Matematika VSP, vaje, 30. 10. 2020 (zaporedja)

OR

NALOGA 17.
Zaporedje je dano s predpisom

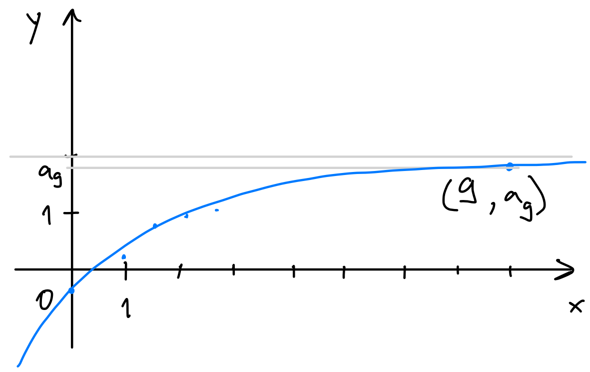
$$a_n = \frac{2n-1}{n+3}.$$

a. Izračunaj nekaj členov in nariši graf zaporedja. Pomagaj si z grafom funkcije $y = \frac{2x-1}{x+3}$.
b. Ali je zaporedje naraščajoče, padajoče? Prepričaj se z računom.
c. Prepričaj se, da je zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito a. Od katerega n dalje ležijo vsi členi tega zaporedja znotraj intervala $\left(a - \frac{1}{4}, a + \frac{1}{4}\right)$

Zaporedje je predpis, ki naravnemu številu $n \in \mathbb{N}$ priredi realno število $a_n \in \mathbb{R}$, tj. zaporedje je funkcija $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto a_n$.

(a) $a_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$ ...

$$a_0 = \frac{2\cdot 0-1}{0+3} = -\frac{1}{3}$$
$$a_1 = \frac{2\cdot 1-1}{1+3} = \frac{1}{4}$$
$$a_2 = \frac{2\cdot 2-1}{2+3} = \frac{3}{5}$$
$$a_3 = \frac{2\cdot 3-1}{3+3} = \frac{5}{6}$$
$$a_4 = \frac{2\cdot 4-1}{4+3} = 1$$
$$\vdots$$



$$y = \frac{2x-1}{x+3} = \frac{(2x+6)-7}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3}$$

Pol te racionalne funkcije je pri $x = -3$.

(b) Ali je zaporedje naraščajoče / padajoče?

Zaporedje je strogo naraščajoče, če je $a_{n+1} \geq a_n$ ($>$) za vse $n \in \mathbb{N}$.

Preverimo to za naše zaporedje:

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+3} \geq \frac{2n-1}{n+3} = a_n$$

$$\frac{2n+1}{n+4} \geq \frac{2n-1}{n+3} \quad \Big/ \cdot (n+4)(n+3)$$, saj sta $n+3$ in $n+4 > 0$.

$$(2n+1)(n+3) \geq (2n-1)(n+4)$$

$$\cancel{2n^2} + \underbrace{\cancel{n+6n}}_{7n} + 3 \geq \cancel{2n^2} \underbrace{\cancel{-n+8n}}_{7n} - 4 \quad \ldots \quad 3 \geq -4$$, kar je jasno res.

Vsi $n \in \mathbb{N}$ zadoščajo tej neenačbi, torej je zaporedje res naraščajoče.

(c) Utemeljitev, da ima a_n res limito. Vemo, da je a_n naraščajoče.
Iz (a) dela naloge "zgleda", da je navzgor omejeno z 2, tj. $a_n \leq 2$.
Preverimo, da je res!

$$\left(\frac{2n-1}{n+3} - 2 \leq 0\right) \qquad \frac{2n-1}{n+3} \leq 2 \quad / \cdot (n+3)$$

$$\cancel{2n} - 1 \leq \cancel{2n} + 6 \quad \ldots \quad -1 \leq 6$$, to jasno velja!

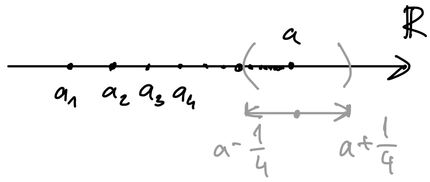
Zaporedje je navzgor omejeno z 2.

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\cdot\frac{1}{n}}{(n+3)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = \frac{2}{1} = 2.$$

($\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{3}{n} \to 0$)

Spomnimo se, a je $\overbrace{\text{limita zaporedja}}^{\text{oz. zaporedje konvergira k } a}$ a_n, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$.

Od katerega člena so vsi členi a_n znotraj $\varepsilon = \frac{1}{4}$-okolice limite?



$$\left|\frac{2n-1}{n+3} - 2\right| < \frac{1}{4}$$

Ločimo 2 primera:

$$\frac{2n-1}{n+3} - 2 \geq 0 \qquad \text{ali} \qquad \frac{2n-1}{n+3} - 2 < 0$$

(Ta situacija se ne pojavi.)

Kot smo utemeljili zgoraj.

(Ta se vedno pojavi, saj je zap. navzgor omejeno z 2.)

$$2 - \frac{2n-1}{n+3} < \frac{1}{4}$$

$$2 - \frac{1}{4} < \frac{2n-1}{n+3} \quad / \cdot (n+3) \qquad \left(n \in \mathbb{N}, \text{ zato } n+3 > 0\right)$$

$$\frac{7}{4}\cdot(n+3) < 2n-1 \quad / \cdot 4$$

$$\cancel{7n} + 21 < \cancel{8}n - 4$$

$$25 < n, \text{ tj. } n \geq 26$$

Od 26. člena a_n so vsi členi znotraj $\frac{1}{4}$-okolice limite $a = 2$.

NALOGA 18.
Zaporedje (a_n) je dano rekurzivno

$$a_0 = 3,\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

a. Preveri, da je zaporedje (a_n) padajoče in velja $a_n \geq 2$ za vsako naravno število n.
b. Koliko je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

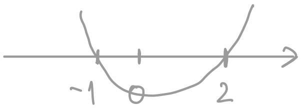
(a) Ali je padajoče, tj. $a_{n+1} \leq a_n$?

$0 \leq \sqrt{2+a_n} \leq a_n \quad /^2$

Ker je $a_0 = 3 > 0$, so vsi $a_n > 0$, saj je $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$

$2 + a_n \leq a_n^2$

$0 \leq a_n^2 - a_n - 2$



$0 \leq (a_n - 2)(a_n + 1)$ .... $a_n \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

Ali so res vsi členi tega zaporedja ≥ 2 ? so!

"Rešimo" $a_n \geq 2$:

Vemo $a_0 = 3 \geq 2$, tedaj $a_1 = \sqrt{2+3} = \sqrt{5} \geq 2$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{5}} \geq 2$ ....

Utemeljimo z mat. indukcijo:

- baza ind.: $a_0 = 3 \geq 2$, velja!

- ind. korak: Če je $a_n \geq 2$, potem je tudi $a_{n+1} \geq 2$:

$a_n \geq 2$, potem $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \geq \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

Torej so vsi členi tega zap. ≥ 2.

Iz tega sledi, da je a_n padajoče in navzdol omejeno z 2.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}_{= a} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 2}}_{= \sqrt{a+2}} \quad \dots \quad a = \sqrt{a+2} \quad /^2$$

$a^2 = a + 2$

$a^2 - a - 2 = 0$

$(a-2)(a+1) = 0$ .... $a = 2, -1$

$\underline{a=2}$ je torej limita a_n.

Naloga 20. OR

Približke za korene pozitivnih števil lahko računamo z zaporedjem podanim z rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

Prepričaj se, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\sqrt{x}$, če je zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno in izračunaj 3 decimalke natančen približek za $\sqrt{2}$.

Kaj je lahko limita tega zap., če ima limito? $\lim_{n\to\infty} a_n =: a$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}_{\substack{\| \\ a}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)}_{\frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right)} \quad \dots \quad a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right) \Big/ \cdot 2a$$

$2a^2 = a^2 + x \dots \quad a^2 = x$

oz. $a = \pm\sqrt{x}$. ← to so kandidati za limito tega zap., če limita obstaja.

Izračunajmo $\sqrt{2}$ z uporabo tega rekurzivnega zaporedja (tj. $x = 2$):

$a_0 = 2 \qquad (a_0 = -2)$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{\cancel{4}2}{\cancel{6}3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12} = 1.4166\dots$$

Naloga 21.

Izračunaj spodnje limite:

a. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1}$,

b. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{1-2n^2}$,

c. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$,

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{2^n-3^{n-1}}$,

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1):n}{(2n-1):n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

$\frac{1}{n} \to 0$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+2):n^2}{(1-2n^2):n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-2} = \frac{1+0+0}{0-2} = -\frac{1}{2}.$$

$\frac{2}{n} \to 0, \quad \frac{2}{n^2} \to 0, \quad \frac{1}{n^2} \to 0$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$= \dots = 0.$

(d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1}+3^n)\cdot\frac{1}{3^n}}{(2^n-3^{n-1})\cdot\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}+1}{\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}-\frac{1}{3}\cdot 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 0+1}{0-\frac{1}{3}} = -3.$$

S predavanj: $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, če je $0 \leq \alpha < 1$.