Matematika

Bojan Orel

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Vektorski produkt vektorjev v $\mathbb{R}^3$

Vektorski produkt:

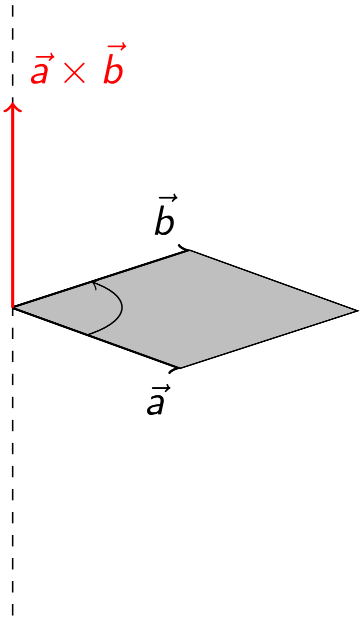
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Za neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ velja, da $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ natanko takrat, kadar sta vektorja kolinearna.

Geomerijski pomen vektorskega produkta: ploščina

Velja:

- Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na oba vektorja, $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin\varphi$ je ploščina paralelograma, ki je napet na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Kakšna je smer vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$?



Naloge

1. Vektorski produkti vektorjev standardne baze

$$\vec{i} \times \vec{j} = \quad \text{in} \quad \vec{j} \times \vec{i} =$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \quad \text{in} \quad \vec{k} \times \vec{j} =$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \quad \text{in} \quad \vec{i} \times \vec{k} =$$

Naloge

2. Izračunajmo ploščino paralelograma, napetega na vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

Naloge

3. Izračunajmo ploščino trikotnika z oglišči $A\,(1,-1,0)$, $B\,(2,1,-1)$ in $C\,(-1,1,2)$.

Lastnosti vektorskega produkta

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times b + \vec{a} \times \vec{c}$
3. $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$
4. $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\varphi$,
   kjer je $\varphi \in [0, \pi]$ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Mešani produkt

Mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b} \times \vec{c}$

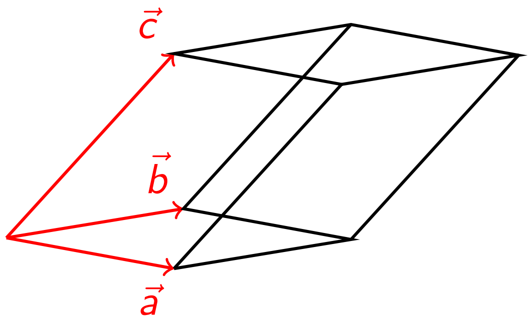
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Izrek

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \\ = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) &= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) \end{aligned}$$

Geometrijski pomen mešanega produkta

Mešani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je po absolutni vrednosti enak prostornini *paralelepipeda*, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.



Mešani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enak 0, če je kateri izmed faktorjev enak $\vec{0}$ ali pa če $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ ležijo v isti ravnini, pravimo, da so *koplanarni*.

Naloge

1. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ takšna vektorja, da je $||\vec{a}|| = 2$, kot med njima $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^0$ in da sta vektorja $2\vec{a} + \vec{b}$ ter $\vec{a} - \vec{b}$ pravokotna. Določi dolžino vektorja $\vec{b}$.

Naloge

2. Izračunajmo prostornino piramide z oglišči
   $P\ (0, 0, 0)$
   $Q\ (0, 2, 0)$
   $R\ (2, 0, 0)$
   $S\ (2, 2, 0)$
   $T\ (1, 1, 2)$

Naloge

3. Izračunajmo prostornino tetraedra z oglišči
   $A\ (1, -1, 0)$
   $B\ (2, 1, -1)$
   $C\ (-1, 1, 2)$
   $D\ (0, 1, 2)$

Povzetek

Vektorje smo opremili s tremi produkti:

1. skalarni
2. vektorski
3. mešani

Za vsakega smo podali:

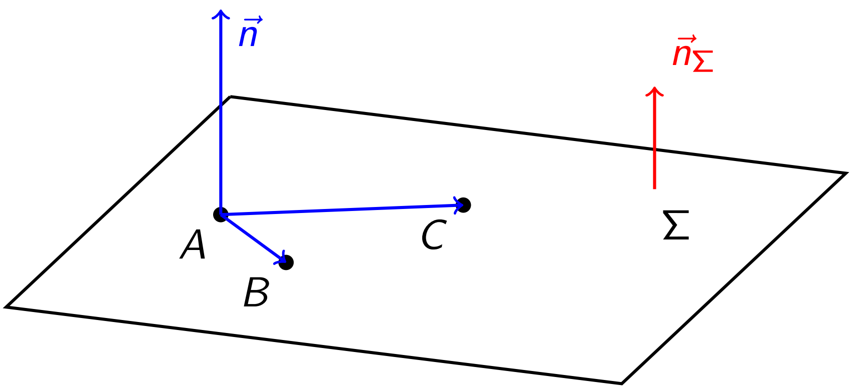
- računsko definicijo
- izražavo z dolžinami in koti
- geometrijski pomen

Z nimi lahko preverjamo:

1. pravokotnost
2. kolinearnost
3. koplanarnost

Ravnina v prostoru

- Ravnina Σ je določena s tremi točkami A, B in C.



- *Normala* na ravnino Σ: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \perp \Sigma$,
- $A \in \Sigma$.
- Parametrizacija $\Sigma : p(t,s) = \vec{r}_A + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$.

Naloga

Določimo enačbo ravnine Σ, ki gre skozi točki $A(1,2,3)$ in $B(3,2,1)$ ter je pravokotna na ravnino $\Pi \equiv 4x - y + 2z = 7$.

Premica v prostoru

Premica p je določena s točko $A(a_1, a_2, a_3)$ na premici in smernim vektorjem $\vec{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$.

$$p: \ \vec{r}_P = \vec{r}_A + t\vec{e}.$$

Z eliminacijo parametra pa še *kanonično* enačbo premice

$$\frac{x-a_1}{e_1} = \frac{y-a_2}{e_2} = \frac{z-a_3}{e_3}.$$

Nalogi

Določimo enačbo premice p, ki je pravokotna na ravnino $\Sigma : 4x - y + 2z = 7$ in gre skozi točko $A(1, 2, 1)$.

V kateri točki premica p prebada ravnino Σ?

Nalogi

V $\mathbb{R}^3$ sta dani premici

$$p:\ x - 1 = y - 2 = z$$

in

$$q:\ \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}\,.$$

Pokažimo, da se premici sekata in zapišimo enačbo ravnine, ki ju vsebuje.

Razdalja točke od ravnine

Če je ravnina Σ določena s točko A in normalnim vektorjem $\vec{n}$, potem je

$$d(T,\Sigma) = \left|\frac{(\vec{r}_T - \vec{r}_A)\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right|.$$

Zgled

V $\mathbb{R}^3$ sta dani premica

$$p:\ \frac{x}{-3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

in ravnina

$$\Sigma:\ 2x - y + 2z = 2\,.$$

Pokaži, da sta p in Σ vzporedni in izračunaj razdaljo med njima.

Razdalja točke od premice

Če je premica p določena s smernim vektorjem $\vec{e}$ in točko A potem je

$$d(T,p) = \left\| (\vec{r}_T - \vec{r}_A) \times \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} \right\| = \frac{\|(\vec{r}_T - \vec{r}_A) \times \vec{e}\|}{\|\vec{e}\|}$$

Razdalja med premicama P_1 in P_2.

1. Če sta p_1 in p_2 vzporedni (tj. $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$), potem je $d(p_1, p_2) = d(B_1, p_2)$, oziroma razdalji katerekoli točke z ene od premic do druge premice.
2. Če p_1 in p_2 nista vzporedni, ima ravnina Σ, ki je vzporedna obema premicama normalo $\vec{n} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$. Naj $A \in p_1$, $B \in p_2$. Razdalja med p_1 in p_2 je enaka dolžini pravokotne projekcije $\vec{r}_A - \vec{r}_B$ na $\vec{n}$.

$$d(p_1, p_2) = \left| (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \cdot \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\|} \right| = \left| \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_B, \vec{e}_1, \vec{e}_2)}{\|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\|} \right|$$

Zgled

Določi razdaljo točke $\vec{r}_A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ od premice $p : \vec{r}_P = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Zgled

Določi razdaljo med premicama $p_1 : \vec{r}_{P_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $p_2 : \vec{r}_{P_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Matrike

Matrika velikosti $m \times n$ je pravokotna tabela $m \cdot n$ števil, razporejenih v m vrstic in n stolpcev

$$A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ali krajše

$$A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$$

Matrika z enim stolpcem je *stolpčni vektor*, matrika z eno samo vrstico je *vrstični vektor*.

Računanje z matrikami

Matriki $A_{m\times n}$ in $B_{p\times q}$ sta *enaki* natanko tedaj, ko sta enake velikosti ($m = p$ in $n = q$) in so enaki istoležni elementi ($a_{ij} = b_{ij}$ za vsak $i = 1, \ldots, m$ in $j = 1, \ldots, n$).

Množenje matrike s skalarjem: Vsak element matrike pomnožimo s skalarjem

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$$

Seštevanje matrik: Seštevamo lahko le matrike enakih velikosti.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$$

Transponiranje matrik

Matriko *transponiramo* tako, da zamenjamo vlogi vrstic in stolpcev.
Primer: Če je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix},$$

potem je

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lastnosti transponiranja:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $\det(A) = \det(A^T)$

Naloga

Za matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

izračunaj

$A + B$
$A + C$
A^T
$A^T + C$
$-B$
$B + (-B)$
$2 \cdot B$
$(3 \cdot A + 2 \cdot B)^T - 4 \cdot C$