Пример: Геометрическая прогрессия

а) $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{q^n+1} =$ (Числитель и знаменатель $\to \infty$) $\quad q^n \to +\infty$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{q^n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{q^n}} = \frac{1}{1+0} = 1$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{q^n+1} = 1$ (если $q > 1$)

б) $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n+1}{q^n-1} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{q^n}}{1-\frac{1}{q^n}} =$

$= \frac{1+0}{1-0} = 1$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n+1}{q^n-1} = 1$ (если $q > 1$)

в) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} =$ (числитель и знаменатель $\to \infty$)

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = 1$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} = 1$

Ответ: $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n+1}{q^n-1} = 1$ (если $q > 1$)

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} = 1$

Ряды

Ряд — это $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — бесконечная сумма членов a_n вида

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

и называется числовым.

Частичная сумма ряда — это сумма первых S_n членов ряда:

$S_1 = a_1$

$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

Частный случай:

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = S_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$ и т.д.

Ряд сходится, если существует $\lim_{n\to\infty} S_n$ — предел последовательности частичных сумм.

Если $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то S — сумма ряда.

Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует — ряд расходится.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится.

Свойства:

1) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ сходится, c — константа.

2) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится.

3) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Обратное не верно: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ не гарантирует сходимость ряда.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, но ряд расходится.

Ряд называется знакопеременным, если в нем есть и положительные, и отрицательные члены.

Ряд называется знакочередующимся, если знаки его членов чередуются.

Пример: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Ряд называется абсолютно сходящимся, если ряд из модулей его членов сходится.

Если ряд сходится, но ряд из модулей его членов расходится, то ряд называется условно сходящимся.

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ — условно с