Matematika

Bojan Orel

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Limita funkcije

Zanima nas, kako se funkcija f obnaša v okolici točke a, torej na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ za nek $\delta > 0$, razen morda v točki a.

Število L je *limita* funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, če je $0 < |x - a| < \delta$.
L je limita funkcije f v točki a: vrednost $f(x)$ je poljubno blizu L, če je le x dovolj blizu a (a ne enak a).

Pišemo:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

Limita funkcije f v točki a ni odvisna od vrednosti funkcije f v točki a.

Zgledi

Ali obstajajo limite naslednjih funkcij v točki 0, torej $L = \lim_{x \to 0} f(x)$?

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$
3. $f(x) = \frac{x^2+x}{x}$

Limita funkcije in limita zaporedja

Funkcija f ima v točki a limito L natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(a_n)_n$, ki konvergira proti a (ter ne vsebuje a) velja $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = L$.

Za računanje limit veljajo enaka pravila kot pri zaporedjih. Naj bo $\lim_{x \to a} f(x) = L$ in $\lim_{x \to a} g(x) = K$. Potem je

- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + K$
- $\lim_{x \to a} (\alpha f(x)) = \alpha L$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LK$
- če je $K \neq 0$, je $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$.

Limita funkcije in limita zaporedja

Zgled:

- $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Primeri

1. $\lim\limits_{x \to \frac{2}{\pi}} \sin \frac{1}{x} =$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x} =$

Leva in desna limita

Število L je *leva limita* funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, če je $a - \delta < x < a$. Označimo:

$$L = \lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Število L je *desna limita* funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, če je $a < x < a + \delta$. Označimo:

$$L = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Funkcija f ima v točki a limito natanko tedaj, ko ima v točki a tako levo kot desno limito in sta ti dve limiti enaki.

Primer

1. Ali ima funkcija $f(x) = \text{sign}(x)$ v točki $a = 0$
   - leva limito?
   - desno limito?
   - limito?

Asimptotične vrednosti

Če za vsako število $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) > M$, če le $a - \delta < x < a$, potem pišemo $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \infty$

Podobno definiramo simbol $\lim_{x \nearrow a} f(x) = -\infty$, če za vsako število $m \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) < m$, če le $a - \delta < x < a$.

Če za vsako število $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) > M$, če le $a < x < a + \delta$, potem pišemo $\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty$

Podobno definiramo simbol $\lim_{x \searrow a} f(x) = -\infty$, če za vsako število $m \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) < m$, če le $a < x < a + \delta$.

Asimptotične vrednosti

Oznaka $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ pomeni, da je število L limita funkcije f, ko gre x čez vse meje, torej da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število M, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$ za vsak $x > M$.

Podobno definiramo s simbolom $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število m, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$ za vsak $x < m$.

Zveznost

Funkcija f je *zvezna* v točki a natanko tedaj, ko je

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x \searrow a} f(x).$$

Če velja samo leva enakost, je funkcija *zvezna z leve*, če velja samo desna enakost, pa je *zvezna z desne*.

Izrek

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je v točki $a \in \mathcal{D}$ zvezna, natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

če je $|x - a| < \delta$.

Zgled

Določimo takšen a, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & ; \quad x < 1 \\ ax + 3 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

zvezna v točki $x = 0$.

Opis zveznosti

- *Vse* elementarne funkcije so zvezne povsod, kjer so definirane.
- Sestavljene funkcije zveznih funkcij so zvezne funkcije, kjer so definirani.
- Če je podatek a podan dovolj natančno (z napako manjšo od δ), bo vrednost $f(a)$ izračunana z napako manjšo od ε.
- Graf zvezne funkcije bo v točki $(a, f(a))$ "nepretrgana krivulja".
- Če vrednost $f(a)$ ni definirana, vendar obstaja $L = \lim_{x \to a} f(x)$, lahko funkcijo f *razširimo*, tako da definiramo $f(a) = L$. Tako razširjena funkcija je zvezna v točki a.

Zgleda

Pokažimo, da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ; \quad x \leq 0 \\ -x + 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

zvezna.

Zveznost

Izrek

Če je $\lim_{x \to a} g(x) = L$ in je funkcija f zvezna v točki L, je

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(L).$$

Torej lahko zamenjamo vrsti red računanja limite in vrednosti zvezne funkcije.

Zgled: Izračunajmo limito $\lim_{x \to 0} \sin(3x^2 + \pi)$

Ničle zveznih funkcij

Izrek

Če je f zvezna na zaprtem omejenem intervalu $[a, b]$ in je $f(a)f(b) < 0$, tj. f v krajiščih intervala sta predznaka različna, potem obstaja točka $c \in (a, b)$, kjer je $f(c) = 0$.

Dokaz z *bisekcijo*: definiramo tri zaporedja, a_n, b_n in c_n

- $a_0 = a$, $b_0 = b$
- $c_n = (a_n + b_n)/2$, to je razpolovišče intervala $[a_n, b_n]$ za vsak n
- a_{n+1} in b_{n+1} pa sta krajišči tiste polovice intervala $[a_n, b_n]$, kjer ima f v krajiščih različna predznaka.

Če za kakšen c_n velja $f(c_n) = 0$, je $c = c_n$. Sicer pa:

- zaporedja a_n, b_n in c_n vsa konvergirajo k istemu številu c,
- $f(c) = 0$.

Uporaba: numerično reševanje enačb

Primer:

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

- Rešujemo enačbo $f(x) = 0$ na intervalu $[a, b]$, kjer je f zvezna,
- poiščemo rekurzivno zaporedje (x_n), ki konvergira k rešitvi.

Tri metode

- *Bisekcija*
- *Sekantna metoda*
  - $a = x_0$ in $b = x_1$ začetna približka,
  - $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$
  - red metode: $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (zlati rez).
- *Splošna iteracija*
  - Enačbo zapišemo v obliki $g(x) = x$ (na primer $(f(x) + x) = x$).
  - Če je rekurzivno zaporedje $x_0, x_n = g(x_{n-1})$ konvergentno, konvergira proti eni od rešitev.
  - Red metode (in konvergenca) je odvisen od odvoda funkcije $g(x)$ v rešitvi.

Omejenost zveznih funkcij

Za funkcijo f, ki je zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$, velja

- f *omejena* na $[a, b]$, tj. obstaja

$$M = \max\{f(x) \,;\, x \in [a, b]\}, \quad m = \min\{f(x) \,;\, x \in [a, b]\}$$

- obstaja $x_M \in [a, b]$, kjer je $f(x_M) = M$ in $x_m \in [a, b]$, kjer je $f(x_m) = m$ (tj. M in m sta maksimum in minimum, ne le supremum in infimum)
- za vsako vrednost y med m in M, $m \leq y \leq M$, obstaja točka $x_y \in [a, b]$, kjer je $f(x_y) = y$, tj. enačba $f(x) = y$ ima rešitev na intervalu $[a, b]$.