Vaje MAT VSP, 29.10.2020

NALOGA 14. OR

Naj bo $v = 1 + i\sqrt{3}$ in $w = 1 - i$. V kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ opazujemo kvadrat z oglišči 1, 3, $3 + 2i$ in $1 + 2i$.

a. V kaj se ta kvadrat preslika s transformacijo $z \mapsto vz + w$?
b. V kaj se kvadrat preslika s transformacijo $z \mapsto v\bar{z} + w$ oz. $z \mapsto \overline{vz + w}$?
c. Poišči kompleksno število t, da bo transformacija $z \mapsto tz$ zasukala kvadrat za kot $\pi/4$ okrog izhodišča $0 \in \mathbb{C}$.
d. Poišči transformacijo $z \mapsto tz + u$, s katero se bo kvadrat zasukal za kot $\pi/4$ okrog svojega težišča.

$z \mapsto vz$

$v = |v| e^{i\alpha}$, $z = |z| e^{i\gamma}$

$z \mapsto vz = \underbrace{|v|}_{\text{razteg za faktor } |v|} |z| e^{i\underbrace{(\alpha+\gamma)}}$ → rotacijo za kot α okoli 0

$z \mapsto z + w$ → premik za $\operatorname{Re}(w)$ desno in $\operatorname{Im}(w)$ gor

a) $z \mapsto vz + w$

$v = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad w = 1 - i$

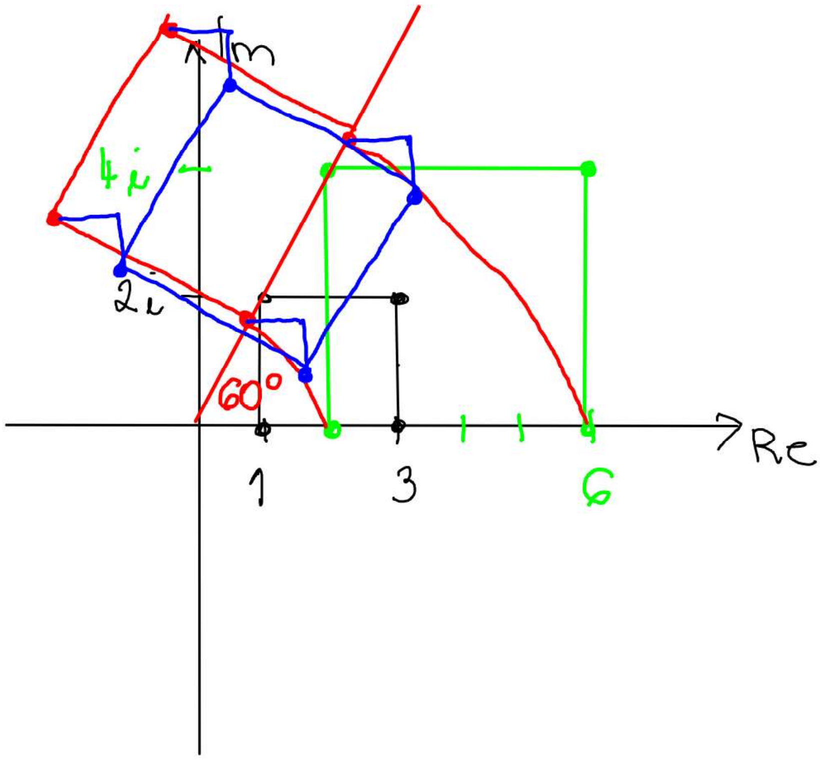
$|v| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \longrightarrow \varphi = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ ✓

$v = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ → rotacija za kot $\frac{\pi}{3}$ okoli 0

2 → razteg za faktor 2

1. razteg za faktor 2
2. rotacija za kot $\frac{\pi}{3}$ okoli 0
3. premik za 1 desno in -1 dol



b) $z \mapsto \underline{w}\bar{z} + w$ $z \mapsto \bar{z}$

2. 1. 3.

zrcaljenje preko realne osi

1. zrcalimo preko realne osi
2. razteg s faktorjem 2
3. rotacijo za $\frac{\pi}{3}$ okoli 0
4. premik za 1 desno in 1 dol

c) $z \mapsto tz$ zasuk za kot $\frac{\pi}{4}$ okrog 0

$t = |t| \cdot e^{i\varphi}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$|t| = 1$

$$t = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) $z \longmapsto tz + u$ zasuk za kot $\frac{\pi}{4}$ okrog težišča

težišče: $\dfrac{1+3+1+2i+3+2i}{4} = \dfrac{8+4i}{4} = \dfrac{\cancel{4}(2+i)}{\cancel{4}}$

$= 2+i$

Vrtenje okoli $a \in \mathbb{C}$

$$\boxed{z} \longmapsto z-a \longmapsto e^{i\varphi}(z-a) \longmapsto \boxed{e^{i\varphi}(z-a)+a}$$

$$z \longmapsto e^{i\frac{\pi}{4}}(z-(2+i)) + (2+i) =$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z - e^{i\frac{\pi}{4}}(2+i) + 2+i$$

$$t = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u = -e^{i\frac{\pi}{4}}(2+i) + 2+i$$
$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2+i) + 2+i$$

ZAPOREDJA

NALOGA 17. *OR*

Zaporedje je dano s predpisom

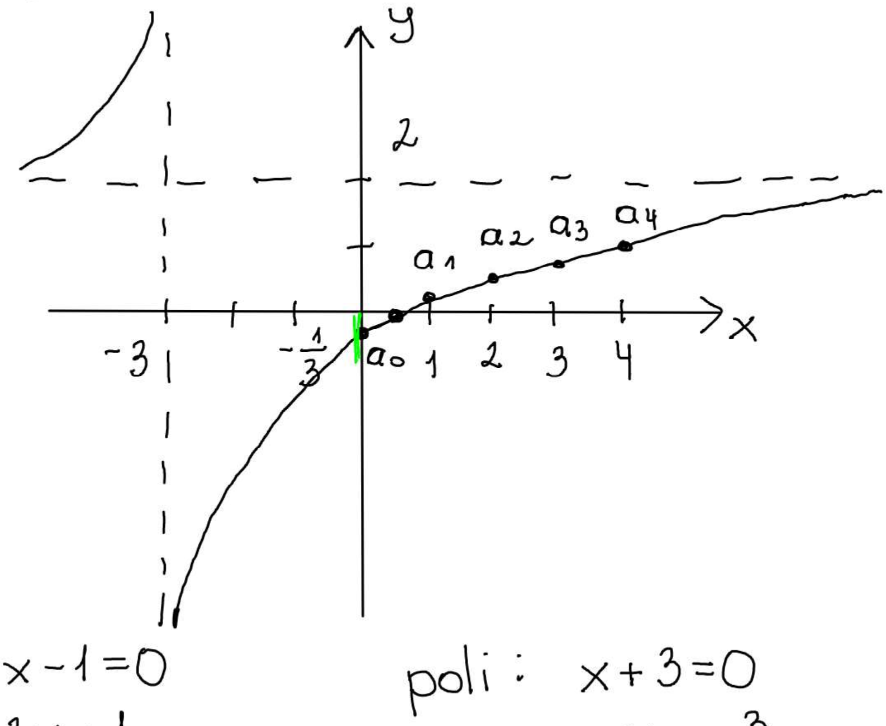
$$a_n = \frac{2n-1}{n+3}.$$

a. Izračunaj nekaj členov in nariši graf zaporedja. Pomagaj si z grafom funkcije $y = \frac{2x-1}{x+3}$.
b. Ali je zaporedje naraščajoče, padajoče? Prepričaj se z računom.
c. Prepričaj se, da je zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito a. Od katerega n dalje ležijo vsi členi tega zaporedja znotraj intervala $\left(a - \frac{1}{4}, a + \frac{1}{4}\right)$

a) $a_0 = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0+3} = -\frac{1}{3}$ $\quad a_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1+3} = \frac{1}{4}$

$a_2 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2+3} = \frac{3}{5}$ $\quad a_3 = \frac{2 \cdot 3 - 1}{3+3} = \frac{5}{6}$

$$y = \frac{2x-1}{1x+3}$$



ničle: $2x-1=0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

poli: $x+3=0$

$x = -3$

vodoravna asimptota:

$y = \frac{2}{1} = 2$

zač. vr.: $y(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0+3} = -\frac{1}{3}$

b) Domneva: (a_n) je naraščajoče

Zaporedje je naraščajoče, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n \leq a_{n+1}$.
Zaporedje je padajoče, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n \geq a_{n+1}$.
Zaporedje je monotono, če je naraščajoče ali padajoče.

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad a_n = \frac{2n-1}{n+3}$$

$$\downarrow \qquad a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1+3} = \frac{2n+1}{n+4}$$

$$\frac{2n-1}{n+3} \leq \frac{2n+1}{n+4} \quad / (n+3)(n+4)$$

$$(2n-1)(n+4) \leq (2n+1)(n+3)$$

$$\cancel{2n^2} + 8n - n - 4 \leq \cancel{2n^2} + 6n + n + 3$$

$$\cancel{7n} - 4 \leq \cancel{7n} + 3$$

$$-4 \leq 3 \ \checkmark$$

c) konvergentno = omejeno + monotono

omejeno = omejeno navzgor + omejeno navzdol

omejeno navzgor $\downarrow$ če ima zgornjo mejo: $M \in \mathbb{R}$: $a_n \leq M$

omejeno navzdol $\downarrow$ če ima spodnjo mejo: $m \in \mathbb{R}$: $a_n \geq m$

$$a_n = \frac{2n-1}{n+3}$$

- monotono (naraščajoče)

- omejeno

  - omejeno navzdol: DA, $m = a_0 = -\frac{1}{3}$

  - omejeno navzgor: DA, $M = 2$

$$a_n \leq M$$
$$a_n \leq 2$$
$$\frac{2n-1}{n+3} \leq 2 \quad /(n+3)$$
$$2n-1 \leq 2(n+3)$$
$$2\cancel{n}-1 \leq 2\cancel{n}+6$$
$$-1 \leq 6 \quad ✓$$

$\Rightarrow (a_n)$ konvergentno (monotono, omejeno)

$\downarrow$

ima limito

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1 \;/:n}{n+3 \;/:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{3}{n}}} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

- $a_n \in \left(2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right)$

$$2-\frac{1}{4} < a_n < 2+\frac{1}{4} \quad ✓$$
$$\frac{7}{4} < \frac{2n-1}{n+3} \quad / 4(n+3)$$

$$7(m+3) < (2m-1)4$$
$$7m+21 < 8m-4$$
$$21+4 < 8m-7m$$
$$25 < m \rightarrow \text{od 26. okna dalje}$$

NALOGA 18.

Zaporedje (a_n) je dano rekurzivno

$$a_0 = 3, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}.$$

a. Preveri, da je zaporedje (a_n) padajoče in velja $a_n \geq 2$ za vsako naravno število n.
b. Koliko je $\lim_{n \to \infty} a_n$?

$$a_0 = 3 \quad a_1 = \sqrt{2+a_0} = \sqrt{5} \quad a_2 = \sqrt{2+a_1} =$$
$$= \sqrt{2+\sqrt{5}}$$

a) (a_m) padajoče

$$a_m \geqslant a_{m+1}$$

Indukcija

1. BAZA $(m=0)$: $a_0 \geqslant a_1$

$$3 \geqslant \sqrt{5} \doteq 2{,}24 \checkmark$$

2. INDUKCIJSKI KORAK:

Predpostavimo: $a_m \geqslant a_{m+1}$

Dokazujemo: $a_{m+1} \geqslant a_{m+2}$

$$\sqrt{2+a_m} \geqslant \sqrt{2+a_{m+1}}$$

I.P.

$$a_m \geqslant a_{m+1} \quad /+2$$
$$a_m+2 \geqslant a_{m+1}+2 \quad /\sqrt{}$$
$$\sqrt{a_m+2} \geqslant \sqrt{a_{m+1}+2} \checkmark$$
$$a_{m+1} \geqslant a_{m+2}$$

$a_n \geq 2$

Indukcija

1. BAZA $(n=0)$: $a_0 \geq 2$

$3 \geq 2$ ✓

2. INDUKCIJSKI KORAK:

Predpostavimo: $a_n \geq 2$ za nek $n \in \mathbb{N}$

Dokazujemo: $a_{n+1} \geq 2$

$\sqrt{2+a_n} \geq 2$

I.P. $a_n \geq 2 \quad / +2$

$a_n + 2 \geq 4 \quad / \sqrt{\ }$

$\sqrt{a_n+2} \geq 2$

$a_{n+1} \geq 2$ ✓

b) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$

konvergentno

- monotono (padajoče)
- omejeno $(m = 2,\ M = a_0 = 3)$

ima limito

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

$$a = \sqrt{2+a} \quad /^2$$

$$a^2 = 2+a$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a-2)(a+1) = 0$$

$$\boxed{a_1 = 2} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

$$a_2 = -1 \ //$$

$$\boxed{\boxed{a} = \lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_n} =$$

$$= \boxed{\sqrt{2+a}}$$

NALOGA 21.

Izračunaj spodnje limite:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n-1}$,

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+2}{1-2n^2}$,

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$,

d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^n}{2^n-3^{n-1}}$,

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2^n+2}}{2^n+1}$,

f. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4^n+4}}{2^n+1}$.

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1 \ /:n}{2n-1 \ /:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{2-\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2 \ /:n^2}{1-2n^2 \ /:n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{2}{n^2}}}{\underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\overset{a}{\overset{\parallel}{\sqrt{n+1}}} - \overset{b}{\overset{\parallel}{\sqrt{n}}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$(a-b)(a+b) =$
$a^2 - b^2$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \underline{\underline{0}}$$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^n}{2^n-3^{n-1}} \begin{matrix} /:3^n \\ /:3^n \end{matrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot 2^n}{3^n}+1}{\frac{2^n}{3^n}-\frac{3^{n-1}}{3^n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\overset{\vee 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right)+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}} = \frac{2\cdot 0+1}{0-\frac{1}{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -\frac{1\cdot 3}{1\cdot 1} = \underline{\underline{-3}}$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$

$$\frac{3^{n-1}}{3^n} = \frac{3^{n-1}}{3^{n-1+1}} = \frac{\cancel{3^{n-1}}}{3\cdot \cancel{3^{n-1}}} = \frac{1}{3}$$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4^n+4}}{2^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4^n+4}}{\sqrt{(2^n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4^n+4} \; /:4^n}{\sqrt{4^n+2^{n+1}+1} \; /:4^n} =$

$(2^n+1)^2 = (2^n)^2 + 2\cdot 2^n\cdot 1 + 1$
$= (2^2)^n + 2^{n+1} + 1$
$= 4^n + 2^{n+1} + 1$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{4^n}}}{\sqrt{1+\frac{2\cdot 2^n}{4^n}+\frac{1}{4^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{4^{n-1}}}}{\sqrt{1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4^n}}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = \underline{\underline{1}}$$

$\frac{1}{4^{n-1}} \to 0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, $\frac{1}{4^n} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{f(n)} = 0 \qquad a \in \mathbb{R}$$

$f(n)$ ↓ polinom, eksponentna