Rešitve predroka (15.1.2021)

1. **[35 točk]** Dano je kompleksno število

$$a = 1 + i\sqrt{3}.$$

(a) Poišči njegov polarni zapis $a = re^{i\varphi}$. Jasno zapiši r in φ.

(b) Izračunaj a^{2021}.

(c) Poišči vse rešitve enačbe $z^2 = a$.

a) Za število $a = 1 + \sqrt{3}i$ (leži v desni polravnini) velja:

$$r = |a| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2,$$

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Polarni zapis: $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. 15 točk

b) Od tod lahko izračunamo: 10 točk

$$a^{2021} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2021} = 2^{2021} e^{2021 i \frac{\pi}{3}} = 2^{2021} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Upoštevani so bili tudi drugi smiselni odgovori, npr.

$$a^{2021} = 2^{2020} - i\, 2^{2020}\sqrt{3}.$$

c) Rešitvi enačbe $z^2 = a$ sta kvadratna korena števila a. Izračunamo ju po formuli za izračun m-tih korenov kompleksnega števila a:

$$z_k = \sqrt[m]{|a|}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{m}}\,; \quad k = 0, 1, \dots, m-1.^{1}$$

V našem primeru je $m = 2$, rezutat pa je enak:

$$k=0: \quad z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

10 točk

$$k=1: \quad z_1 = -\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Upoštevani so bili tudi drugi smiselni odgovori, npr.

$$z = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Opombe. Možne so bile tudi delne plus/minus točke za delno pravilne ugotovitve. Točko c) se je z nekaj več računanja dalo rešiti tudi brez polarnega zapisa, npr. s prevedbo na sistem dveh enačb, kjer sta neznanki realna in imaginarna komponenta iskanega korena. Če je bil pri točki a) pravilno izračunan le r ali le φ, je to štelo 5 točk. Zadnja točka pri točki b) je bila dodeljena, če je bil rezultat zapisan v poenostavljeni obliki. Če je bila pri točki c) pravilno zapisana le ena rešitev, je to štelo 5 točk. Če je bila pri reševanju s sistemom enačb pravilno izračunana le ena komponenta, je to prav tako štelo 5 točk, itd.

[1] V formuli je dovolj vzeti le k med 0 in $n-1$, saj pri $k = n$ spet dobimo isto rešitev kot pri $k = 0$, pri $k = n+1$ isto kot pri $k = 1$ itn.

2. **[35 točk]** Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

(a) Poišči stacionarne točke funkcije f.

(b) Katere od stacionarnih točk so lokalni minimumi? Kolikšno vrednost zavzame f v teh lokalnih minimumih?

(c) Izračunaj ploščino omejenega lika, ki ga določa graf funkcije f in premica $y = -1$.

a) Stacionarne točke so rešitve enačbe

$$f'(x) = 0.$$

Izračunamo $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

Rešimo enačbo
$$4x^3 - 4x = 0$$
$$4x(x^2-1) = 0$$
$$4x(x-1)(x+1) = 0$$

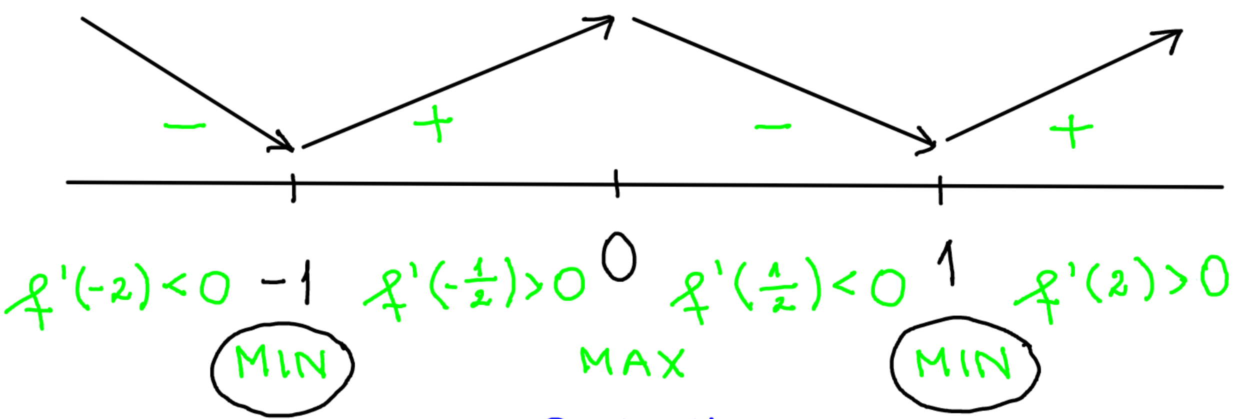
Stacionarne točke: $x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$

10 točk

b) Katere od stacionarnih točk so minimumi?

1. način: Pogledamo predznak odvoda (naraščanje in padanje funkcije)

f':



8 točk

2. način: Izračunamo vrednost drugega odvoda v stacionarnih točkah:

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$f''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 8 > 0$ MIN
$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0$ MAX
$f''(1) = 12 \cdot 1^2 - 4 = 8 > 0$ MIN

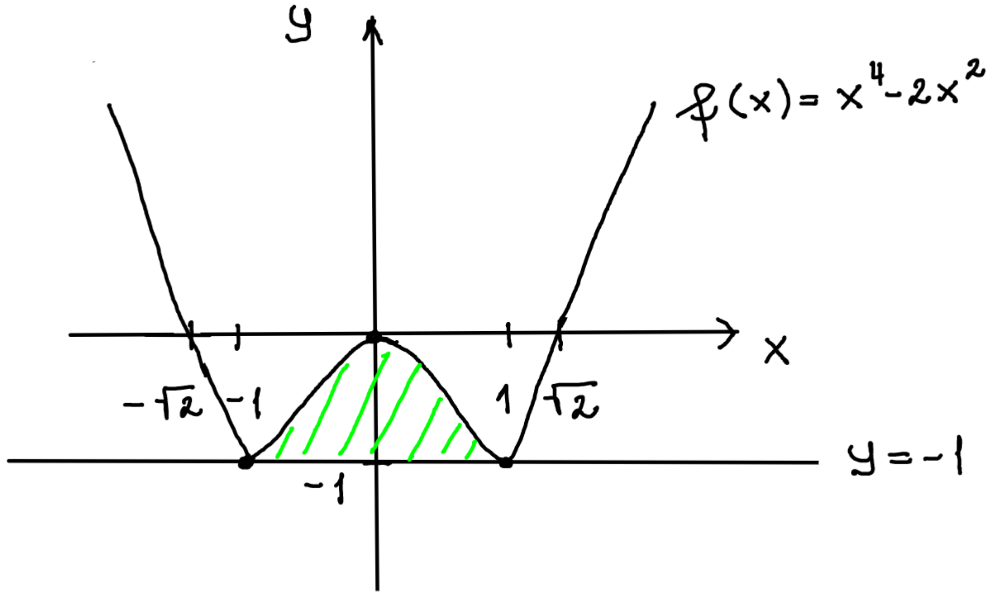
8 točk

Kolikšno vrednost f zavzame v minimumih?

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 = 1 - 2 = -1$
$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 = 1 - 2 = -1$

2 točki

c)



Ničle f:

$x^4 - 2x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 2) = 0$

$x^2 = 0$

$x_{1,2} = 0$

$x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2 \,/\sqrt{}$

$x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

Presečišča: 2 točki

$f(x) = y$

$x^4 - 2x^2 = -1$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

$(x^2 - 1)^2 = 0$

$(x-1)^2(x+1)^2 = 0$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -1$

Ploščina omejenega lika:

$$\int_{-1}^{1} (f(x)-y)\,dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx \quad \text{3 točke}$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} \quad \text{6 točk}$$

$$= \left(\frac{1^5}{5} - \frac{2\cdot 1^3}{3} + 1\right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{2(-1)^3}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \quad \text{2 točki}$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{6 - 20 + 30}{15} = \underline{\underline{\frac{16}{15}}}$$

2 točki

3. [30 točk]

Dan je sistem linearnih enačb spodaj.

$$\begin{aligned} 2x \quad - y + 4z &= 2 \\ 2x + 4y - 6z &= 12 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \end{aligned}$$

(a) Zgornje tri enačbe hkrati predstavljajo enačbe treh ravnin v $\mathbb{R}^3$. Ali točka $T(1,4,1)$ leži na teh ravninah? Zakaj oz. zakaj ne?

(b) Zapiši razširjeno matriko zgornjega sistema.

(c) Z uporabo Gaussove eliminacije poišči vse rešitve tega sistema.

a) Točki leži na vseh treh ravninah.
To preverimo tako, da točko vstavimo v enačbe ravnin:

3 točke $\bullet\ 2\cdot 1 - 4 + 4\cdot 1 = 2 \Rightarrow$ T leži na ravnini $2x - y + 4z = 2$

3 točke $\bullet\ 2\cdot 1 + 4\cdot 4 - 6\cdot 1 = 12 \Rightarrow$ T leži na ravnini $2x + 4y - 6z = 12$

3 točke $\bullet\ 4\cdot 1 + 3\cdot 4 - 2\cdot 1 = 14 \Rightarrow$ T leži na ravnini $4x + 3y - 2\cdot z = 14$

b) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 12 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right]$$ 5 točk

c) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 12 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{c} /(-2) \\ \sim \\ + \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 5 & -10 & 10 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} /:5 \\ + \end{array}$$

4 točke

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\
\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$

4 točke

Sistem ima neskončno rešitev (3 - 2 = 1 - parametrično družino rešitev).

Zapišimo vse rešitve:

$-y + 2z = -2$ 1 točka

$\boxed{y = 2z + 2}$ 1 točka

$2x - y + 4z = 2$ 2 točki

$2x - (2z+2) + 4z = 2$

$2x - 2z - 2 + 4z = 2$

$2x + 2z - 2 = 2$

$2x = -2z + 4 \quad /:2$

$\boxed{x = -z + 2}$ 2 točki

Rešitve sistema:

$$
\boxed{\begin{array}{ll} x = -t + 2 & \\ y = 2t + 2 & t \in \mathbb{R} \\ z = t & \end{array}}
$$

2 točki