Vaje MAT VSP, 13.1.2021

DETERMINANTE

1. Izračunaj naslednje determinante:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$,

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$,

(f) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} =$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c}$$

$3 \cdot 5 - 2 \cdot 8 = \underline{\underline{-1}}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

1. način:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & +\ - & - & - \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{array}\right|$$

$= 1 \cdot 0 \cdot 6 + 0 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 5$
$\quad - 0 \cdot 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 0 \cdot 4$
$= 0 + 0 + 10 - 0 - 15 - 0$
$= \underline{\underline{-5}}$

2. način (razvoj po vrstici ali stolpcu):

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(0 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - 0 + 1 \cdot (2 \cdot 5 - 0 \cdot 4)$$

$$= -15 + 10 = \underline{\underline{-5}}$$

razvoj po prvi vrstici

Razvoj po drugem stolpcu:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) =$$

$$= \underline{\underline{-5}}$$

3. način (Gaussova eliminacija):

Izvajamo Gaussovo eliminacijo na (nerazširjeni) matriki pod naslednjimi pravili:

- če vse elemente v vrstici (stolpcu) pomnožimo s faktorjem r, se determinanta pomnoži z r,
- vrednost determinante se ne spremeni, če posamezni vrstici prištejemo večkratnik neke druge vrstice

! • če med seboj zamenjamo dve vrstici (stolpca), se spremeni predznak determinante,

• če so vsi elementi na eni strani glavne diagonale enaki 0, potem je vrednost determinante enaka produktu diagonalnih elementov.

$$\begin{vmatrix} * & & \\ 0 & * & \\ 0 & 0 & * \end{vmatrix} = * \cdot * \cdot * \qquad \begin{vmatrix} * & 0 & 0 \\ & * & 0 \\ & & * \end{vmatrix} = * \cdot * \cdot *$$

$$\begin{array}{l} (-2)\cdot \\ + \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \mid(-4) \\ \\ + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} ! = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot 5\cdot 1 = \underline{\underline{-5}}$$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot(4\cdot 3 - 1\cdot 7)$$

$$= 4\cdot 5 = \underline{\underline{20}}$$

Razvoj po 3. vrstici

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Razvoj po tretji vrstici:

g)
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-5) - 1 \cdot 2 = \underline{\underline{-7}}$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & +\,- & - & - \end{array}$$

$$\left|\begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{matrix} = 3 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot 3 \cdot (-2)$$

$$= 9 + 0 - 6 - 2 - 0 - 6 =$$

$$= -5$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & +\,- & - & - \end{array}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot 3 \cdot 1$$

$$= \cancel{3} + 0 - \cancel{3} - 1 - 0 + 3 =$$

$$= 2$$

MATRIKE

Dimenzija matrike: $m \times n$

m vrstic n stolpcev

Operacije z matrikami:

- Seštevanje / odštevanje matrik istih dimenzij (po komponentah)

Primer: $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

- Množenje matrike s številom

Primer:

$$2\begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 8 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Množenje matrik: $A_{m \times n} \cdot B_{n \times r}$

$$= (AB)_{m \times r}$$

Primer:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

3×2 2×2

$$\begin{bmatrix} 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 5 \cdot 1 + 2(-1) \\ (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-3)(-1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 16 & 3 \\ -2 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

- Transponiranje matrik : $(A_{m\times m})^T = A^T{}_{m\times m}$

$\downarrow$

zamenjamo vrstice in stolpce matrike A

Primer: $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj matriko $(BA)^\mathsf{T} + 2C^2 - I_3$, kjer je I_3 identična matrika velikosti 3×3.

$$\underset{A^T \cdot B^T}{\overset{\parallel}{}}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad AB \neq BA\,!$$

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} =$$

$3 \times \underline{2} \qquad \underline{2} \times 3 \qquad 3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-4) & 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 2\cdot 1 + (-4)\cdot 2 & 2\cdot 2 + (-4)(-4) & 2\cdot 3 + (-4)\cdot 6 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 2 & 0\cdot 2 + 0\cdot(-4) & 0\cdot 3 + 0\cdot 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 15 \\ -6 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(BA)^T = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ -6 & 20 & 0 \\ 15 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot1+1\cdot5+3\cdot0 & 1\cdot1+1\cdot0+3\cdot0 & 1\cdot3+1\cdot1+3\cdot1 \\ 5\cdot1+0\cdot5+1\cdot0 & 5\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 5\cdot3+0\cdot1+1\cdot1 \\ 0\cdot1+0\cdot5+1\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot3+0\cdot1+1\cdot1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2C^2 = 2 \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(BA)^T + 2C^2 - I_3 = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ -6 & 20 & 0 \\ 15 & -18 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & -4 & 14 \\ 4 & 29 & 32 \\ 15 & -18 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Reši matrične enačbe z neznanimi matrikami X, Y, Z.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, (b) $Y \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

a) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}}_{B}$

1. način:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad \boxed{X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

$$2\times 2 \quad 2\times 2 \quad 2\times 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot a + 2c & 1\cdot b + 2\cdot d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a + 2c &= 3 \quad /(-2) \\ 3a + 4c &= 5 \\ -2a - 4c &= -6 \quad + \\ \hline \boxed{a = -1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b + 2d &= 5 \quad /(-2) \\ 3b + 4d &= 9 \\ -2b - 4d &= -10 \quad + \\ \hline \boxed{b = -1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 + 2c &= 3 \\ 2c &= 4 \quad /:2 \\ \boxed{c = 2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -1 + 2d &= 5 \\ 2d &= 6 \quad /:2 \\ \boxed{d = 3} \end{aligned}$$

$$\boxed{X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}$$

2. način (s pomočjo inverzne matrike):

Inverzna matrika matrike A je matrika A^{-1}, da velja:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Rešujemo enačbo

$$AX = B \quad /\cdot \cancel{A^{-1}}$$

$$AXA^{-1} \cancel{=} BA^{-1}$$

$AB \neq BA$

$$A^{-1}\cdot\backslash \quad AX = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Inverz 2×2 matrike:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \backslash \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 4 - 2\cdot 3} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4\cdot 3 + (-2)\cdot 5 & 4\cdot 5 + (-2)\cdot 9 \\ (-3)\cdot 3 + 1\cdot 5 & (-3)\cdot 5 + 1\cdot 9 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$