Matematika

Bojan Orel

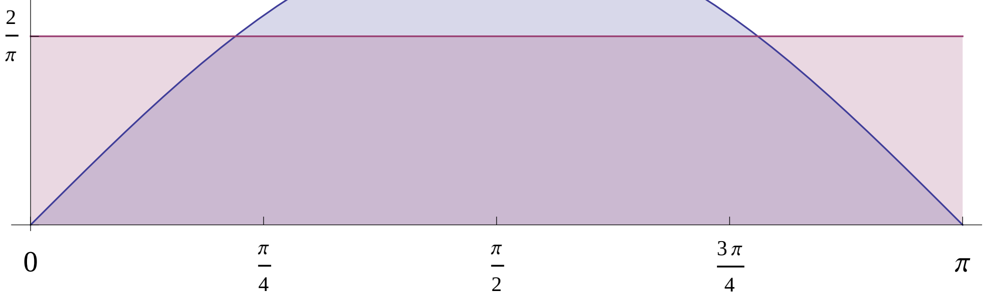
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Povprečna vrednost funkcije

Povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

μ : višina pravokotnika z osnovnico $[a, b]$, ki ima ploščino enako kot območje pod grafom $y = f(x)$.



Zveza med določenim in nedoločenim integralom

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Torej je f je zvezna (in zato integrabilna) na vsakem intervalu $[a, x]$, $x \in [a, b]$.

Izrek (Osnovni izrek integralskega računa)

Če je f zvezna na $[a, b]$, je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

zvezna in odvedljiva na $[a, b]$ in velja

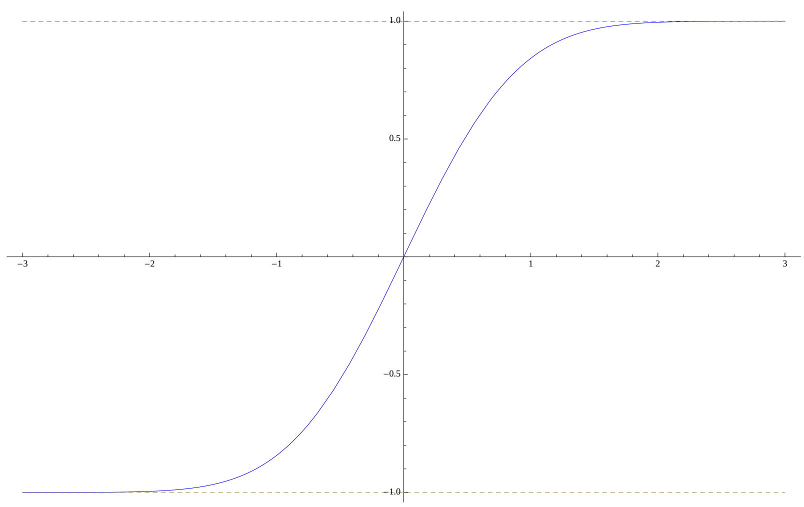
$$F'(x) = f(x).$$

Funkcija F je torej nedoločeni integral funkcije f na $[a, b]$.

Posledica

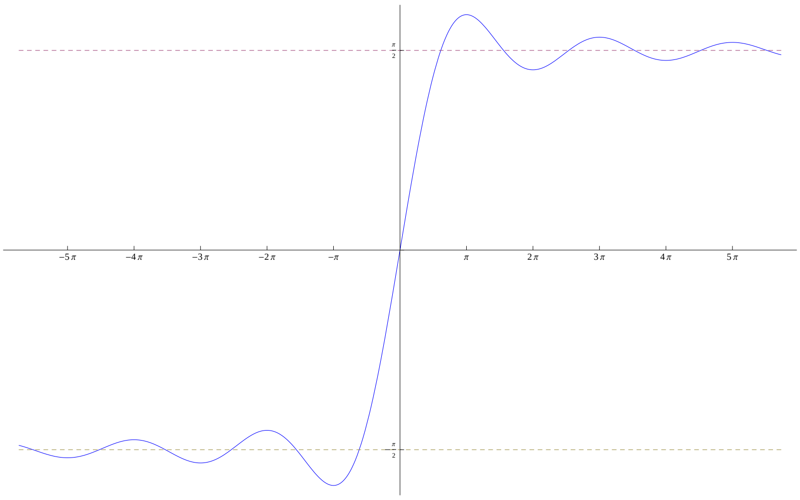
Vsaka zvezna funkcija ima svoj nedoločeni integral. Dobimo vrsto novih, neelementarnih funkcij, na primer:

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad \text{funkcija napake}$$



Posledice

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \quad \text{integralski sinus}$$



Newton-Leibnizova formula

Newton-Leibnizova formula za računanje določenih integralov:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \big[F(x)\big]_a^b,$$

kjer je F nedoločeni integral funkcije f.

Pravila za računanje določenih integralov

Vpeljava nove spremenljivke
Če je u zvezno odvedljiva na $[a,b]$ ter f zvezna na $\mathcal{Z}_u$, potem je

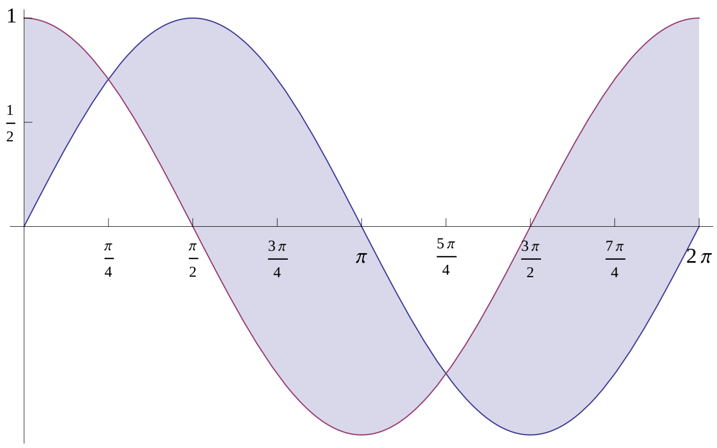
$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Integriranje po delih: Če sta u, v odvedljivi na $[a,b]$, potem je

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

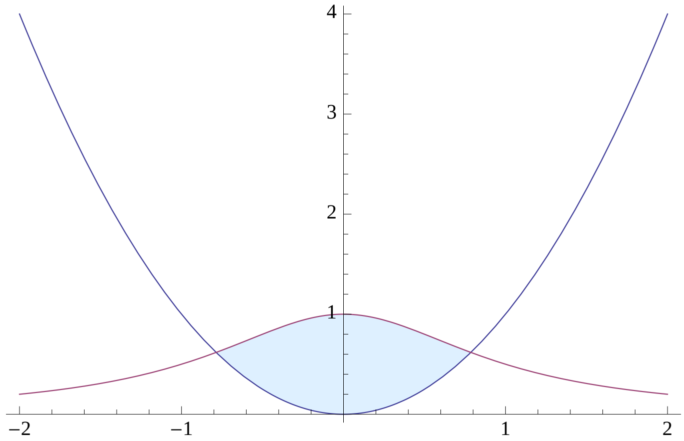
Primeri

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 x^4 \log x\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^3 |x^2-4|\,dx$
4. Določimo ploščino enega od likov med krivuljama $y = \sin x$ in $y = \cos x$.



Primeri

5. Določimo ploščino omejenega lika med krivuljama $y = x^2$ in $y = \frac{1}{1+x^2}$.



Uporaba integrala

- Ploščine likov omejenih s krivuljami ...
- Pot, hitrost, pospešek ter prehod med njimi.
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitivna funkcija. Naj bo T vrtenina, dobljena z vrtenjem grafa f okoli x osi na $[a, b]$.

$$\textit{prostornina:} \quad V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

$$\textit{površina plašča:} \quad P(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

- Dolžina loka grafa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

- Akumulacija količine, če poznamo hitrost: pretok vode, pretok podatkov, absorbcija delcev, silo na pametni telefon,...

Integral na neomejenem intervalu

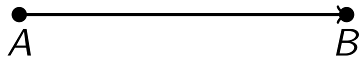
- $f(x)$ zvezna na $[a, \infty)$
- $\lim\limits_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\, dx = \int_a^{\infty} f(x)\, dx$
- Integral ne obstaja vedno!
- Podobno: $\lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\, dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx.$

Primeri

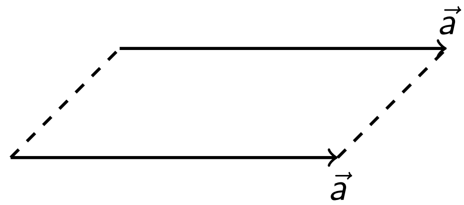
1. $\int_1^{\infty} x^{\alpha}\, dx$
2. $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$
3. Gabrijelov rog dobimo z vrtenjem krivulje $y = 1/x$ na intervalu $[1, \infty)$ okrog osi x, pokažimo, da je volumen roga končen.

Kaj je vektor?

- *Vektor* je
  - geometrijsko: usmerjena daljica, natančno določena s svojo začetno in končno točko.



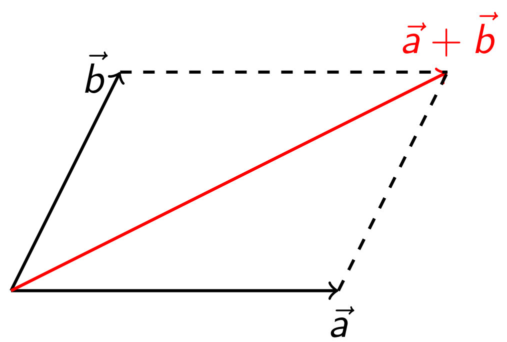
    Pri tem sta dve usmerjeni daljici enaki, če obstaja vzporedni premik, ki slika začetno točko prve daljice v začetno točko druge daljice in končno točko prve daljice v končno točko druge daljice.

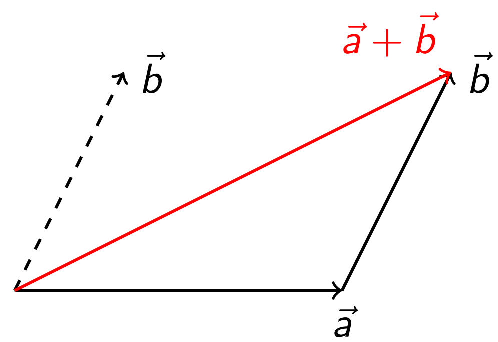


  - računsko: urejena n-terica realnih števil $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$
- $a_1, \ldots a_n$ so *koordinate* ali *komponente* vektorja $\overrightarrow{AB}$.

Seštevanje vektorjev

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

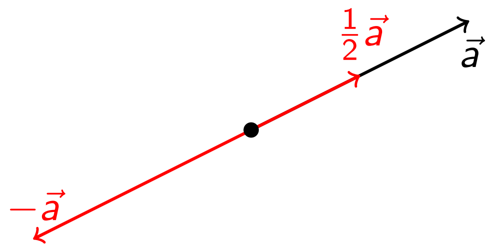




Množenje vektorjev s skalarji

$\alpha \in \mathbb{R}$ skalar

$$\alpha\vec{a} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix}$$

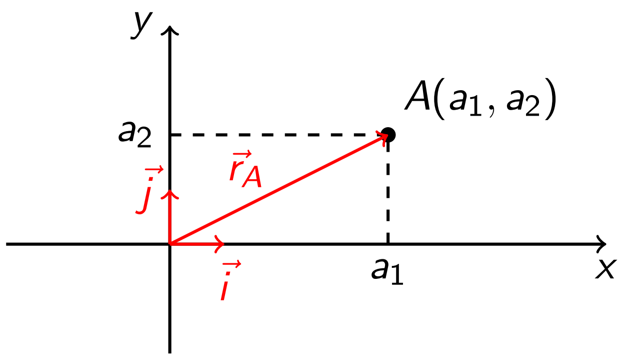


Lastnosti operacij

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
3. $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ in velja
   - $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
   - $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
4. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Vektorji v ravnini

Ravnino $\mathbb{R}^2$ si predstavljamo opremljeno s *koordinatnim sistemom*.



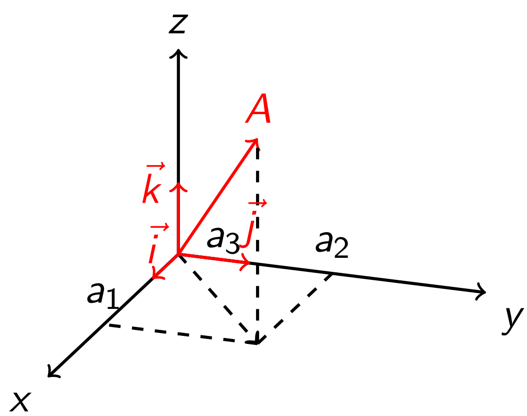
Vektor v $\mathbb{R}^2$ ...stolpec dveh realnih števil

$$\vec{r}_A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$$

je *krajevni vektor* točke A.

Vektorji v prostoru

Prostor $\mathbb{R}^3$ si predstavljamo opremljen s *koordinatnim sistemom*.

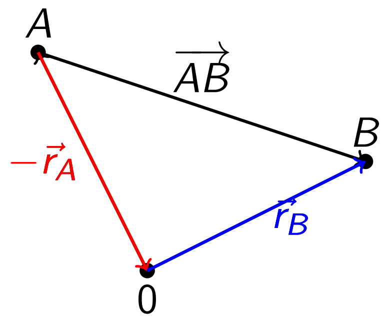


$$\vec{r}_A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

Vektorji v prostoru

Kako določimo vektor $\overrightarrow{AB}$, ki se začne v točki A in konča v točki B?

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$



Nalogi

1. Zapišimo koordinate razpolovišča daljice med točkama $A(1,2,3)$ in $B(3,0,-1)$

Nalogi

2. Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ krajevna vektorja točk A in B, je
   - $\{\vec{a} + \alpha(\vec{b} - \vec{a}), \alpha \in \mathbb{R}\}$ ...
   - $\{\vec{a} + \alpha(\vec{b} - \vec{a}), 0 \leq \alpha \leq 1\}$ ...
   - $\{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}$ ...

Kolinearnost in linearna kombinacija vektorjev

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta *kolinearna* (tudi *vzporedna*) , če obstaja tak skalar α, da je

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} \quad \text{ali} \quad \vec{b} = \alpha\vec{a}.$$

Če so $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$ vektorji iz prostora $\mathbb{R}^3$ in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ skalarji, je vektor

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{a}_m$$

linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_m$.

Kolinearnost in linearna kombinacija vektorjev

Izrek

Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna vektorja. Vsak vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Izrek

Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ vektorji, ki ne ležijo v isti ravnini. Vsak vektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo treh vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

Naloga

Zapišimo vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Skalarni produkt

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je skalar (realno število)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Lastnosti skalarnega produkta:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
3. $\vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b}$
4. *Pozitivna definitnost*: $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ in $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ le za $\vec{a} = \vec{0}$.

Dolžina vektorja

Dolžina (ali Evklidska norma) vektorja $\vec{a}$ je število

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Vektorju, katerega dolžina je enaka 1, pravimo *enotski (ali normirani)* vektor.

Zgled: $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ so enotski in paroma pravokotni vektorji. Imenujemo jih *standardna baza* prostora $\mathbb{R}^3$.

Dolžina vektorja

Izrek (trikotniška neenakost)

Za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ velja

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

Geomerijski pomen skalarnega produkta: kot med vektorjema

Kot φ med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je določen z enakostjo

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$$

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta pravokotna (ali ortogonalna) natanko tedaj, ko je $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Pišemo $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Zgled: Določimo kot med robom in telesno diagonalo kocke.

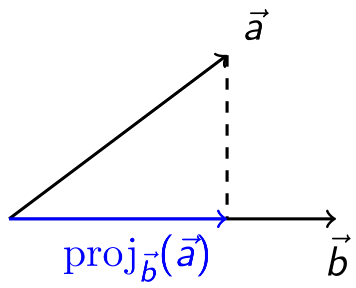
Pravokotna projekcija

Pravokotna projekcija vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ je takšen vektor $\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$, ki

- je kolinearen z vektorjem $\vec{b}$ in
- je $\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ *pravokoten* na $\vec{b}$.

Torej,

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\, \vec{b}$$



Naloga

V trikotniku z oglišči $A(0,0,1)$, $B(1,2,1)$ in $C(-2,1,1)$ poiščimo nožišče višine na stranico BC in izračunajmo dolžino višine.