Matematika

Bojan Orel

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Diferenčni kvocient

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$

- Sprememba $x_0 \to x_0 + h$ povzroči spremembo $f(x_0) \to f(x_0 + h)$
- Hitrost spreminjanja nam pove kvocient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  in ga imenujemo diferenčni kvocient funkcije f v točki x_0.
- Diferenčni kvocient je enak naklonskemu koeficientu premice sekante skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Odvod

Definicija

Odvod funkcije f v točki x_0 je limita diferenčnega kvocienta

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Funkcija je odvedljiva v točki x_0, če obstaja $f'(x_0)$.
Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je odvedljiva na $\mathcal{D}$, če je odvedljiva v vsaki točki $x_0 \in \mathcal{D}$.

Zgled: Izračunajmo odvod funkcij $f(x) = x, g(x) = x^2$.

Odvod

Odvod $f'(x_0)$ je

- relativna sprememba vrednosti $f(x_0)$, če se vrednost spremenljivke x_0 malce spremeni
- hitrost spreminjanja funkcije f v x_0
- naklonski koeficient tangente na graf v točki $(x_0, f(x_0))$

Če je f odvedljiva v točki x_0, potem je v x_0 tudi zvezna.
Če je f zvezna v točki x_0, potem v x_0 ni nujno odvedljiva.

Zgled: $f(x) = |x|$.

Primeri

Po definiciji izračunajmo odvode funkcij:

1. $f(x) = c$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$
3. $f(x) = e^x$
4. $f(x) = \sin x$

Pravila za računanje odvodov

Če sta f in g odvedljivi funkciji, potem velja

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, kjer $g(x) \neq 0$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ ... *posredno odvajanje* funkcij
- $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$, kjer $f'(x) \neq 0$.

Tabela elementarnih odvodov

f(x)	f'(x)
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot\ x$	$-\frac{1}{(\sin x)^2}$
$\arcsin\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Primeri

Odvajajmo naslednje funkcije:

1. $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
3. $g(x) = \arctan \dfrac{1 - x}{1 + x}$

Približek z diferencialom

- Tangenta v $x_0 : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Tangenta se blizu x_0 dobro prilega grafu f. Zato jo uporabimo za približke bližnjih vrednosti:

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h$$

- Zgodovinska oznaka: $f' = \frac{dy}{dx}$ oziroma $df = f' dx$.

Približek z diferencialom

Izračunajmo $\sqrt{0.98}$ in $\cos(\frac{21\pi}{120})$.

Naraščanje in padanje funkcij

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva in $x_0 \in (a, b)$

- Če je $f'(x_0) > 0$, je f v točki x_0 naraščajoča.
- Če je $f'(x_0) < 0$, je f v točki x_0 padajoča.
- Kaj se zgodi, če je $f'(a) = 0$?

Definicija

Če je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva potem točko $x_0 \in (a, b)$, kjer je $f'(x_0) = 0$ imenujemo stacionarna (ali kritična točka) funkcije f.

V stacionarni točki je tangenta na graf vodoravna.

Lokalni ekstremi

Definicija

Funkcija f ima v točki x_0 lokalni maksimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) \leq f(x_0)$ za vsak x, ki je oddaljen od x_0 za manj kot δ.

Funkcija f ima v točki x_0 lokalni minimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) \geq f(x_0)$ za vsak x, ki je oddaljen od x_0 za manj kot δ.

Lokalni ekstrem . . . lokalni minimum ali lokalni maksimum.

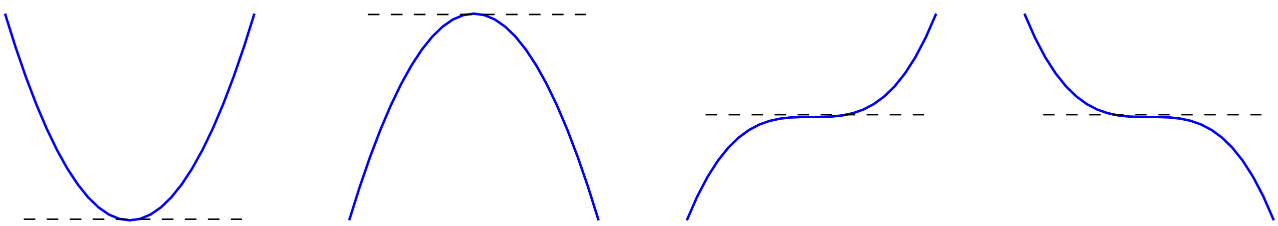
Zgled: $f(x) = |x|$ ima v točki $x = 0$ lokalni minimum.

Potreben pogoj za lokalni ekstrem

Izrek
Če je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in (a, b)$ odvedljiva in ima v x_0 lokalni ekstrem, potem je x_0 stacionarna točka funkcije f.

- Pogoj $f'(x_0) = 0$ je za odvedljive funkcije *potreben pogoj* za lokalni ekstrem v točki x_0.
- Če $f'(x_0) = 0$ v točki $x_0 \in (a, b)$, ni nujno, da ima f v x_0 tudi lokalni ekstrem.
- Lokalne ekstreme iščemo med stacionarnimi točkami, drugje lokalnih ekstremov ni.
- Primer: $f(x) = x^3$, točka $x_0 = 0$ je stacionarna točka, vendar $f(0) = 0$ ni lokalni ekstrem.

Primeri stacionarnih točk



lokalni min. lokalni max. sedlo sedlo

...in še $x^3 \sin(1/x)$...

Primer

1. Poiščimo stacionarne točke funkcije $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Lokalni ekstremi

Funkcija ima v stacionarni točki x_0 lokalni ektrem, če odvod f' ob prehodu skozi x_0 spremeni predznak.
V točki x_0 je

- *lokalni minimum*, če $f'(x) < 0$ za $x < x_0$ in $f'(x) > 0$ za $x > x_0$.
- *lokalni maksimum*, če $f'(x) > 0$ za $x < x_0$ in $f'(x) < 0$ za $x > x_0$.

Primer

Raziščimo, ali ima funkcija $f(x) = x^3 - 3x + 2$ lokalne ekstreme in katere.

Višji odvodi

$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva

- Če $f' : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva, potem je f *dvakrat odvedljiva* na $\mathcal{D}$, odvod funkcije f' pa zapišemo kot

$$f''(x) = (f')'(x)$$

  in imenujemo *drugi odvod* funkcije f.
- Če $f'' : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva, potem je f *trikrat odvedljiva* na $\mathcal{D}$, $f'''(x) = (f'')'(x)$ imenujemo *tretji odvod* funkcije f.
- Če lahko funkcijo f n-krat odvajamo na $\mathcal{D}$, potem pravimo, da je funkcija f *n-krat odvedljiva* na $\mathcal{D}$, *n-ti odvod* funkcije f pa označimo z

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'(x).$$

- Funkcije, ki jih lahko poljubnokrat odvajamo, imenujemo *neskončnokrat odvedljive* funkcije.

Drugi zadostni pogoj za lokalni ekstrem

Izrek

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (vsaj) dvakrat odvedljiva funkcija in $x_0 \in (a, b)$ stacionarna točka funkcije f.

- *Če $f''(x_0) > 0$, potem je v x_0 lokalni minimum.*
- *Če $f''(x_0) < 0$, potem je v x_0 lokalni maksimum.*

Uporaba odvodov za risanje grafov

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva

- Prvi odvod nam pove, kje funkcija narašča, kje pada in kje so stacionarne točke,
- Drugi odvod pove, kako se graf krivi:
  - kjer je $f''(x) \geq 0$, je f *konveksna*, graf funkcije f leži nad tangento grafa
  - če je $f''(x) \leq 0$, je f *konkavna*, graf funkcije f leži pod tangento grafa

Tabela informacij o grafu, podanih s prvim ter drugim odvodom.

Primer

Podana je funkcija $f(x) = x^4 - x^2$. Izračunaj ničle, določi intervale naraščanja in padanja, klasificiraj lokalne ekstreme, določi intervale konveksnosti in konkavnosti ter čimbolj natančno nariši njen graf.

Globalni ekstremi

Vemo: Vsaka odvedljiva funkcija doseže na zaprtem intervalu $[a, b]$ svoj maksimum in minimum. Kje?

- v stacionarni točki ali
- na robu intervala

Primeri

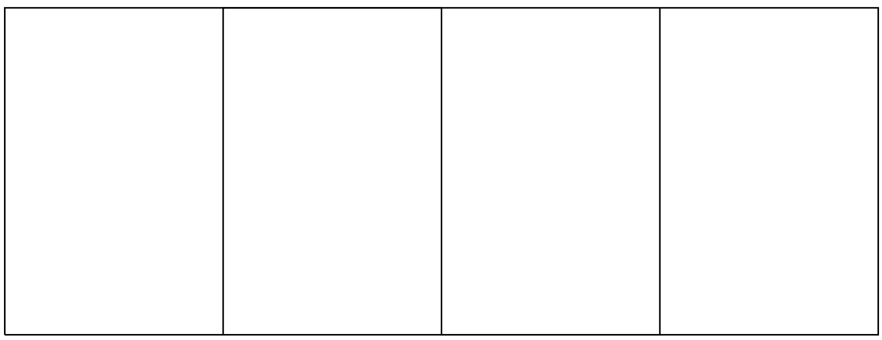
1. Narišimo graf funkcije $f(x) = x^3 - 3x + 2$ in določimo največjo in najmanjšo vrednost f na intervalu $[0, 2]$.

Primeri

2. Kakšne oblike naj bo valjasta pločevinka s prostornino 1l, da bo količina pločevine, potrebna za njeno izdelavo, najmanjša možna?

Primeri

3. Kot dobri vrtnarji bi radi ogradili vrt s $6000m$ ograje, ki nam je na razpolago. Želimo imeti pravokotno ograditev, ki je razdeljena na štiri dele, kot to kaže slika. Kolikšna je največja površina, ki jo lahko tako ogradimo?



Primeri

4. *Metoda najmanjših kvadratov:* Dane so točke $A(1,7)$, $B(2,13)$, $C(3,18)$. Poiščimo premico $y = kx$, ki se jim najbolje prilega.

L'Hospitalovo pravilo

f in g odvedljivi na intervalu (a,b), $g'(x) \neq 0$.

- Če je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, je
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
- Če je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, je
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
- Pravili veljata tudi za enostranski limiti, ko gre $x \to \infty$ ali $x \to -\infty$.

Primera

1. Izračunajmo limiti
   - $\lim_{x \to 0} x^n \log x$
   - $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

Primera

2. Narišimo graf funkcije $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Taylorjevi polinomi

Taylorjev polinom prve stopnje okrog točke x_0 :

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + df$$

Taylorjev polinom stopnje n:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Velja: $T_n(x_0) = f(x_0)$, $T_n'(x_0) = f'(x_0)$,
$T_n''(x_0) = f''(x_0), \ldots, T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

Taylorjev izrek

Izrek

Če je f vsaj $(n+1)$-krat odvedljiva v točki x_0, potem na nekem intervalu okrog x_0 velja:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

kjer je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

za nek $c \in [x_0, x]$.

Taylorjevi razvoji elementarnih funkcij

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

Izračunaj približek števila e.