Matematika VSP, vaje, 16. 10. 2020

NALOGA 3.
Poišči vse (!) rešitve naslednjih enačb:

a. $x + \frac{1}{x} = 2$,
b. $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$,
c. $|x + 1| = \frac{1}{2}x + 1$.

(a) $x + \frac{1}{x} = 2 \;/\cdot x$

$x^2 + \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} = 2x$

$x^2 + 1 = 2x$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x-1)^2 = 0$,
tj. $x - 1 = 0$ oz.
$\underline{x = 1}$.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a = x$, $b = 1$

$$\left(\begin{array}{l} 2x = 1 \;/:2 \;\ldots\; x = \frac{1}{2} \\ 2x = 1 \;/\cdot x \\ 2x^2 = x \;\ldots\; 2x^2 - x = 0 \\ \quad x(2x-1) = 0 \ldots\; x_1 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

(b) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

$x^2(x+1) - 1(x+1) = 0$

$(x+1)(x^2-1) = 0$
$(x+1)(x-1)(x+1) = 0$, tj. $x+1=0$ oz. $x-1=0$ oz. $x+1=0$
$x=-1$ $x=1$ $x=-1$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$\underline{x_{1,2} = -1,\; x_3 = 1}$

(c) $|x+1| = \frac{1}{2}x + 1$ .... $|a| = \begin{cases} a ; & a \geq 0 \\ -a ; & a < 0 \end{cases}$

Ločimo 2 primera (saj sta v def. abs. vrednosti 2 primera):

$x + 1 \geq 0$,
tj. $x \geq -1$.

$x + \cancel{1} = \frac{1}{2}x + \cancel{1}$

$x - \frac{1}{2}x = 0$

$\frac{1}{2}x = 0$
$x = 0$ ✓

in

$x + 1 < 0$,
tj. $x < -1$

$-(x+1) = \frac{1}{2}x + 1$

$-x - 1 = \frac{1}{2}x + 1$

$-x - \frac{1}{2}x = 1 + 1 \;\ldots\; -\frac{3}{2}x = 2 \;/\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

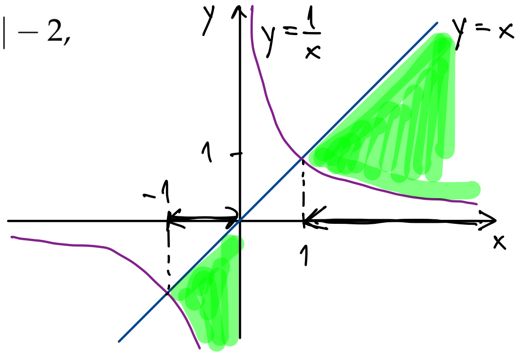
$x = -\frac{4}{3}$ ✓

$\boxed{\text{Enačba ima rešitvi } x = 0 \text{ in } x = -\frac{4}{3}.}$

NALOGA 4.
Reši naslednje neenačbe:

a. $x > \frac{1}{x}$
b. $x^2 \leq 3x - 2$,
c. $\sin(x) > \frac{1}{2}$ za $x \in [0, 2\pi)$,
d. $|x-1| < 1$,
e. $|x-1| > |x| - 2$,

(a) $x > \frac{1}{x}$.



Pričakujemo, da so rešitve vsi $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$

Rešimo direktno (brez grafa ustreznih funkcij):

$x > \frac{1}{x} \quad / \cdot x$ (pri množenju neenakosti z negativnim št. se smer neenakosti zamenja)

Spet ločimo 2 primera:

$x > 0$:

$x^2 > 1$
$x^2 - 1 > 0$
$(x-1)(x+1) > 0$

(produkt 2 števil je >0, če sta obe poz. oz. obe neg.)

torej $x - 1 > 0$ in $x + 1 > 0$,
tj. $x > 1$ in $x > -1$,
zato $x > 1$

ali $x - 1 < 0$ in $x + 1 < 0$,
tj. $x < 1$ in $x < -1$,
zato $x < -1$

Ker upoštevamo tudi $x > 0$ sledi, da je $x > 1$, $x \in (1, \infty)$.

ali

$x < 0$

$x^2 < 1$
$x^2 - 1 < 0$
$(x-1)(x+1) < 0$

(produkt 2 števil je <0, če sta št. različnih predznakov)

torej $x - 1 > 0$ in $x + 1 < 0$,
tj. $x > 1$ in $x < -1$,
takih x ni.

ali $x - 1 < 0$ in $x + 1 > 0$,
tj. $x < 1$ in $x > -1$,
zato $x \in (-1, 1)$

Ker upoštevamo tudi $x < 0$ sledi, da $x \in (-1, 0)$.

Končna rešitev je $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$.

(b) $x^2 \leq 3x-2$

$x^2-3x+2 \leq 0$ $\qquad\qquad (x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

$(x-1)(x-2) \leq 0$

Torej je:

$(x-1 \geq 0$ in $x-2 \leq 0)$
$x \geq 1$ in $x \leq 2$,

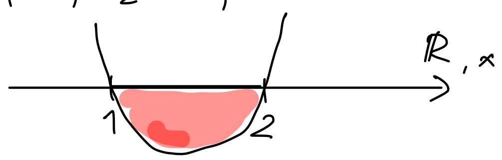
tj. $x \in [1,2]$

ali $(x-1 \leq 0$ in $x-2 \geq 0)$
$x \leq 1$ in $x \geq 2$,
tak x ne obstaja

Torej $x \in [1,2]$.

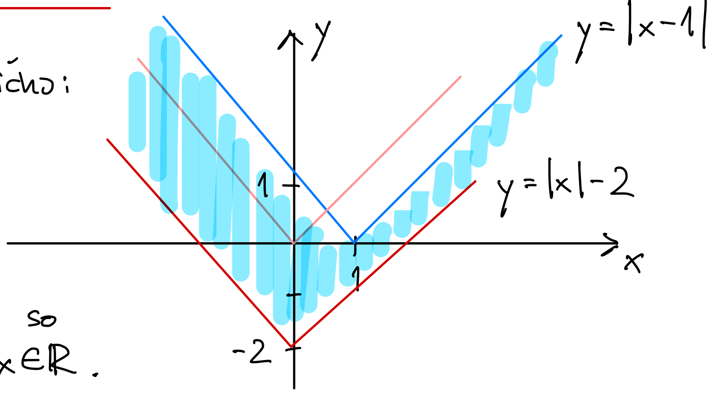
Nekoliko bolj direktno (ker imamo kvadraten polinom na levi strani neenačaja):

Polinom $(x-1)(x-2)$ ima ničli $x_1=1$, $x_2=2$, njegov graf izgleda približno tako:



(e) $|x-1| > |x|-2$

Najprej grafično:



Izgleda, da so rešitve vsi $x \in \mathbb{R}$.

Brez skic:

Ločiti moramo 4 primere:

$x-1 \geq 0$ in $x \geq 0$,
torej $x \geq 1$.

$\cancel{x}-1 > \cancel{x}-2$,
rešitve so $x \in \mathbb{R}$.
S pogojem $x \in [1, \infty)$.

ali $x-1 \geq 0$ in $x < 0$,
torej $x \geq 1$ in $x < 0$,

takih x ni.

ali $x-1 < 0$ in $x \geq 0$,
torej $x < 1$ in $x \geq 0$.

$-(x-1) > x-2$
$-x+1 > x-2$
$3 > 2x$
$x < \frac{3}{2}$

S pogojem $x \in [0,1)$

ali $x-1 < 0$ in $x < 0$,
torej: ~~$x < 1$ in~~ $x < 0$.

$-(x-1) > -x-2$
~~$-\cancel{x}+1 > -\cancel{x}-2$~~

S pogojem: $x \in (-\infty, 0)$

Torej res dobimo vse $x \in \mathbb{R}$.

NALOGA 7. *OR*

Študent Marko bo začel prodajati aplikacijo za mobilni telefon in bi rad zaslužil vsaj 500EUR. Ocenjuje, da bo število uporabnikov, ki bi aplikacijo kupilo za določeno ceno c približno enako

$$\frac{1500}{c^2+2}.$$

Določi razpon cene, pri kateri bo Marko dosegel svoj cilj.

Zaslužek $\underbrace{\frac{1500}{c^2+2}}_{\text{pričakovano št. kupcev}} \cdot \underbrace{c}_{\text{cena aplikacije}} \geq 500$. $/\cdot (c^2+2)$ (Ker je $c^2+2>0$, se smer neenakosti ne zamenja.)

$1500 \cdot c \geq 500c^2 + 1000$ $/ : 500$

$3c \geq c^2 + 2$

$0 \geq c^2 - 3c + 2$. (To je v resnici (b) primer prejšnje naloge.)

$c \in [1,2]$

Marko naj postavi ceno od 1€ do 2€ za aplikacijo.