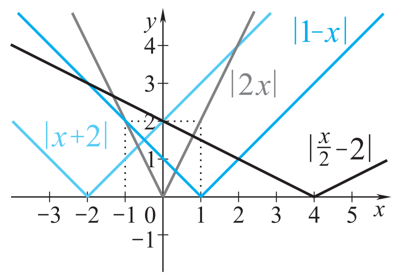
14.



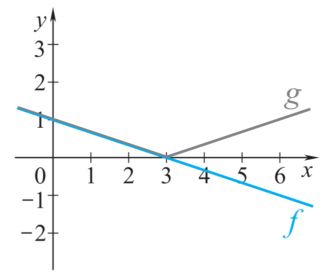
15.



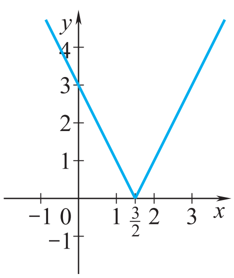
16.



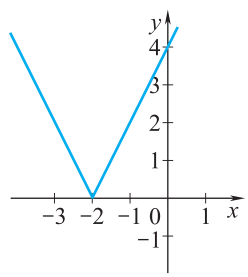
17. $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$, $Z_g = [0, \infty)$



18. Lastnosti funkcije f so: $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = [0, \infty)$, ničla je $\frac{3}{2}$, začetna vrednost $f(0) = 3$, funkcija je naraščajoča na $(\frac{3}{2}, \infty)$, padajoča na $(-\infty, \frac{3}{2})$, pozitivna za vsa realna števila razen $\frac{3}{2}$ in navzdol omejena z 0.

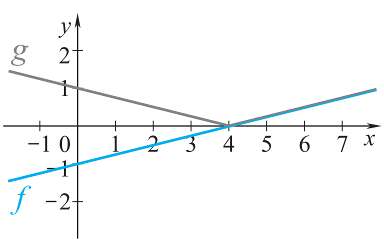


19. **a)**

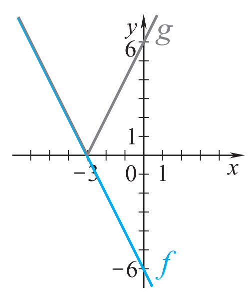


b) $S = 4$

20. $0 < x < 8$



21. **a)** Ničla je $x = -3$, začetna vrednost pa $f(0) = -6$.

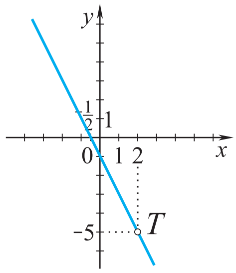


b) $T(-2, -2)$
c) Glej graf pri nalogi a).
č) $y = -2x - 1$

22. **a)** $y = 3x - 4$ **b)** Točka A leži, točka B ne leži na dani premici. **23.** $A(-\frac{3}{2}, 2)$ in $B(-3, -1)$ **24.** **a)** $y = -2x + 4$, $2x + y - 4 = 0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ **b)** $x = 4$, $x - 4 = 0$ **c)** $y = -2$, $y + 2 = 0$ **č)** $y = \frac{2}{3}x - 3$, $2x - 3y - 9 = 0$, $\frac{x}{\frac{9}{2}} + \frac{y}{-3} = 1$ **25.** $y = x - 5$

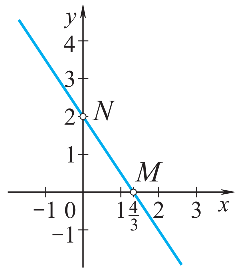
26. $y = 3x - 15$ **27.** Ne. Enačba premice skozi točki A in B je $y = 4x - 7$, točka C ne leži na njej. **28.** $x - 2y - 3 = 0$

29. $a = 4$, $y = -2x - 1$



30. $a = -4$, $k = -\frac{4}{3}$

31. Presečišče premice z abscisno osjo je točka $M(\frac{4}{3}, 0)$, z ordinatno osjo pa $N(0, 2)$. Za $x < \frac{4}{3}$ poteka premica nad abscisno osjo.



32. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-\frac{10}{3}} = 1$ Premica seka abscisno os v točki (2, 0) in ordinatno os v $(0, -\frac{10}{3})$. $S = \frac{10}{3}$

33. Ker je $\frac{x}{-\frac{7}{3}} + \frac{y}{-7} = 1$, premica seka abscisno os v točki $(-\frac{7}{3}, 0)$, ordinatno os pa v $(0, -7)$.

34. **a)** $y = \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$ **b)** $S = 32$

35. **a)** $5x - 2y - 9 = 0$ **b)** $y + 2 = 0$

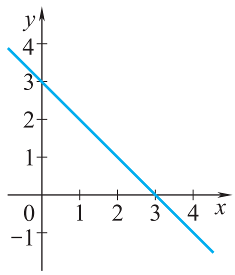
36. **a)** $y = a \cdot (-3) + 3a + 1 = 1$ **b)** Da. $y = x + 4$

37. $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$, $y = \frac{x}{2} - 2$, $x - 2y - 4 = 0$

38. $3x + y + 8 = 0$, $\frac{x}{-\frac{8}{3}} + \frac{y}{-8} = 1$

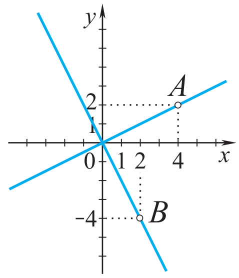
Premica seka abscisno os v $(-\frac{8}{3}, 0)$, ordinatno os v $(0, -8)$. Ne, ker točka C ne leži na premici skozi točki A in B.

39. $y = -x + 3$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$, $x + y - 3 = 0$



40. $a = -6$

41. **a)** $y = \frac{1}{2}x$, $y = -2x$



b) $d(O, A) = d(O, B) = 2\sqrt{5}$;

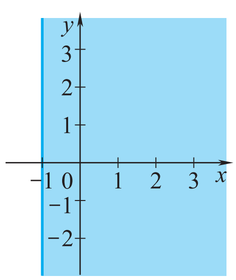
$o = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$

42. **a)** $y = -5x + n$; $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 3$ **b)** $y = kx + 2 - k$; $k \in \mathbb{R}$

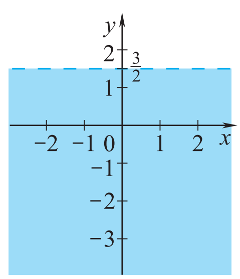
43. $A(-4, 10)$, $B(0, 0)$, $C(4, 2)$

44.

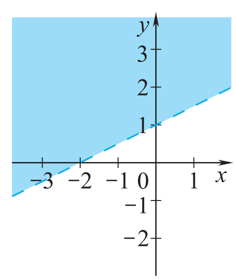
a)



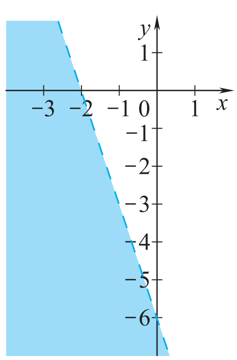
b)



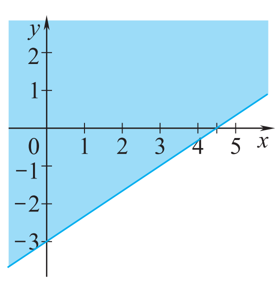
c)



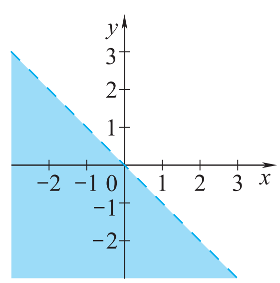
č)



d)

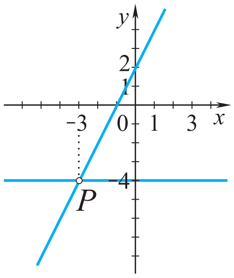


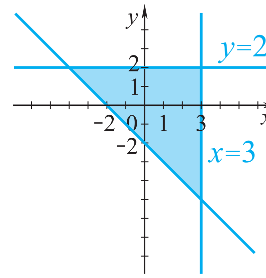
e)



45. **a)** $x = 2, y = -1$ **b)** $x = \frac{4}{3}, y = \frac{7}{3}$ **c)** Sistem nima rešitve. **č)** Rešitev sistema so vsi urejeni pari realnih števil, ki zadoščajo prvi (ali drugi) enačbi. **d)** $x = 3, y = 1$

46. $P(-3, -4)$ **47.** $A(-1, -4)$ **48.** $P(1, 3), S = 9$ **49.** $S = 24{\cdot}5$

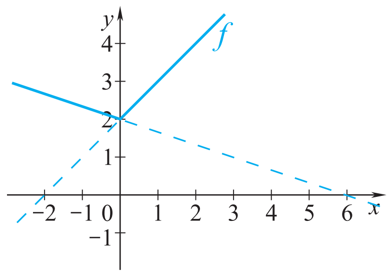




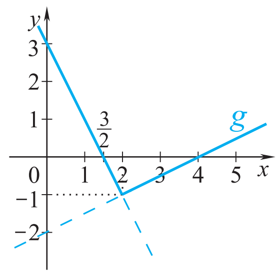
50. **a)** $P(-1, 4)$ **b)** $y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$ **51.** $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{1} = 1, P(-1, 4)$ **52.** **a)** $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1, \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$ **b)** $P(4, 1)$

53. $P(-3, -3); 2x - y + 3 = 0$ **54.** $P(1, 2); y = -2x + 4$

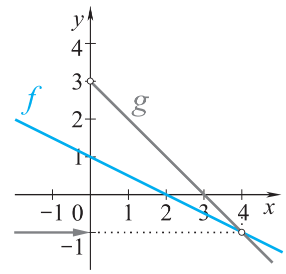
55. **a)**



b)

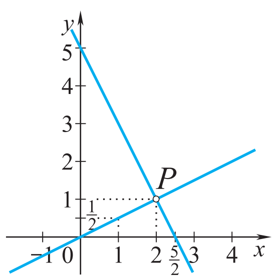


56. $x = 4$



57. $y = \frac{x}{3} - \frac{14}{3}, y = -3x + 2$ **58.** $y = \frac{x}{2} + 4$ **59.** $y = -x + 3, k = -1, \varphi = 135°$ **60.** **a)** $\varphi = 45°$ **b)** $\varphi = 135°$ **c)** $\varphi = 108°26'$ **č)** $\varphi = 90°$ **d)** $\varphi = 0°$ **e)** $\varphi = 21°48'$ **61.** **a)** $60°15'$ **b)** $32°28'$ **c)** $71°34'$ **č)** $18°26'$ **62.** $P(1, -2), \varphi = 78°41'$

63. **a)** $P(2, 1)$ **b)** $90°$ **c)** $a = \sqrt{5}, S = 5$

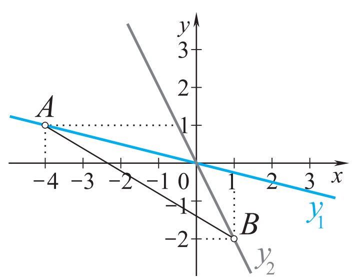


64. Oglišča trikotnika so $A(-1, -2)$, $B(3, -2)$ in $C(3, 2)$, velikosti notranjih kotov so 45°, 45° in 90°.

65. $k_{AC} = \frac{1}{2}, k_{BC} = -2, |AC| = |BC| = 2\sqrt{5}$ **66.** **a)** $R(1, -2)$ **b)** $y = 2x - 4$

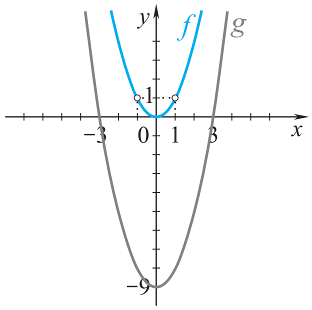
67. $a = -9, a = \frac{1}{9}$ **68.** $y = 2x, P(2, 4)$ **69.** $T(-1, 2)$

70. **a)** $y = -\frac{1}{4}x, y = -2x$ **b)** $49°24'$ **c)** $S = 2{\cdot}5$



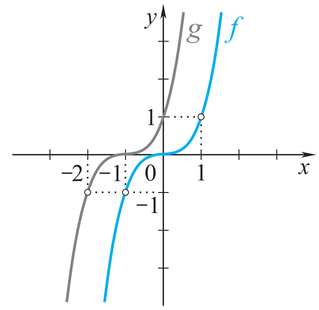
14. Potenčna funkcija

1. a)



b) Na grafu funkcije ležita točki (3, 0) in (−1, −8).
c) $P_1(-1, -8)$, $P_2(2, -5)$

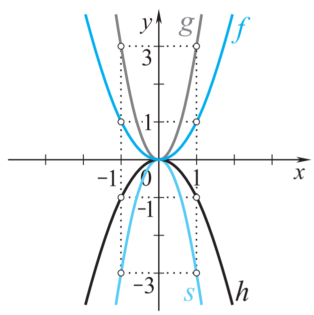
2. a)



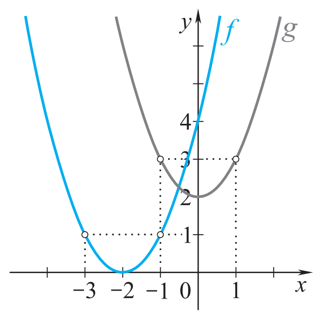
b) Na grafu funkcije ležita točki (1, 8) in (−1, 0).

3.

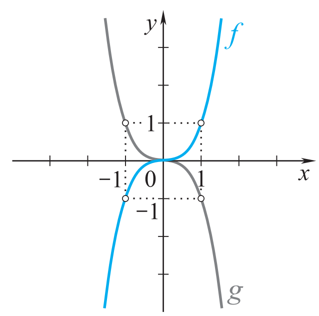
a)



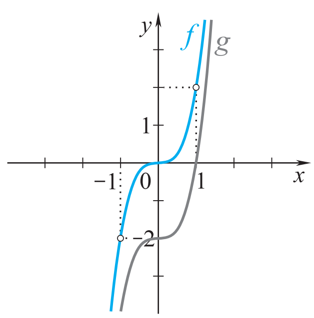
b)



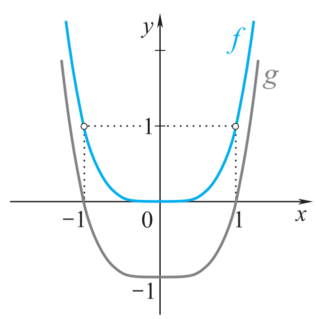
c)



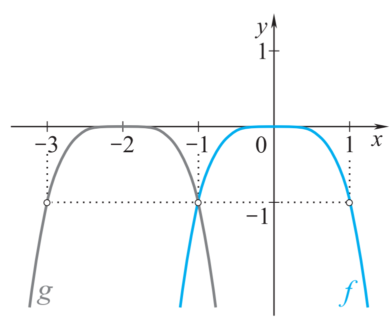
č)



d)

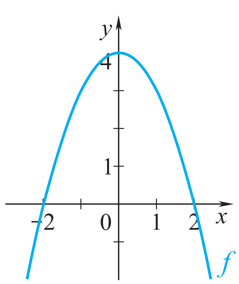


e)

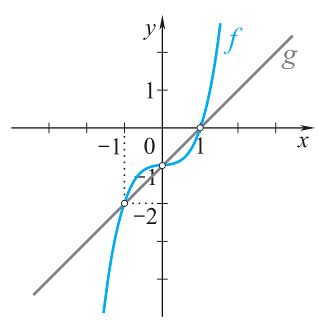


4. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $g(x) = (x-2)^2$, $h(x) = x^3 - 1$

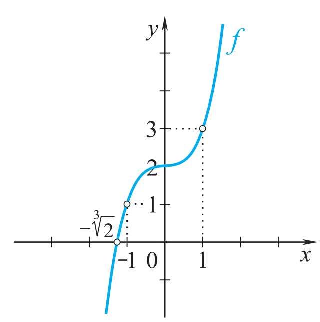
5. Negativna na $(-\infty, -2)$ in $(2, \infty)$.
Funkcija je navzgor omejena s 4.



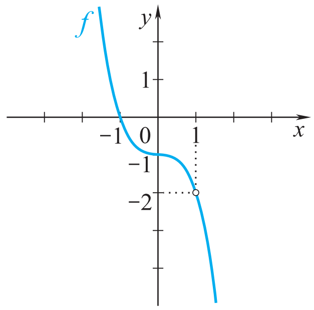
6. $A(-1, -2)$, $B(0, -1)$, $C(1, 0)$



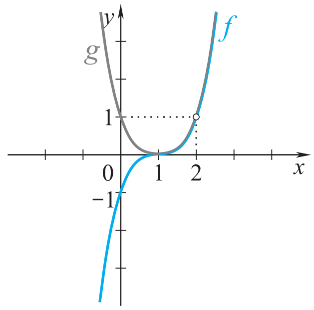
7. Ničla je $x = -\sqrt[3]{2} \doteq -1{\cdot}26$,
presečišče grafa z ordinatno osjo pa (0, 2).



8. $x < -1$

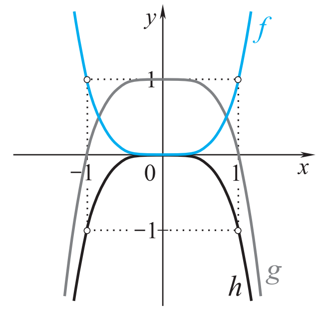


9. $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 0)$



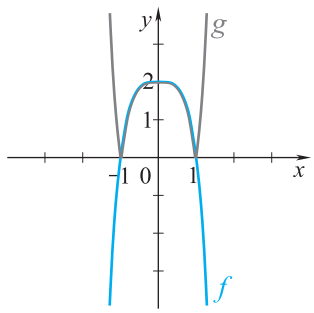
10. $P_1(0, -1)$, $P_2(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

11. **a)**

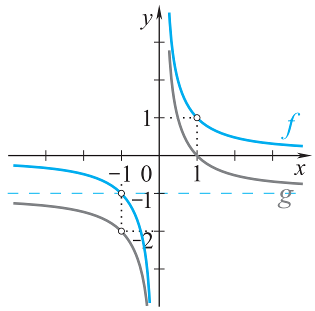


b) Funkcija g je soda.

12.



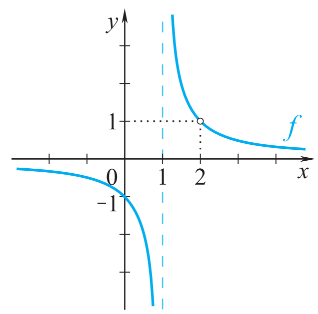
13. **a)**



b) Na grafu funkcije g ležita točki $(\frac{1}{2}, 1)$ in $(1, 0)$.

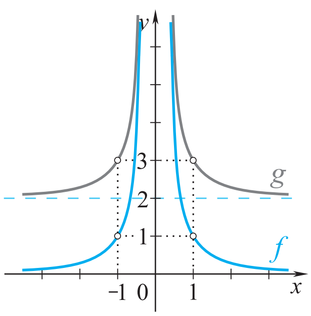
c) $P_1(\frac{1}{2}, 1)$, $P_2(-2, -\frac{3}{2})$

14. Funkcija je pozitivna na intervalu $(1, \infty)$ in negativna na $(-\infty, 1)$.



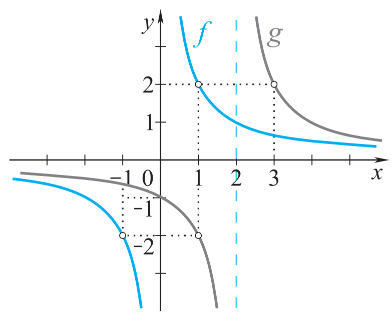
15. $f(x) = -x^{-1}$ Funkcija je naraščajoča na $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$, je liha in ni omejena. Funkcija nima ničel.

16. **a)** in **b)** Funkcija g je soda. **c)** $x < -1$ ali $x > 1$

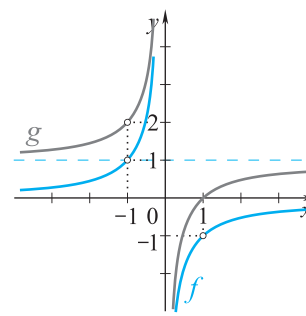


17.

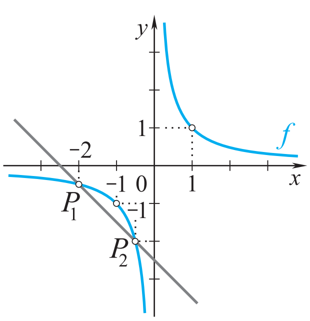
a)



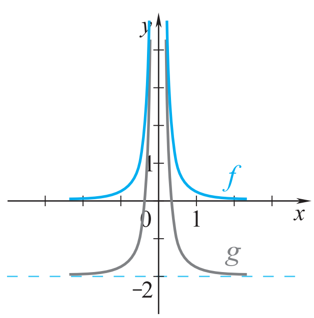
b)



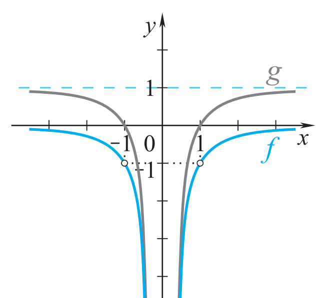
18. $P_1(-2, -\frac{1}{2})$, $P_2(-\frac{1}{2}, -2)$



c)

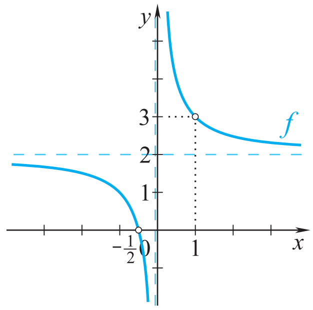


č)

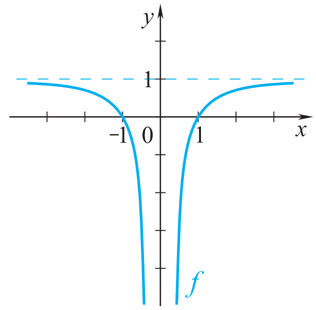


19. $f(x) = x^{-1} + 1$, $g(x) = (x + 1)^{-2}$

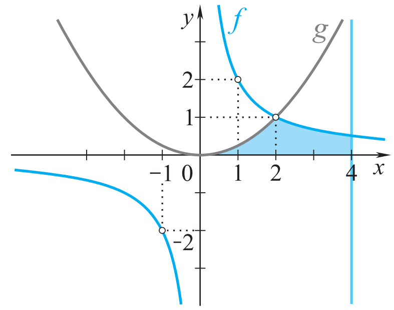
20. $x = 0, y = 2$



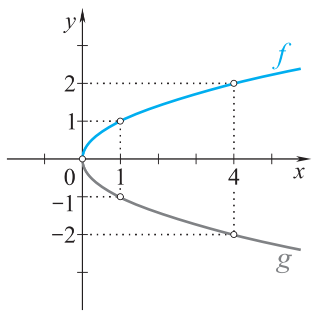
21. $Z_f = (-\infty, 1)$



22. **a)** $a = \frac{1}{4}$ **b)**

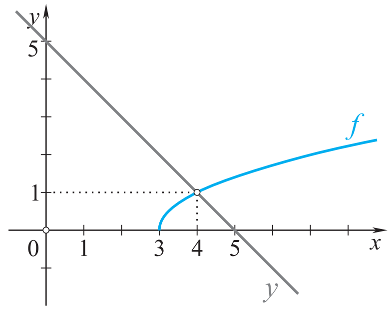


23.



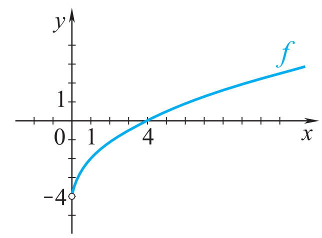
24. **a)** $D_f = [3, \infty)$, $Z_f = [0, \infty)$

b) Ničla je $x = 3$.

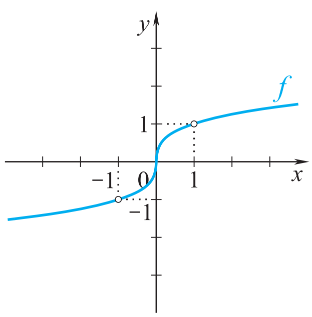


c) $P(4, 1)$

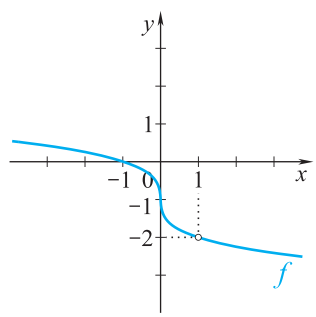
25. Ničla je $x = 4$, začetna vrednost $f(0) = -4$. Za $x \in [0, 4)$ je $f(x) < 0$.



26. Funkcija f ni omejena. Za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ je graf funkcije nad simetralo lihih kvadrantov.



27. Ničla je $x = -1$, začetna vrednost $f(0) = -1$. Na $(-\infty, -1)$ je funkcija f pozitivna.

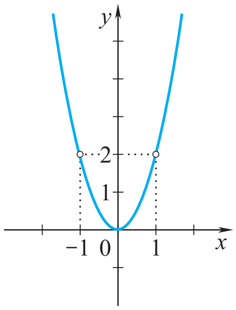


15. Kvadratna funkcija

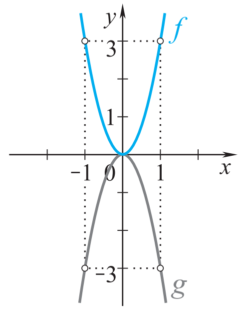
1. $f(x) = -5x^2 + 10x + 2$ **2.** $y = 3x^2 - 2x - 4$ **3.** $b = -3, c = 1$ **4.** $y = x^2 - 2x - 1$ **5.** $f(x) = -x^2 - 2x + 5$

6. $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}$

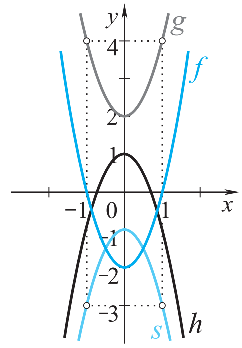
7. $y = 2x^2$



8. $g(x) = -3x^2$

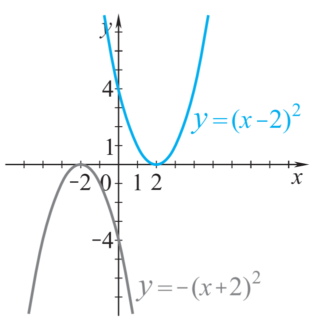


9.

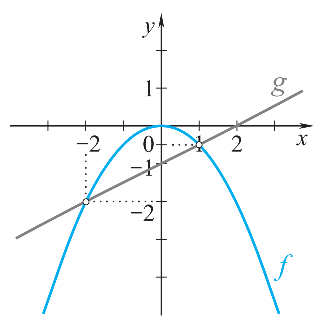


10. **a)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ **c)** $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2$

11. $y = -(x + 2)^2$

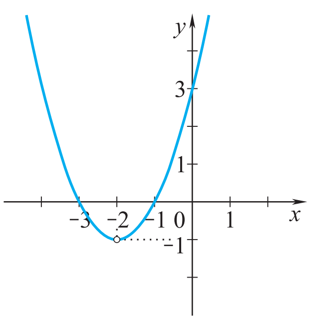


12. $(-2, -2), (1, -\frac{1}{2})$

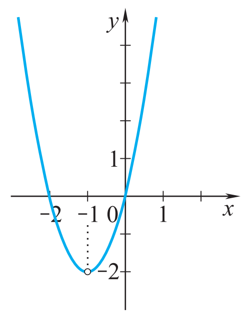


13. **a)** $(x - 2)^2 + 4$
b) $2(x + 4)^2 - 33$
c) $-3(x + 2)^2 + 8$

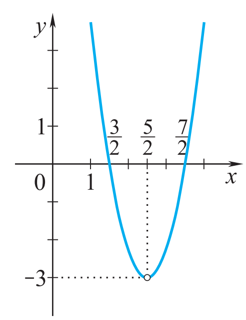
14. **a)** $T(-2, -1)$



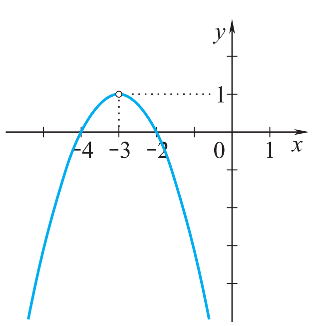
b) $T(-1, -2)$



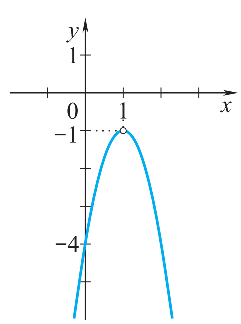
c) $T(\frac{5}{2}, -3)$



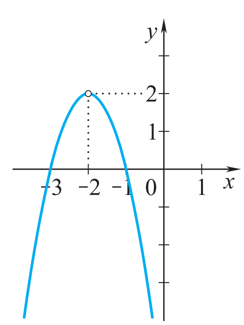
č) $T(-3, 1)$



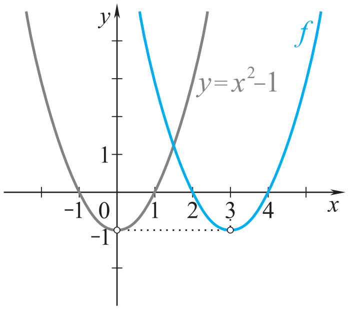
d) $T(1, -1)$



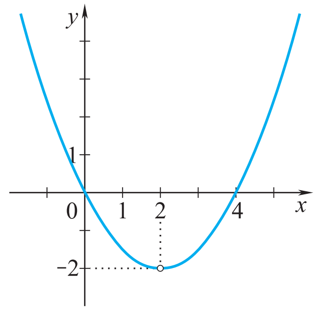
15. $T(-2, 2)$ Enačba simetrijske osi parabole je $x = -2$.



16. $T(3, -1)$, $y = x^2 - 1$

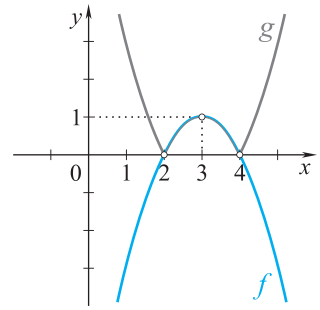


17. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

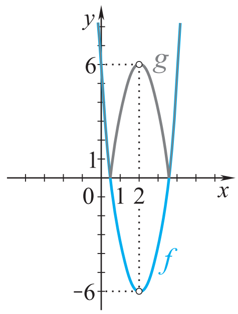


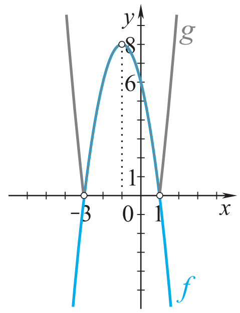
18. $f(x) = -(x-4)^2 + 5$

19.



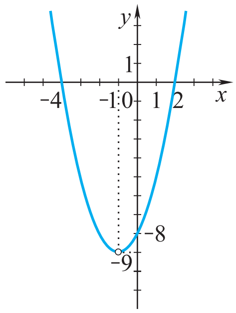
20. **a)** $f(x) = 3(x-2)^2 - 6$ **b)** $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$



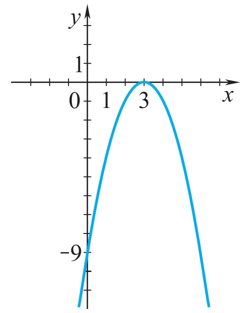


21. Pri $x = -4$ doseže funkcija največjo vrednost -5. **22.** $f(x) = (x+3)^2 - 10$ Za $x = -3$ ima funkcija f najmanjšo vrednost -10. **23.** $k = -2$ **24.** $b_1 = 12, p_1 = -\frac{3}{2}, b_2 = -12, p_2 = \frac{3}{2}$ **25.** $T(-1, 9)$ Največja funkcijska vrednost je 9. Presečišča grafa funkcije s koordinatnima osema so $A(-4, 0)$, $B(2, 0)$ in $C(0, 8)$. **26.** $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ **27.** $100 = 50 + 50$ **28.** $30 = 15 + 15$ **29.** $a = 5, b = 15$ **30.** $a = b = 18$ cm, $S = 324$ cm^2 **31.** $|AB| = |BC| = 12$ cm, $d = 12\sqrt{2}$ cm **32.** $b_1 = 4, b_2 = -10$ **33.** **a)** $x_1 = 4, x_2 = 1$ **b)** $x_1 = -3, x_2 = 4$ **c)** $x_1 = 17, x_2 = -17$ **č)** Enačba nima realnih rešitev. **d)** $x_1 = -1 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = -1 + 2\sqrt{2}$ **e)** $x_{1,2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ **34.** **a)** $x_1 = 13, x_2 = -1; (x-13)(x+1) = 0$ **b)** $x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}; (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$ **c)** $x_1 = 1 - \sqrt{6}, x_2 = 1 + \sqrt{6}; (x - 1 + \sqrt{6})(x - 1 - \sqrt{6}) = 0$ **35.** **a)** $x_1 = 1 - i, x_2 = 1 + i$ **b)** $x_1 = 3i, x_2 = -3i$ **c)** $x_1 = 2 - 3i$, $x_2 = 2 + 3i$ **č)** $x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{17}}{3}i, x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{17}}{3}i$ **36.** **a)** $x_1 = \sqrt{2}\,i, x_2 = -\sqrt{2}\,i; (x - \sqrt{2}\,i)(x + \sqrt{2}\,i) = 0$ **b)** $x_1 = -3 + 2i$, $x_2 = -3 - 2i; (x + 3 - 2i)(x + 3 + 2i) = 0$ **c)** $x_1 = 5 + \sqrt{6}\,i, x_2 = 5 - \sqrt{6}\,i; (x - 5 - \sqrt{6}\,i)(x - 5 + \sqrt{6}\,i) = 0$ **37.** $a = 3, x_2 = -\frac{8}{3}$ **38.** $P = \frac{2}{3}, x_{1,2} = -1$ **39.** $A = 4, x_{1,2} = \frac{5}{2}$ **40.** **a)** $x^2 - 6x + 8 = 0$ **b)** $x^2 + x - 72 = 0$ **c)** $x^2 - 2 = 0$ **č)** $x^2 - 2x - 2 = 0$ **41.** $x^2 - 5x + 4 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4$ **42.** $x^2 - 10x + 23 = 0, x_1 = 5 + \sqrt{2}, x_2 = 5 - \sqrt{2}$ **43.** $m = 1, x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$ **44.** $k = 2, x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$ **45.** $m = 7, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$ **46.** 5 **47.** $n = 21$ **48.** To sta 15 in 17. **49.** Stranici pravokotnika merita 12 cm in 15 cm. **50.** Stranici merita 10 cm in 7·5 cm. **51.** $a = 4{\cdot}64$ cm, $b = 2{\cdot}68$ cm, $c = 5{\cdot}36$ cm **52.** Stranica kvadrata meri 20 cm, stranici pravokotnika pa merita 40 cm in 8 cm. **53.** **a)** $x_1 = 0, x_2 = 10$ **b)** $x_1 = 0, x_2 = -7$ **c)** $x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$ **č)** $x_1 = -3 + \sqrt{5}, x_2 = -3 - \sqrt{5}$ **54.** **a)** $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 4, x_4 = -4$ **b)** $x_{1,2} = 0, x_3 = -8, x_4 = 8$ **c)** $x_1 = 3, x_2 = -3$ **55.** **a)** $f(x) = -x^2 - 4x - 3 = -(x+3)(x+1)$ **b)** $f(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+1)^2 - 12$ **c)** $f(x) = 4(x + \frac{1}{2})^2 - 4 = (2x-1)(2x+3)$ **56.** $f(x) = 3(x+1)(x-7) = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x-3)^2 - 48$ **57.** $f(x) = x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$ Koordinati temena sta $T(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{16})$. **58.** $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ Ničli funkcije f sta 3 in -1.

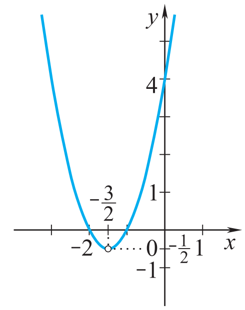
59. **a)** $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, $T(-1, -9)$, $f(0) = -8$



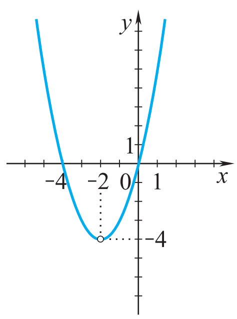
b) $x_{1,2} = 3$, $T(3, 0)$, $f(0) = -9$



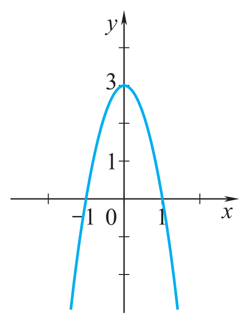
c) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $T(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $f(0) = 4$



č) $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, $T(-2, -4)$

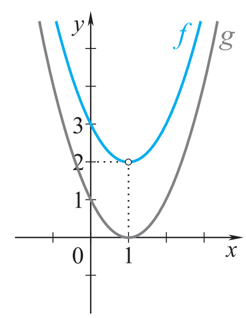


d) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $T(0, 3)$

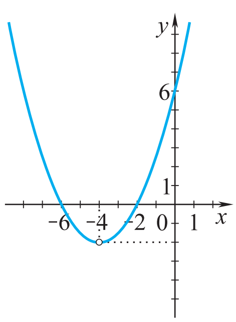


60. $f(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + 8$; $T(5, -\frac{9}{2})$

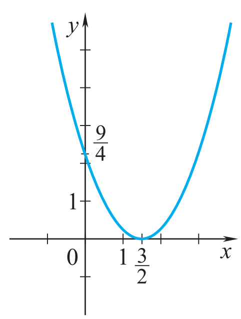
61. **a)** Funkcija f nima ničel, $T(1, 2)$, $f(0) = 3$.
b) $g(x) = (x-1)^2$



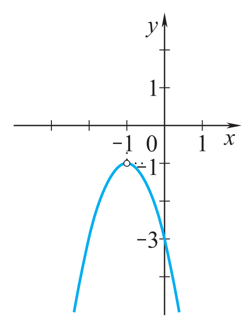
62. **a)** $x_1 = -2$, $x_2 = -6$, $T(-4, -2)$



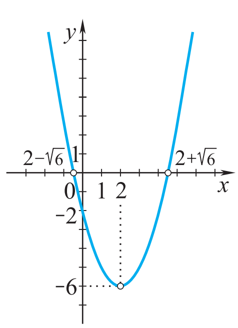
b) $x_{1,2} = \frac{3}{2}$, $T(\frac{3}{2}, 0)$



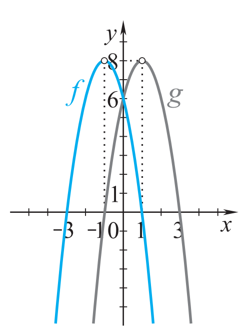
c) Ničel ni, $T(-1, -1)$.



č) $x_1 = 2 - \sqrt{6}$, $x_2 = 2 + \sqrt{6}$, $T(2, -6)$



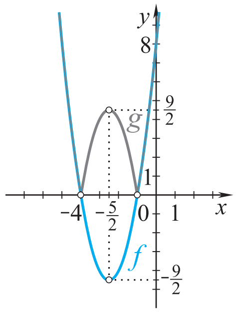
63. Presečišča s koordinatnima osema so $(-3, 0)$, $(1, 0)$ in $(0, 6)$, teme $T(-1, 8)$.
Enačba zrcaljene parabole je $g(x) = -2x^2 + 4x + 6$.



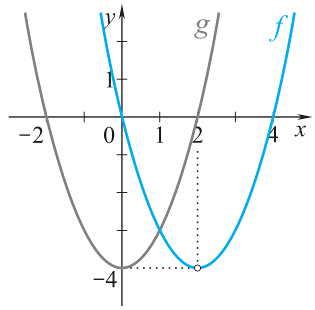
64. $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x+1)(x-3) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

65. $y = -2x^2 - 12x - 10$

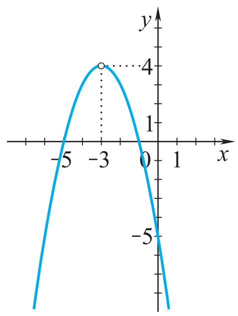
66. $x_1 = -1$, $x_2 = -4$, $T(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2})$, $f(0) = 8$



67. **a)** Ničli sta $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, teme je $T(2, -4)$. **b)** $c = -2$, $g(x) = x^2 - 4$

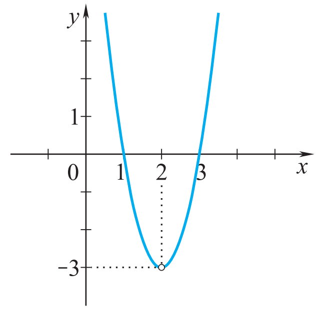


68. **a)** $x_1 = -1$, $x_2 = -5$, $T(-3, 4)$, $f(0) = -5$



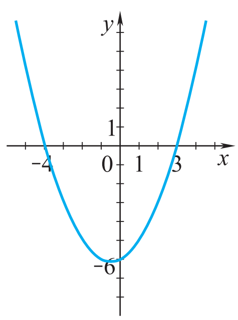
b) Funkcija f je padajoča na $(-3, \infty)$, naraščajoča pa na $(-\infty, -3)$.

69. $b = -12$, $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ Ničli funkcije f sta 3 in 1, teme pa $T(2, -3)$.



70. $m_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $m_2 = -\frac{\sqrt{13}}{2}$ **71.** $m_1 = 0$, $m_2 = 3$ **72.** $m_1 = 4$, $m_2 = 1$ **73.** **a)** $x \in (-4, 2)$ oz. $-4 < x < 2$ **b)** $x \in (-4, 3)$
c) Vsa realna števila. **č)** Ni rešitve. **d)** $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ oz. $(x < 1) \vee (x > 3)$ **74.** $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

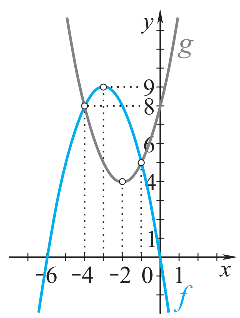
75. **a)** Presečišči z x osjo sta $(-4, 0)$ in $(3, 0)$, z y osjo pa $(0, -6)$. **b)** $x \in (-\infty, -4] \cup [3, \infty)$



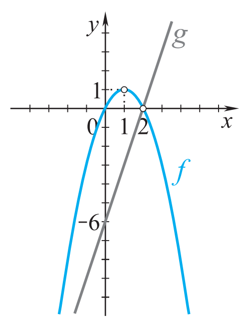
76. $k < 0$ **77.** $p < -4$ **78.** $k > 0$ **79.** $-10 < b < 10$

80. Za $m < -4$ ali $m > 4$ je diskriminanta funkcij negativna, zato grafi funkcij ne sekajo abscisne osi. **81.** $A(-2, 5)$, $B(2, 1)$ **82.** $P_1(-1, 11)$, $P_2(-3, 29)$

83. $P_1(-4, 8)$, $P_2(-1, 5)$



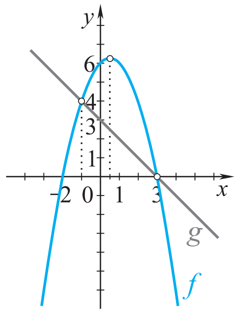
84. **a)** Ničli za f sta $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, teme je $T(1, 1)$, presečišči s koordinatnima osema za g sta $(1, 0)$ in $(0, -6)$.



b) $P_1(-3, -15)$, $P_2(2, 0)$

85. $a = 2$

86. **a)**

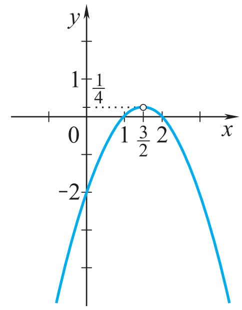


b) $P_1(3, 0)$, $P_2(-1, 4)$

c) $d(P_1, P_2) = 4\sqrt{2}$

87. **a)** $a = -1$

b) $a = -1$, Ničli sta $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $f(0) = -2$, teme je $T(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$.



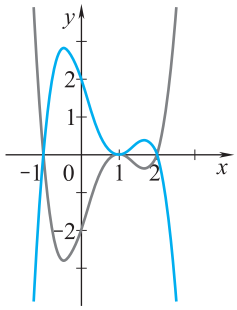
c) $a < -\frac{9}{8}$

88. **a)** $x = 20$ m **b)** $t = 3$ s **c)** $v = 30$ m/s **č)** $t = 3{\cdot}1$ s

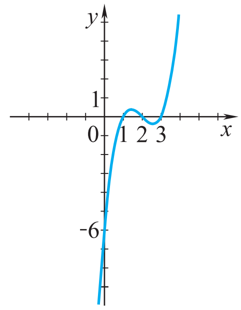
16. Polinomi

1. Vodilni koeficient je 3, konstantni člen pa 5. $p(2) = 51$, $p(-1) = 12$. Vsota vseh koeficientov polinoma p je enaka $p(1) = 8$. **2.** $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 3$ **3.** $-2p(x) = -4x^3 - 2x + 8$ $p(x) + q(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ $q(x) - p(x) = -3x^3 + x^2 - x + 6$ $p(x) \cdot q(x) = -2x^6 + 2x^5 - x^4 + 9x^3 - 4x^2 + 2x - 8$ **4.** Stopnja polinoma je 7, vodilni koeficient je 8, vodilni člen $8x^7$, konstantni člen pa -27. $p(2) = 25$ **5.** $a = 8$, $b = -3$ **6.** **a)** $p(x) = (3x^2 - 2x + 1)(x - 2) - 1$ **b)** $p(x) = (2x^2 + 3x + 10)(x - 3)$ **c)** $p(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3x + 1) - 5x + 8$ **č)** $p(x) = (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 9x - 6)(x^2 - 2x + 4) + 13x + 36$ **d)** $p(x) = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1) - x - 2$ **7.** Količnik je $k(x) = 2x^4 - 4x^3 + 15x^2 - 60x + 246$, ostanek pa -980. **8.** $r(x) = 4$, $p(-3) = 4$ **9.** Količnik je $k(x) = x^2 + x + 1$, ostanek pa $r(x) = 0$. Ker je $r(x) = 0$, je število 5 ničla polinoma p. **10.** Ker je $p(x) = (x - 3)^2(x + 4)$, je število 3 dvojna ničla polinoma p. Število -4 je tudi ničla polinoma p. **11.** $a = -3$ **12.** $a = 4$, $b = 8$ **13.** $p(2) = 39$, $p(-3) = -86$ **14.** $p(x) = (x - 3)(3x^3 + 9x^2 + 26x + 81) + 244$, $p(x) = (x + 1)(3x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$ **15.** **a)** $p(-\frac{3}{2}) = 1$ **b)** $p(x) = (2x^2 - 3x + 1)(2x + 3) + 1$ **16.** $p(x) = (2x + 1)(x + 2)(x - 4) + 3$ **17.** $a = 3$ **18.** $a = 3$, $b = -10$ **19.** Ker je $p(x) = (x - 2)^2(x^2 + 4)$, je 2 dvojna ničla polinoma p, ki nima drugih realnih ničel. **20.** $a = -5$, $b = 3$ **21.** $p(x) = (x + 5)^2(x - 2)(x + 2)$, $x_{1,2} = -5$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$ **22.** $p(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 8x - 8$ **23.** **a)** $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$ **b)** $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 2$, $x_4 = -4$ **c)** $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$ **č)** $x_{1,2} = \frac{1}{3}$ **d)** $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{4}$ **e)** $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$ **24.** $x_{1,2} = \frac{1}{2}$ **25.** **a)** $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -2$, $x_4 = -3$ **b)** $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4,5} = 2$ **c)** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$ **26.** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = -4$ **27.** Stranice kvadra merijo 4 cm, 5 cm in 6 cm. **28.** To število je 5. **29.** **a)** $x_{1,2} = -1$, $x_3 = -2$ **b)** $x_{1,2} = -1$, $x_{3,4} = -2$ **c)** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ **č)** $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{1}{2}$ **d)** $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$ **e)** $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2 + i$, $x_4 = -2 - i$ **f)** $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -1 + i$, $x_4 = -1 - i$ **30.** $p(3i) = 0$, $p(-i) = 0$ **31.** $x_1 = 3$, $x_2 = \sqrt{3}\,i$, $x_3 = -\sqrt{3}\,i$ **32.** **a)** $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1 - i$, $x_5 = 1 + i$ **b)** $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = i\sqrt{2}$, $x_4 = -i\sqrt{2}$ **c)** $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$ **33.** $x_1 = 2 - i$, $x_2 = 2 + i$, $x_3 = \sqrt{5}$, $x_4 = -\sqrt{5}$ **34.** **a)** $x_{1,2} = -1$, $x_3 = -2$, $x_4 = -6$, $p(x) = (x + 1)^2(x + 6)(x + 2)$ **b)** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $p(x) = (2x - 1)(x - 2)(x + 1)$ **c)** $x_1 = -2$, $x_2 = -3$, $x_3 = \frac{1}{3}$, $x_{4,5} = 0$, $p(x) = x^2(3x - 1)(x + 2)(x + 3)$ **č)** $x_1 = 0$, $x_{2,3} = -2$, $p(x) = x(x + 2)^2(x^2 + 1)$ **d)** $x_{1,2} = -1$, $x_3 = -3$ $p(x) = (x + 3)(x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)$ **35.** Število $\frac{1}{2}$ ni ničla polinoma p, ker je $p(\frac{1}{2}) = \frac{35}{8}$. Ničle so $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$. $p(x) = -(x - 1)(x + 2)(x + 3)$ **36.** $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ **37.** $p(x) = 3x^4 + 6x^3 - 81x^2 - 168x + 240$ **38.** $p(x) = -4x^3 + 24x^2 - 4x + 24$ **39.** $p(x) = -x^4 + 9x^3 - 19x^2 + x + 30$ **40.** **a)** $x \in (-2, 2) \cup (4, \infty)$ **b)** $x \in (-4, -1) \cup (-1, 3)$ **c)** $x \in (-\infty, -3]$ **č)** $x \in [-5, -1] \cup \{0\} \cup [3, \infty)$ **41.** **a)** Začetna vrednost je $p(0) = 6$. **b)** Ničle so $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$. **c)** Polinom p je pozitiven na $(-1, 1)$, $(1, 2)$ in $(3, \infty)$ ter negativen na $(-\infty, -1)$ in $(2, 3)$.

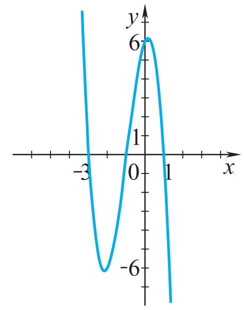
42. $q(x) = -(x-1)^2(x+1)(x-2)$



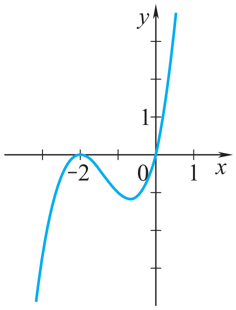
43. **a)** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $p(0) = -6$,



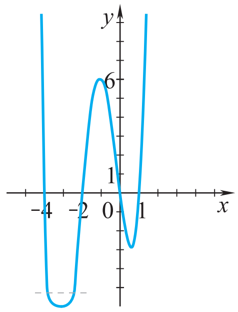
b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$, $p(0) = 6$,



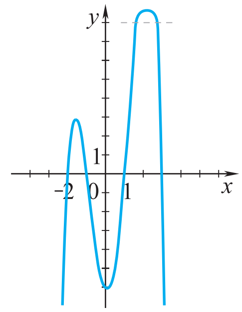
c) $x_{1,2} = -2$, $x_3 = 0$, $p(0) = 0$,



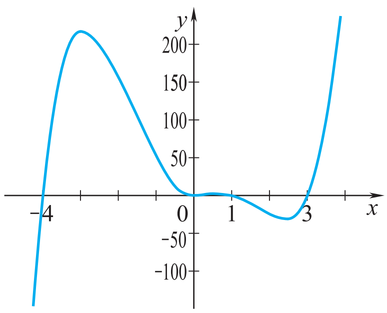
č) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -4$, $x_4 = 0$, $p(0) = 0$,



d) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -2$, $p(0) = -6$,

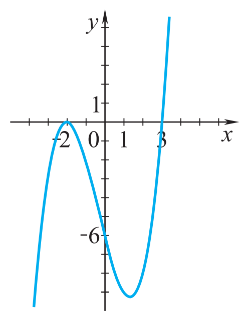


e) $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_5 = -4$, $p(0) = 0$,

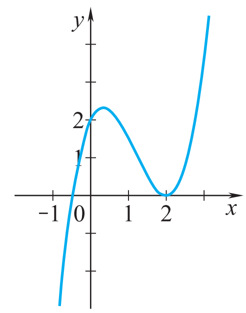


44. **a)** Ničle so $x_1 = 3$, $x_{2,3} = -2$, $f(0) = -6$.

b)



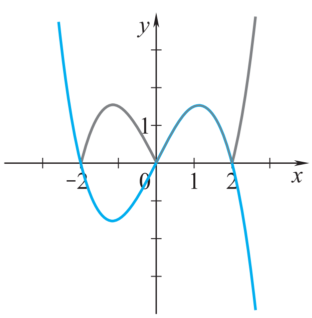
45. **a)**



b) $p(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2$

46. **a)** $x \in (-\infty, -2] \cup [0, 2]$

b) in **c)**

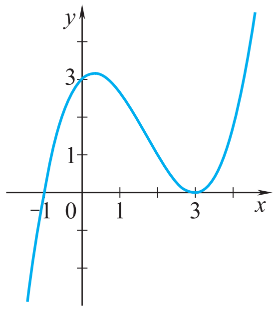


47. **a)** $p(x) = -(x+2)(x-1)(x-3) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$

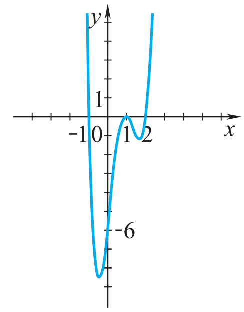
b) $q(x) = 3(x-1)(x+1)^2(x-2) = 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 3x + 6$

48. $P_1(2, -5)$, $P_2(-2, 3)$

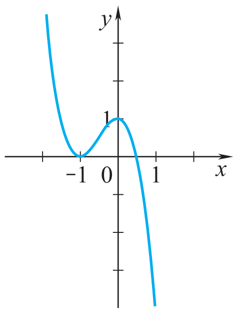
49. **a)** Ničle so $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 3$, presečišče grafa z ordinatno osjo je $(0, 3)$.
b) **c)** $P_1(0, 3)$, $P_2(2, 1)$, $P_3(3, 0)$



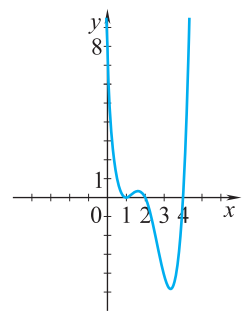
50. Ničle so $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$, $p(0) = -6$, $x \in [-1, 2]$.



51. **a)** $p(-2) + p(-\frac{1}{2}) = 5 + \frac{1}{2} = 5\dot{}5$
b) Ničle so $x_{1,2} = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}$, presečišče grafa z osjo y je $T(0, 1)$.
c)



52. **a)** $a = 21$, $b = 8$
b) $x_{3,4} = 1$
c)



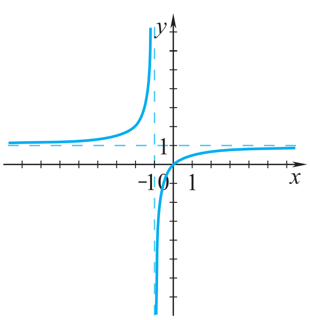
17. RACIONALNE FUNKCIJE

1. **a)** $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ Enačba vodoravne asimptote je $y = \frac{1}{2}$.
b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 4\}$ Enačba vodoravne asimptote je $y = 0$.
c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{2}{3}\}$ Enačba vodoravne asimptote je $y = \frac{2}{3}$.
č) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$ Enačba vodoravne asimptote je $y = -2$.

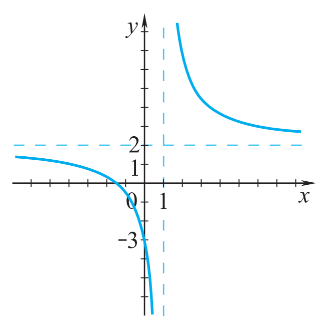
2. $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ Začetna vrednost funkcije f je $-\frac{3}{2}$; $f(-\frac{9}{2}) = 3$.

3. **a)** Začetna vrednost je $f(0) = 2$, ničla je $x_1 = -2$, pol je $x_1 = 1$.
b) Definicijsko območje je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, enačba vodoravne asimptote pa $y = -1$.
c) Funkcija je pozitivna na intervalu $(-2, 1)$ ter negativna na $(-\infty, -2)$ in $(1, \infty)$.

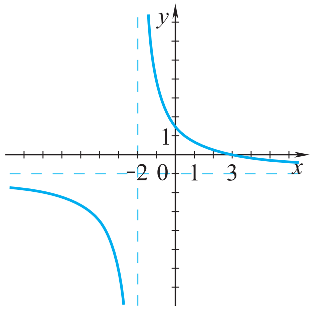
4. **a)** Ničla je $x = 0$, začetna vrednost $f(0) = 0$, pol $x = -1$, enačba vodoravne asimptote je $y = 1$.



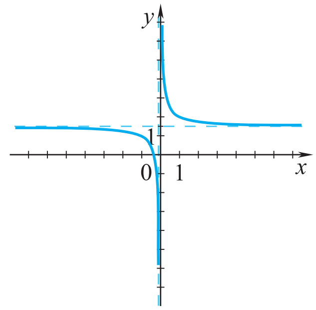
b) Ničla je $x = -\frac{3}{2}$, začetna vrednost $f(0) = -3$, pol $x = 1$, enačba vodoravne asimptote je $y = 2$.



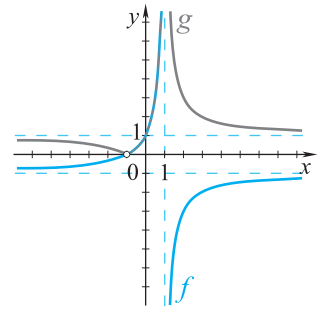
c) Ničla je $x = 3$, začetna vrednost $f(0) = \frac{3}{2}$, pol $x = -2$, enačba vodoravne asimptote je $y = -1$.



č) Ničla je $x = -\frac{1}{3}$, pol $x = 0$, enačba vodoravne asimptote je $y = \frac{3}{2}$.

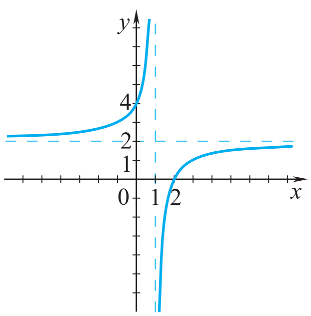


5.



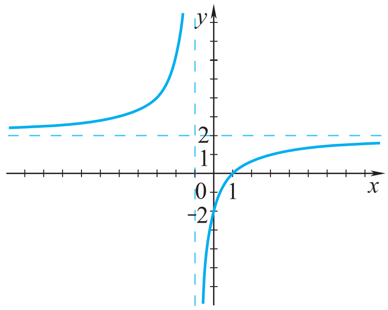
6. **a)** $f(x) = \frac{2x-4}{x-1} = \frac{2(x-2)}{x-1}$

b)



7. **a)** Ničla je $x = 1$, pol je $x = -1$, enačba vodoravne asimptote $y = 2$, presečišče grafa z ordinatno osjo pa $(0, -2)$.

b)

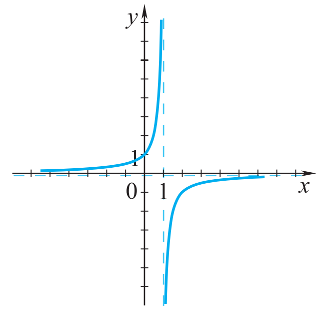


$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $Z_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

c) $P(\frac{1}{3}, -1)$

8. **a)** Ničle ni, pol je $x_1 = 1$, enačba vodoravne asimptote $y = 0$, presečišče grafa z ordinatno osjo pa $(0, 1)$.

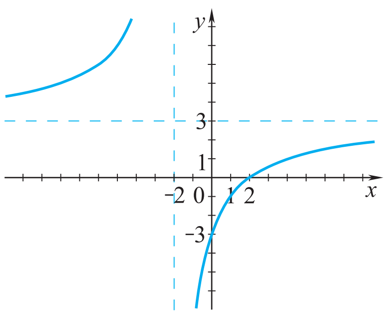
b)



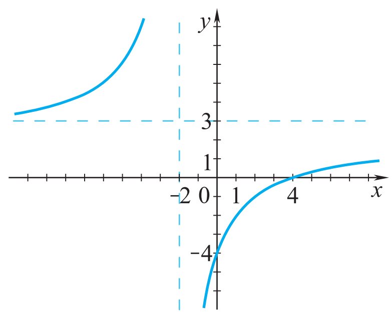
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $Z_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $x \in [0, 1)$

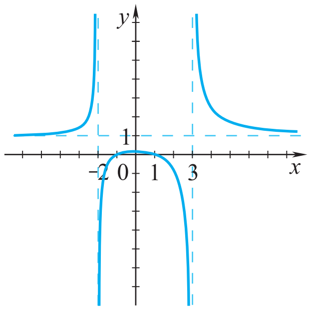
9. **a)**



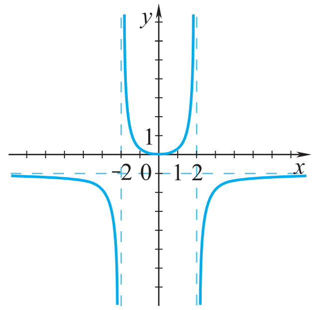
b) $g = \frac{2x-8}{x+2}$



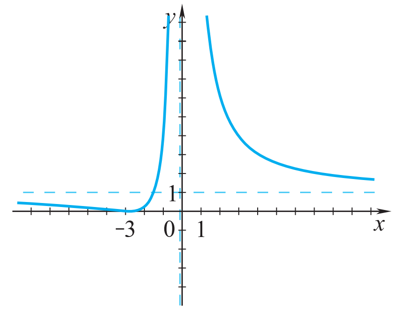
10. **a)** Ničli sta $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, začetna vrednost $f(0) = \frac{1}{6}$, pola sta $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, enačba vodoravne asimptote je $y = 1$.



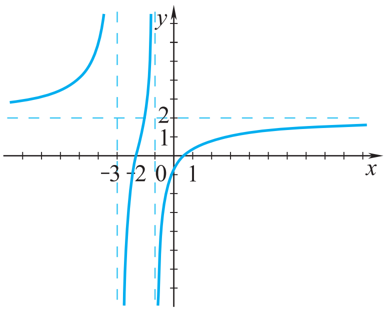
b) Ničli sta $x_{1,2} = 0$, začetna vrednost $f(0) = 0$, pola sta $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, enačba vodoravne asimptote je $y = -1$.



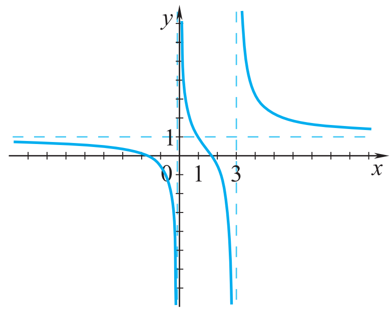
c) Ničli sta $x_{1,2} = -3$, pola sta $x_{1,2} = 0$, enačba vodoravne asimptote je $y = 1$.



č) Ničli sta $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, začetna vrednost $f(0) = -\frac{2}{3}$, pola sta $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, enačba vodoravne asimptote je $y = 2$.

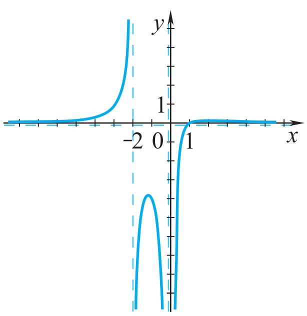


d) Ničli sta $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, v točki 0 funkcija ni definirana, pola sta $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, enačba vodoravne asimptote je $y = 1$.



11. **a)** Začetna vrednost je $f(0) = -1$, ničli sta $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, poli so $x_{1,2} = 1$, $x_3 = 4$. **b)** Definicijsko območje je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$, enačba vodoravne asimptote pa $y = 0$. **c)** Funkcija je pozitivna na intervalih $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 2)$ ter $(4, \infty)$, negativna na $(-\infty, \frac{1}{2})$ in $(2, 4)$.

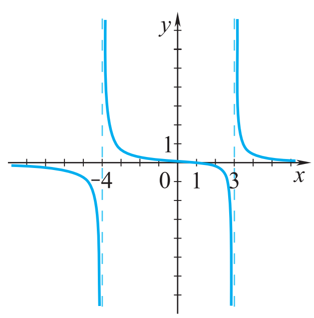
12. **a)** Ničla je $x = 1$, poli so $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -2$, enačba vodoravne asimptote je $y = 0$.



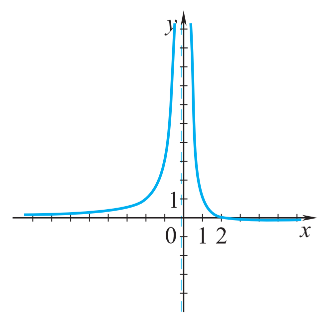
b) $x \in (-\infty, -$

13.

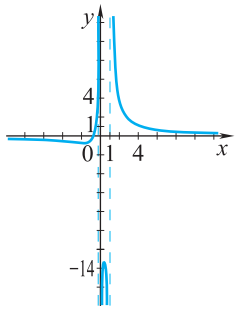
a) Ničla je $x = 1$, začetna vrednost $f(0) = \frac{1}{12}$, pola sta $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, enačba vodoravne asimptote je $y = 0$.



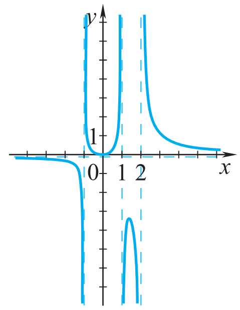
b) Ničla je $x = 2$, pola sta $x_{1,2} = 0$, enačba vodoravne asimptote je $y = 0$.



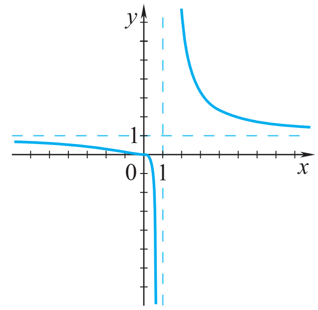
c) Ničla je $x = -\frac{2}{3}$, pola sta $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, enačba vodoravne asimptote je $y = 0$.



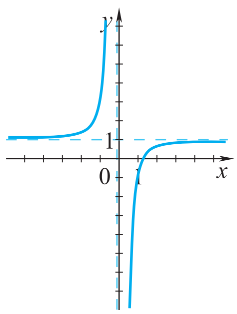
č) Ničli sta $x_{1,2} = 0$, poli so $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, enačba vodoravne asimptote je $y = 0$.



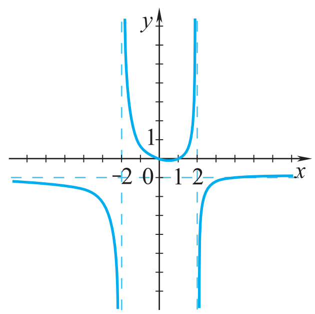
d) Ničle so $x_{1,2,3} = 0$, poli so $x_{1,2,3} = 1$, enačba vodoravne asimptote je $y = 1$.



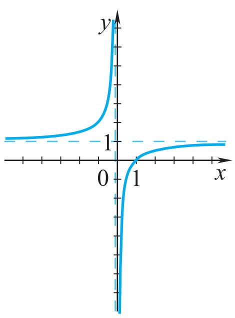
e) Ničla je $x_1 = \sqrt[3]{2}$, poli so $x_{1,2,3} = 0$, enačba vodoravne asimptote je $y = 1$.



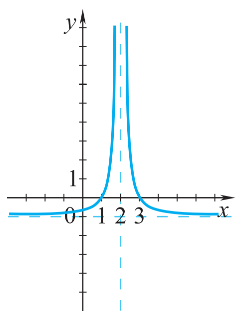
14. Ničli sta $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, pola $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, enačba vodoravne asimptote $y = -1$, presečišče grafa funkcije f z vodoravno asimptoto je točka $(4, -1)$.



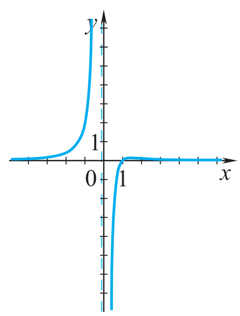
15. a)



b)



c)

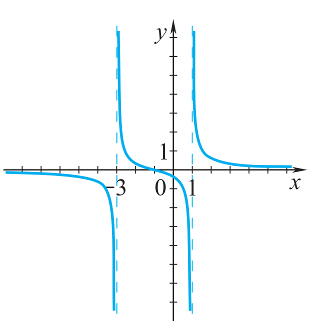


16. $f(x) = \frac{x+2}{2-x}$, $g(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$

17. a) $f(4) + f(-2) = \frac{4}{7}$

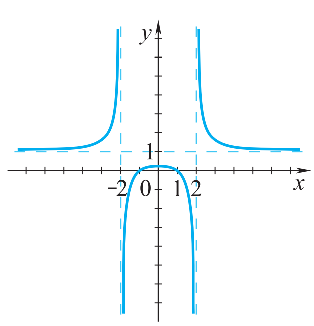
b) Ničla je $x_1 = -1$, pola sta $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, enačba vodoravne asimptote je $y = 0$, presečišče grafa funkcije z osjo y pa $(0, -\frac{1}{3})$.

c)



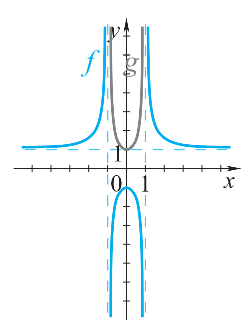
18. a) Ničli sta $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, pola sta $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, enačba vodoravne asimptote $y = 1$, presečišče grafa z ordinatno osjo $(0, \frac{1}{4})$.

b)

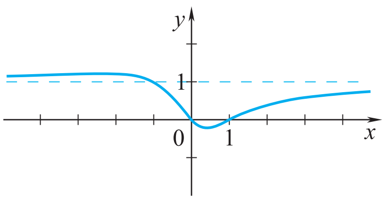


c) $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$

19.

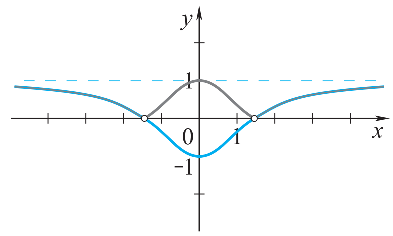


20. Ničli sta $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, polov ni, $y = 1$ je enačba vodoravne asimptote, točka $(-1, 1)$ pa presečišče grafa funkcije f z vodoravno asimptoto.

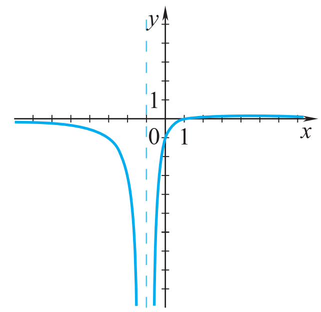


21. a) Ker je $f(-x) = f(x)$, je funkcija f soda.

b)



22. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$



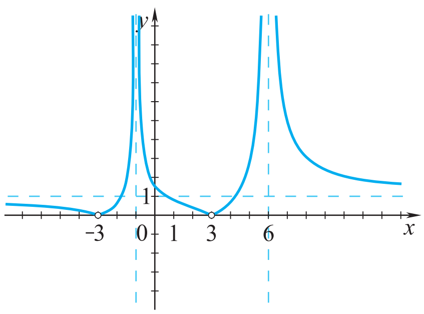
23. a) $x = -5$, $x = -1$ **b)** $x = -2$ **c)** Nima rešitve.

24. a) $-3 < x \leq \frac{1}{2}$ **b)** $-\frac{3}{4} \leq x < 1$ **c)** $(-\frac{3}{2} < x < -1) \vee (x > 3)$

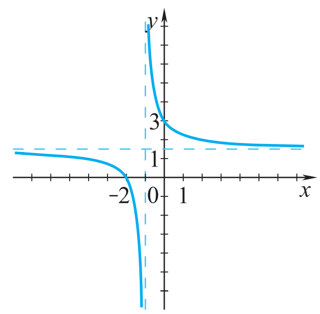
č) $(x < 0) \vee (x > 3)$

25. $x < -\frac{5}{2}$ ali $x > -\frac{4}{3}$

26. Ničli sta $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, začetna vrednost $f(0) = \frac{3}{2}$, pola sta $x_1 = -1$, $x_2 = 6$, enačba vodoravne asimptote je $y = 1$.

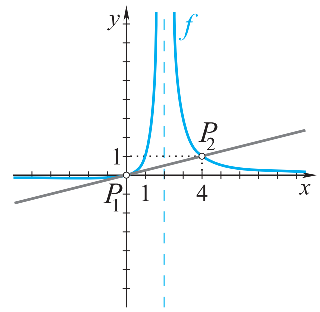


27. Ničla je $x = -2$, pol $x = -1$, začetna vrednost $f(0) = 3$, enačba vodoravne asimptote je $y = \frac{3}{2}$.



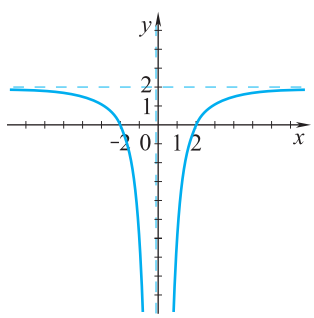
Presečišči sta pri $P_1(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$, $P_2(2, 2)$.

28.



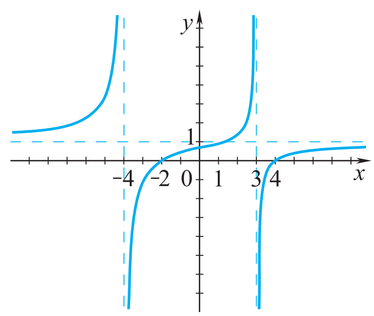
$P_1(0, 0)$, $P_2(4, 1)$

29. a)

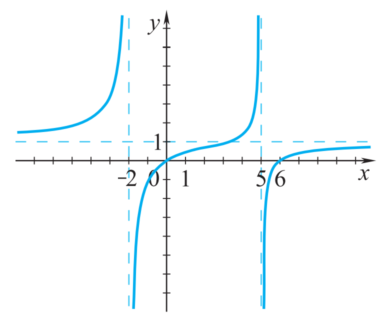


b) $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

30. a)

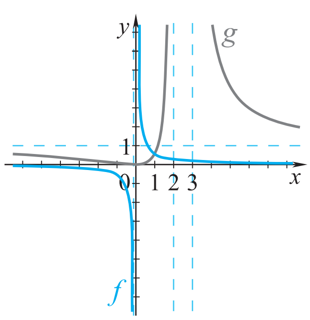


b)

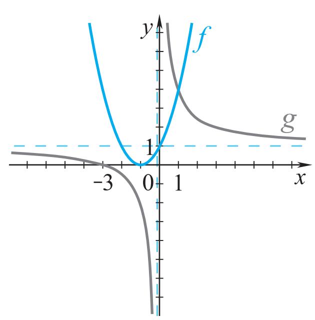


$g(x) = \frac{x(x-6)}{(x-5)(x+2)} = \frac{x^2-6x}{x^2-3x-10}$

31. $P(1, \frac{1}{2})$

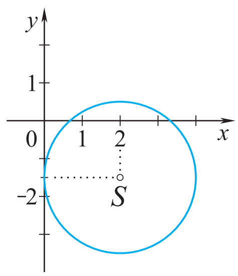


32. $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$



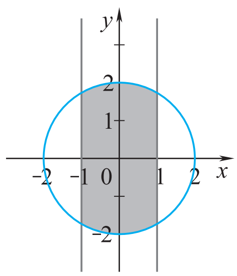
18. ALGEBRSKE ENAČBE DRUGE STOPNJE. STOŽNICE

1. $x^2 + y^2 = 25$; $B(-3, 4)$ **2.** $(x+2)^2 + y^2 = 13$, $P_1(-5, 2)$, $P_2(1, 2)$ **3.** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 100$, $y_1 = 7$, $y_2 = -9$
4. Enačba krožnice je $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$. Presečišči z abscisno osjo sta točki $(2, 0)$ in $(4, 0)$, krožnica ne seka ordinatne osi.
5. Enačba krožnice je $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10$. **6.** $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 18$ **7.** $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$, $S(1, -3)$, $r = 4$; $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 64$
8. $(x-2)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = 4$



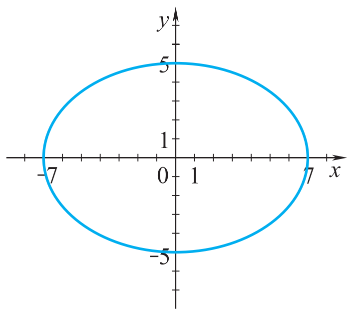
9. $S = 8\pi$ **10.** $S(4, 1)$; $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 18$ **11.** $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$
12. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$ **13.** $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ **14.** $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$, $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$ **15.** $r = 4$, $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ **16.** $F = -15$
17. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 20$ **18.** **a)** $P(2, 2)$ **b)** $P_1(2, -2)$, $P_2(4, 0)$ **c)** Ni presečišč.
19. **a)** $(x+2)^2 + y^2 = 16$, $S(-2, 0)$, $r = 4$ **b)** $P_1(2, 0)$, $P_2(-2, 4)$, $d = 4\sqrt{2}$
20. $n_1 = 0$, $y = 0$, $n_2 = -8$, $y = x - 8$ **21.** $S_1(-2, -1)$, $S_2(1, -5)$, $d(S_1, S_2) = 5$
Ker sta polmera krožnic 3 in 1 ter je razdalja med središčema $5 > 3 + 1$, krožnici nimata skupne točke.

22. Da.

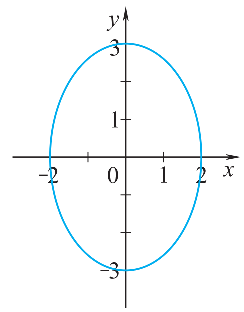


23. **a)** $T \in A$; $P, Q \in B$ **b)** $(2, 0)$ **c)** $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$ **č)** $A \cap B = \{(1, 1)\}$
24. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$ **25.** $x^2 + (y-3)^2 = 13$ **26.** **a)** $P_1(-4, 0)$, $P_2(-1, 3)$ **b)** $P(0, 5)$ **c)** Krožnici se ne sekata.

27. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$. Temena so $T_1(7, 0)$, $T_2(-7, 0)$, $T_3(0, 5)$, $T_4(0, -5)$, gorišči sta $F_1(2\sqrt{6}, 0)$, $F_2(-2\sqrt{6}, 0)$.

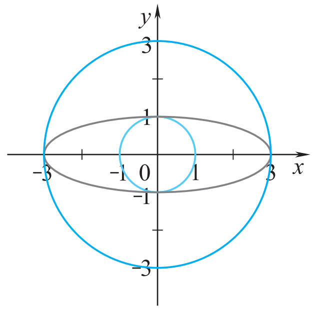


28. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Temena so $T_1(2, 0)$, $T_2(-2, 0)$, $T_3(0, 3)$, $T_4(0, -3)$, gorišči sta $F_1(0, \sqrt{5})$, $F_2(0, -\sqrt{5})$.



29. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ **30.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $F_1(\sqrt{7}, 0)$, $F_2(-\sqrt{7}, 0)$ **31.** **a)** Temena elipse so $T_1(6, 0)$, $T_2(-6, 0)$, $T_3(0, -2)$, $T_4(0, 2)$, gorišči pa $F_1(4\sqrt{2}, 0)$, $F_2(-4\sqrt{2}, 0)$. **b)** Temena elipse so $T_1(\sqrt{6}, 0)$, $T_2(-\sqrt{6}, 0)$, $T_3(0, -\sqrt{10})$, $T_4(0, \sqrt{10})$, gorišči pa $F_1(0, -2)$, $F_2(0, 2)$. **32.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$, $F_1(2\sqrt{2}, 0)$, $F_2(-2\sqrt{2}, 0)$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $F_1(0, \sqrt{5})$, $F_2(0, -\sqrt{5})$ **33.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$
34. $b = 2\sqrt{3}$. Enačba elipse je $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. **35.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{50} = 1$ **36.** $F_1(0, \sqrt{5})$, $F_2(0, -\sqrt{5})$. Enačba elipse je $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Presečišči sta $P_1(0,-3)$, $P_2(\frac{48}{25}, \frac{21}{25})$. **37.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ **38.** $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{18} = 1$ **39.** $3x^2 + y^2 = 9$ oz. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$, $F_1(0, \sqrt{6})$, $F_2(0, -\sqrt{6})$

40. $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 1$

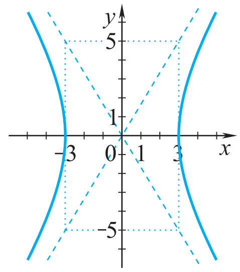


41. $(x-3)^2 + y^2 = 9$ **42.** $P_1(4, -2), P_2(-\frac{28}{5}, \frac{2}{5})$ **43.** $P_1(1, 4), P_2(-2, 2), d(P_1, P_2) = \sqrt{13}$

44. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ **45.** $P_1(6, 2), P_2(6, -2), P_3(-6, 2), P_4(-6, -2)$

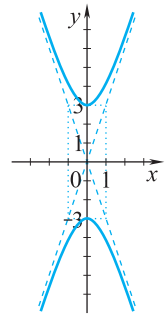
46. **a)** $P_1(0, \sqrt{2}), P_2(0, -\sqrt{2})$ **b)** $P_1(\sqrt{2}, \sqrt{3}), P_2(\sqrt{2}, -\sqrt{3}), P_3(-\sqrt{2}, \sqrt{3}), P_4(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$

47. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = -1$; $T_1(3, 0), T_2(-3, 0), F_1(\sqrt{34}, 0), F_2(-\sqrt{34}, 0)$; $y = \frac{5}{3}x$ in $y = -\frac{5}{3}x$



48. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$

49. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = -1$; $T_1(0, 3), T_2(0, -3), F_1(0, \sqrt{10}), F_2(0, -\sqrt{10})$



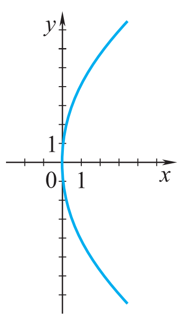
50. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ **51.** $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = -1$ **52.** $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1$ **53.** $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = -1$ **54.** **a)** Temeni hiperbole sta $T_1(4, 0)$, $T_2(-4, 0)$, gorišči pa $F_1(2\sqrt{5}, 0), F_2(-2\sqrt{5}, 0)$. **b)** Temeni hiperbole sta $T_1(0, 2\sqrt{3}), T_2(0, -2\sqrt{3})$, gorišči pa $F_1(0, -4), F_2(0, 4)$.

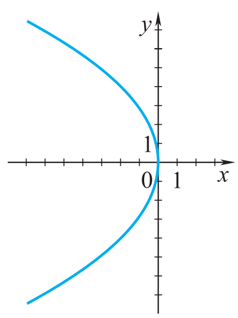
55. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, F_1(\sqrt{13}, 0), F_2(-\sqrt{13}, 0)$; $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = -1, F_1(0, \sqrt{3}), F_2(0, -\sqrt{3})$ **56.** $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ **57.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = -1$

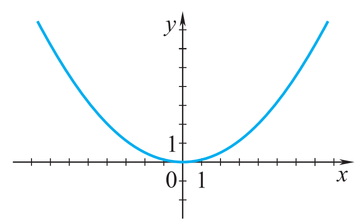
58. $3x^2 - y^2 = -9$ oz. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1$; $F_1(0, 2\sqrt{3}), F_2(0, -2\sqrt{3})$ **59.** **a)** $C = 1$, **b)** $C = 4$, **c)** $C = -1$ **60.** $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{10} = 1$

61. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ **62.** $P_1(4, 2), P_2(\frac{20}{7}, -\frac{2}{7})$ **63.** $P_1(9, 5), P_2(9, -5), P_3(-9, 5), P_4(-9, -5)$ **64.** $P_1(4, 3), P_2(4, -3), P_3(-4, 3)$, $P_4(-4, -3)$ **65.** $P_1(3, 4), P_2(3, -4), P_3(-3, 4), P_4(-3, -4)$ **66.** Krivulji sta elipsa in hiperbola, presečišča pa $P_1(4, \sqrt{5}), P_2(-4, \sqrt{5})$, $P_3(4, -\sqrt{5}), P_4(-4, -\sqrt{5})$. **67.** $y^2 = 20x$

68. $y^2 = 16x$ **69.** $y^2 = -8x$ **70.** $x^2 = 8y$







71. **a)** Teme je $T(0, 0)$, gorišče $F(\frac{3}{2}, 0)$, enačba vodnice pa $x = -\frac{3}{2}$. **b)** Teme je $T(0, 0)$, gorišče $F(0, -\frac{9}{4})$, enačba vodnice pa $x = \frac{9}{4}$. **c)** Teme je $T(0, 0)$, gorišče $F(0, 3)$, enačba vodnice pa $y = -3$. **72.** $y^2 = 8x, F(2, 0), x^2 = 4y, F(0, 1)$ **73.** $A_1(\frac{1}{2}, \sqrt{5}), A_2(\frac{1}{2}, -\sqrt{5})$

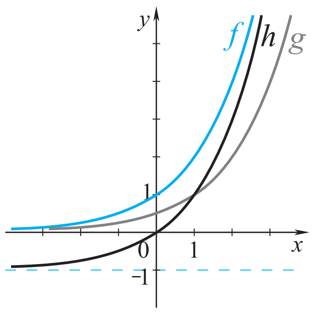
74. $p = 12, y^2 = 24x$; enačba vodnice v je $x = -6$; koordinata gorišča $F(6, 0)$; $d(T, F) = d(T, v) = 8$ **75.** **a)** elipso **b)** hiperbolo **c)** krožnico **d)** parabolo **76.** $P_1(2, 4), P_2(\frac{1}{2}, -2)$ **77.** $P_1(1, 1), P_2(4, -2), d(P_1, P_2) = 2\sqrt{3}$ **78.** $y^2 = 12x, D(3, 6)$

79. $P_1(0, 0), P_2(5, 5), P_3(5, -5)$ **80.** $P_1(\frac{4}{5}, 2), P_2(\frac{4}{5}, -2)$ **81.** $P_1(2, 2\sqrt{3}), P_2(2, -2\sqrt{3})$

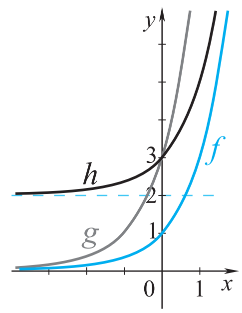
19. EKSPONENTNA FUNKCIJA

1. $f(x) = 2^x, f(3) = 8, f(\frac{2}{3}) = 1{\cdot}5874$ **2.** $f(x) = (\frac{1}{4})^{-x} = 4^{-x}, f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^{-x} = 4^{-\frac{1}{4}} = (2^2)^{-\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

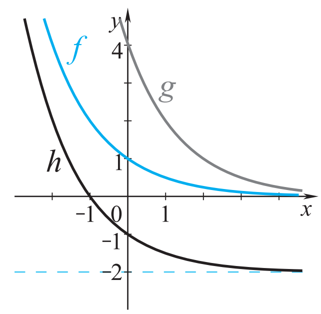
3. **a)**



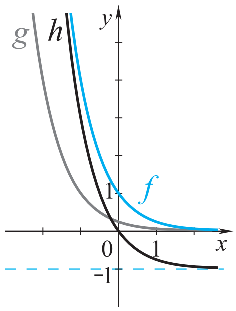
b)



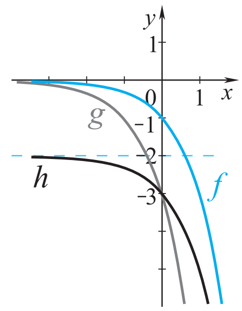
c)



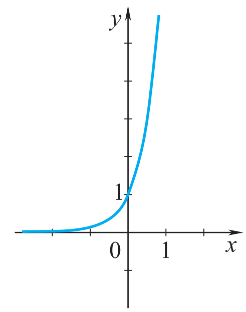
č)



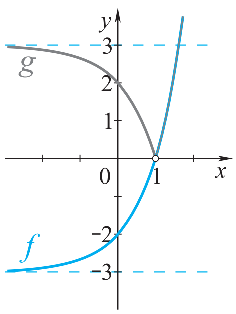
d)



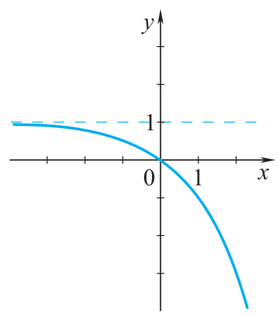
4. $f(x) = 8^x$



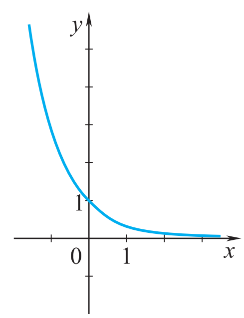
5. **a)** Graf seka abscisno os v $(1, 0)$, ordinatno os pa v $(0, -2)$. Asimptota je $y = -3$.
b) $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = (-3, \infty)$.



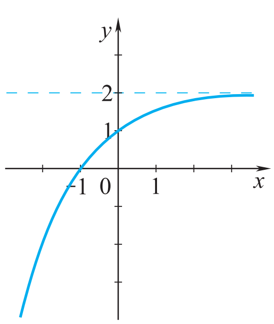
6. Ničla je $x = 0$, enačba vodoravne asimptote $y = 1$.
$D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = (-\infty, 1)$.



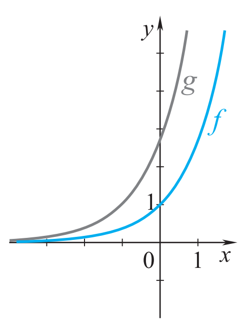
7. $x \in (-\infty, 1)$



8. $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $y = 2$, $x \in (-1, \infty)$

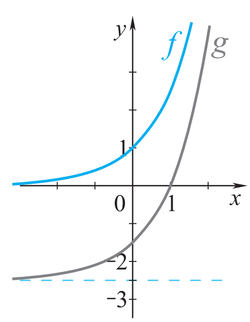


9. **a)**



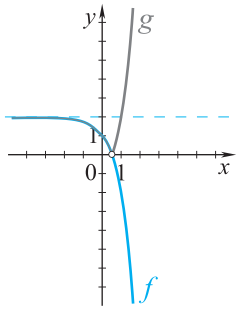
b) $g(x) = e^{x+1}$, $g(0) = e$

10. **a)**

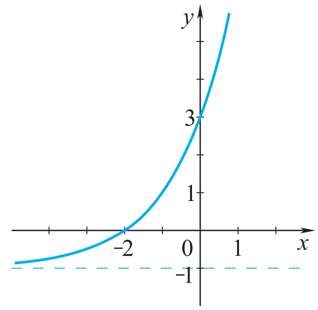


b) $g(x) = 2{\cdot}5^x - \frac{5}{2}$

11. **a)** $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 1)$, $y = 2$



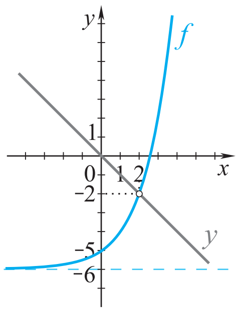
12. **a)** $(-2, 0)$, $(0, 3)$ **b)**



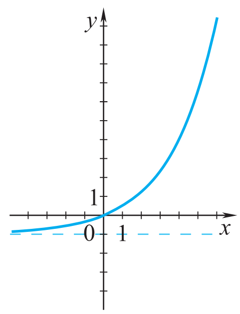
13. $f(x) = 3^x$, $g(x) = -3^x$, $h(x) = 3^x + 1$, $s(x) = 3^{x-1}$ **14.** **a)** $x > 1$ **b)** $x < 2$ **c)** $x < 0$ **15.** **a)** $x = -3$ **b)** $x = \frac{7}{2}$ **c)** $x = -\frac{1}{2}$ **č)** $x = \frac{2}{5}$ **d)** $x = \frac{3}{2}$ **e)** $x = \frac{1}{3}$ **f)** $x = \frac{3}{2}$ **g)** $x = \frac{10}{3}$ **h)** $x = -5$ **i)** $x = 5$ **j)** $x = 0$

16. **a)** $x = 0$ **b)** $x = 4$ **17.** **a)** $x = 0$ **b)** $x = 4$ **c)** $x = \frac{1}{3}$ **č)** $x = \frac{1}{2}$ **d)** $x = 0$ **e)** $x = \frac{5}{4}$

18. $x = -2$

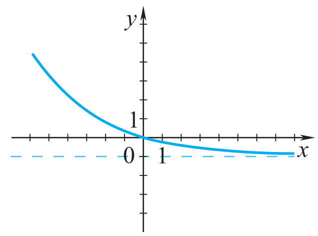


19. **a)**



b) $(-1, \frac{4}{9})$, $(3, 2{\cdot}25)$

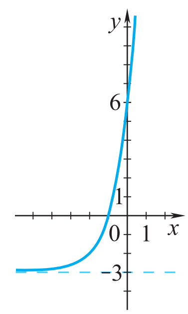
20. **a)**



b) $x \geq 1$

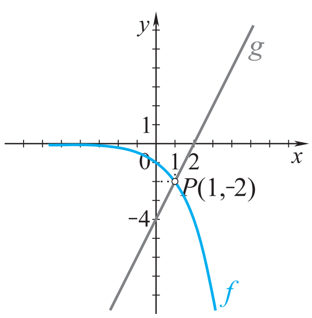
21. **a)** $(-1, 0)$, $(0, 6)$

b)

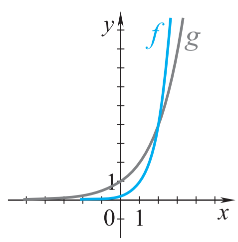


c) $(-1, 0)$, $(0, 6)$

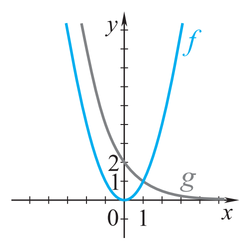
22. $P(1, -2)$



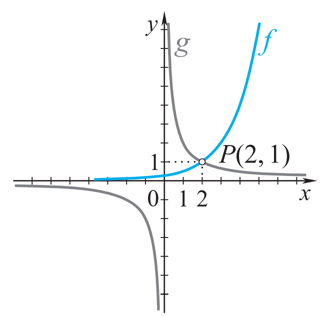
23. $P(2, 4)$



24. $P(1, 1)$



25. $P(2, 1)$



26. Funkcija je $f(x) = 1000 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$, po eni uri je v vzorcu $f(60) = 4\,096\,000$ gliv kvasovk.

20. LOGARITEM

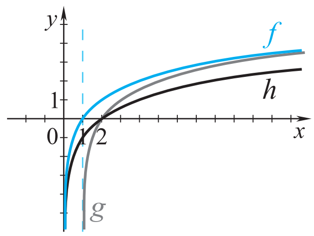
1. **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $-\frac{1}{2}$ **č)** $\frac{7}{2}$ **2.** **a)** $1{\cdot}3084$ **b)** $-0{\cdot}3863$ **3.** $-\frac{7}{2}$ **4.** **a)** x **b)** $3x$ **c)** x **č)** $\frac{1}{x}$ **d)** 3 **e)** 5 **f)** 2 **g)** $\frac{1}{2}$ **h)** 4 **i)** $5\sqrt{5}$ **j)** $\frac{25}{4}$ **5.** $\frac{13}{6}$ **6.** **a)** $\log 7 + 3\log a - 5\log b$ **b)** $1 + \frac{1}{2}\log a - 2\log b - \frac{1}{3}\log c$ **7.** $-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\log_3 a$ **8.** 19 **9.** 1 **10.** $\log_a 81 = 1$ **11.** **a)** $x = \frac{2abc^3}{3d^4}$ **b)** $x = \frac{10a^2}{\sqrt{b}}$ **c)** $x = \frac{b^2\sqrt{a}}{75}$ **12.** **a)** $x = 8$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = -\frac{2}{3}$ **č)** $x = -3$ **d)** $x = 105$ **e)** $x = 2$ **f)** $x = 5$ **g)** $x = 1$

h) $x = 3$ **i)** $x = -1$ **j)** $x = e^2$ **k)** $x = 0$ **l)** $x = -\frac{4}{3}$ **m)** $x = -126$ **n)** $x = \frac{16}{9}$ **13.** $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

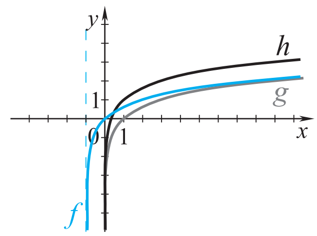
14. **a)** $x = 8$ **b)** $x = 7$ **15.** **a)** $x_1 = 0, x_2 = 1$ **b)** $x = -\frac{5}{7}$ **c)** $x = 3$ **č)** $x = 1$ **d)** $x_1 = 12, x_2 = -1$

e) $x = 0$ **f)** $x = 1$ **g)** $x = 25$ **h)** $x = 9$ **i)** $x_1 = 4, x_2 = 1$ **16.** **a)** $x = 5{\cdot}196$ **b)** $x = 1{\cdot}465$ **c)** $x = -0{\cdot}3010$
č) $x = 1{\cdot}898$ **d)** $x = 0{\cdot}3219$ **e)** $x = 1{\cdot}151$ **f)** $x = 0{\cdot}292$ **g)** $x = 2{\cdot}151$

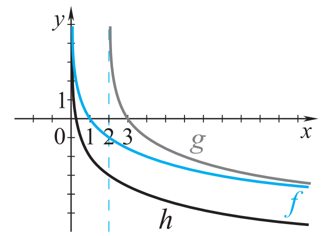
17. **a)**



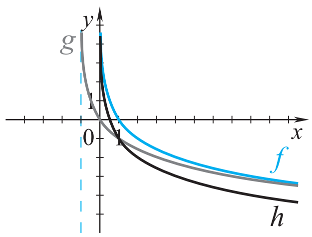
b)



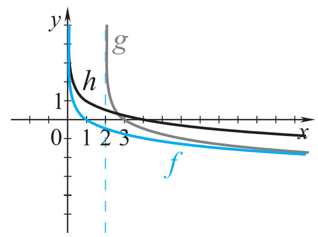
c)



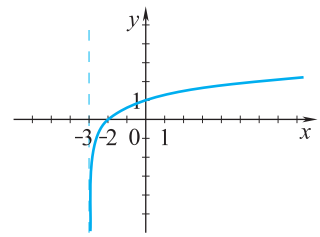
č)



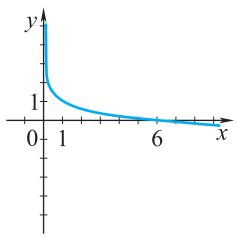
d)



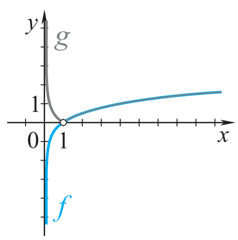
18. Graf seka abscisno os v $(-2, 0)$, ordinatno os pa v $(0, 1)$. Na grafu ležita točki A in C.



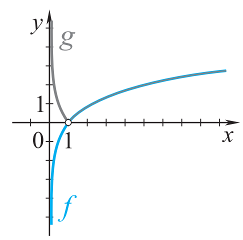
19. Graf seka os x v $(6, 0)$ in ne seka ordinatne osi, enačba navpične asimptote je $x = 0$.



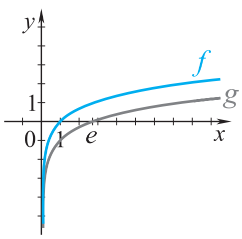
20. $D_f = (0, \infty)$, $Z_f = \mathbb{R}$, $D_g = (0, \infty)$, $Z_f = [0, \infty)$



21.

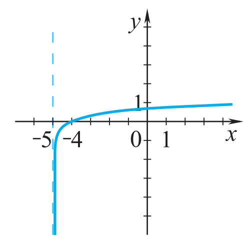


22.

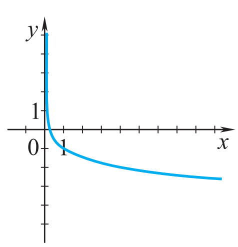


23. $f(x) = \log_5 x$, $g(x) = -\log_5 x$, $h(x) = \log_5(x-1)$, $s(x) = \log_5 x - 1$

24. $x > -4$

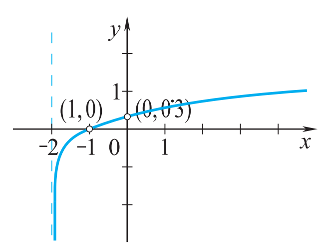


25. $0 < x \leq \frac{1}{4}$

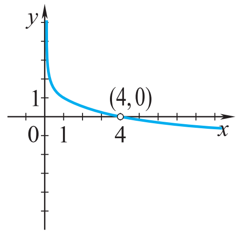


26. **a)** $0 < x < 16$ **b)** $0 < x < 3$ **c)** $x > 2$

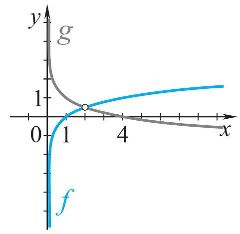
27. $(-1, 0)$, $(0, 0{\cdot}30)$



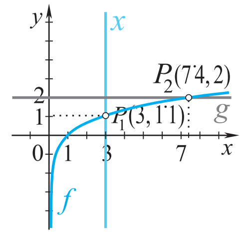
28. $(4, 0)\ x = \frac{1}{16}$



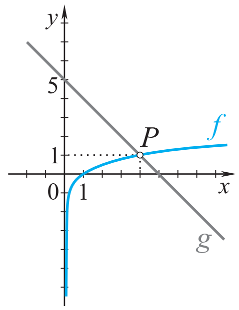
29. $x = 2$



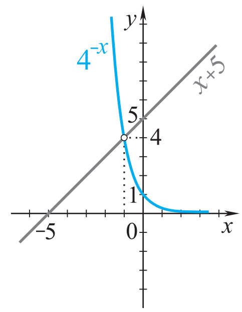
30. $P_1(3,\ 1{\cdot}1)$, $P_2(7{\cdot}4,\ 2)$



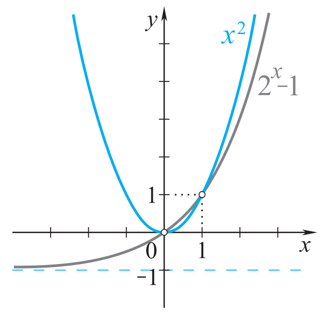
31. $P(4, 1)$, $f(4) = \log_4 4 = 1$ in $g(4) = -4 + 5 = 1$



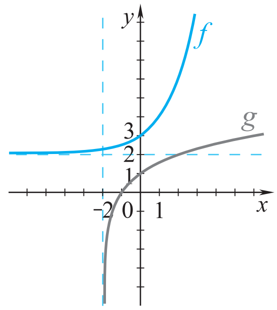
32. **a)** $P(-1, 4)$



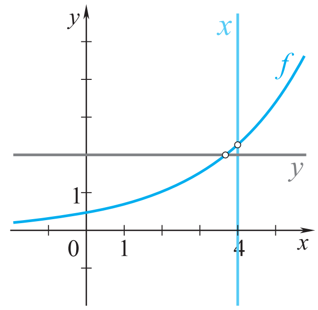
b) $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$



33. $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = (2, \infty)$, $D_g = (-2, \infty)$, $Z_f = \mathbb{R}$

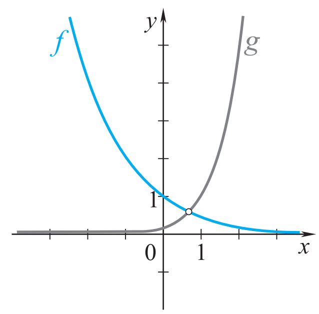


34. **a)** $f(0) = \frac{4}{9}$, $f(2) = 1$, $f(3) = 1{\cdot}5$

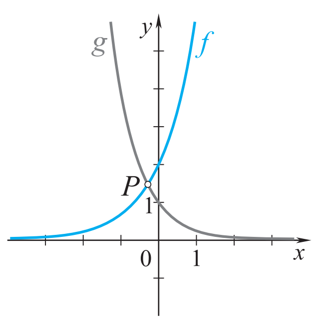


b) $(4,\ 2{\cdot}25)$, $(3{\cdot}7095,\ 2)$

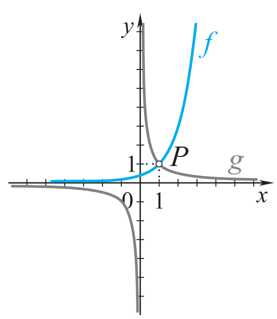
35. $P(0{\cdot}70,\ 0{\cdot}62)$



36. $P(-0{\cdot}28,\ 0{\cdot}68)$



37. $P(1, 1)$

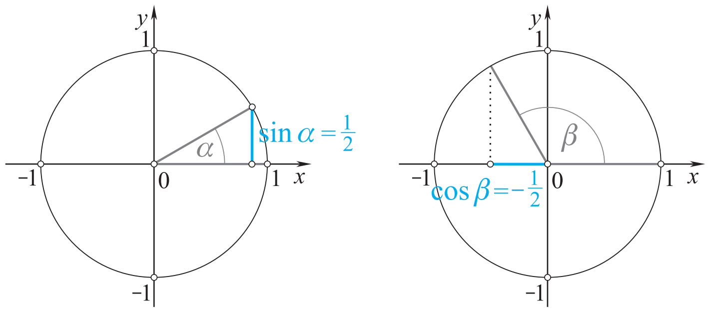


38. $k = \frac{1}{5570}\ln 2 =$ (približno enako) $0{\cdot}0001244$; $y = y_0 \cdot e^{\frac{-t\cdot\ln 2}{5570}}$. Po 10 000 letih je v vzorcu še približno 29 % ogljika C^{14}.

21. Kotne funkcije

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **2.** $A(2\sqrt{3}, 2), B(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), C(2, 2\sqrt{3}), D(0, 4), E(-4, 0), F(0, -4), G(4, 0)$

3.



4. $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \tan\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

5. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}, \cot\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

6. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

7. $\sin\alpha = -\frac{5\sqrt{26}}{26}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}, \tan\alpha = -5$

8. $\tan x = 3$

9. $\frac{\cos^3 x}{\sin x - \sin^3 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin x(1-\sin^2 x)} = \frac{\cos^3 x}{\sin x\cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

10. **a)** 1 **b)** $\cos x - \sin x$ **c)** 2 **č)** $\frac{2}{\sin x}$ **11.** Ne.

$$\frac{\cos(-\alpha)}{\sin\frac{\pi}{2} + \sin(-\alpha)} + \frac{\cos 0 - \sin\alpha}{\cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \frac{1-\sin\alpha}{0+\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + (1-\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{2-2\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{2(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}$$

12. **a)** 0 **b)** −1 **c)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **č)** 1 **d)** $2+\sqrt{2}$ **e)** 3 **f)** $\frac{1}{2}$ **g)** $\frac{2}{3}$ **h)** $-\frac{\sqrt{6}}{12}$

13. $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), l = \frac{2\pi}{3} \doteq 2{\cdot}09$ **14.** $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{25}} = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}, \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-\frac{2\sqrt{6}}{5})\cdot(-\frac{1}{5}) = \frac{4\sqrt{6}}{25}$

15. **a)** $2\tan x$ **b)** $\cot x$ **c)** $2\tan x$ **č)** 2 **d)** $\frac{\sin 2x}{2}$ **e)** $\frac{1-\sin x}{2\sin x}$

16. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}(\sin 2x - \cos(\frac{\pi}{2} - (-2x))) = \frac{1}{4}(\sin 2x - \sin(-2x)) = \frac{1}{4}(\sin 2x + \sin 2x) = \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x\cos x$

17. Ne. $\frac{\sin^2(\pi - x) - \cos 4\pi + \sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{\sin^2 x - 1 + \cos x}{\cos x - 1} = \frac{-\cos^2 x + \cos x}{\cos x - 1} = \frac{-\cos x(\cos x - 1)}{\cos x - 1} = -\cos x$ **18.** **a)** $\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ **b)** $\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $2-\sqrt{3}$ **č)** $\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ **d)** $-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ **19.** **a)** Ne. $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$ **b)** Da. **20.** $\cos(\alpha+\beta) = \frac{16}{65}$

21. $\cos\alpha = -\frac{9}{41}, \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{40+9\sqrt{3}}{82}$ **22.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{8}, \tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{15}-8}{7}$ **23.** $4\sin x$

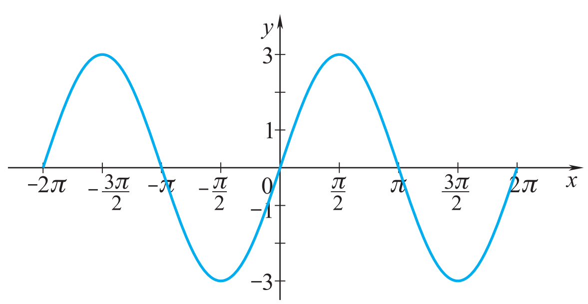
24. $\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3} + \cos x\cos\frac{\pi}{6}\ \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \sin x\cdot\frac{1}{2} - \cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x\cdot\frac{1}{2} = \sin x$

25. Da. **26.** **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ **c)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **č)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

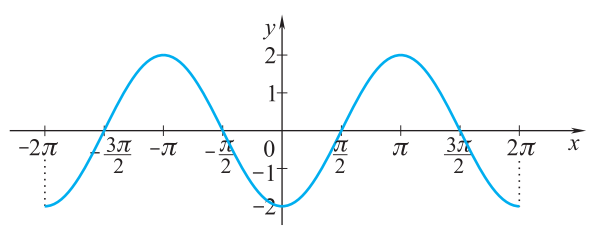
27. Da. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2} = 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}$

28. **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $-\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}$ **č)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}$ **e)** $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}$

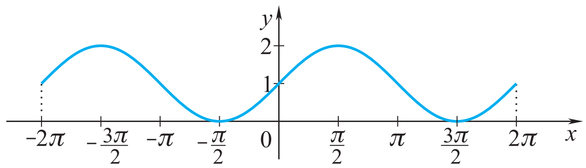
29. Amplituda funkcije f je 3, perioda pa 2π. $x \in (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi)$



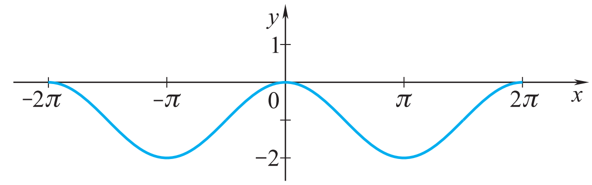
30. Amplituda funkcije f je 2, perioda pa 2π. $x \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$



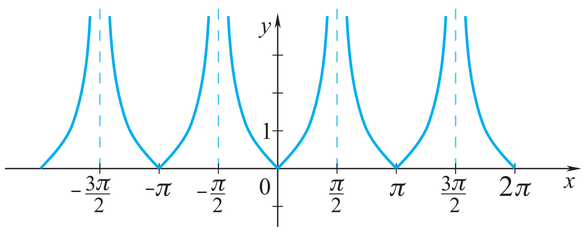
31. a)



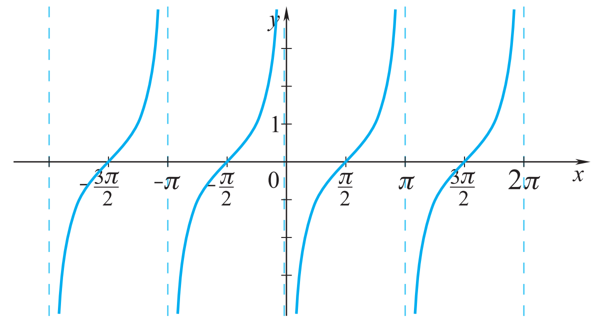
b)



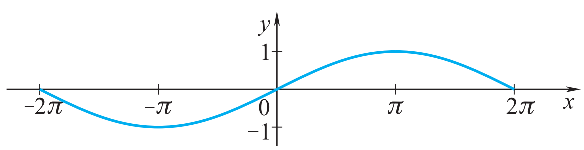
c)



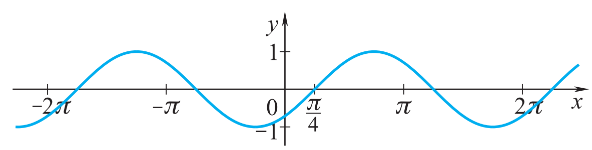
č)



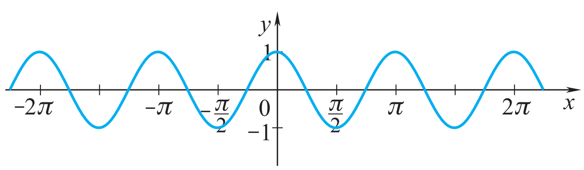
32. a)



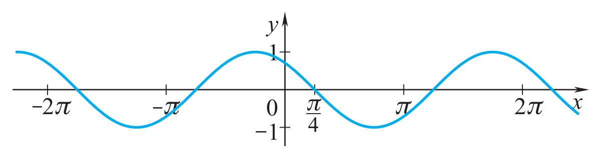
b)



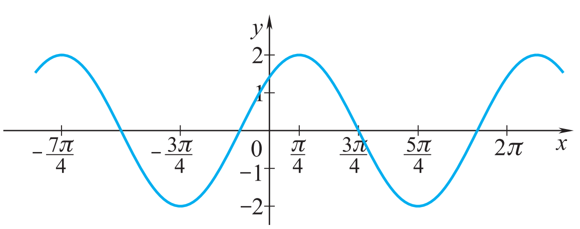
c)



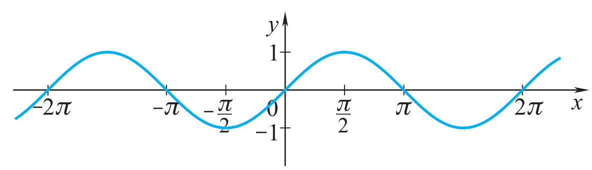
č)



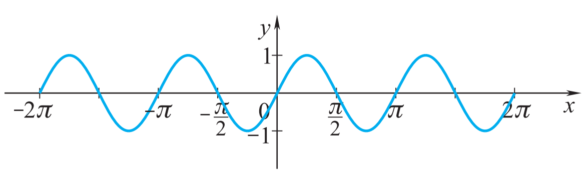
d)



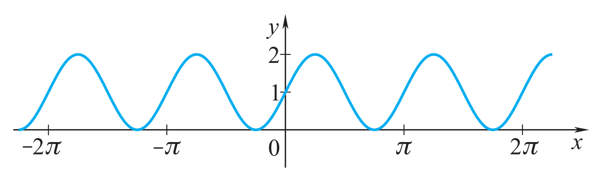
e)



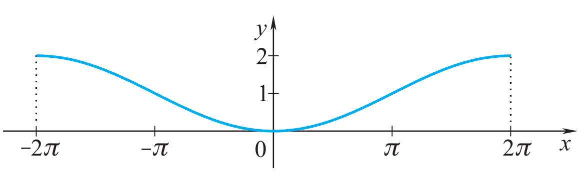
f)



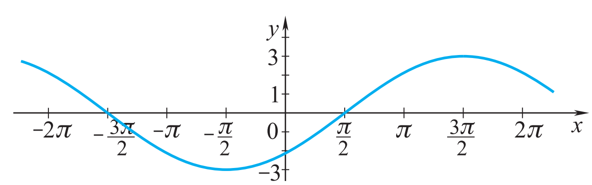
g)



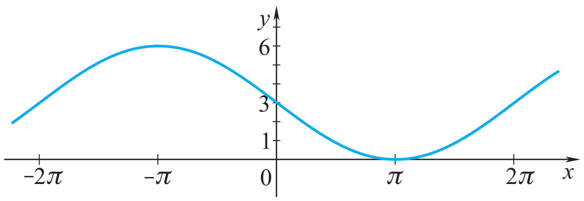
h)



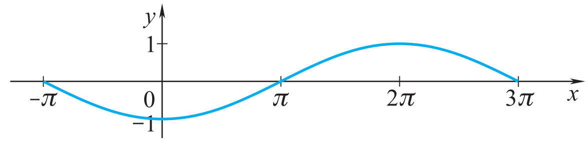
i)



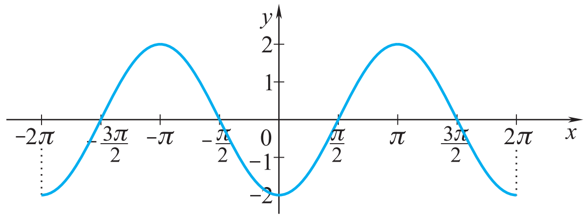
j)



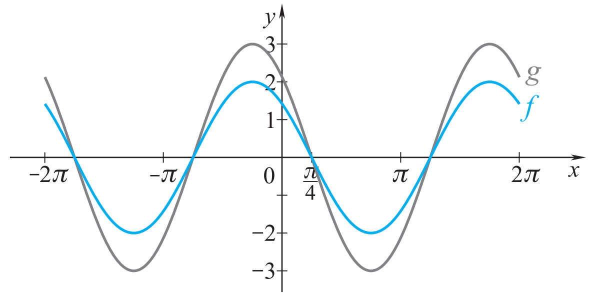
33. $x \in [-\pi, \pi]$



34. $x \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$



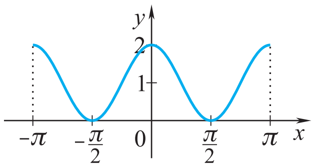
35. $A = \frac{3}{2}$, $g(x) = 3\cos(x + \frac{\pi}{4})$



36. $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$, $g(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{4})$. Amplituda funkcije f je 3, funkcije g pa 2. Osnovna perioda funkcije f je 2π, funkcije g pa π.

37. $f(x) = \cos 2x - 1$. Osnovna perioda funkcije f je $\frac{2\pi}{2} = \pi$, amplituda je 1, zaloga vrednosti pa interval $[-2, 0]$.

38. $f(x) = \cos 2x + 1$. Osnovna perioda funkcije f je $\frac{2\pi}{2} = \pi$, amplituda je 1, zaloga vrednosti pa interval $[0, 2]$.



39. **a)** $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{\pi}{2}$ **c)** $-\frac{\pi}{6}$ **č)** $-\frac{\pi}{3}$ **d)** $\frac{\pi}{3}$ **e)** $\frac{\pi}{2}$ **f)** $\frac{3\pi}{4}$ **g)** $\frac{5\pi}{6}$ **h)** π **i)** $\frac{\pi}{6}$ **j)** $-\frac{\pi}{3}$ **k)** $-\frac{\pi}{4}$

40. **a)** $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **b)** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **c)** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **č)** $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **d)** $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **e)** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **f)** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **g)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **h)** $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **i)** $x = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

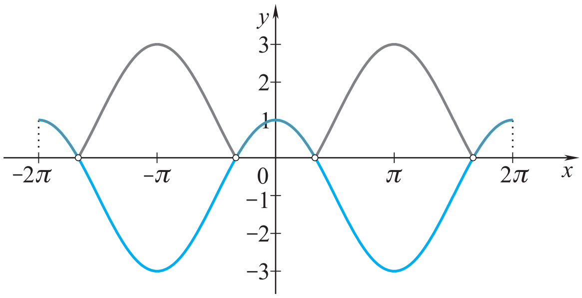
41. **a)** $x = \frac{\pi}{2} + 3k\pi, x = \frac{5\pi}{2} + 3k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **b)** $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ **c)** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \pi + k; k \in \mathbb{Z}$ **č)** $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$ **d)** $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ **e)** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

42. **a)** $x = k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **b)** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **c)** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **č)** $x = \frac{\pi}{8} + k\pi; x = \frac{3\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **d)** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **e)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **f)** $x = \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$ **g)** $x = k\pi; x = \frac{5\pi}{5} + k\pi; x = -\frac{5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **h)** $x = k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **i)** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **j)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **k)** $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

43. **a)** $x = \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ **b)** $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ **c)** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ **č)** $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}$ **d)** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

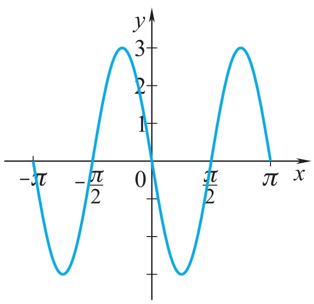
44. Ničle so $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$; $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

45. Presečišča z x osjo so $(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, 0)$; $k \in \mathbb{Z}$, presečišče z osjo y je $(0, \frac{\sqrt{2}}{3})$.

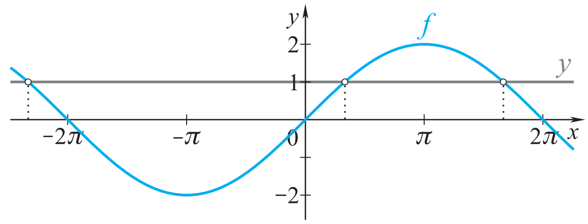


46. **a)** Ničle so $x = \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$. **b)** Največje vrednosti so v $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, najmanjše vrednosti pa v $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

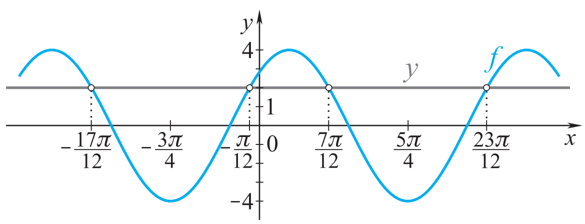
c)



47. $x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$; $x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

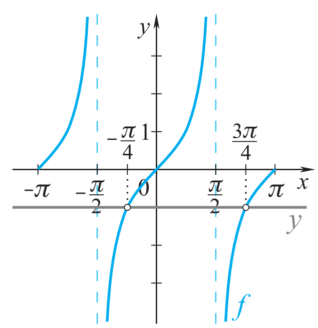


48. **a)**



b) $P_1(-\frac{17\pi}{12}, 2)$, $P_2(-\frac{\pi}{12}, 2)$, $P_3(\frac{7\pi}{12}, 2)$, $P_4(-\frac{23\pi}{12}, 2)$

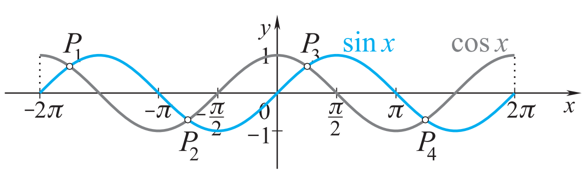
49. **a)**



b) $P_1(-\frac{\pi}{4}, -1)$, $P_2(\frac{3\pi}{4}, -1)$

c) $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

50. $P_1(-\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_2(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_3(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_4(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

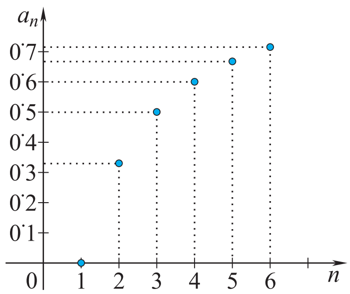


51. **a)** Ničle so $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. **b)** $f(x) = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$ **c)** Zaloga vrednosti funkcije f je interval $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, perioda pa 2π. **52.** **a)** $c = 13$ cm, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\tan\alpha = \frac{5}{12}$, $\cot\alpha = \frac{12}{5}$ **b)** $\alpha = 22°37'$, $\beta = 67°23'$, $\gamma = 90°$

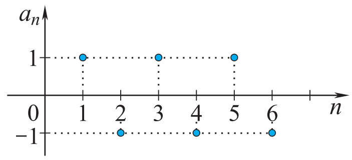
53. $\beta = 55°$, $b = 29{\cdot}41$ cm, $a = 20{\cdot}59$ cm, $c = 35{\cdot}90$ cm **54.** $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = 2$ **55.** $\gamma_1 = 30°$, $\gamma_2 = 150°$ **56.** $e = 15{\cdot}46$ cm, $f = 7{\cdot}68$ cm **57.** $\beta_1 = 64°9'$, $\gamma_1 = 75°51'$, $\beta_2 = 115°51'$, $\gamma_2 = 24°9'$ **58.** $\alpha = 102°38'$, $\beta = 51°19'$, $\gamma = 26\,3'$, $c = 8{\cdot}44$ cm
59. $\beta = 56°27'$, $\gamma = 48°33'$, $a = 11{\cdot}59$ cm, $c = 8{\cdot}99$ cm **60.** $a = 8{\cdot}06$ cm, $b = 3{\cdot}94$ cm, $c = 9{\cdot}27$ cm

22. ZAPOREDJA IN GEOMETRIJSKA VRSTA

1. $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{3}{5}$, $a_5 = \frac{2}{3}$ in $a_6 = \frac{5}{7}$



2. $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$, $a_5 = 1$ in $a_6 = -1$



3. $a_1 = -6$, $a_2 = -10$, $a_3 = -12$, $a_4 = -12$, $a_5 = -10$, $a_6 = -6$, $a_{11} = 44$ **4.** **a)** 2, 5, 8, 11, 14. Naraščajoče zaporedje, navzdol omejeno z 2. **b)** 4, –3, –22, –59, –120. Padajoče zaporedje, navzgor omejeno s 5. **c)** 3, 8, 13, 18, 23. Zaporedje je naraščajoče in navzdol omejeno s 3. **č)** –1, 4, –27, 256, –3125. Zaporedje ni omejeno, je alternirajoče. **5.** **a)** $a_n = 6n + 1$, $a_{10} = 61$ **b)** $a_n = 2^n$, $a_{10} = 2^{10} = 1024$ **c)** $a_n = \frac{2}{n^2}$, $a_{10} = \frac{1}{50}$ **6.** Ker je $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)}{3(n+1)+1} - \frac{2n}{3n+1} = \frac{2n+2}{3n+4} - \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{(3n+4)(3n+1)} > 0$, je zaporedje naraščajoče. Prvih sedem členov zaporedja je manjših od $\frac{16}{25}$.

7. $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{1+3^{n+1}} - \frac{1}{1+3^n} = \frac{(1+3^n)-(1+3^{n+1})}{(1+3^{n+1})(1+3^n)} = \frac{3^n - 3^{n+1}}{(1+3^{n+1})(1+3^n)} = \frac{3^n(1-3)}{(1+3^{n+1})(1+3^n)} = -2 \cdot \frac{3^n}{(1+3^{n+1})(1+3^n)} < 0$, $\frac{1}{4} = a_1 \geq a_n = \frac{1}{1+3^n} > 0$

8. **a)** 2, 8, 14, 20, 26, 32 **b)** 5, 2, –1, –4, –7, –10 **c)** $\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{15}{4}, -\frac{19}{4}$ **č)** $-3, -\frac{13}{5}, -\frac{11}{5}, -\frac{9}{5}, -\frac{7}{5}, -1$

9. $d = 4$, $a_{100} = a_1 + (n-1)d = -5 + 99 \cdot 4 = 391$ **10.** **a)** $a_n = 16n - 12$ **b)** $a_n = 37 - 4n$ **c)** $a_n = 10 - n$ **11.** $a_1 = 4$, $d = 3$, $a_{50} = 151$ **12.** $a_{25} = 77$ **13.** $d = 7$; 107, 114, 121, 128, 135 **14.** Za $n = 4$ je zaporedje 4, 10, 16 ..., za $n = -1$ je zaporedje –1, 0, 1 ... **15.** $x = 3$, zaporedje je 4, 7, 10 ... **16.** $x = 4$, zaporedje je 3, 8, 13 ... **17.** $x = 7$, $d = -4$ **18.** $x = 2$, $d = 1$ **19.** $s_{15} = 675$ **20.** $d = -3$, $a_1 = 31$, $s_{25} = -125$ **21.** $a_1 = 10$ **22.** $a_1 = 5$, $d = 4$ **23.** $n = 101$, $d = 7$ **24.** $a_1 = 24$, $a_{10} = -12$ **25.** $d = 3$, $a_{20} = -10 + 19 \cdot 3 = 47$, $s_{50} = 3175$ **26.** $d = 9$, $a_1 = 110$, $s_{100} = 55\,550$ **27.** $n = 20$

28. $s_{16} = 376$ **29.** $s_{12} = 78$, $s = 2s_{12} = 156$ **30.** $s_n = \frac{n(11n-109)}{2}$ **31.** $n = 45$, $s_{45} = 24\,300$ **32.** $n = 36$, $s_{36} = 19\,530$

33. Sešteti moramo prvih 15 členov zaporedja. **34.** $a_1 = -36$, $d = 4$ **35.** $a_n = 1 + 6n$ **36.** Vriniti moramo 23 števil. **37.** Največ 19 členov. **38.** –4, –1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 **39.** Ljudi je 13, razdeliti moramo 832 EUR. **40.** $a_1 = 3200$, $d = 500$, $a_7 = 6200$, $s_7 = 32\,900$ m **41.** Diferenca zaporedja je 30°. Koti štirikotnika merijo 45°, 75°, 105° in 135°.

42. Polmeri so 2, 4, 6, 8 in 10. **43.** Drugi člani družine so stari 15, 18, 39 in 42 let. **44.** **a)** 2, 6, 18, 54, 162 ... **b)** 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ ... **c)** –6, 12, –24, 48, –96 ... **č)** $-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}$ ... **45.** $a_n = 2^{n-1}$ **46.** **a)** $k = 2$, $a_n = -4 \cdot 2^{n-1}$ **b)** $k = \frac{2}{3}$, $a_n = 81 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$ **c)** $k = -3$, $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$ **č)** $k = 0{\cdot}2$, $a_n = 0{\cdot}8 \cdot (0{\cdot}2)^{n-1}$ **47.** Prvi splošni člen je $a_n = -1$, drugi pa $a_n = (-1)^n$.

48. 3, 6, 12, 24, 48, 96, $a_{10} = 1536$ **49.** **a)** $\frac{a+b}{2} = 10$, $\sqrt{a \cdot b} = 6$ **b)** $\frac{a+b}{2} = 1 + 3\sqrt{3}$, $\sqrt{a \cdot b} = 4$ **c)** $\frac{a+b}{2} = 2$, $\sqrt{a \cdot b} = 1$

50. $x = 11$; 8, 12, 18 **51.** $x = \frac{1}{3}$ **52.** $x = -3$, $k = -2$ **53.** $a_3 = \frac{4\sqrt{3} - 6}{27}$ **54.** Da. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \sqrt{3}$ **55.** $x = -1$, $k = 3$

56. Za $\varphi = \frac{\pi}{2}$, bodo dana števila zaporedni členi aritmetičnega zaporedja, za $\varphi = \frac{\pi}{3}$ pa zaporedni členi geometrijskega zaporedja.

57. $k = 2$, $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ Prvih 9 členov zaporedja je manjših od 1000. **58.** 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$; ali 16, –8, 4, –2, 1, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

59. $a_1 = 1$, $k = -3$ **60.** **a)** $s_n = -\frac{255}{16}$ **b)** $s_n = 97\,656$ **c)** $s_n = 1275$ **61.** **a)** $n = 5$, $s_5 = \frac{31}{4}$ **b)** $n = 12$, $s_n = \frac{63(\sqrt{2} - 1)}{32}$ **c)** $n = 1$, $s_1 = 0{\cdot}01$ **62.** $a_1 = 4$, $k = 4$, $s_{10} = 1\,398\,100$ **63.** $x = 40$ $s_6 = 221\frac{2}{3}$ **64.** $a_1 = 1$, $k = -3$, $s_9 = 4921$

65. 2, $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \frac{2}{243}$, $s_6 = \frac{728}{243}$ **66.** 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, $s_9 = 3066$ **67.** $a_1 = 8$, $k = 3$ **68.** 7, –14, 28, –56

69. 7, –28, 112, –448 **70.** $a_1 = 5$, $a_5 = 405$ **71.** $a_1 = 3$, $k = 4$ ali $a_1 = 48$, $k = \frac{1}{4}$ **72.** **a)** $x = -1$ **b)** $s_{20} = 3\,145\,725$ **c)** $a_{14} = 24\,576$ **73.** **a)** $a = 2$, $b = 8$, $c = 2048$ in je šesti člen tega zaporedja. **b)** $x = -4$ **74.** 4, 10, 25 **75.** 1, 4, 9 ali 9, 4, 1

76. $k_1 = 3$, $k_2 = \frac{1}{3}$ **77.** 2, 5, 8 ali 26, 5, –16 **78.** **a)** $2^3 = 8$ **b)** 2^{72} **79.** **a)** $a_3 = 12$, $a_4 = 16$, $a_{38} = 152$ **b)** $a_3 = 16$, $a_4 = 32$, $a_{13} = 16\,384$ **c)** Ker je $a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 4n = 4$, je zaporedje naraščajoče in navzdol omejeno s 4.

80. 32 cm, 48 cm, 72 cm **81.** $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 8$ cm **82.** **a)** $s = -\frac{9}{2}$ **b)** $s = \frac{49}{12}$ **c)** $s = \frac{1}{3}$ **83.** **a)** $s = 125$

b) $s = 9$ **c)** $s = \frac{16}{7}$ **č)** $s = 3 + \sqrt{3}$ **d)** $s = \sqrt{6}\,(\sqrt{2} + 1)$ **e)** $s = 3 + 2\sqrt{3}$ **f)** $s = 2$ **g)** $s = 2(2 - \sqrt{3})$

84. 9 **85.** $s = \frac{4}{3}$ **86.** $k = \frac{2}{5}$, $s_{10} = 4\text{˙}9995$ **87.** $k = \frac{1}{3}$ **88.** $\frac{2}{3} + \frac{8}{15} + \frac{32}{75} + \ldots$ ali $\frac{8}{3} + \frac{8}{15} + \frac{8}{75} + \ldots$ **89.** 6, 3, $\frac{3}{2}$ ...

90. $a_1 = 9$ **91.** $x = \frac{1}{4}$ **92.** 5, 1, $\frac{1}{5}$ ... **93.** **a)** Ker je $\frac{\log_3 3}{\log_3 9} = \frac{1}{2}$, $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{\log_3 3} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$, je vrsta res geometrijska.

b) $a_1 = 2$, $k = \frac{1}{2}$, $s = 4$ **94.** **a)** Janez bo v letu 2007 izdelal 194 872 izdelkov, Jože pa 170 000 izdelkov. **b)** V letu 2002 je bila Janezova proizvodnja večja za 0˙83 %, v letu 2007 pa bo večja za 14˙63 %. **c)** Od leta 2000 do leta 2005 Je Janez izdelal 771 561 izdelkov, Jože pa 750 000 izdelkov. **95.** Varčevalec dobi 1562˙50 EUR obresti. **96.** Vložili smo 30 000 EUR. **97.** Letna obrestna mera je znašala 5˙25 %. **98.** Vloga naraste na $a_5 = 1246\text{˙}18$ EUR. Varčevati moramo 9 let. **99.** V petih letih vloga naraste na 119 918˙93 EUR. **100.** Vložiti moramo 4936˙21 EUR. **101.** Letna obrestna mera znaša 4 %.

102. $S = ak + ak^2 + ak^3 + ak^4 + ak^5 = ak(1 + k + k^2 + k^3 + k^4) = ak \cdot \frac{1 \cdot (k^4 - 1)}{k - 1} = 1\text{˙}06 \cdot 10\,000 \cdot \frac{1 \cdot (1{,}06^4 - 1)}{1{,}06 - 1} = 59\,753\text{˙}18$ EUR

103. Dobivali bomo 975˙35 EUR rente.

23. KOMBINATORIKA

1. $n = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ **2.** **a)** $3 \cdot 3 = 9$ **b)** $3 \cdot 2 = 6$ **3.** Obleče se lahko na $2 + 3 \cdot 2 = 8$ različnih načinov. **4.** Iz Genove v Palermo lahko pridemo na $1 + 1 + 3 \cdot 3 = 11$ različnih načinov. **5.** $n = 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 64$
6. $n = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$ **7.** **a)** $n = 5 \cdot 6 \cdot 5 = 150$ **b)** $m = 3 \cdot 6 \cdot 6 + 1 = 109$ **8.** **a)** 5040 **b)** 3364 **c)** 3193 **9.** $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$ **10.** $n = 5! = 120$ **11.** $7! = 5040$ **12.** $12! = 479\,001\,600$
13. $n = 11!$, $m = 10!$ **14.** **a)** $5! = 120$ **b)** $3 \cdot 5! = 360$ **c)** $3 \cdot 5! = 360$ **15.** **a)** $4 \cdot 4! = 5! - 4! = 96$ **b)** $5! - 3! = 114$ **c)** $5! - 2! = 118$ **16.** $n = 4! \cdot 6! = 17\,280$ **17.** $n = 2 \cdot 5! \cdot 3! = 1440$ **18.** $n = 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! = 103\,680$ **19.** **a)** $9! = 362\,880$

b) $3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 1728$ **c)** $9! - 8! \cdot 2! = 282\,240$ **20.** **a)** 3 628 800 **b)** 99 **21.** $V_6^3 = 120$ **22.** $V_6^4 = 360$

23. $V_{15}^3 = 2730$ **24.** $V_{10}^5 = 30\,240$ **25.** $n = 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 64$ **26.** ${}^{(p)}V_3^2 = 3^2 = 9$.

Variacije so 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. **27.** ${}^{(p)}V_{10}^4 = 10^4 = 10\,000$ **28.** **a)** $V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ **b)** ${}^{(p)}V_7^3 = 7^3 = 343$

29. ${}^{(p)}V_6^1 + {}^{(p)}V_6^2 + {}^{(p)}V_6^3 = 6 + 6^2 + 6^3 = 258$ **30.** ${}^{(p)}V_5^8 = 5^8 = 390\,625$ **31.** Sestavimo lahko ${}^{(p)}V_2^6 = 2^6 = 64$ različnih nizov.

32. Zapišemo lahko ${}^{(p)}V_3^4 = 3^4 = 81$ različnih števil, od tega je $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 27$ sodih. **33.** **a)** $n = 6$ **b)** $n = 15$

34. $C_{10}^4 = \binom{10}{4} = 210$ **35.** $C_{12}^5 = \binom{12}{5} = 792$ **36.** $C_5^2 = \binom{5}{2} = 10$ **37.** $C_7^2 = \binom{7}{2} = 21$ **38.** $n = 4 \cdot \binom{4}{2} = 24$

39. $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 3 + 1 = 7$ **40.** $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$

41. $C_{32}^5 = \binom{32}{5} = 201\,376$, $C_{31}^4 = \binom{31}{4} = 31\,465$ **42.** $C_{32}^4 = \binom{32}{4} = 35\,960$, $n = \binom{4}{2} \cdot \binom{28}{2} = 2268$, $m = \binom{32}{4} - \binom{28}{4} = 15\,485$

43. $C_{100}^{10} = \binom{100}{10} = 1\text{˙}73 \cdot 10^{13}$ **44.** $n = \binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2} = 220 \cdot 28 = 6160$ **45.** $3 \cdot \binom{7}{5} = 63$ **46.** **a)** $\binom{20}{5} = 15\,504$

b) $\binom{13}{3}\binom{8}{2} = 220 \cdot 28 = 6160$ **c)** $\binom{20}{5} - \binom{8}{5} = 15\,504 - 56 = 15\,448$ **47.** **a)** $V_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$

b) $C_{32}^3 = \binom{32}{3} = 4960$ **48.** **a)** $x^3 + 6x + \frac{12}{x} + \frac{8}{x^3}$ **b)** $729 \cdot x^6 - 1458 \cdot x^5 \cdot y + 1215 \cdot x^4 \cdot y^2 - 540 \cdot x^3 \cdot y^3 + 135 \cdot x^2 \cdot y^4 - 18 \cdot x \cdot y^5 + y^6$

c) $9 \cdot a^4 - 24 \cdot \sqrt{3} \cdot a^3 \cdot b^3 + 72 \cdot a^2 \cdot b^6 - 32 \cdot \sqrt{3} \cdot a \cdot b^9 + 16 \cdot b^{12}$ **č)** $32x^5 + 80x^4\sqrt{x} + 80x^4 + 40x^3\sqrt{x} + 10x^3 + 5x^2\sqrt{x}$

d) $x^3 - 6 \cdot x^{\frac{17}{6}} + 15 \cdot x^{\frac{8}{3}} - 20 \cdot x^{\frac{5}{2}} + 15 \cdot x^{\frac{7}{3}} - 6 \cdot x^{\frac{13}{6}} + x^2$ **e)** $-7 + 24i$ **f)** $-x^5 + 5ix^4 + 10x^3 - 10ix^2 - 5x + i$ **49.** Da.

50. $(1 - i)^6 = 8i$ **51.** $1008x^{-3}$ **52.** **a)** 15 625 **b)** Šesti člen je $-1458\sqrt[3]{2x}$.

53. $\binom{11}{3}(2\sqrt{x})^8\left(-\frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}\right)^3 = 165 \cdot 256x^4 \cdot \left(-\frac{1}{8x^2}\right) = -5280x^2$

24. VERJETNOSTNI RAČUN

1. $P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$ **2.** **a)** $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ **b)** $P(B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ **3.** $P(A) = \frac{49 - 12}{99} = \frac{37}{99}$

4. $P(A) = \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = \frac{60}{100} = 0\text{˙}6$ **5.** $P(A) = \frac{1}{6}$ **6.** **a)** $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **b)** $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ **7.** $P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

8. $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} = 0\text{˙}4213$ **9.** **a)** $P(A) = \frac{1}{36}$ **b)** $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **c)** $P(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

10. $P(A) = \frac{10}{32} = 0{\cdot}3125$ **11.** $P(A) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$ **12.** $n = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$, $P(A) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{5}$

13. $n = 9! = 362\,880$, $P(A) = \frac{5!}{9!} = \frac{1}{3024}$ **14. a)** $7! = 5040$ **b)** $P(A) = \frac{2 \cdot 3! \cdot 4!}{7!} = \frac{2}{35} = 0{\cdot}0571$ **15.** $P(A) = \frac{2 \cdot 3! \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{10}$

16. a) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ **b)** $5 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 108$ **c)** $P(C) = \frac{120}{300} = 0{\cdot}4$ **17. a)** $n = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

b) $P(B) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 1}{120} = \frac{1}{6}$ **c)** $P(C) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{120} = \frac{1}{20}$ **18. a)** $P(A) = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{125} = 0{\cdot}008$ **b)** $P(B) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2}{5} = 0{\cdot}4$

19. a) $P(A) = \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{15}$ **b)** $P(B) = 1 - (\frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10} + \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{10}) = \frac{8}{15}$ ali $P(B) = \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10} + \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$

20. $P(A) = \frac{1}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35} = 0{\cdot}0286$ **21. a)** $P(A_1) = \frac{1}{\binom{39}{7}} = 6{\cdot}5 \cdot 10^{-8}$, $P(A_2) = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{39}{7}} = 2{\cdot}28 \cdot 10^{-6}$ **b)** $P(B_1) = \frac{\binom{10}{7}}{\binom{39}{7}} = 7{\cdot}8 \cdot 10^{-6}$,

$P(B_2) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{39}{7}} = 13{\cdot}65 \cdot 10^{-6}$ **22. a)** $P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = 0{\cdot}0008$ **b)** $P(B) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = 0{\cdot}0113$ **c)** $P(C) = 1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} = 0{\cdot}3395$

23. $P(A') = 1 - \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}} = 1 - \frac{45}{105} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ **24.** $P(A) = 1 - \frac{\binom{20}{4}}{\binom{34}{4}} = 0{\cdot}8955$ **25.** $P(A') = 1 - \frac{\binom{18}{5} + \binom{11}{5}}{\binom{29}{5}} = 0{\cdot}9240$

26. a) $P(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}\binom{6}{1}}{\binom{14}{3}} = \frac{45}{182}$ **b)** $P(B) = \frac{\binom{9}{2}\binom{5}{1} + \binom{9}{1}\binom{5}{2} + \binom{9}{0}\binom{5}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{10}{13}$ **27.** $P(A) = 1 - \frac{\binom{8}{6}}{\binom{10}{6}} = \frac{13}{15} = 0{\cdot}8667$

28. a) $P(A) = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{120}{496} = 0{\cdot}2419$ **b)** $P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{6}{496} = 0{\cdot}0121$

c) $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{120}{496} + \frac{6}{496} - \frac{1}{496} = \frac{125}{496} = 0{\cdot}2520$

č) $P(D) = 1 - \frac{\binom{16}{2} + \binom{16}{2}}{\binom{32}{2}} = 1 - \frac{120 + 120}{496} = \frac{256}{496} = \frac{16}{31} = 0{\cdot}5162$ **29.** $P(A) = 1 - \frac{\binom{10}{4} + \binom{10}{3}\binom{40}{1}}{\binom{50}{4}} = 0{\cdot}9782$

30. $M = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$ **a)** $P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7}$ **b)** $P(B) = 1 - \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ **31. a)** V celotni proizvodnji lahko pričakujemo 120 neuporabnih žarnic. **b)** $P(A) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{50}{3}} = 0{\cdot}00005$, $P(B) = \frac{\binom{47}{3}}{\binom{50}{3}} = 0{\cdot}8273$

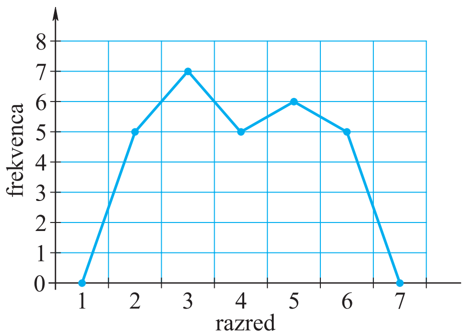
25. STATISTIKA

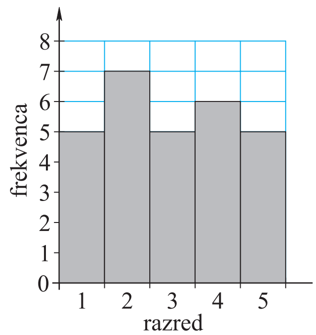
1. Povprečna ocena je $4{\cdot}25$.
2. $\bar{x} = 4787$
3. $x = 1{:}49{:}33$
4. Enica je padla devetkrat.
5. Dolžina skladbe x je 3 minute 16 sekund.
6. a)

Razred	Višina	Sredina razreda x_k	Absolutna frekvenca f_k
1	105–109	107	5
2	109–113	111	7
3	113–117	115	5
4	117–121	119	6
5	121–125	123	5
	SKUPAJ		28

b) $\bar{x} = 114{\cdot}9$ cm

c)



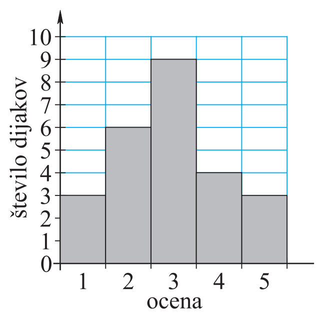


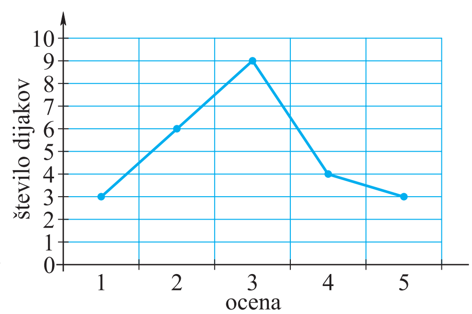
7. $\bar{x} = 13{,}62$ kg, $\sigma = 0{,}10$ kg **8.** Povprečno število pretečenih kilometrov je $\bar{x} = \frac{9 \cdot 25 + 6 \cdot 75 + 7 \cdot 125 + 3 \cdot 175}{25} = 83$ km,

standardni odklon pa $\sigma = \sqrt{\frac{9 \cdot (25-83)^2 + 6 \cdot (75-83)^2 + 7 \cdot (125-83)^2 + 3 \cdot (175-83)^2}{25}} \doteq 52{,}3$ km. **9.** $\bar{x} = 595{,}2$ EUR, $\sigma = 76{,}9$ EUR

10. a)

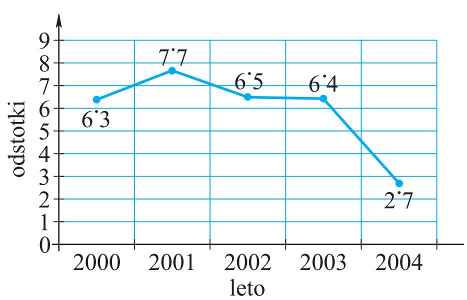
Ocena	1	2	3	4	5
Število dijakov	3	6	9	4	3





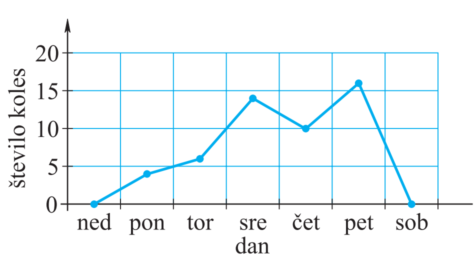
b) $\bar{x} = 2{,}92$, $\sigma = 1{,}16$

11. a) Povprečno število rojenih dečkov v tem obdobju je 9098, standardni odklon je 147. Povprečno število rojenih deklic v tem obdobju je 8590, standardni odklon pa 203. **b)**



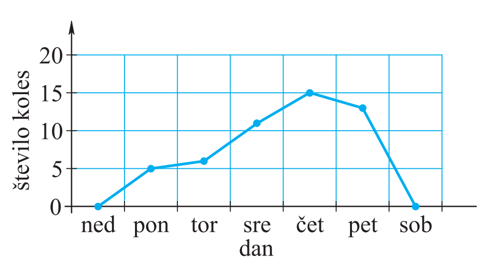
12. Število prodanih koles po posameznih dnevih – Janez

Ponedeljek	4
Torek	6
Sreda	14
Četrtek	10
Petek	16



Število prodanih koles po posameznih dnevih – Miha

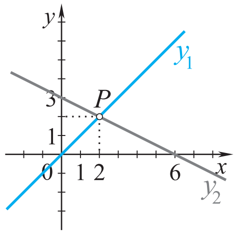
Ponedeljek	5
Torek	6
Sreda	11
Četrtek	15
Petek	13

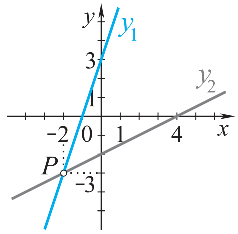


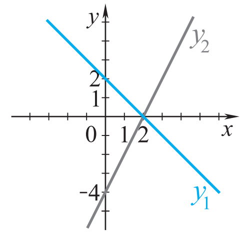
26. Odvod

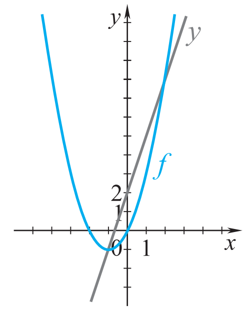
1. **a)** $\varphi = 45°$ **b)** $\varphi = 135°$ **c)** $\varphi = 71°34'$ **č)** $\varphi = 116°34'$ **d)** $\varphi = 0°$ **e)** $\varphi = 90°$ **f)** $\varphi = 33°41'$

2. $P(2, 2)$, $\varphi = 71°34'$ **3.** $P(-2, -3)$, $\varphi = 45°$ **4.** $y = -x + 2$ in $y = 2x - 4$, $S = 6$ **5.** $y = 3x + 2$









6. $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} = 3 + 3h + h^2; f'(1) = 3$ **7.** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2(x+h)^2+x+h-2x^2-x}{h} = 4x + 1 + h, f'(x) = 4x + 1,$ $f'(-2) = -7$ **8.** **a)** $f'(x) = 2x$ **b)** $f'(x) = 3x^2$ **9.** **a)** $f'(x) = \frac{x}{3} - 3$ **b)** $f'(x) = 4x^3 - 3 \cdot \sqrt{2}\,x^2 + 0{\cdot}5$ **c)** $f'(x) = 3ax^2$ **č)** $f'(x) = -2x^{-3}$ **d)** $f'(x) = 3x^{-4}$ **e)** $f'(x) = -2x^{-2}$ **f)** $f'(x) = -\frac{1}{4x^3}$ **g)** $f'(x) = 12x + 13$ **h)** $f'(x) = 3x^2 + 6x - 8$ **i)** $f'(x) = 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(4x + 3)$ **j)** $f'(x) = 2(x - 3)$ **k)** $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$ **l)** $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ **m)** $f'(x) = -\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$

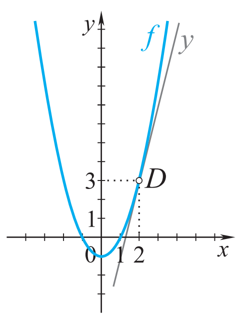
10. $f'(x) = \frac{3x^2-3}{(x^2+2x+1)^2}, f'(-2) = 9$ **11.** $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$ Za $x_{1,2} = 0$ in $x_3 = -3$ je $f'(x) = 0$. **12.** $f'(x) = k$, $k = 4$

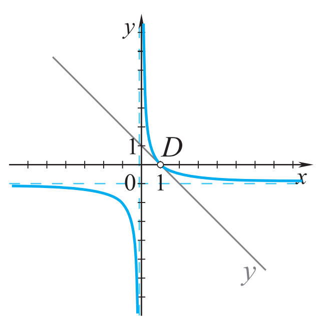
13. $f'(x) = 2ax + b$, $a = 2$, $b = -1$ **14.** $v(t) = 5 + 2t$, $v(5) = 15$ m/s **15.** **a)** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ **c)** $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt[5]{x^7}}$ **č)** $f'(x) = \frac{5}{2}\,x\sqrt{x}$ **d)** $f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ **e)** $f'(x) = \cos x - 2\sin x$ **f)** $f'(x) = \tan^2 x$ **g)** $f'(x) = \cos x - \cos 2x$ **h)** $f'(x) = \frac{1}{\cos x + 1}$ **i)** $f'(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}$ **16.** $x = 1$ **17.** $f'(x) = a(2x - 3)$; $a = 2$

18. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{6}}$. Ne, $f'(x) = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. **19.** $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{4}{3}$ **20.** $6 - 4\sqrt{2}$

21. **a)** $s(2) = 8$ m, $v(t) = s'(t) = 6 - 2t$, $v(2) = 2$ ms^{-1} **b)** Za $t = 3s$ je $v = 0$ ms^{-1} in $s(3) = 9$ m. **22.** **a)** Smerni koeficient tangente na graf poti s določa hitrost telesa v v izbranem času, smerni koeficient tangente na graf hitrosti v v odvisnosti od časa pa pospešek telesa a. **b)** Hitrost telesa v času $t = 2$ s je $v = 3$ ms^{-1}, pospešek telesa v času $t = 2$ s pa $a = 2$ ms^{-2}.

23. $y = 4x - 5$ **24.** $y = -x + 1$





25. **a)** $f'(x) = 12(4x - 1)^2$ **b)** $f'(x) = 8(2x + 3)^3$ **c)** $f'(x) = -\frac{4}{(4x-3)^2}$ **č)** $f'(x) = \frac{2x}{(x^2-3)^2}$ **d)** $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$ **e)** $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ **f)** $f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ **g)** $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$ **h)** $f'(x) = \frac{2-x}{\sqrt{(1-x)^3}}$

26. $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-4x}}, f(-6) = -\frac{2}{5}$

27. $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, f'(-1) = \frac{1}{4}$

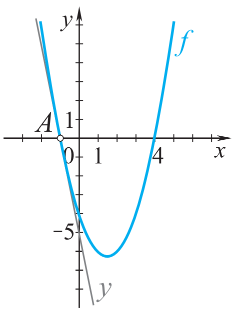
28. **a)** $f'(x) = 3\sin x$ **b)** $f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin(2x)$ **c)** $f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2})$ **č)** $f'(x) = 3e^{3x}$ **d)** $f'(x) = -\frac{1}{e^x}$ **e)** $f'(x) = 3^x \ln 3 + 3x^2$ **f)** $f'(x) = -2^{1-x}\ln 2$ **g)** $f'(x) = \frac{2}{x} + 5$ **h)** $f'(x) = -\ln x$ **i)** $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

29. $f'(x) = \frac{1 - x\ln x}{xe^x}, f'(1) = \frac{1}{e}$ **30.** Da. $(\frac{\tan x - \cot x}{4})' = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos^2 x} - (-\frac{1}{\sin^2 x})) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{4\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{(2\sin x \cos x)^2} = \frac{1}{\sin^2 2x}$. **31.** $A = \sqrt{3}$

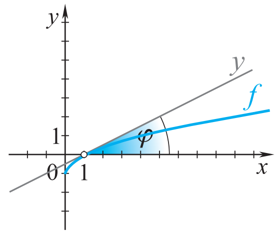
32. **a)** $y = -x - 6$ **b)** $y = -\frac{x}{5} + \frac{32}{5}$ **c)** $y = -4x + 18$ **č)** $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$ **33.** **a)** $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ **b)** $T_1(2, 0)$, $y = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

34. $y = 12x - 17$ **35.** $(0, 2)$, $y = -x + 2$, $x + y - 2 = 0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$

36. $A(-1, 0)$, $y = -5x - 5$



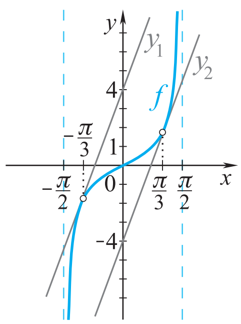
37. $k = \frac{1}{2}$, $\varphi = 26°34'$



38. $y = 3x + 2$

39. $T(-3, 9)$

40. $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$



41. $T(1, 1)$

42. $T(-\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$

43. $T_1(1, 0)$, $y = x - 1$; $T_2(-1, 2)$, $y = x + 3$

44. $D(-2, 5)$, $b = 1$

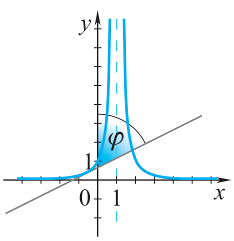
45. $D_1(1, 1)$, $y = -x + 2$, $D_2(-3, -3)$, $y = -x - 6$

46. /

47. $y_0 = 1$, $T_0(1, 1)$, $y = 1$

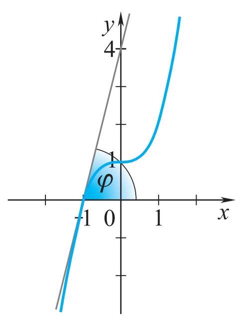
48. $a = 1$, $D(2, 1)$

49. **a)**

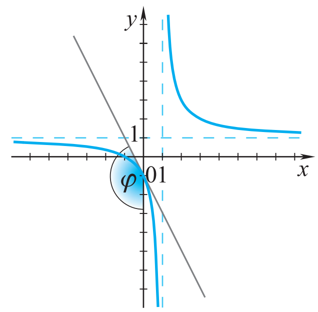


b) $\varphi = 63°26'$

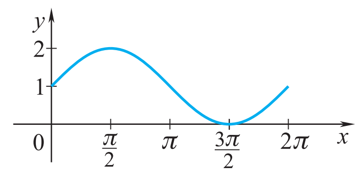
50. $\varphi = 71°34'$



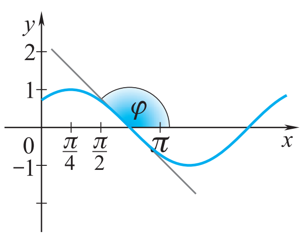
51. $\varphi = 153°26'$



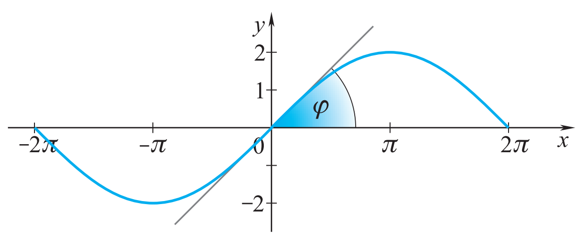
52. $x_1 = 0\cdot9553$, $x_2 = 2\cdot1863$



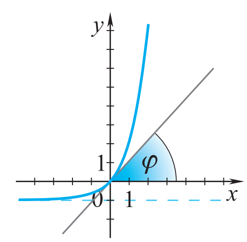
53. $\varphi = 135°$



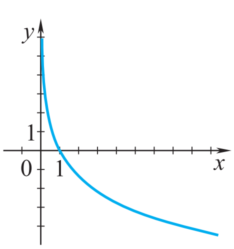
54. $\varphi = 45°$



55. $\varphi = 47°41'$



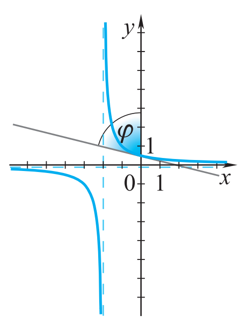
56. **a)**



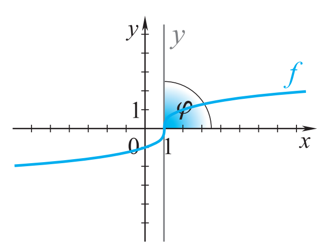
b) $P(1, 0)$, $\varphi = 116°34'$

c) $T(2, -2\ln 2)$

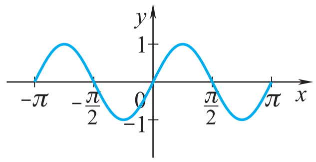
57. **a)** **b)** $\varphi = 75°58'$



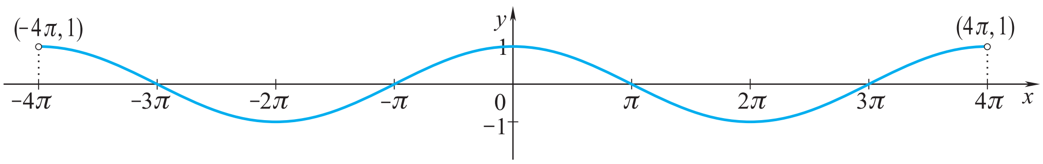
58. $P(1, 0)$, $\varphi = 90°$



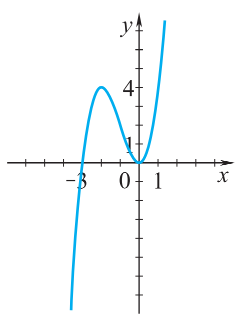
59. $P_1(\sqrt[3]{2}\,, 0)$, $\varphi = 78°8'$, $P_2(0, -2)$, $\psi = 90°$ **60.** **a)** $P(3, 9)$, $\varphi = 9°28'$ **b)** $P_1(-2, 4)$, $\varphi = 75°58'$; $P_2(2, 4)$, $\varphi = 75°58'$
61. $P_1(-1, 2)$, $\varphi = 71°34'$, $P_2(2, 5)$, $\psi = 30°58'$ **62.** $P_1(-2, 2)$, $\varphi = 18°26'$, $P_2(2, 2)$, $\psi = 18°26'$ **63.** $P_1(1, 1)$, $\varphi = 40°36'$, $P_2(4, 4)$, $\psi = 40°36'$ **64.** $T(1, 1)$, $\varphi = 63°26'$ **65.** **a)** $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - 2$, $P(-1, -1)$ **b)** $\varphi = 45°$ **66.** $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = -\frac{1}{x}$, $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ **67.** $P(0, 1)$, $\varphi = 71^{\cdot}57°$ **68.** $f'(0) > 0$, $f'(2) < 0$, $g'(0) < 0$, $g'(2) = 0$, $h'(0) > 0$, $h'(2) = 0$
69. $f'(x) = -2x + 2$. Funkcija narašča na $(-\infty, 1)$ in pada na $(1, \infty)$. **70.** **a)** Polinom narašča na $(-\infty, -2)$ in $(1, \infty)$, pada pa na $(-2, 0)$ in $(0, 1)$. **b)** Polinom narašča na $(-\infty, -\frac{2}{3})$ in $(2, \infty)$, pada pa na $(-\frac{2}{3}, 2)$. **c)** Polinom pada na $(-\infty, -1)$ in $(2, \infty)$, narašča pa na $(-1, 2)$. **č)** Polinom narašča na $(-\infty, 0)$ in $(0, 4)$ ter pada na $(4, \infty)$. **71.** Funkciji f in g padata na $(-\infty, 0)$ in $(0, \infty)$.
72. $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Funkcija narašča na $(-\infty, 1)$ in pada na $(1, \infty)$. **73.** $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f'(x) = \frac{6-x}{x^3}$. Funkcija f narašča na $(0, 6)$, pada pa na $(-\infty, 0)$ in $(6, \infty)$. **74.** Funkcija f pada na $(-\infty, -2)$ in $(-2, 1)$ ter narašča na $(1, 3)$ in $(3, \infty)$. **75.** Funkcija je definirana na $(-\infty, -2)$, $(-2, 8)$ in $(8, \infty)$. Na teh intervalih je tudi njen odvod negativen. **76.** Funkcija f narašča na $(-\infty, -3)$ in $(-3, 0)$.
77. $f'(x) = 2\cos 2x$ Funkcija f je naraščajoča na $(-\pi, -\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$. **78.** $D_f = [0, \infty)$, $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$; $x \in \mathbb{R}^+$



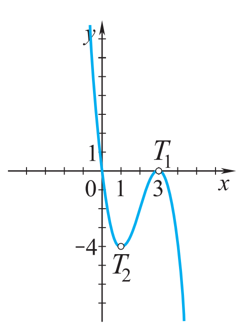
79. **a)** $D_f = (0, \infty)$ **b)** $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ **c)** Funkcija narašča na $(0, e)$ in pada na (e, ∞).
80. **a)** $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ **b)** $f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2}$ **c)** Funkcija narašča na $(0, e)$ in pada na (e, ∞). **81.** $D_1(-2, -12)$, $D_2(0, 20)$, $D_3(1, 15)$
82. $T(-5, 31)$ **83.** **a)** Maksimum v $(-1, 2)$, minimum v $(1, -2)$. **b)** Maksimum v $(0, 0)$, minimuma v $(-2, -16)$ in $(2, 16)$. **c)** Minimum v $(-\frac{2}{3}, \frac{128}{9})$, maksimum v $(2, 0)$. **č)** Minimum v $(3, -7)$. **d)** Ni lokalnih ekstremov. **84.** **a)** Maksimum v $(2, \frac{1}{4})$. **b)** Minimum v $(-3, -\frac{1}{3})$, maksimum v $(3, \frac{1}{3})$. **c)** Minimum v $(1, -1)$, maksimum v $(-1, 5)$. **č)** Minimum v $(\frac{3}{2}, -1)$, maksimum v $(0, 16)$. **85.** Ker je $f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} > 0$, odvod nima ničel, zato funkcija nima lokalnega ekstrema.
86. $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$. Maksimumi so v $(-4\pi, 1)$, $(0, 1)$, $(4\pi, 1)$.



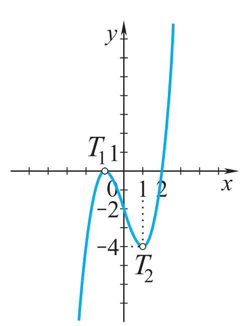
87. **a)** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ **b)** $f'(x) = \cos x + \sin x$ **c)** V točki $(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2})$ je na danem intervalu maksimum. **88.** Funkcija f ima lokalni minimum v točki $(1, 1)$. **89.** Funkcija f ima lokalni maksimum v točki $(0, 1)$. **90.** $D_f = [1, \infty)$, $f'(x) = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$. Lokalni maksimum je v $T(2, \frac{1}{2})$. **91.** Funkcija ima v točki $(0, 2)$ lokalni minimum. **92.** Najmanjša vrednost je 0 za $x = 1$, največja vrednost pa 4 za $x = 2$. **93.** Najmanjša vrednost je -25 za $x = -2$, največja vrednost pa 416 za $x = 5$. **94.** **a)** Ničle so $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -3$.
b) $p'(x) = 3x^2 + 6x$ Lokalni maksimum je v $(-2, 4)$, minimum v $(0, 0)$.
c)



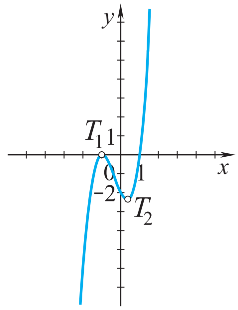
95. Ničle so $x_1 = 0$, $x_{2,3} = 3$, ekstrema sta $T_1(3, 0)$ (maksimum) in $T_2(1, -4)$ (minimum).



96. Ničle so $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1$, stacionarni točki sta $x_1 = -1$ (maksimum) in $x_2 = 1$ (minimum).



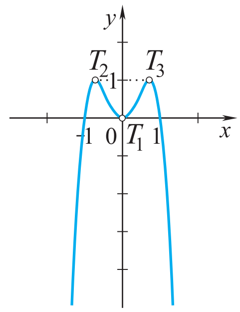
97. **a)** Ničle so $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -1$ **b)** $p'(x) = 6x^2 + 4x - 2$, v točki $T_1(-1, 0)$ ima funkcija lokalni maksimum, v točki $T_2(\frac{1}{3}, -\frac{64}{27})$ pa lokalni minimum. **c)**



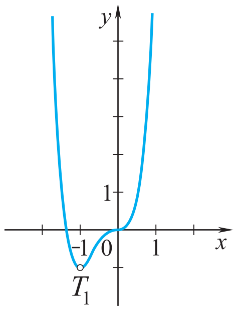
98. **a)** Ničle so $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

b) $p'(x) = 8x(1 - 2x^2)$, v točki $T_1(0, 0)$ ima funkcija lokalni minimum, v točkah $T_2(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ in $T_3(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ pa lokalna minimuma.

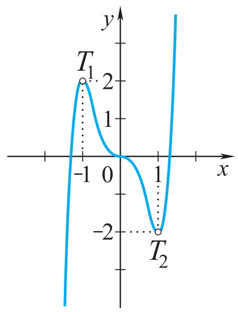
c)



99. Ničle so $x_{1,2,3} = 0$, $x_4 = -\frac{4}{3}$, v točki $(-1, -1)$ je lokalni minimum.

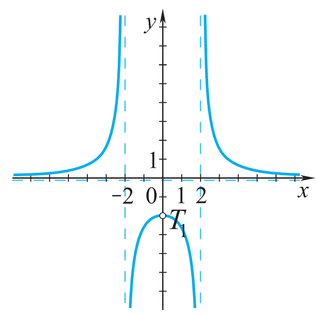


100. Ničle so $x_{1,2,3} = 0$, $x_4 = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $x_5 = -\frac{\sqrt{5}}{3} \doteq -1{\cdot}3$, ekstrema sta $(-1, 2)$ lokalni maksimum in $(1, -2)$ lokalni minimum.



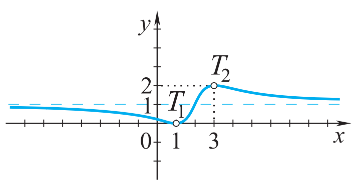
101. $a = 2$, $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$, $p'(x) = 2(3x^2 + 4x - 1)$, $x_1 = -1{\cdot}55$, $x_2 = 0{\cdot}22$

102. Ničel ni, pola sta $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, začetna vrednost je $f(0) = -2$, enačba vodoravne asimptote je $y = 0$, v $(0, -2)$ je lokalni maksimum.

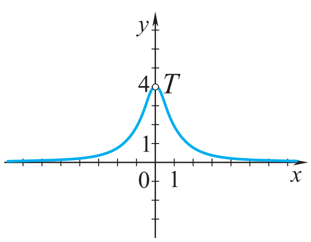


103. **a)** Ničli sta $x_{1,2} = 1$, polov ni, $f(0) = \frac{1}{5}$, $y = 1$.

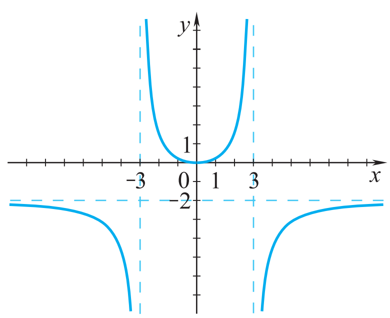
b) $f'(x) = \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(x^2 - 4x + 5)^2}$. V točki $(1, 0)$ je minimum, v točki $(3, 2)$ je maksimum.



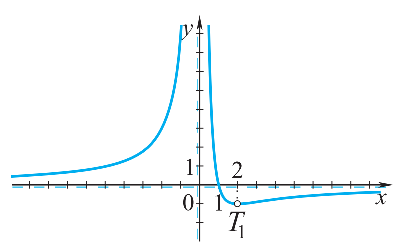
104. Ničel in polov ni, začetna vrednost je $f(0) = 4$, enačba asimptote je $y = 0$, v točki $(0, 4)$ je lokalni maksimum.



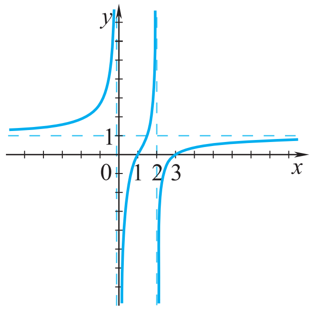
105. Ničli sta $x_{1,2} = 0$, pola sta $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, enačba asimptote je $y = -2$. V točki $(0, 0)$ je lokalni minimum.



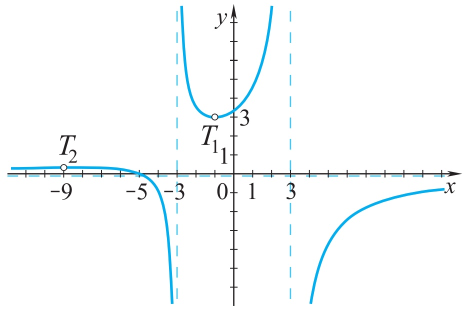
106. $f(x) = \frac{4 - 4x}{x^2}$ Ničla je $x_1 = 1$, pola sta $x_{1,2} = 0$, enačba asimptote je $y = 0$. V točki $(2, -1)$ je lokalni minimum.



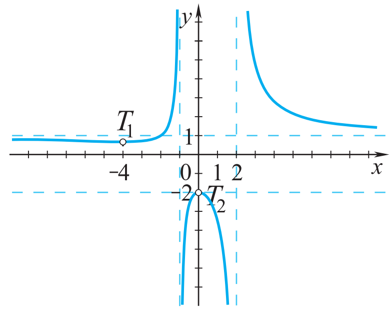
107. Ničli sta $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, pola sta $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, enačba asimptote je $y = 1$. Funkcija nima lokalnih ekstremov.



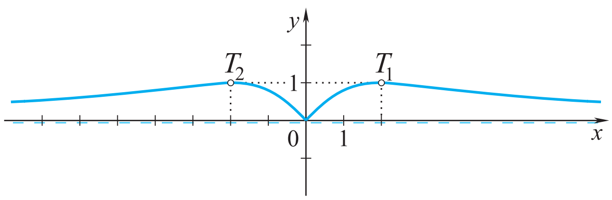
108. Ničla je $x_1 = -5$, pola sta $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, začetna vrednost je $f(0) = \frac{10}{3}$, enačba asimptote je $y = 0$. V točki $(-1, 3)$ je lokalni minimum, v točki $(-9, \frac{1}{3})$ je lokalni maksimum.



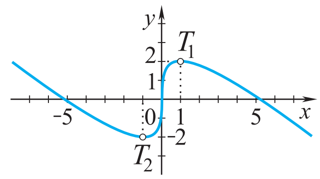
109. Ničel ni, pola sta $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, začetna vrednost je $f(0) = -2$, enačba asimptote je $y = 1$. V točki $(-4, \frac{2}{3})$ je lokalni minimum, v točki $(0, -2)$ je lokalni maksimum.



110. Ničla je $x_1 = 0$, polov ni, asimptota je $y = 0$, maksimuma sta v točkah $(-2, 1)$ in $(2, 1)$ in lokalni minimum v točki $(0, 0)$.



111. Definicijsko območje je $D_f = \mathbb{R}$, odvod je $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1$, maksimum je v točki $(1, 2)$, minimum pa v točki $(-1, -2)$.



27. Nedoločeni integral

1. $F'(x) = (\frac{x^3}{3} + x - 2\sqrt{x} + C)' = x^2 + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\int (x^2 + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx = \frac{x^3}{3} + x - 2\sqrt{x} + C$ **2.** $F'(x) = 2x - 3$, $F(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 7 = 5$

3. $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$; $C \in \mathbb{R}$ **4.** **a)** $x^3 + \frac{x^2}{2} + C$ **b)** $4x + C$ **c)** $\frac{x^6}{6} - \frac{x^3}{3} + C$ **č)** $\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + C$

d) $\frac{x^4}{4} + 2x^3 + 6x^2 + 8x + C$ **e)** $2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$ **f)** $\frac{2x^3}{3} + 2x^{-1} + C$ **g)** $x + 3\ln|x| + C$ **h)** $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x|$

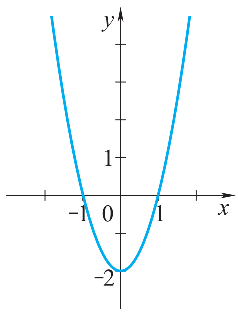
i) $\frac{x^2}{2} + 4x + C$ **j)** $\frac{x^2}{x} - 3x + C$ **k)** $x + 2\ln|x| + C$ **5.** **a)** $\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + C$ **b)** $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\,x\sqrt[3]{x} + C$ **č)** $4x^{\frac{1}{2}} + C = 4\sqrt{x} + C$ **d)** $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C$ **e)** $2x\sqrt{x} - \sqrt{x} + 3x\sqrt[3]{x^2} + C$

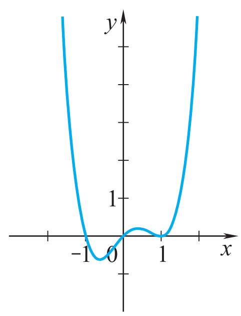
f) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{10}{3}\sqrt{x} + C$ **g)** $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C$ **h)** $-\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + C$ **6.** $F(x) = \int f(x)\,dx = \int 12x^2\,dx = 4x^3 + C$, $F(x) = 4x^3 - 24$

7. $F(x) = \int f(x)\,dx = \int (6x - 1)\,dx = 3x^2 - x + C$, $F(x) = 3x^2 - x - 4$

8. $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 4x\,dx = 2x^2 + C$,
Iz $f(0) = -2$ je $C = -2$, $f(x) = 2x^2 - 2$



9. $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$



10. $g(x) = 3x^2 - 3x - 6$

11. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2}\,dx = \int (1 - \frac{1}{x^2})\,dx = x + \frac{1}{x} + C$

12. Da. $\int \frac{(x-3)^2}{x}\,dx = \int (x - 6 + \frac{9}{x})\,dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 9\ln|x| + C$

13. $\int \frac{x}{x+2}\,dx + 2\int \frac{dx}{x+2} = \int\left(\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x+2}\right)dx = \int \frac{x+2}{x+2}\,dx = \int dx = x + C$ **14.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{-\frac{5}{6}}\,dx = 6x^{\frac{1}{6}} + C = 6\sqrt[6]{x} + C$

15. $(\ln(x^2+1)+C)' = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + 0 = \frac{2x}{x^2+1}$

16. Da, saj je $F'(x) = ((\sqrt{x}-1)^4 + C)' = 4(\sqrt{x}-1)^3\cdot(\sqrt{x})' + 0 = 4(\sqrt{x}-1)^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}$. **17.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C$

18. $\int\frac{(2-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 4 + \sqrt{x}\right)dx = 8\sqrt{x} - 4x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C,\ F(2) = 10\frac{1}{3}$ **19.** $\left(\frac{\ln x}{x} + C\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x\cdot 1}{x^2} + 0 = \frac{1-\ln x}{x^2}$

20. **a)** $e^x + x + C$ **b)** $e\cdot e^x + C = e^{x+1} + C$ **c)** $\frac{1}{2}e^{2x} + C$ **č)** $\frac{(\frac{1}{2})^x}{\ln\frac{1}{2}} + C = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C$ **d)** $3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} = \frac{3^{x+1}}{\ln 3}$

e) $4\cdot\frac{(\frac{1}{4})^x}{\ln\frac{1}{4}} = -4\cdot\frac{4^{-x}}{\ln 4} = -\frac{4^{-x+1}}{\ln 4}$ **f)** $\frac{x^4}{4} - \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3x^2}{2} + 3x + C$ **21.** **a)** $x + \cos x + C$ **b)** $4x - 3\sin x + C$ **c)** $\tan x - \sin x + C$

č) $\sin x + C$ **d)** $-\cot x - x + C$ **e)** $-\tan x + C$ **f)** $2\tan x - 2\cot x + C$ **g)** $2x - \tan x + C$ **h)** $\sin x - \cos x + C$

22. $F(x) = \sin x + \cos x + 5$ **23.** Da, saj je $F'(x) = (x\cos x + C)' = \cos x - x\sin x + 0 = \cos x - x\sin x$. **24.** $f(x) = \tan x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

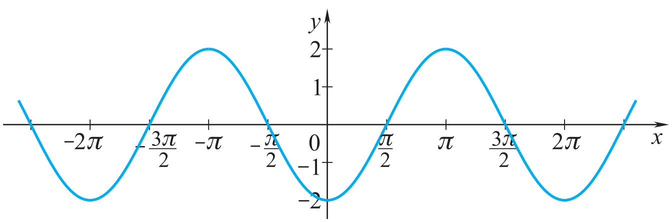
25. $F'(x) = (\sin^3 x + C)' = 3\sin^2 x\cdot\cos x,\ C = \frac{3}{8}$

26. Da. $\int\frac{1}{\sin^2 x-\cos^2 x}\,dx - 2\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}\,dx = \int\frac{1-2\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}\,dx = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}\,dx = \int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}\,dx = \int dx = x + C$

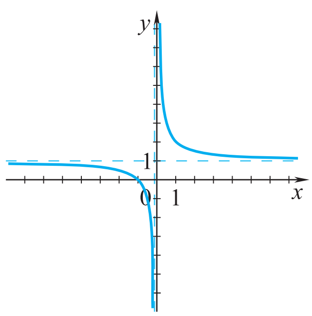
27. $\int\left(\sin\frac{x}{3} - \frac{1}{2\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = -\frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{2}\cot x - \frac{1}{2}\tan x + C = -\frac{1}{3}\cos x + \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{\sin x}{2\cos x} + C = -\frac{1}{3}\cos x + \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x} + C =$

$= -\frac{1}{3}\cos x + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + C = \cot 2x - \frac{1}{3}\cos x + C$

28. $f(x) = -2\cos x$



29. **a)** $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ **b)** $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ker je odvod funkcije f vseskozi različen od 0, funkcija f nima stacionarnih točk in zato tudi ne lokalnih ekstremov. **c)** Ničla $x = -1$, pol $x = 0$, enačba vodoravne asimptote $y = 1$. **č)** $\int f(x)\,dx = x + \ln|x| + C$



28. Določeni integral

1. **a)** $S = 8,\ S = \int_{-4}^{0}(x+4)\,dx$ **b)** $S = 12{\cdot}5,\ S = \int_{0}^{5}(-x+5)\,dx$ **c)** $S = 4{\cdot}5,\ S = -\int_{-3}^{0}(-x-3)\,dx$ **č)** $S = 6,\ S = -\int_{0}^{6}\left(\frac{x}{3}-2\right)dx$

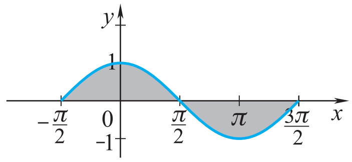
2. **a)** 9 **b)** 21 **c)** $\int_{-3}^{3}|x|\,dx = 2\cdot\int_{0}^{3}x\,dx = 2\cdot\frac{3^2}{2} = 9$ **č)** −30 **3.** **a)** $y = 2x - 6,\ 2x - y - 6 = 0,\ \frac{x}{3} + \frac{y}{-6} = 1$

b) Abscisno os seka pod kotom $\varphi = 63°26'$, ordinatno os pa $\psi = 90° - 63°26' = 26°34'$. **c)** $S = 9$ **č)** $\int_{0}^{3}(2x-6)\,dx = -9$

4. $\int_{-4}^{2} f(x)\,dx = 9$ **5.** $S = \int_{-1}^{5} (-x+5)\,dx - \int_{5}^{7} (-x+5)\,dx = 18 - (-2) = 20$

6. $S_1 = \int_{1}^{3} f(x)\,dx,\ S_2 = -\int_{3}^{4} f(x)\,dx,\ \int_{1}^{4} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{4} f(x)\,dx$

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 0$ **8.** **a)** $15 < \int_{0}^{3} (-x^2+2x+8)\,dx < 27$ **b)** $0 < \int_{-1}^{1} (x^3-3x^2+4)\,dx < 8$



9. **a)** $12\frac{1}{4}$ **b)** 10 **c)** 0 **č)** 39 **d)** 68 **e)** e^{-1} **f)** $10\frac{2}{3}$ **g)** $\ln 3 + 2$ **h)** 2

10. **a)** $10\frac{2}{3}$ **b)** $2\frac{2}{3}$ **c)** $33\frac{1}{3}$ **č)** $13\frac{1}{3}$ **d)** $25\frac{3}{5}$ **e)** $37\frac{1}{5}$

11. $\int_{1}^{4} \frac{x^3+3x-4}{x^2}\,dx = \int_{1}^{4} (x + 3x^{-1} - 4x^{-2})\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3\ln x + \frac{4}{x}\right)\Big|_1^4 = 8 + 3\ln 4 + 1 - \frac{1}{2} - 3\ln 1 - 4 = \frac{9}{2} + 3\ln 2^2 = \frac{9}{2} + 6\ln 2$

12. $2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2} + \ln 2 - 5 \doteq 2{\cdot}3$ **13.** **a)** $e - \frac{1}{e}$ **b)** $2e - 2$ **c)** $\frac{12}{\ln 3}$ **č)** $\frac{12}{\ln 4}$ **d)** $\frac{3}{4\cdot\ln 2}$ **14.** **a)** $\frac{1}{2}$

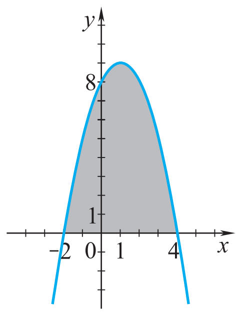
b) 2 **c)** $\frac{1}{2}$ **č)** 5 **d)** $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ **e)** 0 **f)** 2 **g)** $4 - \pi$ **h)** $\frac{8-\pi}{2}$

15. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(2 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = 2(2x - \tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$= 2\left(\frac{\pi}{2} - \tan\frac{\pi}{4} - (0 - 0)\right) = \pi - 2$ **16.** $S = 2\cdot\int_{0}^{4} x\,dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 2\cdot\left(\frac{4^2}{2} - \left(\frac{0}{2}\right)^2\right) = 2\cdot 8 = 16$

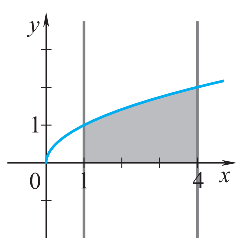
17. $S = -\int_{-2}^{2} (x^2-4)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_{-2}^{2} = 10\frac{2}{3}$

18. **a)** Ničli sta $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, začetna vrednost je $f(0) = 8$, teme je v točki $T(1, 9)$. **b)** $S = \int_{-2}^{4} (-x^2+2x+8)\,dx = 36$

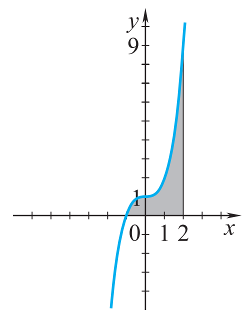


19. $S = -\int_{-2}^{0} (3x^2+6x)\,dx = -(x^3+3x^2)\Big|_{-2}^{0} = 4$ **20.** $S = \int_{1}^{3} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)dx = 8\frac{1}{3}$

21. $S = \int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx = 4\frac{2}{3}$



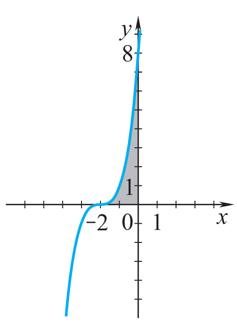
22. **a)** Ničla je $x = -1$, začetna vrednost $f(0) = 1$.



b) $\varphi = 71°34'$

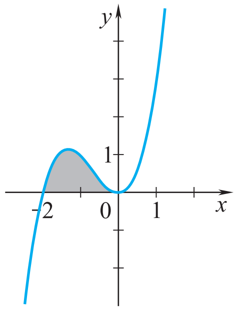
c) $S = \int_{-1}^{2} (x^3+1)\,dx = 6\frac{3}{4}$

23. $\int_{-2}^{0} (x+2)^3\,dx = \int_{-2}^{0} (x^3+6x^2+12x+8)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} + 2x^3 + 6x^2 + 8x\right) = 0 - (4 - 16 + 24 - 16) = 4$



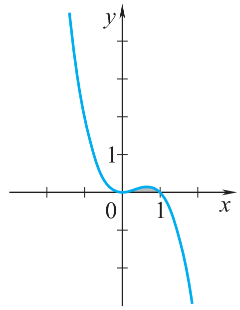
24. $a_1 = 6$, $a_2 = -6$ **25.** $b = 1$

26. **a)** Ničle so $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -2$.



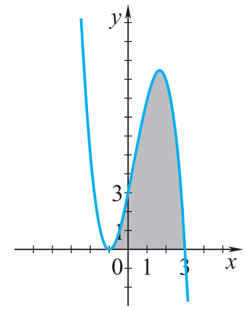
b) $S = \int_{-2}^{0} (x^2(x+2))\,dx = 1\frac{1}{3}$

27. Ničle so $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 1$.



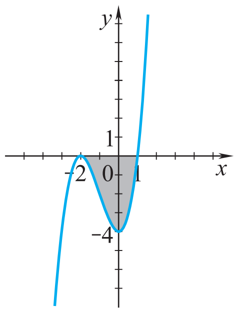
$S = \int_{0}^{1} (x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{12}$

28. Ničle so $x_{1,2} = -1$, $x_3 = 3$,
presečišče z ordinatno osjo je $(0, 3)$.



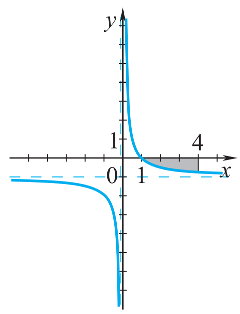
$S = \int_{-1}^{3} (-x^3 + x^2 + 5x + 3)\,dx = 21\frac{1}{3}$

29. **a)** Ničle so $x_{1,2} = -2$, $x_3 = 1$,
začetna vrednost je $p(0) = -4$.
b) $p'(x) = 3x^2 + 6x$, v točki $(-2, 0)$ je lokalni maksimum, v točki $(0, -4)$ pa lokalni minimum.



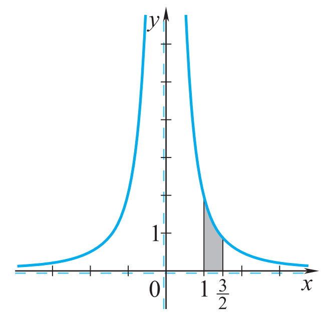
c) $S = -\int_{-2}^{1} p(x)\,dx = 6{\cdot}75$

30. **a)** Ničla je $x = 1$, pol je $x = 0$.

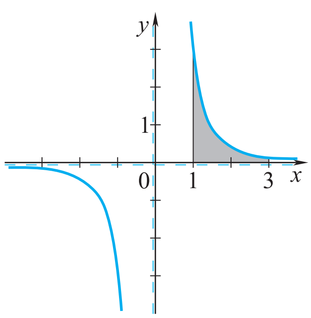


b) $S = -\int_{1}^{4} (x^{-1} - 1)\,dx = 3 - 2\ln 2$

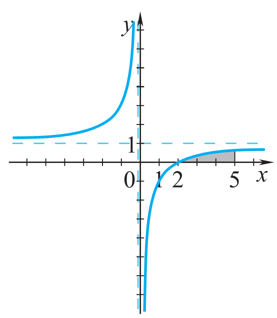
31. $\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{2}{x^2}\,dx = \frac{2}{3}$



32. $S = \frac{4}{3}$

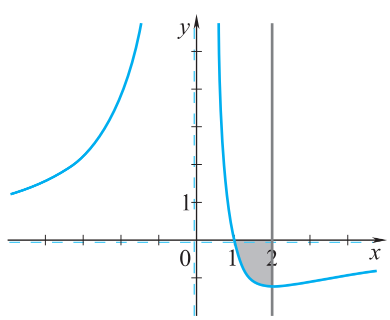


33. **a)** Ničla je $x = 2$, pol je $x = 0$, enačba asimptote je $y = 1$.



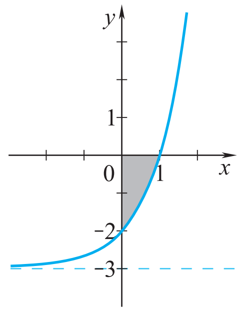
b) $S = \int_{2}^{5} \frac{x-2}{x}\,dx = \int_{2}^{5} \left(1 - \frac{2}{x}\right)dx = (x - 2\ln x)\Big|_2^5 =$
$= 5 - 2\ln 5 - 2 + 2\ln 2 = 3 - 2(\ln 2 - \ln 5) = 3 - 2\ln\frac{2}{5}$

34. **a)** Ničla je $x = 1$, pola sta $x_{1,2} = 0$, enačba asimptote je $y = 0$.



b) $S = -\int_{1}^{2} \frac{5(1-x)}{x^2}\,dx = 5\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx =$
$= 5\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = 5\ln 2 - \frac{5}{2} \doteq 0{\cdot}966$

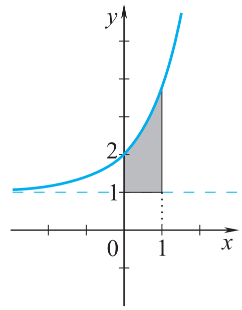
35. **a)** Ničla je $x = 1$, začetna vrednost je $f(0) = -2$, enačba asimptote je $y = -3$.



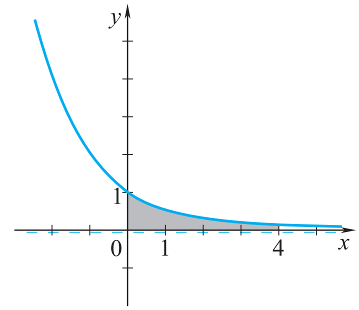
b) $\varphi = 73°7'$

c) $S = -\int_0^1 (3^x - 3)\,dx = 3 - \frac{2}{\ln 3}$

36. $S = e$



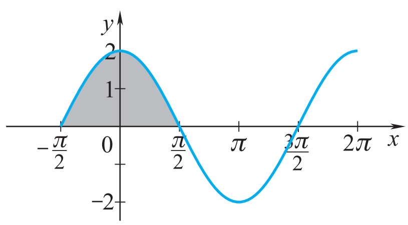
37. $S = \frac{15}{16\ln 2} \doteq 1{\cdot}35$



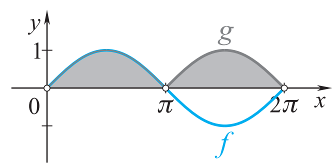
38. $\int_0^1 2^{1-x}\,dx = \int_0^1 2\cdot 2^{-x}\,dx = 2\int_0^1 (\frac{1}{2})^x\,dx = 2\cdot \frac{(\frac{1}{2})^x}{\ln\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2\cdot(\frac{(\frac{1}{2})^1}{\ln\frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2})^0}{\ln\frac{1}{2}}) = 2\cdot(\frac{1}{-2\ln 2} - \frac{1}{-\ln 2}) = 2\cdot\frac{1}{2\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$

39. $S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x\,dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$

40. $S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx = 4$



41. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0,\ S = 2\cdot\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2\cdot 2 = 4$



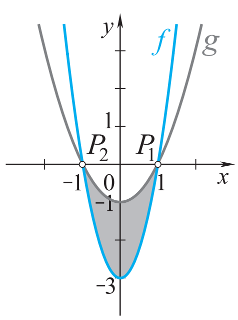
42. **a)** $S = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = 1\frac{1}{3}$

b) $S = \int_0^3 (-x^2 + 2x - (-x))\,dx = 4\frac{1}{2}$

c) $S = \int_1^5 (4 - (x-3)^2)\,dx = 10\frac{2}{3}$

č) $S = \int_3^6 (-x^2 + 10x - 16 - (x+2))\,dx = 4{\cdot}5$

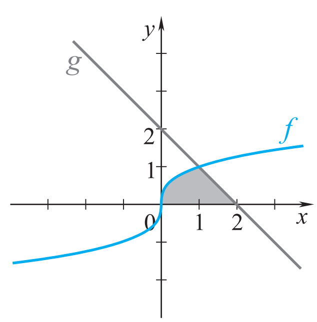
43. $P_1(1, 0), P_2(-1, 0);\ S = \int_{-1}^1 (x^2 - 1 - (3x^2 - 3))\,dx = 2\frac{2}{3}$



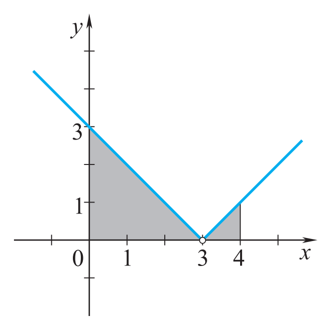
44. $S = \int_{-1}^2 (-x^2 + 2x + 5 - (x^2 + 1))\,dx = 9$

45. $S = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^6 (6 - x)\,dx = \frac{8}{3} + 8 = 10\frac{2}{3}$

46. $S = \int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx + \int_1^2 (2 - x)\,dx = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}$



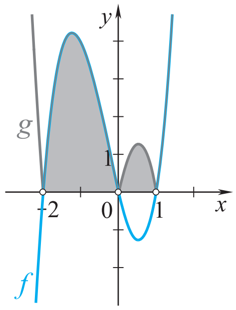
47. $S = 5$



48. $S = S_\Delta - \int_0^4 (4 - \frac{x^2}{4})\,dx = \frac{5\cdot 5}{2} - \frac{32}{3} = 1\frac{5}{6}$

49. $P(1, 2);\ S = S_\Delta + \int_0^1 (x + 1 - 2\sqrt{x})\,dx = \frac{1\cdot 1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

50. $S = \int_{-2}^{0} 2x(x+2)(x-1)\,dx - \int_{0}^{1} 2x\,(x+2)(x-1)\,dx = \frac{16}{3} + \frac{5}{6} = 6\frac{1}{6}$

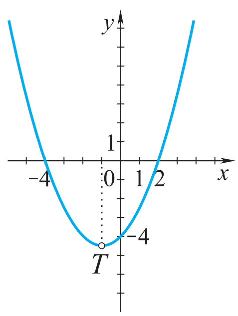


29. Pregledna testa

Rešitve nalog I. testa

1. 1

2. Ničli funkcije f sta $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Začetna vrednost funkcije f je $f(0) = -4$, teme je v točki $T(-1, -\frac{9}{2})$.



3. $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = 12$ **4.** $x = 9$ **5.** $|AB| = 9$ cm, $|AC| = 12$ cm

6. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ **7.** $x^2 - 4y^2 = -4$, $F_1(0, -\sqrt{5})$, $F_2(0, \sqrt{5})$ **8.** Premici sta vzporedni za $a = -\frac{9}{2}$, pravokotni pa za $a = 2$. **9.** $a_n = 3n + 2$ **10.** $P(A) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

11. Ničla funkcije f je $x = 0$, maksimum je v točki $T_1(1, 2)$, minimum pa v točki $T_2(-1, -2)$.

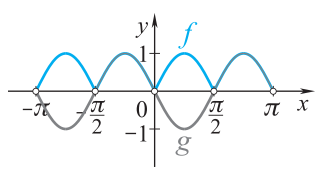
12. $S = \int_{-2}^{2} (2 - x^2 - (-2))\,dx = 10\frac{2}{3}$

Rešitve nalog II. testa

1. Večkratniki števila 12, ki so delitelji števila 504; so 12, 24, 36, 72, 84, 168, 252, 504. **2.** Da. Točke A, B in C ležijo na premici z enačbo $y = 2x + 1$, ker je $7 = 2 \cdot 3 + 1$, $-13 = 2 \cdot (-7) + 1$ in $133 = 2 \cdot 66 + 1$. **3.** $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 24$ cm **4.** $24\sqrt{3}$ **5.** $z = 1 + i$

6. $\overrightarrow{AM} = (1, 6, -2)$, $B(4, 9, -3)$ **7.** $x = \frac{1}{2}$

8.



9. $r = 6$ cm, $V = 72\sqrt{3}\,\pi$ cm^3 **10.** Za $x_1 = -\frac{1}{2}$ je zaporedje $2, \frac{1}{4}, -\frac{3}{2}$, za $x_2 = 2$ je zaporedje 2, 4, 6.

11. $n = \binom{4}{2} = 6$, $P(A) = \frac{3}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$

12. $\varphi = 161°34'$