Matematika

Bojan Orel

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Determinante

Determinanta je število, ki pripada vsaki kvadratni matriki.

Pogled naprej Determinanto lahko izračunamo

1. z množenjem pivotov - *pivotna* formula
2. s seštevanjem $n!$ produktov - *velika* formula
3. s seštevanjem n manjših determinant - *kofaktorska* formula

Namesto z običajno (precej zapleteno) formulo, bomo determinanto definirali z njenimi osnovnimi lastnostmi.

Determinanto kvadratne matrike A bomo zapisali kot $|A|$ ali $\det(A)$.

Osnovne lastnosti determinant

Osnovne lastnosti popolnoma določajo determinante. Ostale lastnosti determinant so posledica osnovnih lastnosti.

1. $\det(I) = 1$ determinanta enotske matrike je enaka 1.
2. Ko v matriki zamenjamo dve vrstici, determinanta spremeni predznak.
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$
3. Determinanta je linearna funkcija vsake vrstice posebej.
$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Lastnosti determinant

4. Matrika z dvema enakima vrsticama ima determinanto 0.
Posledica lastnosti 2.
5. Če v matriki od poljubne vrstice odštejem mnogokratnik neke druge vrstice, se determinanta ne spremeni.
Posledica lastnosti lastnosti 3 in 4.

   $\boxed{\text{Posledica:}}$ Pri Gaussovi eliminaciji se determinanta matrike ohranja (ali kvečjemu spremeni predznak, če menjavamo vrstice).
6. Matrika, ki ima eno vrstico samih ničel, je enaka 0.
Posledica lastnosti 3.

Lastnosti determinant (nadaljevanje)

7. Determinanta trikotne (spodnje ali zgornje) matrike je produkt diagonalnih elementov.
   Če so vsi diagonalni elementi različni od 0, lahko z običajnimi vrstičnimi operacijami (Gaussova eliminacija) eliminiramo vse poddiagonalne elemente, nato pa z istimi pivoti še naddiagonalne elemente. Potem uporabimo lastnost 3.
   Če je vsaj eden izmed diagonalnih elementov enak 0, z eliminacijo dobimo vsaj eno ničelno vrstico in je (zaradi lastnosti 6) determinanta enaka 0.
8. Transponirana matrika A^T ima isto determinanto kot A

$\boxed{\text{Posledica:}}$ Vsaka lastnost, ki velja za vrstice determinante, velja tudi za njene stolpce.

- Determinanta spremeni predznak, če med seboj zamenjamo dva stolpca;
- Determinanta je enaka 0, če sta dva stolpca enaka;
- Determinanta je enaka 0, če so v vsaj enem stolpcu same ničle.

Determinante 2×2

S pomočjo osnovnih lastnosti 1-3 izračunajmo determinanto matrike $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Zaradi linearnosti (lastnost 3b) je

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Zaradi lastnosti 7 je prva determinanta enaka ad, pri drugi pa najprej zamenjamo vrstici (lastnost 2) in šele potem uporabimo lastnost 7.
Končni rezultat je $|A| = ad - bc$.

Determinanta 3×3

Podobno lahko izračunamo determinanto matrike 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Vsako vrstico razčlenimo v 3 enostavnejše vrstice (npr. $[a_{11}\ 0\ 0]$) s pomočjo lastnosti 3b. Tako dobimo 27 enostavnih determinant. Ko spustimo tiste, ki imajo vsaj eno ničelno vrstico ali stolpec, nam ostane 6 determinant brez neničelnih vrstic in stolpcev

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Detrerminanta 3×3 (nadaljevanje)

Z upoštevanjem lastnosti 3b lahko zapišemo

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &+ a_{13}a_{21}a_{32} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &+ a_{12}a_{21}a_{33} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Za vsako determinanto še preštejemo, s koliko menjavami vrstic dobimo enotsko matriko in končno

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Kofaktorji

Determinanto 3×3 lahko zapišemo tudi kot

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \, .$$

V tej formuli so *faktorji* a_{1j} pomnoženi s *kofaktorji* C_{1j}, ki so, do predznaka natančno, determinante A_{1j} dimenzije 2×2, ki jih dobimo, ko v prvotni determinanti izpustimo vrstico in stolpec, v katerih se nahaja a_{1j}.

Kofaktorji elementov $i$te vrstice so $C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$. Razvoj determinante po kofaktorjih je

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \, .$$

Razvoj po kofaktorjih je uporaben predvsem takrat, ko ima matrika veliko elementov enakih 0.

4×4 determinanta s kofaktorji

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$$

Razvoj delamo lahko tudi po prvem stolpcu.

Računanja determinant z Gaussovo eliminacijo

Ideja. izvajamo Gaussovo eliminacijo na (nerazširjeni) matriki z naslednjimi pravili:

(D1) Če vse elemente v eni vrstici pomnožimo z istim faktorjem d, se vrednost determinante pomnoži z d.

(D2) Vrednost determinante se ne spremeni, če vrstici prištejemo katero drugo vrstico pomnoženo s poljubnim faktorjem d.

(D3) Če zamenjamo med seboj dve vrstici (ali stolpca), se spremeni predznak determinante.

(D4) Če so vsi elementi na eni strani glavne diagonale enaki 0, potem je vrednost determinante enaka produktu diagonalnih elementov.

Vse trditve, ki smo jih navedli za vrstice, veljajo tudi za stolpce! Lastnosti (D1)-(D4) lahko uporabimo v kombinaciji z razvojem po vrstici/stolpcu.

Zgledi:

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & -9 \\ 2 & 14 & -4 \end{vmatrix}$ $\quad$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ $\quad$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Uporaba determinant - vektorski produkt

Vektorski produkt je posebna operacija, ki je definirana samo v $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{Definicija:}}$ Vektorski produkt vektorjev $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$ in $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$ je vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

Uporaba determinant - mešani produkt

Mešani produkt vektorjev $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ lahko zapišemo kot

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

- Vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ sta kolinearna natanko tedaj, ko je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
- Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so koplanarni natanko tedaj, ko je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Determinante in sistemi enačb

Izrek

Naj bo A matrika velikosti $n \times n$. Naslednje trditve so ekvivalentne:

1. $\det A \neq 0$.
2. *Vsi diagonalni elementi v vrstično stopničasti obliki so neničelni (med drugim imamo v vsakem stolpcu pivot).*
3. *Homogen sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ je enolično rešljiv.*
4. *$A\vec{x} = \vec{b}$ je enolično rešljiv pri poljubnem $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.*
5. *$A\vec{x} = \vec{b}$ je rešljiv pri poljubnem $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.*
6. *Stoplci matrike A so linearno neodvisni vektorji.*
7. *Vrstice matrike A so linearno neodvisni vektorji.*

Množenje matrik

- Matriki $A_{m\times n}$ in $B_{p\times q}$ lahko zmnožimo, če je $n = p$.
- $A_{m\times n} \cdot B_{n\times q} = C_{m\times q}$.
- c_{ij} je skalarni produkt i-te vrstice A in j-tega stolpca B.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ -9 & -7 & 3 \\ 9 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Množenje matrik

Naloga: Za matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

izračunaj

$A \cdot C$

$C \cdot A$

$A \cdot B$

$A \cdot B^T$

Lastnosti matričnega množenja

1. Ne velja nujno $A \cdot B = B \cdot A$
2. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ in $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4. Transponiranje produkta: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
5. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
6. *Enotska matrika* ali *identiteta*: Kvadratna matrika I_m velikosti $m \times m$, ki ima enice po diagonali, sicer pa same ničle.
   Za vsako matriko $A_{m\times n}$ velja $A_{m\times n} \cdot I_n = A_{m\times n}$ in $I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$
7. Pazi! Obstaja A, B, da velja $A \cdot B = 0$.
8. Pazi! Za matrično množenje pravilo krajšanja ne velja!

Kvadratne matrike

Za kvadratno matriko A lahko definiramo potence

$$A^1 = A, A^2 = A \cdot A, A^3, A^4, \ldots$$

Definiramo lahko tudi $A^0 = I_n$.

Potence matrik

Naloga: Potenciraj matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Inverzne matrike

Kvadratna matrika A je *obrnljiva* (tudi *nesingularna*), če obstaja matrika A^{-1}, za katero velja

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Matriki A^{-1} pravimo *inverz* matrike A.
Kvadratna matrika, ki nima inverzne matrike, je *neobrnljiva* ali *singularna*.

Potenco obrnljive matrike lahko definiramo tudi za negativne eksponente

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

Inverzne matrike

Izrek

Naj bo $A_{n\times n}$, $\vec{x}_{n\times 1}$ in $\vec{b}_{n\times 1}$. Naslednje trditve so enakovredne.

1. *A je obrnljiva.*
2. *$A\vec{x} = \vec{b}$ je enolično rešljiv pri poljubnem $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.*
3. *$A\vec{x} = \vec{b}$ je rešljiv pri poljubnem $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.*
4. *$\det A \neq 0$.*
5. *$\operatorname{rang} A = n$.*

Inverzne matrike

Naloga: Izračunaj inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -7 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverzne matrike

Trditev

Inverz 2×2 matrike $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ izračunamo po formuli

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Matrične enačbe

- Za matriki
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
reši matrično enačbo $A \cdot X = B$.
- Reši matrično enačbo $A \cdot X \cdot B = C$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in}$$
$$C = \begin{bmatrix} 48 & -25 & 38 \\ 23 & -20 & 22 \\ 46 & -41 & 34 \end{bmatrix}.$$