Matematika

Bojan Orel

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Zaporedja: prvo orodje za delo z neskončnostjo

Zaporedje je preslikava

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Pišemo tudi:

$$(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

n . . . *indeks*
a_n . . . *n-ti člen*

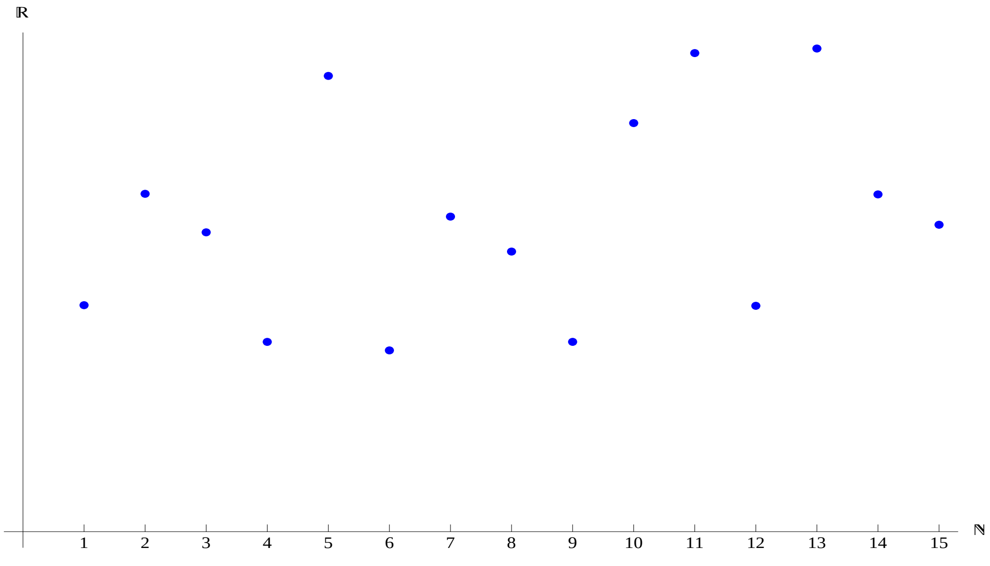
Zaporedja

Zaporedje lahko opišemo

- *eksplicitno*: $a_n = f(n)$
- *rekurzivno*:
  - $a_0,\ a_{n+1} = f(a_n)$ za $n \geq 0$
  - $a_0, a_1, \dots, a_{k-1},\ a_{n+k} = f(a_n, \dots, a_{n+k-1})$ za $n \geq 0$

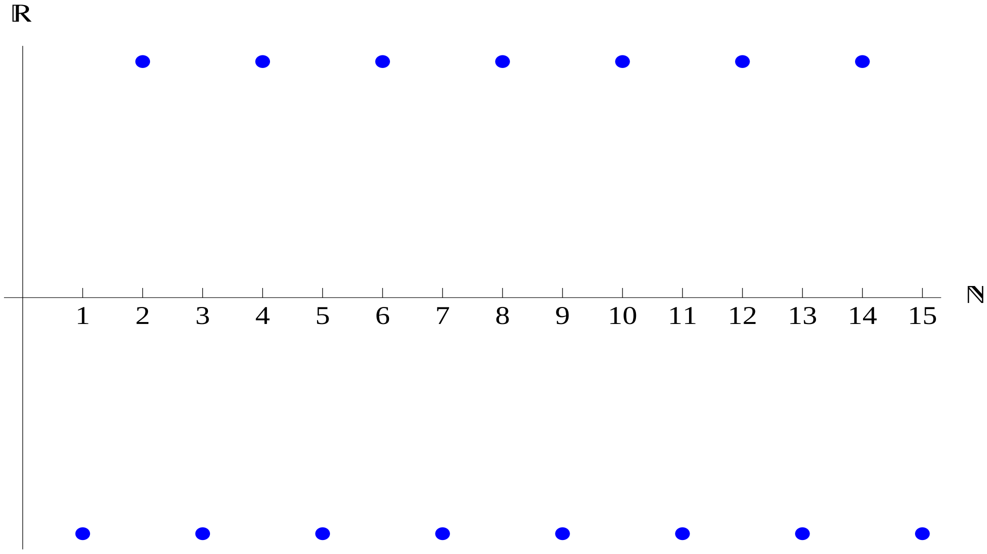
Geometrijski prikaz

- Kot točke na številski premici,
- kot točke (n, a_n) v ravnini,



Primeri zaporedij

1. $a_n = (-1)^n$



Primeri zaporedij

2. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$
3. aritmetično zaporedje
   - eksplicitni opis: $a_n = a + nd$
   - rekurzivni opis: $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$
4. geometrijsko zaporedje
   - eksplicitni opis: $a_n = aq^n$
   - rekurzivni opis: $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n q$
6. Fibonaccijevo zaporedje

   $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

   $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$
7. $a_0 = 3, \quad a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{2}{a_{n-1}}\right)$

Omejenost zaporedij

Pomembna lastnost zaporedij je *omejenost*:

Definicija

Zaporedje $(a_n)_n$ je navzgor omejeno, če ima zgornjo mejo, *to je tako število $M \in \mathbb{R}$, da je $a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

Zaporedje $(a_n)_n$ je navzdol omejeno, če ima spodnjo mejo, *to je tako število $m \in \mathbb{R}$, da je $a_n \geq m$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

Omejeno zaporedje je navzgor in navzdol omejeno.

Naraščajoča in padajoča zaporedja

Zaporedje je *naraščajoče*, če je $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak n, in je *padajoče*, če je $a_n \geq a_{n+1}$ za vsak n.

Zveza med omejenostjo in monotonostjo zaporedij:

Izrek

Naraščajoče zaporedje je navzdol omejeno.

Izrek

Padajoče zaporedje je navzgor omejeno.

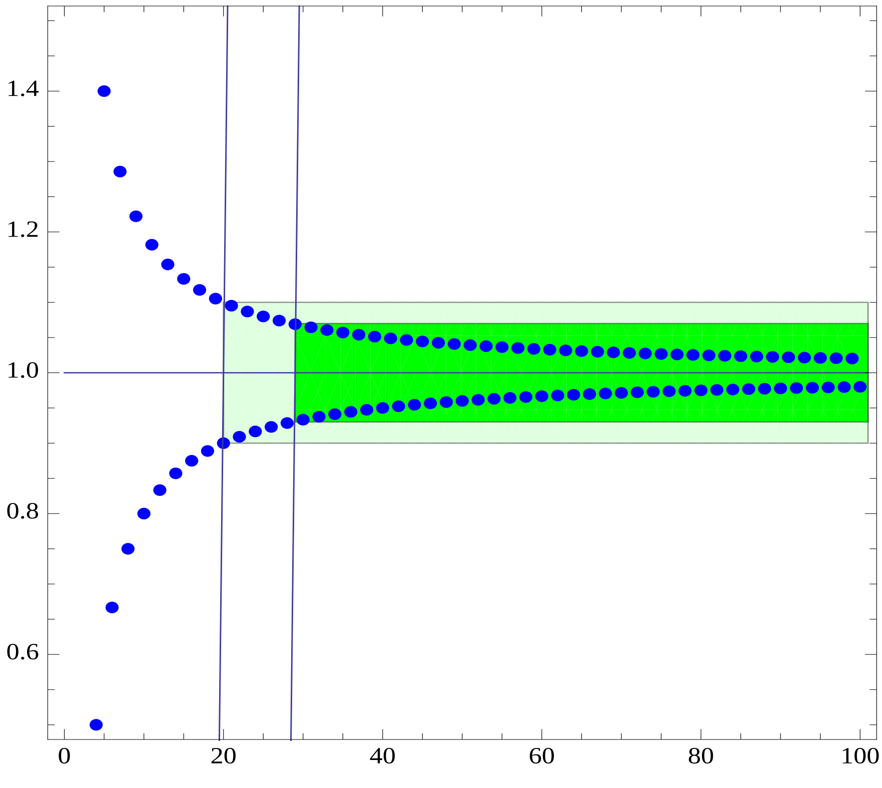
Limita zaporedja

Število a je *limita* zaporedja (a_n)

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja $|a - a_n| < \varepsilon$.

Limita zaporedja



Limita zaporedja

Zaporedje (a_n) je *konvergentno*, če ima limito. Sicer je *divergentno*.

Kaj to pomeni (s stališča računanja)?

- ε – računska natančnost
- N – od tu dalje so vsi členi pri tej natančnosti enaki a

Ali poznamo π?

Zveze med omejenostjo, monotonostjo in konvergenco

Izrek
Naraščajoče zaporedje je konvergentno natanko takrat, kadar je navzgor omejeno.

Izrek
Padajoče zaporedje je konvergentno natanko takrat, kadar je navzdol omejeno.

Izrek
Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.

Primeri

1. $a_n = (-1)^n$
2. $b_n = 0.\underbrace{333\ldots3}_{n}$
3. $c_n = \frac{1}{n^2}$
4. $d_n = e^{-n}$
5. $f_n = e^n$

Naraščanje ter padanje preko vseh meja

Zaporedje (a_n) narašča prek vsake meje, če za vsak $M \in \mathbb{N}$ obstaja indeks $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja $a_n \geq M$.Oznaka:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty.$$

POZOR: tako zaporedje ni konvergentno saj nima limite!!!

Zaporedje (a_n) pada prek vsake meje, če za vsak $M \in \mathbb{N}$ obstaja indeks $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq N$ velja $a_n \leq -M$. Oznaka:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty.$$

POZOR: tako zaporedje ni konvergentno saj nima limite!!!

Primeri

1. Za $a \in \mathbb{R}$ določimo $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$.

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{če je} \quad a > 1 \\ 1 & \text{če je} \quad a = 1 \\ 0 & \text{če je} \quad -1 < a < 1 \\ \text{ne obstaja} & \text{če je} \quad a \leq -1 \end{cases}$$

Primeri

2. Za $a \in \mathbb{R}$ določimo $\lim\limits_{n\to\infty} n^a$.

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} \infty & \text{če je} \quad a > 0 \\ 1 & \text{če je} \quad a = 0 \\ 0 & \text{če je} \quad a < 0 \end{cases}$$

Primeri

3. $b_n = (1 + 1/n)^n$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Računanje limit

Naj bo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
- Če je $b_n \neq 0$ za vsak n in $b \neq 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$
- Zgled:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2 + n + 1}$$
- Če je $a_n > 0$ za vsak n in $a > 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

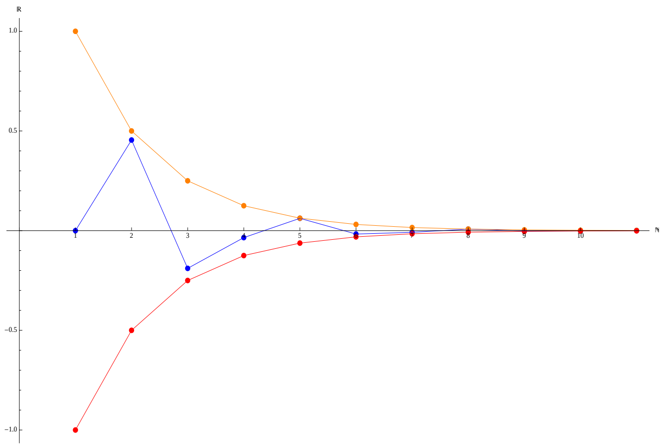
V primerih ∞ ter deljenja z 0 lahko dobimo nedoločene izraze. Pri njih je potrebna opreznost.

Najbolj slasten matematični izrek

Izrek (o sendviču)

Če za vsak n velja $a_n \leq b_n \leq c_n$ *in* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, *je tudi*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$



Izračunajmo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(2n)}{2^n}$

Vrste

Vrsta je simbolična vsota:

$$a_0 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Ideja: Zenonov paradoks o Ahilu in želvi.

Vrste

- m-ta *delna vsota vrste*: $S_m = a_0 + \cdots + a_m$,
- rekurzivna definicija zaporedja delnih vsot:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0, \\ S_{m+1} &= S_m + a_{m+1} \end{aligned}$$

- Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *konvergentna*, če je konvergentno zaporedje delnih vsot S_m.
- *Vsota* vrste je limita $\lim_{m\to\infty} S_m = S$.
- Vrsta, ki ni konvergentna, je *divergentna*.

Geometrijska vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

- Konvergenca je odvisna od *kvocienta* q:
  - konvergira, če je $|q| < 1$,
  - divergira, če je $|q| \geq 1$.
- Za $|q| < 1$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

Geometrijska vrsta

Še enkrat:

$$\sum_{n=M}^{\infty} a \cdot q^n = aq^M + aq^{M+1} + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{aq^M}{1-q}$$

Izračunajmo vsoto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$

Potreben pogoj za konvergenco vrste

Če je vrsta konvergentna, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Pazi! Pogoj ni zadosten.
- Zgled: *harmonična vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ni konvergentna.
- *Leibnizov kriterij*: če zaporedje a_n monotono pada proti 0 in so vsi členi a_n pozitivni potem je $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ konvergentna.
- Primer: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
- Kochova snežinka.

Pregled

Zaporedja:

- definicija zaporedja in konvergence (limite)
- računanje limit
- kriterij za konvergenco

Vrste:

- definicija vrst in vsote
- geometrijska vrsta
- kriterija za konvergenco