Matematika

Bojan Orel

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Kaj je funkcija?

Definicija

Funkcija je predpis, ki vsakemu elementu x iz definicijskega območja $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ priredi natanko določeno število $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Če $\mathcal{D}_f$ ni podano, je največja množica, kjer ima predpis f smisel.

- x neodvisna spremenljivka
- $y = f(x)$ odvisna spremenljivka
- $f(A) = \{f(x)\ ;\ x \in A\}$ *slika* množice $A \subset \mathcal{D}_f$
- $f^{-1}(B) = \{x\ ;\ f(x) \in B\}$ *praslika* množice $B \subset \mathcal{Z}_f$
- $\mathcal{Z}_f = f(\mathcal{D}_f)$ *zaloga vrednosti* funkcije f

Graf

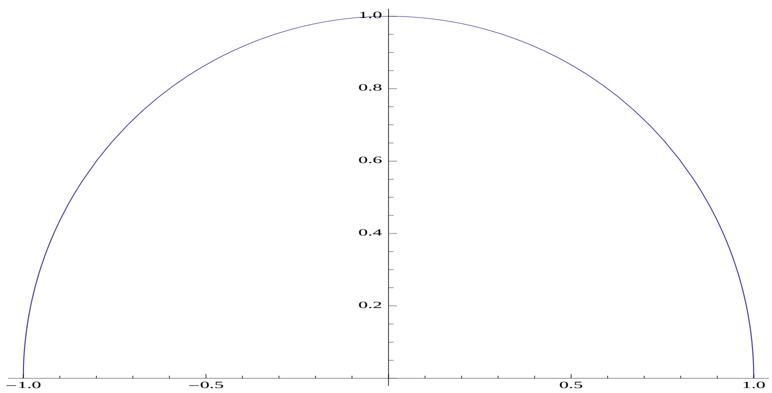
Graf funkcije $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ je krivulja v ravnini:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \; ; \; x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

- Graf funkcije seka poljubno navpično premico največ v eni točki.
- Projekcija grafa na os x je $\mathcal{D}_f$, projekcija grafa na os y pa je $\mathcal{Z}_f$.

Predpis lahko podamo na več načinov.

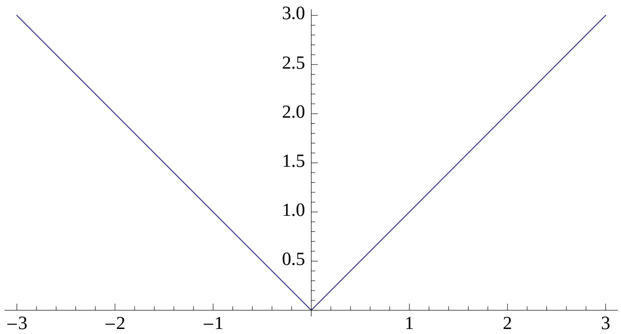
- eksplicitno: $y = f(x)$, denimo $y = \sqrt{1 - x^2}$



- implicitno: $F(x, y) = 0$, denimo $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y \geq 0$
- parametrično: $x = x(t)$, $y = y(t)$, denimo $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi]$

Primera

1. $f(x) = |x|$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$

2. $g(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = \{-1, 0, 1\}$

Sode in lihe funkcije

Funkcija $f(x)$ je

- *soda*, če je $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$
- *liha*, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$.

Primeri:

- $f(x) = |x|$, $g(x) = x^{2k}$ za $k \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \cos x$ so sode funkcije
- $f(x) = \text{sign}(x)$, $g(x) = x^{2k+1}$ za $k \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \sin x$ so lihe funkcije
- $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = x^2 + 2x + 1$ niso ne sode in ne lihe funkcije

Sode in lihe funkcije

Velja:

- graf sode funkcije je simetričen glede na os y, graf lihe pa glede na koordinatno izhodišče
- vsota sodih funkcij je soda funkcija, vsota lihih je liha funkcija
- produkt dveh sodih ali dveh lihih funkcij je soda funkcija, produkt lihe in sode funkcije je liha funkcija

Sode in lihe funkcije: primeri

- Funkcija $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ je soda, saj je $f(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2}$, kar je isto, kot $f(x)$.
- Funkcija $g(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ je liha, saj je

$$
\begin{aligned}
g(-x) &= \log(-x + \sqrt{1 + x^2}) \\
&= \log \frac{(-x + \sqrt{1 + x^2})(x + \sqrt{1 + x^2})}{x + \sqrt{1 + x^2}} \\
&= \log \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \\
&= -\log(x + \sqrt{1 + x^2}) = -g(x)
\end{aligned}
$$

Preveri svoje znanje Ali sta funkciji sodi ali lihi:

1. $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$
2. $g(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$?

Injektivne in surjektivne funkcije

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *injektivna*, če različni točki $x \neq y \in \mathcal{D}_f$ preslika v različni vrednosti $f(x) \neq f(y) \in \mathcal{Z}_f$.

- Graf injektivne funkcije seka poljubno vodoravno premico v največ eni točki.

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *surjektivna*, če je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.

- Vsaka vodoravna premica seka graf surjektivne funkcije v vsaj eni točki.

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Injektivne in surjektivne funkcije

Injektivnost oz. surjektivnost funkcije ni odvisna le od funkcijskega predpisa, ampak tudi od definicijskega območja in zaloge vrednosti.

Primer

1. Funkcija $f(x) = x^2$, ki preslika $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$, ni injektivna, saj vse pozitivne vrednosti $y > 0$ zavzame pri dveh različnih vrednostih neodvisne spremenljivke $x = \sqrt{x}$ in pri $x = -\sqrt{x}$. Če spremenimo definicijsko območje, tako da gledamo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, postane funkcija injektivna.
2. Funkcija $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tudi ni surjektivna, saj lahko zavzame le nenegativne vrednosti. Če spremenimo ciljno množica, da gledamo funkcijo kot $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, postane funkcija surjektivna.
3. Zato je funkcija $f(x) = x^2$, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ celo bijektivna.
4. Premisli koliko morata biti a in b, da bo funkcija $f(x) = x^2$, $f : [1, 2] \to [a, b]$ bijektivna?

Kompozitum ali sestavljena funkcija

Naj bo $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$. Če je $Z_f \subseteq \mathcal{D}_g$, potem funkcijo $g \circ f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

in imenujemo *kompozitum* funkcij g in f.

V splošnem $f \circ g \neq g \circ f$.

Primer:
Naj bo $f(x) = \sin x$ in $g(x) = 1 + x^2$. Potem je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = 1 + \sin^2 x$$

in

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + x^2) = \sin(1 + x^2)$$

Inverzna funkcija

Naj bo $f\colon \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ injektivna funkcija. Potem funkcijo $f^{-1} : \mathcal{Z}_f \to \mathcal{D}_f$, za katero velja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

za vsak $x \in \mathcal{D}_f$, imenujemo *inverzna funkcija* funkcije f.

- Ekvivalentno: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$.
- Definicijsko območje in zaloga vrednosti se zamenjata: $D_{f^{-1}} = Z_f, \quad Z_{f^{-1}} = D_f$.
- Inverzno funkcijo f^{-1} eksplicitno podane funkcije f izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk $y = f(x)$, torej $x = f(y)$, in nato izrazimo y kot funkcijo x.
- Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije f prek simetrale lihih kvadrantov.

Inverzna funkcija - Primer

Za funkcijo $f(x) = \frac{x}{1-x}$ poiščimo inverzno funkcijo.

Najprej v izrazu $y = \frac{x}{1-x}$ zamenjajmo x in y,dadobimo $x = \frac{y}{1-y}$, nato pa iz te enačbe izračunajmo y:

$$x(1-y) = y$$

$$x = y + xy$$

$$y(1+x) = x$$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

Preveri svoje znanje

Za funkcijo $f(x)$ poišči inverzno funkcijo, če je

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $f(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

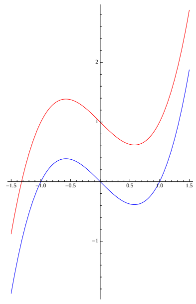
Transformacije funkcij

- $g(x) = f(x-a)$ vodoravni premik za a v desno
- $g(x) = f(x) + c$ navpični premik za c navzgor
- $g(x) = f(\frac{x}{a})$ vodoravni razteg za faktor a
- $g(x) = cf(x)$ navpični razteg za faktor c
- $g(x) = -f(x)$ zrcaljenje preko osi x
- $g(x) = f(-x)$ zrcaljenje preko osi y

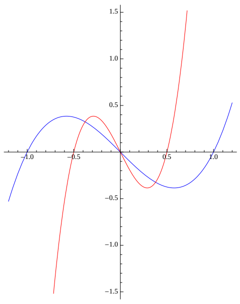
Primer

Denimo, da znamo narisati graf funkcije $y = f(x)$.

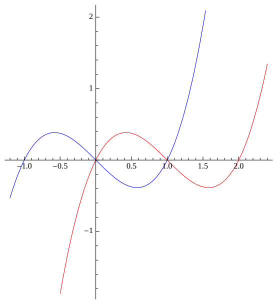
$f(x) + 1$



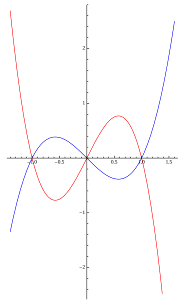
$f(2x)$



$f(x - 1)$



$-2f(x)$



Polinomi

Polinom stopnje n

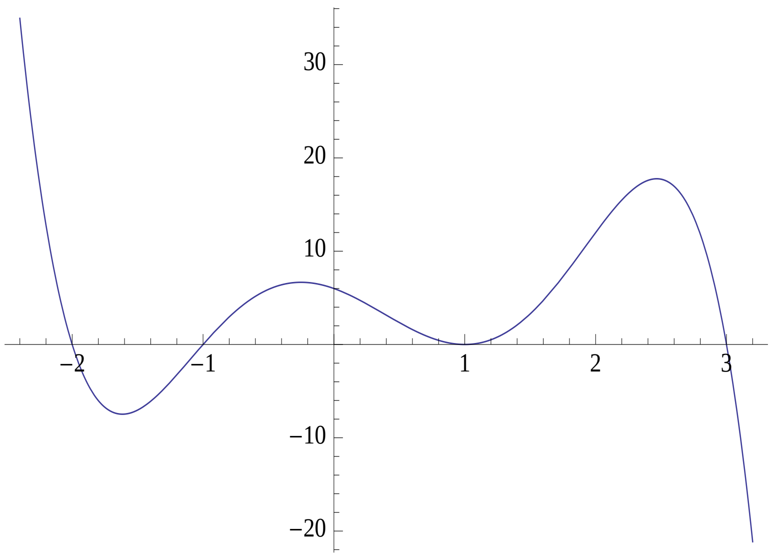
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kjer $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. $\mathcal{Z}_f$ odvisno od polinoma: $\mathbb{R}$ za polinome lihe stopnje.
- Polinom ima kvečjemu n realnih ničel. Razcep:
  - na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje s koeficienti v $\mathbb{R}$
  - na linearne faktorje s koeficienti v $\mathbb{C}$

Primer

Narišimo graf polinoma
$p(x) = -x^5+2x^4+6x^3-8x^2-5x+6 = -(x-1)^2(x+2)(x+1)(x-3)$



Sprememba predznaka: ničle lihe stopnje.

Racionalna funkcija

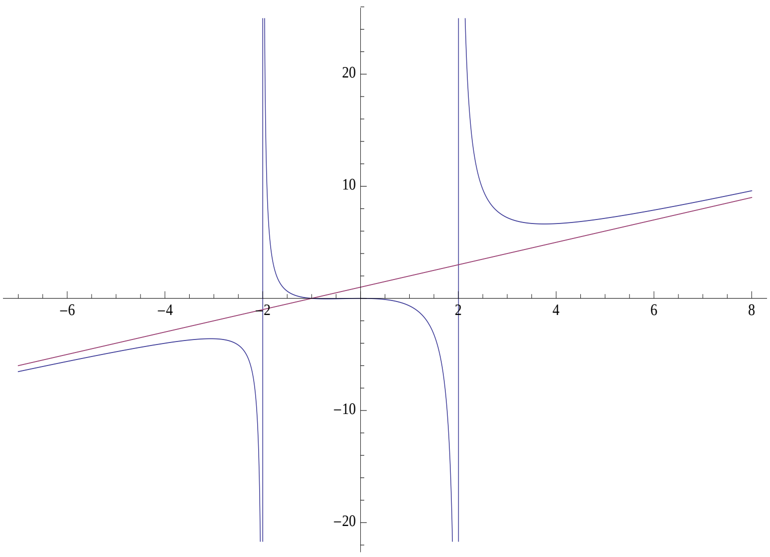
Racionalna funkcija

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + \cdots + b_m x^m}.$$

- *Okrajšana oblika*: števec in imenovalec nimata skupnih faktorjev.
- Definicijsko območje: $\mathcal{D}_r = \mathbb{R} \setminus \{\text{poli}\}$
- poli $r(x)$: ničle imenovalca
- ničle $r(x)$: ničle števca
- $r(x)$ se v neskončnosti približuje polinomu $s(x)$, kjer je $p(x) = s(x)q(x) + o(x)$. (Deljenje polinomov)

Primer

Narišimo graf racionalne funkcije $r(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2-4}$

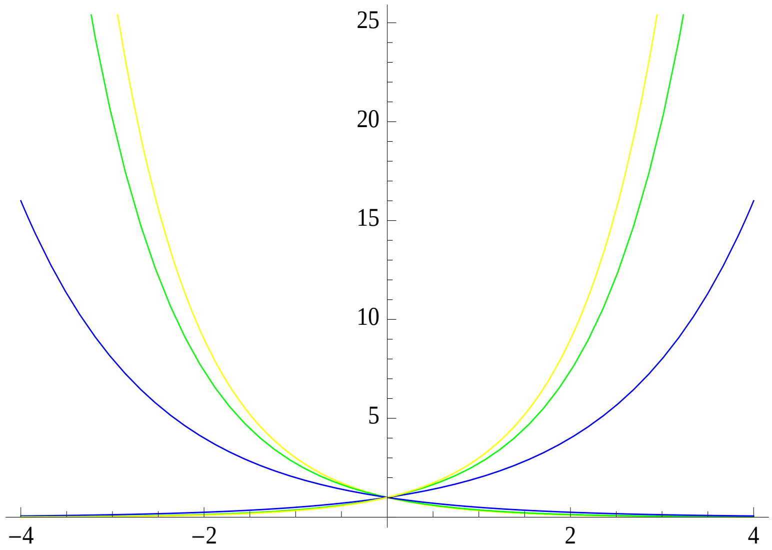


Sprememba predznaka: ničle ter poli lihe stopnje.

Eksponentna funkcija in logaritem

Eksponentna funkcija: $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = (0, \infty)$,
- injektivna za vsak $a \neq 1$:



Slika: $f(x) = a^x$ za $a = \frac{1}{3}, \frac{1}{e}, \frac{1}{2}, 2, e, 3$

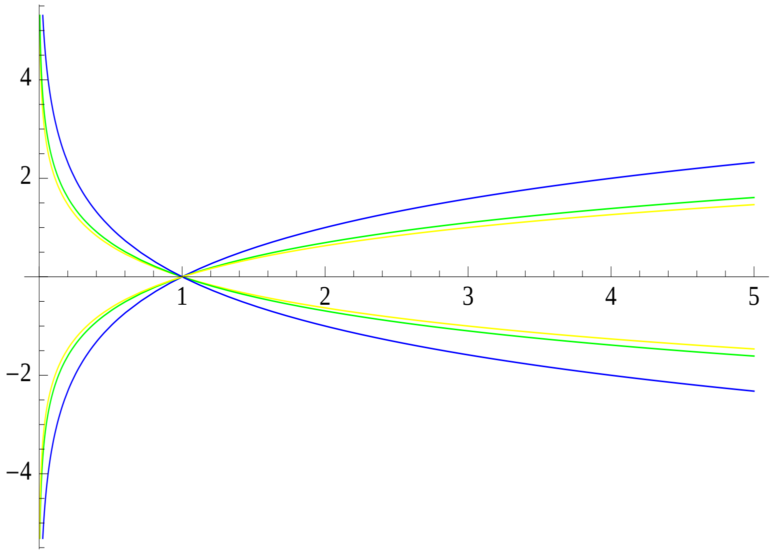
Eksponentna funkcija in logaritem

- $a^0 = 1$ za vse a
- za $a > 1$ je naraščajoča
- za $0 < a < 1$, je padajoča
- je injektivna
- adicijski izrek: $a^{x+y} = a^x a^y$
- najpogosteje uporabljamo osnovo e

Eksponentna funkcija in logaritem

Inverzna funkcija eksponentni je *logaritem* $f^{-1}(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$,

- $\mathcal{D}_{\log_a} = (0, \infty)$, $\mathcal{Z}_{\log_a} = \mathbb{R}$



Slika: $f(x) = \log_a x$ za $a = \frac{1}{3}, \frac{1}{e}, \frac{1}{2}, 2, e, 3$

Eksponentna funkcija in logaritem

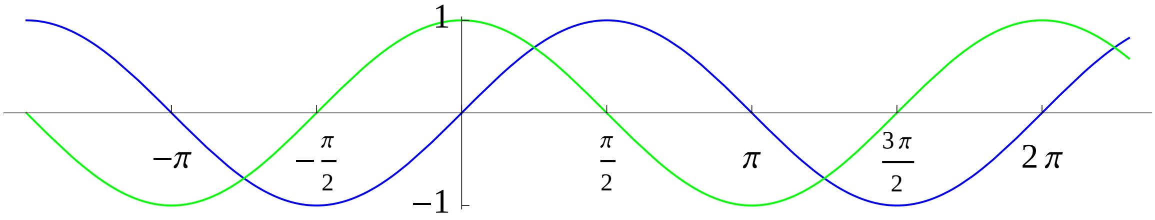
- $\log_a 1 = 0$
- za $a > 1$, je $\log_a$ naraščajoča
- za $0 < a < 1$ je $\log_a$ padajoča
- je injektivna
- najpogosteje uporabljamo $a = e$, *naravni logaritem*

$$\log_e x = \log x = \ln x$$

- adicijski izrek: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Kotne funkcije

Kosinus in sinus: $(\cos x, \sin x)$ koordinati točke na enotski krožnici $u^2 + v^2 = 1$, ki ustreza kotu x.



- obe sta periodični z osnovno periodo 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

- omejeni: $\mathcal{Z}_{sin} = \mathcal{Z}_{cos} = [-1, 1]$
- sinus je liha funkcija, cosinus je soda funkcija

Kotne funkcije

Med kotnimi funkcijami veljajo številne zveze, na primer:

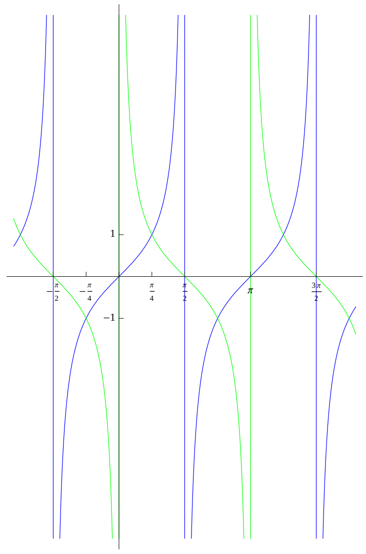
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\ldots$

Kotne funkcije

Tangens in kotangens:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

(tudi tg x in ctg x),



Kotne funkcije

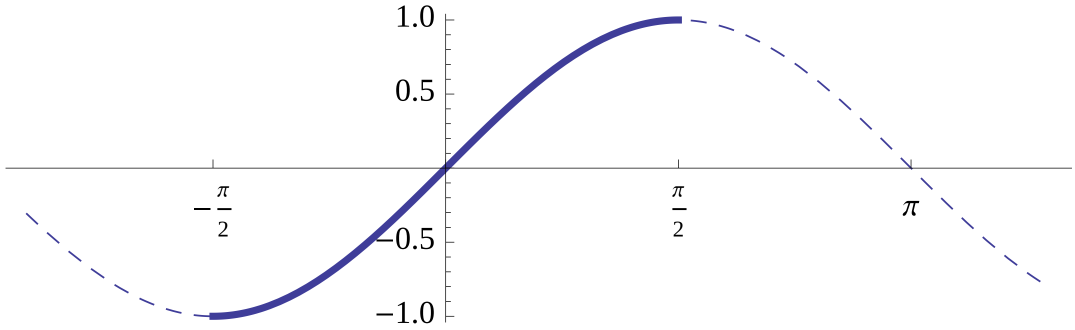
- $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- obe sta periodični z osnovno periodo π:

$$\tan(x+\pi) = \tan(x), \quad \cot(x+\pi) = \tan(x)$$

- neomejeni: $\mathcal{Z}_{\tan} = \mathcal{Z}_{\cot} = \mathbb{R}$
- surjektivni
-
  - $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$
  - $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

Ločne funkcije

Kotne funkcije niso injektivne, zato ne obstajajo njihove inverzne funkcije. Če pa se omejimo na območje, kjer je posamezna kotna funkcija injektivna, lahko definiramo njen inverz.

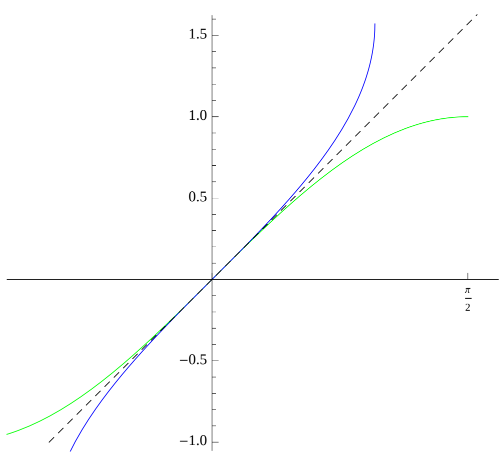


Ločne funkcije

Funkcija

$$\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$

je injektivna, zato lahko definiramo inverzno funkcijo, ki jo imenujemo *arkus sinus* in pišemo $\arcsin x$.



Ločne funkcije

Torej je

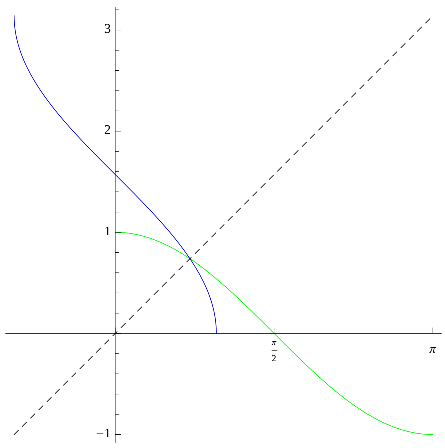
$$y = \arcsin x \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad \sin y = x.$$

- $\mathcal{D}_{\arcsin} = [-1, 1]$, $\mathcal{Z}_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Ločne funkcije

$\arccos x$ je inverzna funkcija kosinusa, omejenega na $x \in [0, \pi]$

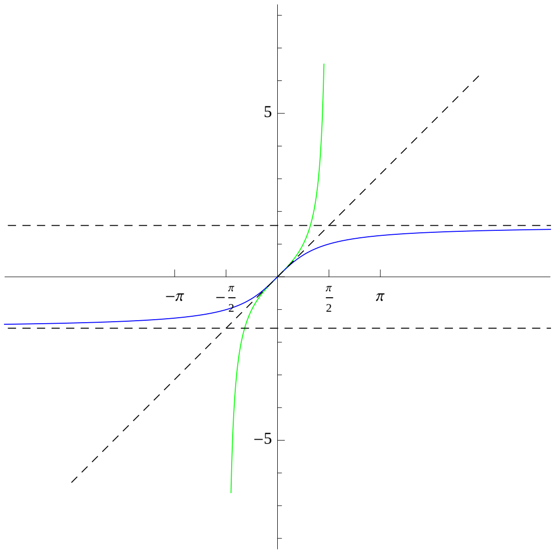
- $\mathcal{D}_{\arccos} = [-1, 1]$, $\mathcal{Z}_{\arccos} = [0, \pi]$



Velja zveza: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Ločne funkcije

$\arctan x$ je inverzna funkcija tangensa, omejenega na $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,



$\operatorname{arccot} x$ je inverzna funkcija kotangensa, omejenega na $x \in (0, \pi)$.

Ločne funkcije

- $\mathcal{D}_{\arctan} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_{\arctan} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $\mathcal{D}_{\operatorname{arccot}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_{\operatorname{arccot}} = (0, \pi)$
- velja zveza: $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$