Matematika

Bojan Orel

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Globalni ekstremi

Vemo: Vsaka odvedljiva funkcija doseže na zaprtem intervalu $[a, b]$ svoj maksimum in minimum. Kje?

- v stacionarni točki ali
- na robu intervala

Primeri

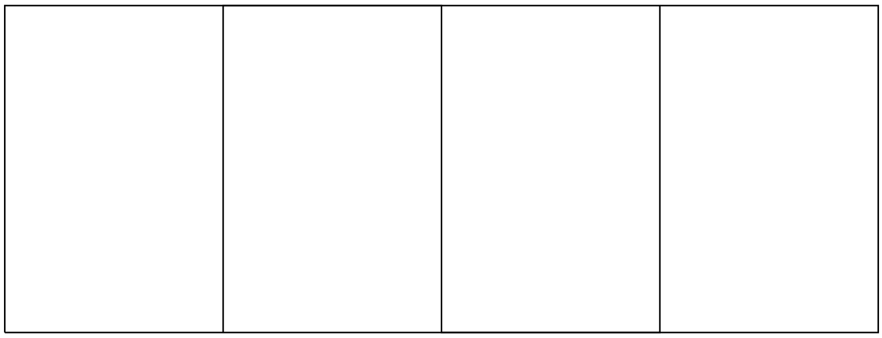
1. Narišimo graf funkcije $f(x) = x^3 - 3x + 2$ in določimo največjo in najmanjšo vrednost f na intervalu $[0, 2]$.

Primeri

2. Kakšne oblike naj bo valjasta pločevinka s prostornino 1l, da bo količina pločevine, potrebna za njeno izdelavo, najmanjša možna?

Primeri

3. Kot dobri vrtnarji bi radi ogradili vrt s $6000m$ ograje, ki nam je na razpolago. Želimo imeti pravokotno ograditev, ki je razdeljena na štiri dele, kot to kaže slika. Kolikšna je največja površina, ki jo lahko tako ogradimo?



Primeri

4. *Metoda najmanjših kvadratov:* Dane so točke $A(1,7)$, $B(2,13)$, $C(3,18)$. Poiščimo premico $y = kx$, ki se jim najbolje prilega.

L'Hospitalovo pravilo

f in g odvedljivi na intervalu (a, b), $g'(x) \neq 0$.

- Če je $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$, je
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
- Če je $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$, je
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
- Pravili veljata tudi za enostranski limiti, ko gre $x \to \infty$ ali $x \to -\infty$.

Primera

1. Izračunajmo limiti
   - $\lim_{x \to 0} x^n \log x$
   - $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

Primera

2. Narišimo graf funkcije $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Taylorjevi polinomi

Taylorjev polinom prve stopnje okrog točke x_0 :

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + df$$

Taylorjev polinom stopnje n:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Velja: $T_n(x_0) = f(x_0)$, $T_n'(x_0) = f'(x_0)$,
$T_n''(x_0) = f''(x_0)$,..., $T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

Taylorjev izrek

Izrek

Če je f vsaj $(n+1)$-krat odvedljiva v točki x_0, potem na nekem intervalu okrog x_0 velja:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

kjer je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

za nek $c \in [x_0, x]$.

Taylorjevi razvoji elementarnih funkcij

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

Izračunaj približek števila e.

Nedoločeni integral

Za dano funkcijo f bi radi našli neko funkcijo F, katere odvod je f.

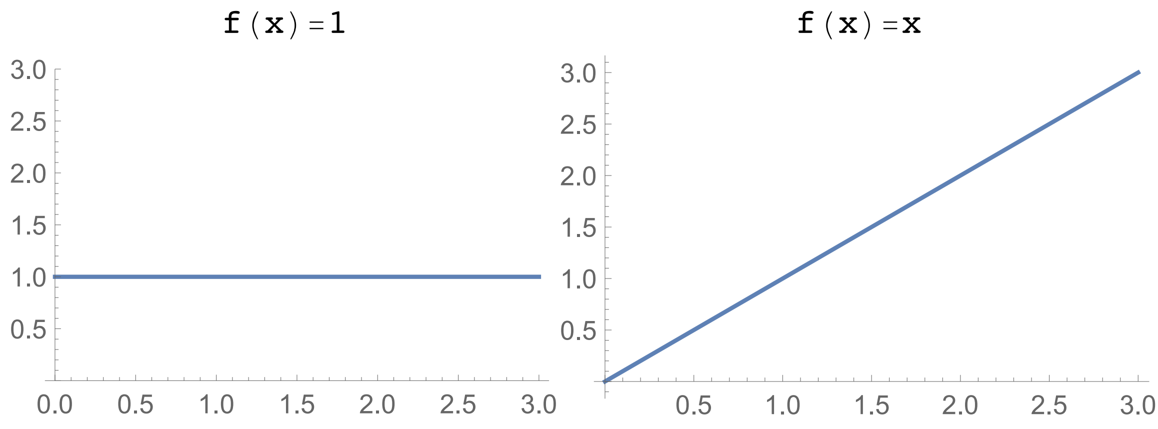
Definicija

Naj bo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, kjer $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ odprti interval. Če za $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ velja

$$F'(x) = f(x)$$

za vse $x \in \mathcal{D}$, potem F imenujemo nedoločeni integral ali primitivna funkcija funkcije f.
Pišemo: $F(x) = \int f(x)\, dx$.

Povezava med odvodom ter integralom



Nedoločeni integral

Nedoločeni integral je določen le do konstante natanko. Če je $F'(x) = f(x)$, potem

- velja $(F(x) + C)' = f(x)$ za vse $C \in \mathbb{R}$,
- za vsak nedoločeni integral G funkcije f velja $G(x) = F(x) + D$ za nek $D \in \mathbb{R}$.

Elementarni integrali

Iz tabele elementarnih odvodov dobimo:

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \qquad \int x^{-1} \, dx = \log|x| + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Pravila za računanje nedoločenih integralov

1. linearnost:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$$

NI PRODUKTNEGA, KVOCIENTNEGA ALI VERIŽNEGA PRAVILA!!!

Izračunajmo integral

$$\int (1-x^2)^2\,dx.$$

Pravila za računanje nedoločenih integralov

2. vpeljava nove spremenljivke:

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Izračunajmo integral

$$\int \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx.$$

Izračunajmo integral

$$\int \frac{\cos(x)}{1+3\sin(x)}\,dx.$$

Izračunajmo integral

$$\int (x^5+x^4+e^x-1)^9(5x^4+4x^3+e^x)\,dx.$$

Pravila za računanje nedoločenih integralov

3. integriranje po delih (per partes)

$$\int u(x)v'(x)\;dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\;dx$$

oziroma

$$\int u\;dv = uv - \int v\;du$$

Izračunajmo integral

$$\int xe^{2x}\;dx.$$

Izračunajmo integral

$$\int (x^2 + x)\sin(2x)\;dx.$$

Še primeri

1. $\int \sqrt{2x-5}\,dx$
2. $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\;dx$
3. $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\;dx$
4. $\int \frac{dx}{x+1}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{x(x-1)}\,dx$
6. $\int \frac{dx}{(x^2+4)}\,dx$

Še primeri

8. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{2x^3+x+1}{x^2-1}\,dx$
11. $\displaystyle\int \log x\,dx$
12. $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$
13. $\displaystyle\int \tan x\,dx$
14. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$