Matematika

Bojan Orel

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Številske množice

Naravna števila $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots, n, \ldots\}$ lahko štejemo, seštevamo, množimo, potenciramo.

Popolna indukcija Vsaka trditev $T(n)$, ki

1. velja za število 0 in
2. če velja za število n, velja tudi za njegovega naslednika $n + 1$,

velja za vsa naravna števila.

Zgled: Dokažimo veljavnost formule

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Še več številskih podmnožic realnih števil

Cela števila $\mathbb{Z}$

- vse možne razlike $n - m$, $n, m \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^-$, $\quad \mathbb{N}^- = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- cela števila lahko seštevamo, odštevamo in množimo

Racionalna števila $\mathbb{Q}$

- vsi kvocienti $\frac{n}{m}$, kjer $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$,
- vsako racionalno število lahko predstavimo kot *okrajšan ulomek*
$$\frac{x}{y},$$
kjer $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}, y \neq 0$, x in y nimata skupnih deliteljev.
- racionalna števila lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo, razen...
- NIKOLI NE DELIMO Z 0.

Realna števila

Realna števila $\mathbb{R}$

- poleg racionalnih vsebujejo še *iracionalna števila*
- realna števila lahko seštevamo, odštevamo, množimo in delimo
- lahko si jih predstavljamo kot točke na *številski premici*
- Za računske potrebe jih zapišemo kot *neskončna decimalna števila* v obliki
$$x = \pm n.d_1 d_2 d_3 \ldots,$$
kjer
  - je n nenegativno celo število, tj. $n = 0$ ali $n = 1 + \cdots + 1$
  - so d_i decimalke, tj. $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
  - ta zapis ni enoličen, na primer $1.000\ldots = 0.999\ldots$
- $\sqrt{2}$ ni racionalno število (5. st. pr. n. št.), π in e nista racionalni števili (18. st.), ...

Številska premica

Intervali:

- omejeni - daljice na številski premici:
  - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ odprt interval
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ zaprt interval
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ in
    $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ polodprta ali polzaprta intervala
- neomejeni - poltraki na številski premici:
  - $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ odprt navzgor neomejen interval
  - $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
  - $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
  - $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

∞ **ni število!**

Absolutna vrednost – razdalja na številski premici

Absolutna vrednost $|x|$ števila $x \in \mathbb{R}$ je razdalja števila x od števila 0 na številski premici in je enaka

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Razdalja med številoma x in y je enaka $|x - y|$.
Osnovne lastnosti:

- $|x| \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$
- $|xy| = |x||y|$
- *trikotniška neenakost*: $|x + y| \leq |x| + |y|$

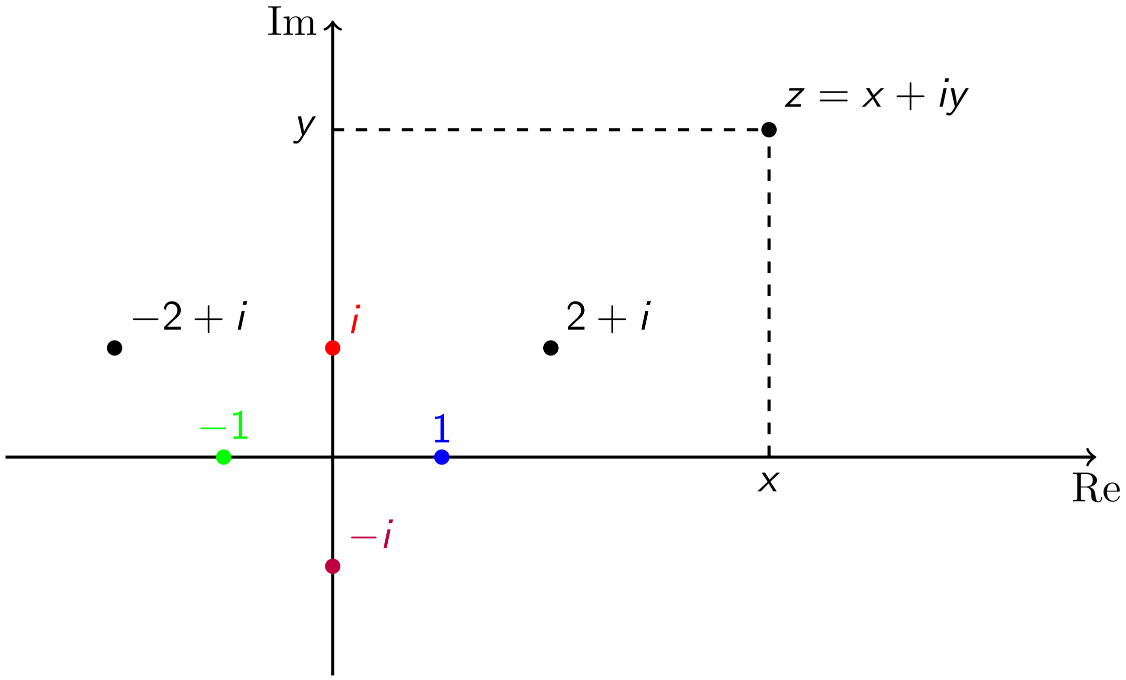
Absolutna vrednost

1. Narišimo množico realnih števil, x, za katere velja $|x-5| \leq 2$.
2. Narišimo množico realnih števil, x, za katere velja $|x-3| = |x+1|$.
3. Narišimo množico realnih števil, x, za katere velja $||x-3| - 2x| > 2$.
4. Narišimo množico točk (x, y) v ravnini, za katere velja $|x| + |y| < 1$.

Kaj so kompleksna števila?

- Negativnih realnih števil ne moremo koreniti. Zato uvedemo kompleksna števila tako, da dodamo $i = \sqrt{-1}$. To so 'dvodimenzionalna števila'.
- Množica kompleksnih števil: $\mathbb{C}$
- kompleksno število $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,
  - $x = \mathrm{Re}\,(z)$ *realni del*
  - $y = \mathrm{Im}\,(z)$ *imaginarni del*
  - i *imaginarna enota*, velja $i^2 = -1$.
- Dve kompleksni števili sta enaki natanko takrat, kadar imata enaka realna in imaginarna dela.
- Vsako kompleksno število ustreza natanko eni točki v *kompleksni ravnini*.

Kaj so kompleksna števila?



Računanje s kompleksnimi števili

Kompleksna števila lahko

- seštevamo in odštevamo

$$(x + iy) \pm (u + iv) = (x \pm u) + i(y \pm v)$$

- množimo in delimo (deljenje z 0 ni definirano): $i^2 = -1$.

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

$$(x + iy)/(u + iv) = \frac{xu + yv - i(xv - yu)}{u^2 + v^2}$$

- konjugiramo, $\bar{z} = x - iy$ je *konjugirano število* števila $z = x + iy$.

Trditev

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z, \quad z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$

Zgled

Izračunajmo

1. $(2-i)(3+2i)$
2. $\frac{2-i}{3+4i}$

Opišimo in narišimo množico kompleksnih števil $z \in \mathbb{C}$, za katere velja

1. $2\bar{z} - z^2 = 0$
2. $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\,(z^2) = 2$

Računanje in kompleksna ravnina

- Seštevanje: paralelogramsko pravilo,
- predpis $z \mapsto z + z_0$ določa *vzporedni premik* za z_0.
- Množenje: predpis $z \mapsto az$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ je:
  - *razteg*, če je $a > 1$,
  - *krčenje*, če je $0 < a < 1$
  - *zrcaljenje čez koordinatno izhodišče*, če je $a = -1$.
- Konjugiranje je zrcaljenje čez realno os.

Absolutna vrednost

Absolutna vrednost kompleksnega števila z je nenegativno realno število
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Geometrijski opis:

- $|z|$ je oddaljenost števila z od izhodišča v kompleksni ravnini
- $|z_1 - z_2|$ je razdalja med z_1 in z_2

Trditev

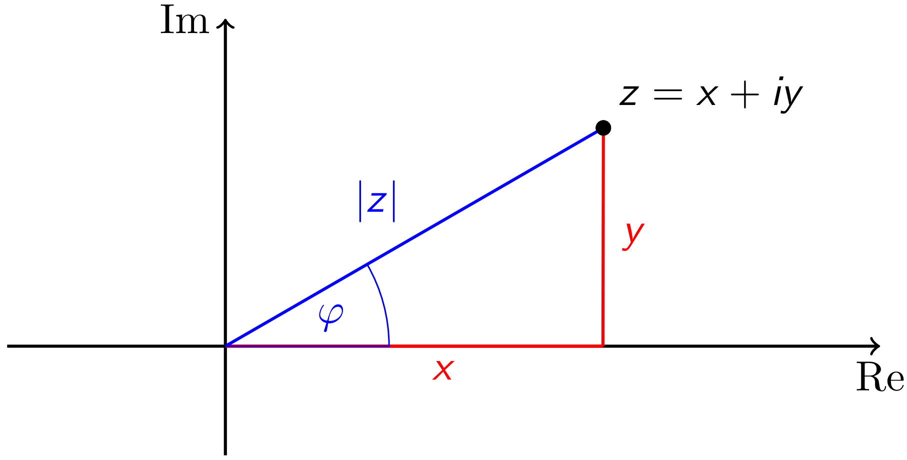
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *trikotniška neenakost*

Primeri

Opišimo in narišimo množico kompleksnih števil $z \in \mathbb{C}$, za katere velja

1. $|z - w_0| = r$, kjer je $w_0 = \alpha + i\beta$, $r > 0$
2. $|z + i| < |z - 1|$

Polarni zapis kompleksnega števila



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = |z| \cos \varphi$$
$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \qquad y = |z| \sin \varphi$$

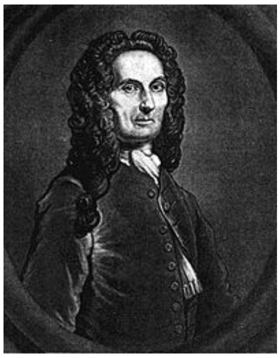
Zapišimo $1 + i$ ter $-1 - i$ v polarni obliki.
Opišimo zgornji zaprt polkrog polmera 1 s središčem v 0 s kompleksnimi koordinatami.

Polarni zapis kompleksnega števila

- Polarni zapis števila $z = x + iy$ je:
$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$
kjer je $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ *polarni kot* ali *argument* in je določen samo do mnogokratnika celega kota 2π natanko.
- $$|z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$
$$\underbrace{|z_1||z_2|}_{\text{produkt absolutnih vrednosti}} \left(\cos \underbrace{(\varphi_1 + \varphi_2)}_{\text{vsota kotov}} + i \sin \underbrace{(\varphi_1 + \varphi_2)}_{\text{vsota kotov}}\right)$$
- Eulerjeva formula: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
- Polarni zapis se poenostavi: $z = |z| e^{i\varphi}$.
- Množenje se poenostavi: $z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- Števila $z = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$ so na *enotski krožnici* $|z| = 1$.

Računanje v polarni obliki

- Števili v polarni obliki sta enaki, če imata enaki absolutni vrednosti, argumenta pa se razlikujeta za mnogokratnik 2π,
- $\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$,



Abraham De Moivre, 1667-1754

- $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$ *de Moivrova formula*
- $z^{-1} = \frac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Zgledi

- Za $z = 1 - i\sqrt{3}$ narišimo števila z, z^2, z^3, z^4, z^5, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$.
- Izračunajmo ter narišimo $(1 + i)(1 - i)$.

Množenje in deljenje v kompleksni ravnini

- Predpis $z \mapsto e^{i\varphi_0} z$ določa *zasuk* okrog izhodišča za kot φ_0,
- Predpis $z \mapsto z_0 z$ določa razteg (ali krčenje) za $|z_0|$ in zasuk za $\varphi_0 = \mathrm{Arg}(z_0)$.

Primer

V kaj se s predpisom $z \mapsto (1-i)z$ preslika

- preslika krog $|z| \leq 1$,
- območje $\{z \mid |z| \leq 1, \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$,
- kvadrat $|x| + |y| = 1$,
- ...

Koreni kompleksnega števila

n-ti koreni števila $a \in \mathbb{C}$ so rešitve enačbe $z^n = a$.

- Enačbo zapišemo v polarni obliki: $a = |a|e^{i\varphi}$,
- dobimo n različnih rešitev

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots n-1$$

- rešitve ležijo na ogliščih pravilnega n-kotnika v kompleksni ravnini.

Zgledi

- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $z^6 = 1$.
- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $(z^3 - 2)(z^4 + i) = 0$.
- Poiščimo z^{2013} za $z = \frac{1-i}{i}$.

NAUK: polarno obliko uporabljamo pri potenciranju, korenjenju ter (v veliki meri) pri množenju.

Pregled

- naravna števila: popolna indukcija
- realna števila: računanje z absolutno vrednostjo
- kompleksna števila:
  - običajni in polarni zapis ter prehod med njima
  - računanje v obeh zapisih ter grafični pomen
  - korenjenje