Rešitev 1. izpita

31. januar 2021

1. (a) Prvih šest členov: $1, 2, 4, 8, 16, 32$ (8 točk).
   (b) Splošni člen: $a_n = 2^n$ (7 točk). Baza indukcije (2 točki): trditev velja za $n = 0, 1$, saj velja $a_0 = 1$ in $a_1 = 2$. Indukcijski korak (4 točke): recimo, da je $n \geq 1$ in da že vemo, da trditev velja za vse $m \leq n$; potem velja
   $$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \overset{\text{I.P.}}{=} \frac{2^{2n}}{2^{n-1}} = 2^{n+1}.$$
   (c) Velja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (7 točk).
   (d) Velja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ (7 točk).

2. (a) Odvod: $f'(x) = 3x^2 - 4x$ (4 točke). Njegovi ničli: $x_1 = 0$ in $x_2 = \frac{4}{3}$ (6 točk).
   (b) Velja $f(-1) = -1, f(0) = 2, f(1) = 1$, točka $x_2 = \frac{4}{3}$ pa ne leži na intervalu $[-1, 1]$ (8 točk). Največja vrednost je torej 2, najmanjša pa -1 (4 točke).
   (c) Funkcija f ima primitivno funkcijo $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 2x$ (9 točk), torej je iskani določeni integral enak $F(1) - F(-1) = \frac{8}{3}$ (4 točke).

3. (a) Velja:
   $$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(2 točki)}$$
   $$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(2 točki)}$$
   $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \text{(2 točki)}$$
   (b) Obseg trikotnika ABC je vsota dolžin njegovih stranic:
   $$o = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BC}|$$
   Velja:
   $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \qquad \text{(2 točki)}$$
   $$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 0^2} = 3 \qquad \text{(2 točki)}$$
   $$\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$
   $$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{17} \qquad \text{(2 točki)}$$

Torej je

$$o = 2\sqrt{2} + 3 + \sqrt{17} \qquad \text{(2 točki)}$$

Ploščina trikotnika ABC je enaka polovici ploščine paralelograma, napetega na vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$. Izračunamo jo po formuli

$$S = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$$

Velja:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + 0^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \qquad \text{(2 točki)}$$

in zato

$$S = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \qquad \text{(2 točki).}$$

(c) Pravokotno projekcijo vektorja $\vec{v}$ na vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ izračunamo po formuli:

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}} \vec{v} &= \frac{\vec{v}\cdot(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|^2}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \\
&= \frac{24}{(6\sqrt{2})^2}\begin{bmatrix}6\\0\\6\end{bmatrix} \qquad \text{(2 točki)} \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}6\\0\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix} \qquad \text{(2 točki)}
\end{aligned}$$

Tu je

$$\vec{v}\cdot(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\0\\6\end{bmatrix} = 4\cdot 6 + 1\cdot 0 + 0\cdot 6 \qquad \text{(2 točki).}$$

(d) Prostornino tetraedra, ki ima za osnovno ploskev trikotnik ABC in vektor $\vec{v}$ za enega izmed robov, izračunamo po formuli:

$$V = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{v})|}{6}.$$

Velja:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{v}) &= \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC} \times \vec{v}) \\
&= \begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\12\end{bmatrix} \\
&= (-2)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 12 \\
&= 24 \qquad \text{(2 točki).}
\end{aligned}$$

Tu je

$$\overrightarrow{AC} \times \vec{v} = \begin{bmatrix}0\\-3\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\12\end{bmatrix}.$$

Torej je

$$V = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{v})|}{6} = \frac{24}{6} = 4 \qquad \text{(4 točke).}$$