

Rešitve izpita 9.2.2021

1. [30 točk] Ugotovi, ali naslednje vrste konvergirajo. Tiste, ki konvergirajo, tudi seštej. Odgovore dobro utemelji!

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

Poišči tako število $x \in \mathbb{R}$, da bo vsota naslednje vrste enaka 3:

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Konvergenca geometrijske vrste

$$\sum_{m=0}^{\infty} a \cdot q^m$$

je odvisna od kvocienta q
(za $|q| < 1$ vrsta konvergira
za $|q| \geq 1$ vrsta divergira).

Za $|q| < 1$ je $\sum_{m=0}^{\infty} a \cdot q^m = \frac{a}{1-q}$.

a) $q = \frac{1}{3}$, $|q| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$

vrsta konvergira. 5 točk

Njena vsota je $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3^m} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

5 točk

$$b) q = 3, |q| = 3 > 1 \Rightarrow$$

vrsta divergira 5 točk

(Točke ste dobili tudi, če ste zapisali, da vrsta divergira, saj $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \neq 0$).

$$c) q = -1, |q| = 1 \not> 1 \Rightarrow$$

vrsta divergira 5 točk

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 3 \quad / \quad (1-x)$$

$$1 = 3(1-x)$$

$$1 = 3 - 3x$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

10 točk

2. [35 točk] Realna funkcija f ima predpis

$$f(x) = \frac{2x-1}{e^x}.$$

- (a) Poišči definicijsko območje in ničle funkcije f .
(b) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Uporabi L'Hospitalovo pravilo.
(c) Določi lokalni ekstrem funkcije f . Je dobljen ekstrem minimum ali maksimum? Utemelji.
(d) Skiciraj graf funkcije f .
(e) Poišči enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$.

a) $D_f : \mathbb{R}$ 2 točki

ničle: $f(x) = 0$
$$\frac{2x-1}{e^x} = 0$$

$$2x-1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

3 točke

b)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

6 točk

c) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{\cancel{2e^x} - (2x-1)\cancel{e^x}}{e^{2x}} = \frac{3-2x}{e^x} = 0$$

3 točke

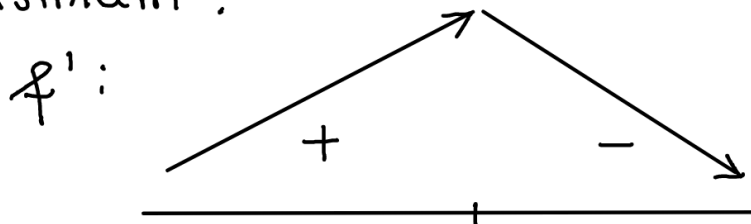
$$\frac{3-2x}{e^x} = 0$$

$$3-2x = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

3 točke

Pogledamo predznak odvoda levo in desno od stacionarne točke.
 Ugotovimo, da je v $x = \frac{3}{2}$ lokalni maksimum.



$$f'(0) = 3 > 0 \quad \frac{3}{2} \quad f'(2) = \frac{-1}{e^2} < 0$$

Drugi način, da ugotovimo, da je dobljena stacionarna točka maksimum, je naslednji:

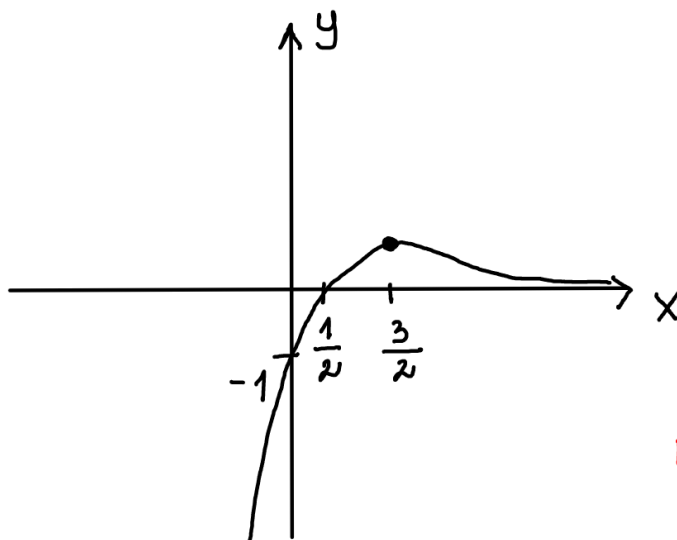
- izračunamo $f''(x) = \frac{(-2)e^x - (3-2x)e^x}{e^{2x}}$

$$= \frac{2x-5}{e^x}$$

- preverimo, da je $f''\left(\frac{3}{2}\right) < 0$.

4 točke

d)



4 točke

$$e) \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad 2 \text{ točki}$$

$$k_T = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} \quad 3 \text{ točke}$$

Enačba tangente na graf funkcije v točki $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$:

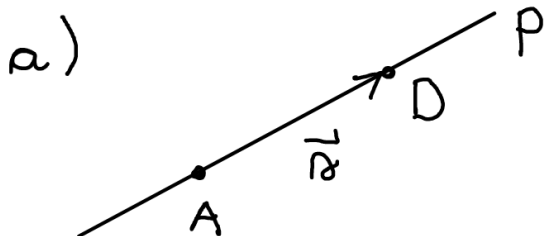
$$y - y_0 = k_T (x - x_0)$$

$$y = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad 3 \text{ točke}$$

$$\boxed{y = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} x - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} \quad 2 \text{ točki}$$

3. [35 točk] Dane so točke $A(5, 6, 7)$, $B(7, 6, 7)$, $C(5, 8, 7)$ in $D(9, 9, 9)$.

- Določi premico p skozi točki A in D . Enačbo premice zapiši v kanonični obliki.
- Določi enačbo ravnine Σ , ki gre skozi točke A , B in C .
- Določi razdaljo med ravnino Σ in točko D . Poišči še zrcalno sliko D' pri zrcaljenju točke D čez ravnino Σ .



$$\vec{r} = \overrightarrow{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2 točki

Enačba premice v kanonični obliki:

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-7}{2}$$

8 točk

e) $\vec{m} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2 \text{ točki}$$

$$\vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2 \text{ točki}$$

$$\vec{m} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 2 \text{ točki}$$

Enačba ravnine:

$$\vec{m} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{m} \cdot \vec{r}_A$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad 2 \text{ točki}$$

$$4z = 28$$

$$\boxed{z=7}$$

2 točki

c) Razdalja med ravnino Σ in točko D je enaka dolžini vektorja $\text{proj}_{\vec{m}} \vec{AD}$.

$$\text{proj}_{\vec{m}} \vec{AD} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{AD}}{|\vec{m}|^2} \cdot \vec{m} =$$

$$\vec{m} \cdot \vec{AD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 8 \quad 2 \text{ točki}$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = 4 \Rightarrow |\vec{m}|^2 = 16 \quad 2 \text{ točki}$$

$$\text{proj}_{\vec{m}} \vec{AD} = \frac{8}{16} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad 4 \text{ točke}$$

$$|\text{proj}_{\vec{m}} \vec{AD}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \underline{\underline{2}} \quad 2 \text{ točki}$$

Zrcalna slika D' :

$$\vec{r}_{D'} = \vec{r}_D - 2 \text{proj}_{\vec{m}} \vec{AD} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{D'(9, 9, 5)}$$

5 točk