Zadanie

Rozwiązanie: Wiemy że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: zbieżny $\to a \in \mathbb{R}$ i ograniczony $b_n \le a_n \le c_n$ dla pewnych b_n, c_n oraz $a_n \ge 0$ dla $n \ge n_0$.

Pokażemy: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Wskazówka 1: Zapisanie jak ciąg z parametrem $\frac{2n+1}{n+1}$

a) Udowodnić, że ciąg (a_n) jest monotoniczny. Ciąg (a_n) jest ograniczony przez 1 i 2. Ciągiem granicznym jest $\frac{2n+1}{n+1}$.

$a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$

$a_2 = \frac{2\cdot 2+1}{2+1} = \frac{5}{3}$

$a_3 = \frac{2\cdot 3+1}{3+1} = \frac{7}{4}$

$a_4 = \frac{2\cdot 4+1}{4+1} = \frac{9}{5}$

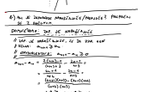
Ciąg zbieżny: $\Gamma = \{(n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Jeśli funkcja $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ to $a_n = f(n)$

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

Funkcja rosnąca

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$



1
2
x
ciąg zbieżny

b) Na ile sposobów monotoniczność/ograniczoność pomogła w znalezieniu granicy?

Odpowiedź: Nie jest konieczna.

Jeśli ciąg monotoniczny, to jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.

Jeśli $a_{n+1} \ge a_n$ i $a_n \le b$ to $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Jeśli $a_{n+1} \le a_n$ i $a_n \ge b$ to $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} =$

$= \frac{(2n+3)(n+1) - (2n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$

$= \frac{(2n^2+5n+3) - (2n^2+5n+2)}{(n+2)(n+1)} =$

$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ ✓

c) Pokazać, że a_n jest ograniczone przez $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{3}$ (wskazówka: wzór na a_n z punktu a) to $\frac{2n+1}{n+1}$ i $\frac{2n+1}{n+1} \le 2$ dla $n \ge 1$)

Zadanie 2: Jeśli (a_n) jest ograniczony i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = 0$

Dowód: Z ograniczoności $|a_n| \le M$ dla pewnego M.

$\left|\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right| \le \frac{M}{n} \to 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = 0$

---

a) Pokazać, że jest to ciągnie monotoniczny i ograniczony przez $\frac{1}{2}$. Wskazówka: $a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{a_n^2}{2}$ (ciąg zaczyna od liczby $a_1 = \frac{1}{2}$)

Tezą: Ciągnie będzie zbieżne do liczby $\{x \in [\frac{1}{2}, 1] : f(x) = x\}$

Zadanie 3: Jeśli (a_n) jest ograniczony monotonicznie i $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dowód: Wiemy, że $a_{n+1} - a_n \to 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$

$\Rightarrow a_n < 2$. (OK.)

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{2}$

Pokaż, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2}$

$a_n - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2} - a_n \le \frac{1}{2}$

$a_n \le 1$ i $a_n \ge 0$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \le a_n \le 1}$

Wtedy: Nie ciągnie ograniczone przez 2, a nie wiemy w przypadku, że $a_n \le 1$.

Zadanie 4: Zapisanie jak ciąg z parametrem $\frac{1}{2+a_n}$

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

a) Pokazać, że jest zbieżny (a_n) ograniczony przez liczbę $a_n \ge 1$ dla wszystkich n.

b) Znaleźć jej $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Pomysł rozwiązania: Będziemy, jak w $f(a)$ można traktować o rozwiązaniu $f(x) = x$.

Jeśli ciągnie zbieżny, jak $f(a)$ będzie w szczególności, jak granica tego, jak rozwiązanie:

- $f(x)$ rosnąca (pochodna dodatnia)
- Jeśli ciągnie $f(a_n)$ jest zbieżny, to a_n (pochodna ograniczona)

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Dowód: $a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4}$

$a_3 = \sqrt{2 + a_2}$

$a_4 = \sqrt{2 + a_3}$ ...

$a_n \ge 1$:

Baza: $a_2 = 2 \ge 1$ ✓

Krok: Indukcyjna hipoteza: $a_n \ge 1$

Pokażemy: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \ge \sqrt{2+1} = \sqrt{3} > 1$ ✓

Dowód: Zapisanie jak ciągnie

Tezą to ciągnie monotoniczne i ograniczone. Wskazówka: $a_n \le a_{n+1}$ $f(a)$.

Baza: $a_1 = \sqrt{2} \le 2 = a_2$ ✓

Krok: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \le \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$ ✓

Ciąg zbieżny, bo jest $\nearrow$ i ograniczony przez 2.

b) Co to jest $\lim_{n\to\infty} a_n$?

Zbieżny do liczby a spełniającej równanie

$f(x) = x$: $\boxed{x = \sqrt{2 + x}}$

$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n}$

$a = \sqrt{2 + a}$

$a^2 = 2 + a$

$a^2 - a - 2 = 0$

$(a-2)(a+1) = 0$

$\boxed{a = 2}$ ale $a > 0$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

$\boxed{\text{Wniosek: } \lim_{n\to\infty} a_n = 2}$

Zadanie 5: Rozważmy ciąg zbieżny $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2 + a_n}$

a) Zbadać, czy ciąg jest zbieżny.

$a_1 = 2$

$a_2 = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} = 0.25$

$a_3 = \frac{1}{2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$

b) Przekonać się, że jest zbieżny ciągnie $\lim_{n\to\infty} (a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monotoniczne.

Pokażemy, że a_{2n+1} ciągnie rosnąc, że zbieżność i będzie rosnący. **Baza:**

Krok:

Wiemy ciągnie a_{2n+1} leżeli na przedziale $[0,1]$ wtedy ciągnie $[0,1]$.

Pokaż: $f(x) = \frac{1}{2+x}$

Funkcja jest $\searrow$ $a_{n+1} = f(a_n)$.

1
x

I.P. $a_{2n} \in [0,1]$

Krok: $a_{2n+1} \in$

Wniosek: Jeśli $x \in [0,1]$, wtedy $f(x) \in [0,1]$.

Z I.P. wiemy, że jeśli $a_{2n} \in [0,1]$

$\Rightarrow a_{2n+1} = f(a_{2n}) \in [0,1] \subseteq [0,1]$ ✓

Baza ok. Wiemy: $a_{2n+2} \ge a_{2n}$ ale $a_{2n+2} \le a_{2n}$

$a_{2n+2} \le a_{2n}$ ale $a_{2n+2} \ge a_{2n}$

Pokażemy, że $a_{2n+2} - a_{2n}$ jest dodatnie, ujemne, czy zerowe.

$\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\operatorname{sgn}(x) =$ Znak liczby x $\begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Zr. $x \neq 0$: $\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$

Zr. $x \neq 0$: $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$ $\Rightarrow$ Dla wygody.

Hipoteza indukcyjna: $\operatorname{sgn}(a_{2n+2} - a_{2n}) = (-1)^{2n+1}$

Baza: $a_2 - a_1 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4} < 0$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(a_2 - a_1) = -1 = (-1)^{2\cdot 0+1}$

Krok: $a_{2n+4} - a_{2n+2} = \frac{1}{2+a_{2n+3}} - \frac{1}{2+a_{2n}}$

$= \frac{(2+a_{2n+3}) - (2+a_{2n})}{(2+a_{2n+3})(2+a_{2n})} = \underbrace{\frac{1}{(2+a_{2n+3})(2+a_{2n})}}_{\text{dodatnie}} (a_{2n+3} - a_{2n})$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(a_{2n+4} - a_{2n+2}) = \operatorname{sgn}(a_{2n+3} - a_{2n})$

$= (-1)^{2n+1} = (-1)^{2n+3}$ ✓

Zadanie: + Ciąg ciągi monotoniczny,

+ Ciąg ciągi Cauchy.

Wiemy: Dla wszystkich ε ciągi n ciągi $|a_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow a$ jest granicą ciągu.

c) Ciągi naprzemienne

$a_1 = \lim_{n\to\infty} a_{2n} \quad \text{oraz} \quad a_2 = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$

Zbaw, że z przekładu dodatniego, wynika:

$a_{2n+1} = \frac{1}{2+a_{2n}} \qquad a_{2n+2} = \frac{1}{2+a_{2n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \frac{1}{2+\lim_{n\to\infty} a_{2n}} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n+2} = \frac{1}{2+\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}}$

$a_1 = \frac{1}{2+a_2} \qquad a_2 = \frac{1}{2+a_1}$

$\Downarrow$

$2a_1 + a_1 a_2 = 1 \qquad 2a_2 + a_1 a_2 = 1$

Odejmując: $2(a_1 - a_2) = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a$

Wstawiamy wyżej i wyznaczamy za a_1 lub a_2:

$a = \frac{1}{2+a}$

$2a + a^2 = 1$

$a^2 + 2a - 1 = 0$

$(a+1)^2 = 2$

$a = -1 \pm \sqrt{2}$ — wiemy, że wszystkie są dodatnie.

$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -1 + \sqrt{2}}$

Pomysł:

$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(Ciągi są zbieżne)

Pokażemy za $=, \le, \ge$ (Ciągi są dodatnie > 0)

Zadanie:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{1}$

W stronę:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lim_{n\to\infty}(n+1)}{\lim_{n\to\infty}(n+2)}$

$= \frac{\lim_{n\to\infty} n + \lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} n + \lim_{n\to\infty} 2} = \frac{\infty + 0}{\infty + 0} = \frac{1}{1}$