Matematika

Bojan Orel

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Matrike

Matrika dimenzije ali reda $m \times n$ je pravokotna tabelica $m \cdot n$ (realnih) števil, razporejenih v m vrstic in n stolpcev.

$$A^{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$$

Linearne enačbe

Oglejmo si rešitve enačbe

$$x + 2y + 3z = 0.$$

Kaj pa so rešitve sistema enačb

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 5\,? \end{array}$$

Sistem enačb

Sistem m linearnih enačb z n neznankami je zaporedje enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Matrike sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ *matrika sistema*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$ *razširjena matrika sistema*

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ *desna stran sistema*

Postopek reševanja sistema

Pravimo, da sta dva sistema enačb *ekvivalentna*, če imata enake rešitve. Sistem rešujemo tako, da ga menjamo z ekvivalentnimi sistemi, dokler ne dobimo sistema, ki ga je zelo enostavno rešiti. Ekvivalentni sistem dobimo tako, da

(E1) Med seboj lahko zamenjamo dve enačbi.

(E2) Posamezni enačbi lahko prištejemo večkratnik druge enačbe.

(E3) Enačbo lahko pomnožimo z realnim številom a, ki je različno od nič.

V resnici bomo operacije izvajali na razširjeni matriki sistema:

(E1) Med seboj lahko zamenjamo dve vrstici.

(E2) Posamezni vrstici lahko prištejemo večkratnik druge vrstice.

(E3) Vrstico lahko pomnožimo z realnim številom a, ki je različno od nič.

Gaussova eliminacija – prvi korak

Gaussova eliminacija je postopek reševanja sistema enačb, ki temelji na zaporednem izločevanju spremenljivk.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Prvi korak: Lahko privzamemo, da je vsaj eno od števil $a_{11}, \dots, a_{n1}$ različno od 0. Z zamenjavo vrstic dosežemo, da je $a_{11} \neq 0$.
Elementu a_{11} rečemo *pivot*.
Od druge vrstice odštejemo z a_{21}/a_{11} pomnoženo prvo vrstico.
Od tretje vrstice odštejemo z a_{31}/a_{11} pomnoženo prvo vrstico.

$$\dots$$

Od i-te vrstice odštejemo z a_{i1}/a_{11} pomnoženo prvo vrstico.

$$\dots$$

Od zadnje vrstice odštejemo z a_{n1}/a_{11} pomnoženo prvo vrstico.

Gaussova eliminacija — naslednji koraki

Po prvem koraku Gaussove eliminacije je matrika sistema oblike

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right].$$

(Sistem, ki odgovarja tej matriki, ima spremenljivko x_1 le v prvi enačbi.)

Gaussova eliminacija – naslednji koraki

Če je $a'_{22} = 0$, v drugen stolpcu poiščemo neničelno število in ustrezni vrstici zamenjamo. Tako lahko smatramo, da je v drugi vrstici na drugem mestu od 0 različno število. To število proglasimo za drugi pivot in podobno kot v prevem koraku števila pod pivotom v drugem stolpcu spremenimo v ničle.
Postopek ponovimo na ostalih stolpcih. Tako dobimo matriko, pri kateri so pod diagonalo same ničle

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{nn} & b''_n \end{array}\right].$$

Po Gaussovi eliminaciji – izračun neznank

Vsaka vrstica v tako predelani razširejeni matriki predstavlja eno enačbo sistema, ki ima še vedno isto rešitev.
Iz zadnje vrstice, ki pomeni enačbo z eno samo nezanako x_n njeno vrednost izračunamo

$$x_n = b''_n / a''_{nn}.$$

Njeno vrednost vstavimo v predzanjo enačbo

$$a''_{n-1,n-1} x_{n-1} + a''_{n-i,n} x_n = b''_{n-1},$$

ki tako vsebuje le eno neznanko x_{n-1}, ki jo izračunamo

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - a''_{n-i,n} x_n) / a''_{n-1,n-1}.$$

Postopek nadaljujemo do prve enačbe, iz katere izračunamo še vrednost neznanke x_1.

Gaussov postopek še enkrat

Katere operacije lahko izvajamo v sistemu linearnih enačb?

(E1) Med sabo lahko zamenjamo dve enačbi.
(E2) Posamezni enačbi lahko prištejemo večkratnik druge enačbe.
(E3) Enačbo lahko pomnožimo z realnim številom a, ki je različno od nič.

V resnici bomo operacije izvajali na razširjeni matriki sistema:

(E1) Med sabo lahko zamenjamo dve vrstici.
(E2) Posamezni vrstici lahko prištejemo večkratnik druge vrstice.
(E3) Vrstico lahko pomnožimo z realnim številom a, ki je različno od nič.

Cilj: v razširjeni matriki sistema pridelati čimveč *ničel* pod *diagonalo*.

Rang matrike in rešljivost sistema

Rang matrike je število neničelnih vrstic, ki jih dobimo po prvi ali drugi fazi Gaussovega postopka.

Izrek

Sistem m linearnih enačb z n neznankami je rešljiv natanko tedaj, ko je rang matrike sistema enak rangu razširjene matrike sistema.

Gauss-Jordanova eliminacija – reducirana vrstična stopničasta oblika

Če sistem ima rešitve, lahko nadaljujemo postopek (kot pri Gaussovi eliminaciji) za elemente nad pivoti.

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc|c}
p_{11} & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & 0 & * & * \\
0 & 0 & \dots & 0 & p_{2k} & * & \dots & * & 0 & * & 0 & * & * \\
0 & 0 & & \dots & 0 & \dots & & 0 & p_{3l} & \dots & 0 & \dots & * \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & & & 0 & \dots & & \dots & & 0 & p_{rs} & \dots & *
\end{array}\right]$$

Postopek začnemo z najbolj desnim pivotom, nadaljujemo proti levi.

Dobimo matriko v *reducirani vrstično stopničasti obliki*.

Spremenljivkam, ki odgovarjajo pivotnim stolpcem, pravimo *glavne neznanke*. Ostalim neznankam pravimo *proste neznanke*.

Zgledi

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & y & + & 2z & = & 1 \\
-x & - & y & - & z & = & 0 \\
2x & + & 2y & + & 5z & = & 5
\end{array}$$

Zgledi

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 5 \end{array}$$

Množica rešitev sistema enačb

Izrek

Sistem linearnih enačb je lahko brez rešitev. To se zgodi natanko takrat, ko s postopkom Gaussove eliminacije dobimo vrstico oblike $[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0|a]$, *pri čemer je* $a \neq 0$.

Izrek

Če sistem linearnih enačb ima rešitev, potem ima

1. *eno rešitev natanko tedaj, ko je število pivotov enako številu neznank sistema.*
2. *neskončno rešitev natanko tedaj, ko je število pivotov manjše kot število neznank. Če ima sistem* n *neznank* r *pivotov, potem rešitve sistema tvorijo družino, odvisno od* $n - r$ *parametrov.*

Zgledi

$$\begin{array}{ccccccccc} 5x & + & 3y & + & 5z & + & 12t & = & 10 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & + & 5t & = & 4 \\ x & + & 7y & + & 9z & + & 4t & = & 2 \end{array}$$

Homogeni sistemi

Sistemu linearnih enačb

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

pravimo *homogen sistem* linearnih enačb.

Homogen sistem enačb je vedno rešljiv, saj je $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$ vedno rešitev. Tej rešitvi pravimo *trivialna rešitev.*

Rešljivost homogenega sistema

Izrek

Homogen sistem ima netrivialne rešitve natanko tedaj, ko je rang matrike sistema manjši od števila neznank.

Zgled

Naloga: Poišči vse rešitve *homogenega* sistema enačb

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & + & 8x_5 & = & 0 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 9x_5 & = & 0 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 10x_4 & + & 12x_5 & = & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 10 & 12 & 0 \end{array}\right]$$