Pravila za računanje odvodov funkcij

Če sta f in g odvedljivi funkciji, potem velja

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, kjer $g(x) \neq 0$
- $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)$ (**posredno odvajanje**)

Tudi vse te formule sledijo iz definicije odvoda:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Posredno odvajanje

- Formula za posredno odvajanje je še posebej pomembna in jo zelo pogosto uporabljamo. Formulo lahko ponazorimo 'grafično':

$$\left(f\left(\boxed{}\right)\right)' = f'\left(\boxed{}\right) \cdot \boxed{}\,'$$

- Primer: Izračunati želimo odvod funkcije $f(x) = \sin(\ln x)$.

$$\left(\sin\left(\boxed{\ln x}\right)\right)' = \cos\left(\boxed{\ln x}\right) \cdot \boxed{\ln x}\,' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

Primer

- Izračunajmo $(a^x)'$, če vemo, da je $(e^x)' = e^x$?
  - $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$
  - $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$
- Izračunajmo $(\log_a x)'$, če vemo, da je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$?
  - $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
  - $(\log_a x)' = (\frac{\ln x}{\ln a})' = \frac{(\ln x)'}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$

Primeri

Izračunajmo odvode:

1. $f(x) = \sqrt{x}$

   $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

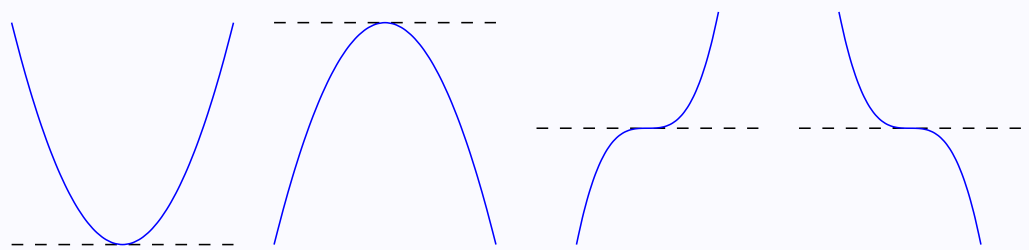
$$\begin{aligned}(\sqrt{x^2-1})' &= ((x^2-1)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2-1)' = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2-1})^{-1} \cdot (2x) = \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

Uporaba odvoda

S pomočjo odvoda določimo **naraščanje** in **padanje** funkcij ter **ekstreme** in **stacionarne točke**.

- Če je $f'(x_0) > 0$, je f v točki x_0 naraščajoča.
- Če je $f'(x_0) < 0$, je f v točki x_0 padajoča.
- Če je $f'(x_0) = 0$, ima f v točki x_0 **stacionarno** točko: **minimum**, **maksimum** ali **prevoj** (sedlo). V stacionarni točki je tangenta na graf vodoravna.

Primeri stacionarnih točk



lokalni min. lokalni max. sedlo sedlo

Višji odvodi

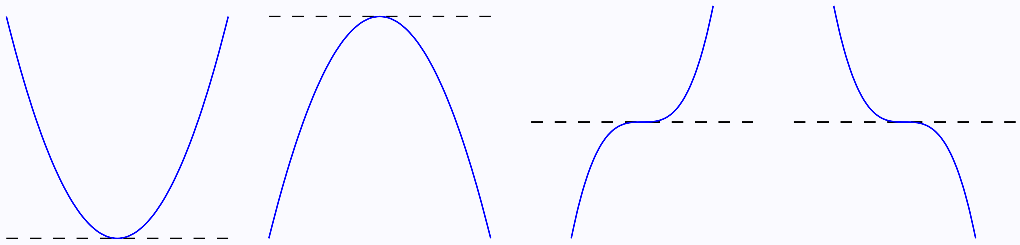
Funkcije lahko odvajamo tudi večkrat.

- Če odvod funkcije f' še enkrat odvajamo, dobimo **drugi odvod** funkcije

$$f''(x) = (f')'(x).$$

- Če je $f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) > 0$, potem je v x_0 lokalni minimum.
- Če je $f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) < 0$, potem je v x_0 lokalni maksimum.
- Če je $f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) = 0$, potem iz teh podatkov še ne znamo ugotoviti ali je v x_0 minimum, maksimum ali sedlo. Če je $f'''(x_0) \neq 0$ potem je v x_0 sedlo. Če pa je tudi $f'''(x_0) = 0$, moramo obravnavati še višje odvode. Sklepamo pa podobno kot pri zgornji uporabi prvega in drugega odvoda, le da uporabimo 'lihi' namesto 'prvi' in 'sodi' namesto 'drugi' odvod.

Primeri stacionarnih točk - ponovno

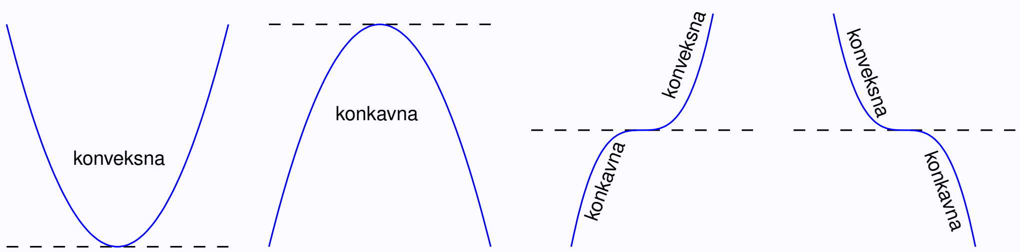


lokalni min.	lokalni max.	sedlo	sedlo
$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) > 0$	$f''(x_0) < 0$	$f''(x_0) = 0$	$f''(x_0) = 0$

Uporaba odvodov za risanje grafov

- Prvi odvod nam pove, kje funkcija narašča, kje pada in kje so stacionarne točke,
- Drugi odvod pove, kako se graf krivi:
  - kjer je $f''(x) \geq 0$, je f **konveksna**, graf funkcije f leži nad tangento grafa,
  - če je $f''(x) \leq 0$, je f **konkavna**, graf funkcije f leži pod tangento grafa.

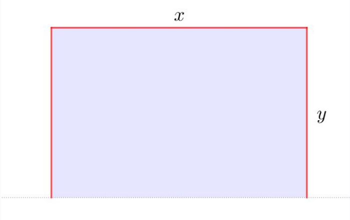
Uporaba odvodov za risanje grafov - primeri



lokalni min.	lokalni max.	sedlo	sedlo
$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$	$f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) > 0$	$f''(x_0) < 0$	$f''(x_0) = 0$	$f''(x_0) = 0$

Primer uporabe odvoda

Ob ravnem zidu želimo z 10 metrov dolgo ograjo zagraditi pravokoten prostor (kot kaže slika). Kakšen pravokotnik naj zagradimo, da bo ploščina ograjenega prostora največja?



- Z x označimo širino in z y višino ograjenega prostora.
- Potrebujemo $2y + x = 10$ metrov ograje. Torej $y = 5 - \frac{x}{2}$.

- Površina je $P = x \cdot y$. Torej $P(x) = x \cdot (5 - \frac{x}{2}) = 5x - \frac{1}{2}x^2$.
- Ekstrem bo dosežen pri $P'(x) = 5 - x = 0$. Torej $x = 5$ in $y = 2.5$.
- Rešitev je pravokotnik dimenzij 5×2.5.

Primer

Raziščimo stacionarne točke funkcije $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

- Izračunamo $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1$ in $x_2 = -1$.
- $f''(x) = 6x \Longrightarrow f''(1) > 0$ in $f''(-1) < 0$.
- $(1, 0)$ je **minimum**. $(-1, 4)$ je **maksimum**.

Primer

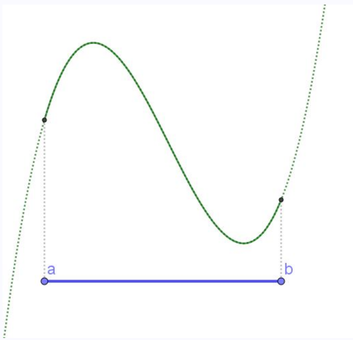
Kakšne oblike naj bo valjasta pločevinka s prostornino 1l, da bomo za izdelavo porabili najmanj pločevine?

- Če ima pločevinka premer $2r$ in višino v je njena prostornina $\pi r^2 v$. Ker 1 liter ustreza $1dm^3$, vzamemo za enoto decimeter. Torej $\pi r^2 v = 1$ in izrazimo $v = \frac{1}{\pi r^2}$.
- Površina je podana s formulo $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$. Torej $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\pi r}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$.
- $S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = 0 \Longrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \simeq 0.54$.
- $v = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \simeq 1.08$
- Pločevinka bo torej imela premer in višino oboje enako $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ dm, kar je 10.8 cm.

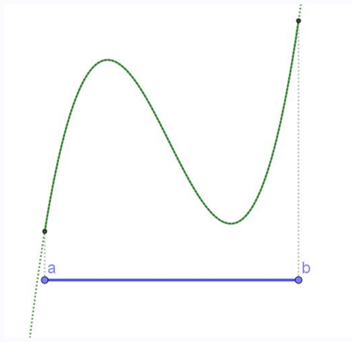
Globalni ekstremi

Odvedljiva funkcija doseže na zaprtem intervalu $[a, b]$ svoj maksimum in minimum

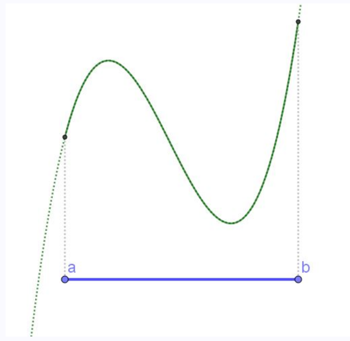
- v stacionarni točki ali
- na robu intervala



globalna ekstrema v stacionarnih točkah



globalna ekstrema na robu

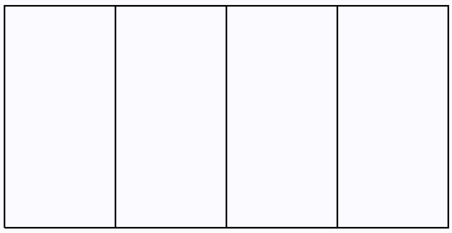


globalni max. na robu

globalni min. v stacionarni točki

Nekaj nalog za samostojno delo

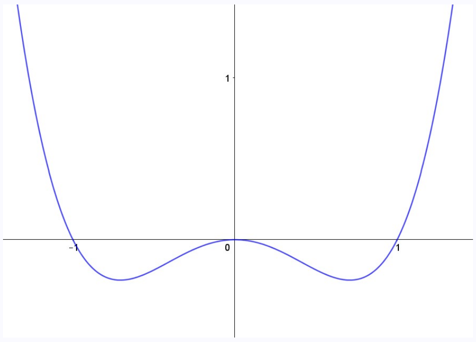
1. Za funkcijo $f(x) = x^4 - x^2$ določite ničle, intervale naraščanja in padanja, ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti ter čimbolj natančno narišite graf.
2. Kolikšni sta najmanjša in največja vrednost funkcije $f(x) = x^3 - 3x + 2$ na intervalu $[0, 2]$?
3. Kmet želi ograditi pašnik s štirimi prekati (kot kaže slika). Na razpolago ima $6\,000 m$ ograje. Kakšna naj bo ograjena površina, da bo površina pašnika največja?



Naloga 1.

- $f(x) = x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$
- $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$
- $f''(x) = 12x^2 - 2$

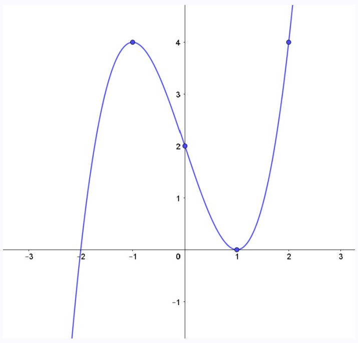
- Ničle: 0 $_{(2.st)}$, 1 $_{(1.st)}$, -1 $_{(1.st)}$
- Stacionarne točke: $(0,0)$ $_{\text{max}}$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4})$ $_{\text{min}}$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4})$ $_{\text{min}}$
- Pada: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; Narašča: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$
- Konveksna: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{6}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{6}}, \infty)$; Konkavna: $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$



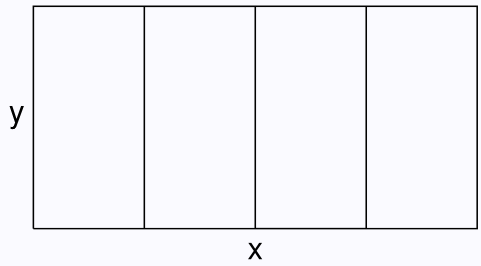
Naloga 2.

- $f(x) = x^3 - 3x + 2$
- $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$
- $f''(x) = 6x$

- Stacionarne točke: $(1,0)$ $_{\text{min}}$, $(-1,4)$ $_{\text{max}}$
- Na robovih $[0,2]$: $f(0) = 2$ in $f(2) = 4$
- Na $[0,2]$ funkcija zavzame minimalno vrednost 0 in maksimalno vrednost 4.



Naloga 3.

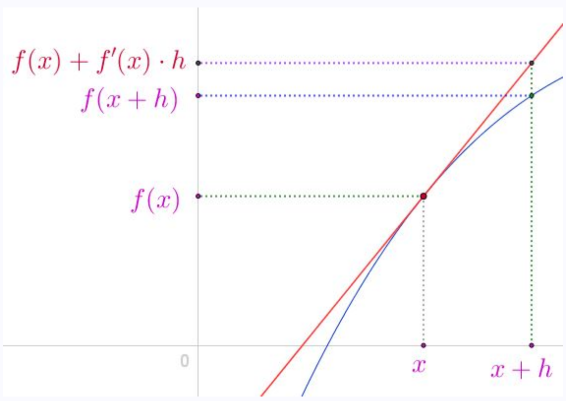


- $6\,000$ m = 6 km;
- Ograja: $2x + 5y = 6 \Longrightarrow y = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}x$
- Površina: $P(x) = x \cdot y = x \cdot (\frac{6}{5} - \frac{2}{5}x) = \frac{6x}{5} - \frac{2x^2}{5}$
- $P'(x) = \frac{6}{5} - \frac{4x}{5} = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$ in $y = \frac{3}{5} = 0.6$

Približek z diferencialom

- Odvod funkcije f zapišemo tudi: $f' = \frac{dy}{dx}$ oziroma $dy = f'dx$. Pri tem ima 'dx' pomen 'majhne spremembe' ali diferenciala x-a, 'dy' pa 'majhne spremembe' y-a. Ker z y označujemo funkcijske vrednosti, lahko zapišemo tudi $df = f'dx$.
- Tangenta v $x_0 : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Tangenta se blizu x_0 dobro prilega grafu f. Uporabimo jo za približke bližnjih vrednosti funkcije. **Pomembno je razumeti geometrijski pomen** $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$, oziroma
$$f(x + h) \simeq f(x) + f'(x)h$$

Geometrijski pomen diferenciala



- Velja $f(x + h) - f(x) \simeq f'(x)h$. Manjši kot je h boljši je približek.
- $df = f'dx$ velja natančno, ker je $h = dx$ infinitezimalno majhen.

Dinamična vizualizacija na https://ggbm.at/udtmjs5p v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

Primera

- S pomočjo diferenciala približno izračunajmo $\sqrt{0.98}$.

  Za $f(x) = \sqrt{x}$ bi radi približno izračunali $f(0.98)$.
  Ker je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, velja
  $f(0.98) = f(1 - 0.02) \doteq f(1) + f'(1)(-0.02) = 1 - \frac{0.02}{2} = 1 - 0.01 = 0.99.$
  Napaka, ki smo jo pri tem računu naredili je manjša od 0.0001.

- S pomočjo diferenciala približno izračunajmo $\sin(2^o)$.

  Za $f(x) = \sin x$ bi radi približno izračunali $f(\frac{2\pi}{180})$.
  (Ne pozabimo, da moramo računati v radianih.)
  Ker je $f'(x) = \cos x$, velja
  $f(\frac{2\pi}{180}) = f(0 + \frac{\pi}{90}) \doteq f(0) + f'(0)\frac{\pi}{90} = 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{90} = \frac{\pi}{90} = 0.03490.$
  Napaka, ki smo jo pri tem računu naredili je manjša od 0.000001.