Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

25. januar 2021

Pisni izpit in rešitve pri predmetu
Algoritmi in podatkovne strukture 1
Visokošolski strokovni študij Računalništvo in informatika

točk

Ime in PRIIMEK: ______________________________

Vpisna številka: ____________________ Podpis: ____________________

Splošna navodila: Natančno preberite navodila nalog. Odgovorite na zastavljena vprašanja. Odgovore utemeljite in obrazložite. **Pišite čitljivo**. Čas reševanja: 80 minut.

9 točk

1. naloga: Gospod in gospa Friq brskata po spletu in iščeta odgovore na spodnja vprašanja. Glede na splet okoliščin te prosita, da jima pomagaš z jasnimi odgovori.

a) Obrazloži *implicitne* in *eksplicitne* podatkovne strukture. Podaj primer za vsako.

Rešitev: (1,5 točke) implicitne: (1,5 točke) eksplicitne. Za obrazložitev glej na koncu prosojnic "Povezani seznami". Pri obeh je potrebno podati tudi primer, kjer npr. samo "zaporedje", ali samo "polje" ni dober odgovor, ker zaporedje lahko izvedemo na oba načina.

b) Kaj je "Deli in vladaj"? Opiši princip in naštej vsaj tri algoritme v zvezi s tem.

Rešitev: (1.5 točke) D&V je metoda snovanja algoritmov, kjer algoritem naredimo tako, da problem/naloga razpade na več enako velikih, vendar manjših nalog. Jih rekurzivno rešimo. Iz rešitev podnalog pa nato sestavimo rešitev izvorne naloge. (1.5 točke) Primerov je veliko, dobri so: urejanje z zlivanjem, dvojiško iskanje, Karatsubov alg., Strassenov alg. itd. Glej tudi prosojnice.

c) Kateri *model računanja* smo uporabili pri dokazu *spodnje meje* zahtevnosti problema urejanja? Kakšna je ta spodnja meja? Obrazloži glavno idejo dokaza.

Rešitev: Pozor: gre za spodnjo mejo problema (ne nekega algoritma). (1 točka) Uporabili smo model "odločitveno drevo". (1 točka) Spodnja meja je $\Omega(n \log n)$. (1 točka) Ideja je, da vozlišča drevesa predstavljajo primerjave. Najmanjše drevo je popolno/celovito drevo, kar predstavlja najboljši možen algoritem. Višina drevesa je $\log L$, kjer je $L = n!$ število listov. O tem smo govorili, ko smo obdelali vsaj urejanja s primerjavami in tik preden smo začeli z urejanji s predpostavkami.

Komentar: Točki a) in b) ste kar dobro reševali, čeprav razne podrobnosti pogosto manjkajo. Točka c) je bila očitno težja: za drevo in $n \log n$ vas je sicer nekaj vedelo, le par pa je zapisalo kaj o ideji dokaza.

8 točk

2. naloga: Glede na veljavnost trditve zapiši odgovor da ali ne (prazen kvadrat se šteje kot napačen odgovor):

a)	☐	$2^{100} = \Omega(\pi)$	b)	☐	$O(n \log n) \subseteq O(n \log^2 n)$
c)	☐	$3^n = O(2^n)$	d)	☐	$n^{1/3} = O(n^{0,333})$
e)	☐	$4^{\lg n} = \Omega(2^n)$	f)	☐	$\ln n = \Theta(\lg n)$
g)	☐	$2n^9 + 2n^3 = O(n^6)$	h)	☐	$(n + \lg n)^{42} - n^{42} = \Omega(n^{42})$

Odgovore na kratko obrazloži.

Rešitev: Pravilen odgovor je vreden 0,5 točke, utemeljitev 0,5. Za utemeljitev smo upoštevali marsikaj, ne samo spodaj naštete stvari.

a) DA, na obeh straneh je konstanta
b) DA, O notacija je definirana preko množic
c) NE, različna osnova, lahko uporabite tudi limite
d) NE, pazi na zaokroževanje
e) NE, ker $4^{\lg n} = n^2 \neq \Omega(2^n)$
f) DA, pretvorba med logaritmi z različnimi osnovami gre preko konstanta, ki se skrije v O notaciji, znana formula
g) NE, stopnji polinomov: $9 \not\leq 6$
h) NE, $(n + \lg n)^{42} - n^{42} = n^{42} + n^{41} \lg n + \cdots - n^{42}$, hitro ugotovimo, da ostanejo samo členi "manjši" od n^{42}, niti jih ni treba računati Če je kdo sicer vse pravilno odgovarjal, a brez utemeljevanja, smo dali vseeno več točk kot 4.

6 točk

3. naloga: Hčerka Friqica razpisuje točkovno nagrado za asimptotične časovne zahtevnost naslednjih funkcij. Za vsako funkcijo podaj in utemelji njeno časovno zahtevnost.

```
fun stej (n) is
    s = 0
    for (i = 1; i < n; i++) do
        s++

fun hitroStej (n) is
    s = 0
    for (i = 1; i < n; i *= 2) do
        s++
```

```
fun razmisli (n) is
    if n <= 1 then return
    hitroStej (n)
    razmisli (n/2)
    razmisli (n/2)
    stej (n)
```

Rešitev: Dokaj enostavna naloga, del naloge je neposredno iz vadnice.

stej: $O(n)$, ker ima zanka n korakov

hitroStej: $O(\log n)$, indeks zanke se podvaja

razmisli: $O(n \log n)$, rekurzivna enačba $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$, torej $a = 2$, $b = 2$ in $d = 1$, uporaba mojstrovega izreka

10 točk

4. naloga: Hitra pošta je danes zjutraj dostavila naslednje zaporedje števil, ki si ga močno želiš temeljito nepadajoče urediti:

$$9, 3, 6, 1, 5, 0, 2, 8.$$

a) Zapiši sled urejanja danega zaporedja z urejanjem z izbiranjem.

b) Je urejanje z izbiranjem stabilno ali nestabilno. Utemelji!

c) Iz danega zaporedja zgradi kopico na način, ki se uporablja pri urejanju s kopico. Jasno označi drevesa, ki predstavljajo kopico in pod drevo dopiši ustrezno polje.

d) Nadaljuj iz prejšnje točke z urejanjem s kopico. Sled iz dreves naredi enako kot v prejšni točki.

e) Zapiši sled urejanja danega zaporedja s hitrim urejanjem. Uporabi algoritem s predavanj.

Rešitev: Ta naloga je precej neposredna, sledi naredimo enostavno po receptu iz predavanj. Preverite jih lahko tudi z vašimi programi iz 2. domače naloge. Urejamo nepadajoče (po domače rečeno tudi naraščajoče) - če ste pomešali smer urejanja, smo tudi našli kakšno točko.
Točkovanje: a-2 točki, b-2 točki, c+d: 3 točke, e-3 točke. Vprašanji c) in d) skupaj predstavljata celotno urejanje s kopico, vključno z njeno gradnjo. Potrebno je uporabiti gradnjo z ugrezanjem, kjer takoj vzameš celotno zaporedje, ga zapišeš kot drevo in akcija.
Edino vprašanje za razmislek je b), pa tudi to smo celo skupaj naredili na predavanjih (se mi zdi). Torej, urejanje z izbiranjem (kot ga delamo) ni stabilno. Zakaj? Primer nestabilnosti je zaporedje $2, 2, 1$.

8 točk

5. naloga: Celovito drevo stopnje k je predstavljeno s poljem $[0, 1, 2, \ldots, n]$.

a) Nariši drevesi za $k = 2$ in za $k = 3$, pri čemer $n = 5 \cdot k$.

Rešitev: (2 točki) To je precej enostavno risanje po nivojih. Pri $k = 2$ je 11 elementov, pri $k = 3$ pa 16, začnemo z 0.

b) Za narisani drevesi zapiši zaporedje vozlišč, če izvedemo premi obhod drevesa.

Rešitev: (2 točki) Premi obhod je osnovna vrsta pregleda drevesa - glej prosojnice.
$k = 2$: 0,1,3,7,8,4,9,10,2,5,6,
$k = 3$: 0,1,4,13,14,15,5,6,2,7,8,9,3,10,11,12.

c) Zapiši prve tri elemente 12. nivoja drevesa za $k = 2$ in $k = 3$. Utemelji!

Rešitev: ($2 \times 1,5$ točke) Seveda, če vprašanje sprašuje po 12. nivoju, potem lahko predpostavljamo, da je n dovolj velik, da ta nivo obstaja.
$k = 2 : 2^{12} - 1, 2^{12}, 2^{12} + 1$, iz točke a) se to dokaj hitro lahko ugotoviti
$k = 3 : \frac{3^{12}-1}{2}, \frac{3^{12}-1}{2} + 1, \frac{3^{12}-1}{2} + 2$, potrebno je sešteti vse elemente na prejšnjih nivojih, dobimo enostavno geometrijsko vsoto členov k^i, ki jo znamo sešteti.

d) Za poljuben lihi k izpelji formulo, ki za vozlišče i poda, kateri je njegov srednji otrok.

Rešitev: (2 točki) Opazimo, da so elementi pravzaprav enaki njihovim indeksom v polju. Iz vsega kar vemo o implicitni predstavitvi k-tiških dreves v polju, enostavno zapišemo $ki + \frac{k+1}{2}$.

Komentar: Tudi ta naloga je bila precej lahka in ste je dobro reševali. Skupaj je tu možnih točk 9.

8 točk

6. naloga: Na predavanjih smo spoznali problem najmanjšega vozliščnega pokritja, kjer gre za iskanje najmanše podmnožice vozlišč danega grafa, tako da je vsaj eno krajišče vsake povezave v izbrani množici vozlišč. Pomagaj sinku Friqolinu z razumevanjem tega problema.

a) Za dani neusmerjen graf $G = (V, E)$, kjer je V množica vozlišč in E množica povezav natančno definiraj ta problem. Za kakšno vrsto problema gre?

Rešitev: (1,5 točke) Definicija problema: Za podani $G = (V, E)$, poišči $S \subseteq V$, kjer $\forall (u, v) \in E$ velja $u \in S \vee v \in S$. Kriterijska funkcija je $|S|$, gre za minimizacijo. V bistvu je že vse z besedami zapisano v navodilu naloge, le malce je potrebno preoblikovati v matematično notacijo. (0.5 točke) Gre za optimizacijski / minimizacijski problem.

b) Zapiši optimalno rešitev in njeno velikost za ta problem na ciklu C_n (cikel z n vozlišči).

Rešitev: (1 točka) Če želimo pokriti vse povezave, potem moramo izbrati vsaj vsako drugo vozlišče. Optimalna rešitev seveda izbere natanko vsako drugo vozlišče. (1točka) $|S| = \lceil n/2 \rceil$. Za lažje razumevanje si narišite C_3 in C_4.

c) Kakšna je asimptotična časovna zahtevnost izčrpnega preiskovanja (za poljuben graf)? Zakaj?

Rešitev: Gre za precej znani (tudi s predavanj) NP-težki problem. (1 točka) Ker je rešitev podmnožica vozlišč, gre pri izčrpnem preiskovanju za naštevanje vseh podmnožic vozlišč. (1 točka) Teh je 2^n, toliko kot binarnih nizov dolžine n: 0-vozlišče je v množici, 1-vozlišče ni v množici. Zahtevnost izrčpnega preiskovanja je torej $O(2^n)$ korakov, kjer na vsakem koraku preverimo eno množico.

d) Recimo, da graf G ni povezan. Kako bi v tem primeru lahko enostavno pohitrili izčrpno preiskovanje? Kakšna je ta pohitritev, če graf G razpade na dve komponenti velikosti $n/2$.

Rešitev: (1 točka) Če graf ni povezan, potem z npr. DFS algoritmom detektiramo komponente in poženemo izčrpno preiskovanja na vsako komponento posebej. (1 točka) Za dve komponenti velikosti $n/2$ je torej zahtevnost $2O(2^{n/2}) = O(\sqrt{2}^n) = O(1,415^n)$.

Komentar: Ta naloga je bila najslabše reševana. Morda, ker pri zadnji nalogi marsikomu že zmanjkuje časa in na prvi pogled zgleda težja. Naloga pa je sicer dokaj enostavna, le definicijo problema je potrebno dobro razumeti. Problem smo si kar obširno pogledali na predavanjih in bi ga pravzaprav morali znati definirati tudi brez dodanega opisa v navodilih naloge.