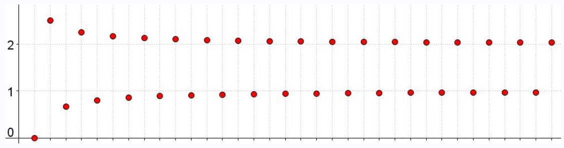
## Stekališče zaporedja

- Intuitivno: **Stekališče** zaporedja je število k kateremu se 'steka' neskončno členov zaporedja.
- Natančneje povedano: **Stekališče** zaporedja je tako število, da je v vsaki njegovi okolici neskončno členov zaporedja.
- Zaporedje ima lahko več stekališč (na sliki so členi zaporedja z dvema stekališčema predstavljeni kot točke v ravnini $(n, a_n)$):




Primer takega zaporedja je na primer $a_n = \frac{3}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n+2}{2n}$. Vizualizacija https://www.geogebra.org/m/hakzxd8b



## Limita zaporedja

**Limita** zaporedja je tako število, da je v vsaki njegovi okolici neskončno členov, zunaj te okolice pa končno členov zaporedja.

- Lahko rečemo tudi: **Limita** zaporedja $a_n$ je tako število $L$, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $N \in \mathbb{N}$, da velja $|L - a_n| < \varepsilon$ za vse $n \geq N$.
- Limito zaporedja $a_n$ označimo $\lim_{n \to \infty} a_n$.
- Zaporedje ima lahko več stekališč. Če ima zaporedje več stekališč, **nima** limite.
- Zaporedje ima lahko tudi eno samo stekališče, pa vseeno to stekališče ni nujno limita.
- Limita zaporedja je stekališče. Obratno pa ni nujno res.

## Konvergentno zaporedje

Zaporedje je **konvergentno**, če ima limito. Sicer je **divergentno**.

- Naraščajoče in navzgor omejeno zaporedje je konvergentno.
- Padajoče in navzdol omejeno zaporedje je konvergentno.

## Računanje limit

Če je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ potem velja:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = ab$
3. če je $b_n \neq 0$ za vsak $n$ in $b \neq 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.
4. če je $a_n > 0$ za vsak $n$ in $a > 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

### Primer 1

$a_n = 1, b_n = \frac{1}{n} \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$

### Primer 2

$a_n = 3, b_n = \frac{1}{n} \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (3\frac{1}{n}) = 0$



### Primer 3

Radi bi izračunali $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1}$. Najprej poračunamo

$$\frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1} = \frac{n^2+4n+4}{3n^2+n+1} = \frac{1+4\frac{1}{n}+4\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Vzamemo $a_n = 1 + 4\frac{1}{n} + 4\frac{1}{n^2}$ in $b_n = 3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.

Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$, izračunamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{3n^2+n+1} = \frac{1}{3}$.

### Primer 4

Radi bi izračunali $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$.

Zapišemo $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$. Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$ in $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, je

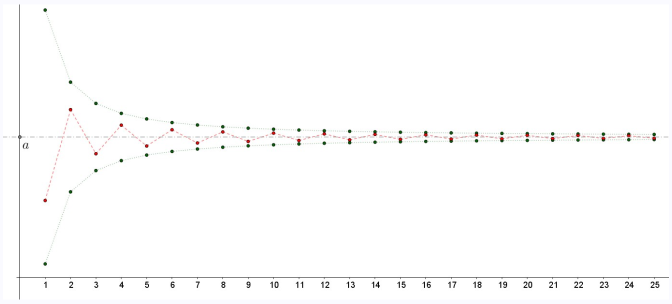
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

## Izrek 'o sendivču'

Če za vsak $n$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$ in $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, je tudi

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Grafični prikaz




Vizualizacija:
https://www.geogebra.org/m/dwzvubrx

## Primer

Izračunajmo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} =$

$$\begin{array}{ccccc}
-1 & \leq & \sin n & \leq & 1 \\
\frac{-1}{n} & \leq & \frac{\sin n}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
0 & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} & \leq & 0
\end{array}$$



## Primeri zaporedij

- $a_n = (-1)^n$ ........................................ $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ ne obstaja.
- $a_n = 0.\underbrace{333\ldots3}_{n}$ ........................................ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$
- $a_n = \frac{1}{n^2}$ ........................................ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $a_n = \frac{(1-n)^3}{1+2n^2+3n^3}$ ........................................ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-n)^3}{1+2n^2+3n^3} = -\frac{1}{3}$
- $^*a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ........................................ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828\ldots$
- $^*a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ ........................................ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e = 2,71828\ldots$
- $^*a_n = \sqrt[n]{n}$ ........................................ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

## Vrste

### Še o zaporedjih

Zaporedja števil že poznamo. Na primer

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

je zaporedje, ki ga krajše in točneje zapišemo kot $a_n = n$. Zaporedja so lahko končna ali neskončna. Še posebej ko zapišemo zaporedje s splošnim členom, imamo v mislih neskončno zaporedje. Zaporedje je pa seveda lahko tudi končno. Ponovimo, pri zaporedjih smo znali obravnavati

- naraščanje in strogo naraščanje
- padanje in strogo padanje
- omejenost, omejenost navzgor in omejenost navzdol
- stekališča
- limite (konvergentnost in divergentnost)



Zapišimo nekaj zaporedij s splošnim členom in nakažimo pripadajoče končno zaporedje 5-ih členov ter ustrezno neskončno zaporedje:

| splošni člen | zaporedje 5-ih členov | neskončno zaporedje |
|---|---|---|
| $a_n = n$ | $1, 2, 3, 4, 5$ | $1, 2, 3, \dots$ |
| $a_n = (-1)^n$ | $-1, 1, -1, 1, -1$ | $-1, 1, -1, \dots$ |
| $a_n = \frac{1}{n}$ | $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ | $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots$ |
| $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ | $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ | $\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2} \dots$ |

Precej očitni so naslednji razmisleki:

- O naraščanju in padanju lahko govorimo tako pri končnih kot pri neskončnih zaporedijih. Za zgornja zaporedja hitro ugotovimo, da je prvo naraščajoče in strogo naraščajoče. Drugo ni niti naraščajoče niti padajoče. Tretje je padajoče in strogo padajoče. Prav tako je četrto zaporedje padajoče in strogo padajoče.

| splošni člen | zaporedje 5-ih členov | neskončno zaporedje |
|---|---|---|
| $a_n = n$ | $1, 2, 3, 4, 5$ | $1, 2, 3, \ldots$ |
| $a_n = (-1)^n$ | $-1, 1, -1, 1, -1$ | $-1, 1, -1, \ldots$ |
| $a_n = \frac{1}{n}$ | $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ | $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$ |
| $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ | $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ | $\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2} \ldots$ |

- O omejenosti lahko govorimo tako pri končnih kot pri neskončnih zaporedjih. Seveda so vsa končna zaporedja omejena. (Razmislimo zakaj!) Za neskončna zaporedja pa je razmislek o omejenosti lahko bolj zapleten. Razmislimo da za zgornja neskončna zaporedja velja naslednje: Prvo je omejeno navzdol, ni pa omejeno navzgor. Drugo je omejeno (navzgor in navzdol). Prav tako sta tretje in četrto zaporedje omejeni (navzgor in navzdol).
- Pri končnih zaporedjih je nesmiselno govoriti o stekališčih, oziroma, končno zaporedje gotovo nima stekališč. Za zgornja neskončna zaporedja velja: Prvo nima stekališč. Drugo ima dve stekališči in sicer 1 in $-1$. Tretje ima eno stekališče in sicer 0. Prav tako je 0 stekališče četrtega zaporedja.



| splošni člen | zaporedje 5-ih členov | neskončno zaporedje |
|---|---|---|
| $a_n = n$ | $1, 2, 3, 4, 5$ | $1, 2, 3, \ldots$ |
| $a_n = (-1)^n$ | $-1, 1, -1, 1, -1$ | $-1, 1, -1, \ldots$ |
| $a_n = \frac{1}{n}$ | $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ | $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$ |
| $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ | $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ | $\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2} \ldots$ |

- Pri končnih zaporedjih je nesmiselno govoriti o limitah, oziroma, končno zaporedje gotovo nima limite. Za zgornja neskončna zaporedja velja: Prvo nima limite. To bi lahko sklepali že iz dejstva, da nima stekališč. Drugo nima limite. Tudi to bi lahko sklepali iz dejstva, da ima zaporedje dve stekališči. Tretje ima limito 0. Prav tako je 0 limita četrtega zaporedja.

## Vrste

Kaj je **vrsta**?

Vrsto lahko razumemo (oziroma je v matematiki definiramo) kot vsoto členov zaporedja. Intuitivno si vrsto predstavljamo kot zapis, kjer smo 'v zaporedju vejice zamenjali s plusi'. V primeru zgornjih štirih, oziroma osmih zaporedij, bomo, če vejice zamenjamo s plusi, dobili

| splošni člen | vrsta 5-ih členov | neskončna vrsta |
|---|---|---|
| $a_n = n$ | $1+2+3+4+5$ | $1+2+3+\dots$ |
| $a_n = (-1)^n$ | $-1+1-1+1-1$ | $-1+1-1+\dots$ |
| $a_n = \frac{1}{n}$ | $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$ |
| $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ | $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots$ |

Iz končnih zaporedij tako dobimo **končne vrste** (ali v tem primeru upravičeno rečemo kar vsote), ki jih vedno lahko izračunamo.



V zgornjih štirih primerih bi tako vsote (končne vrste) zaporedoma izračunali

$$1+2+3+4+5=15$$
$$-1+1-1+1-1=-1$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$$

Pri neskončnih vrstah so pa stvari bolj zapletene in tudi bolj zanimive. Dobesedno o vsoti neskončno mnogo členov ne moremo govoriti, saj je nemogoče dejansko sešteti neskončno členov.

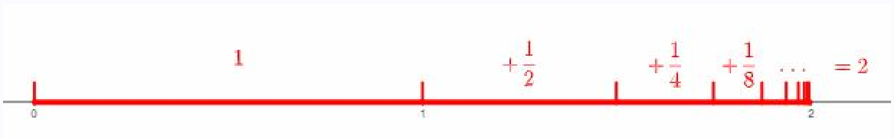
Preden natančneje pogledamo, kaj **neskončna vrsta** sploh pomeni, si na zgornjih štirih primerih oglejmo intuitiven pomen 'neskončnega seštevanja'.

## Intuitivni pogled na neskončno vrsto

- Kaj bi $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ sploh lahko pomenilo? Očitno je, da z dodajanjem (seštevanjem) vedno večjih zaporednih števil ta 'skupna vsota' postaja vse večja, oziroma, da so vsote, ki jih tako dobivamo neomejene. Smiselno bo torej reči, da v takem primeru neskončne vsote ni mogoče smiselno izračunati, oziroma, da vsota ne obstaja. Vsoto si lahko predstavljamo kot potovanje v desno na način, da je vsak korak še daljši od prejšnjega. Neobstoj vsote si lahko predstavljamo kot neomejenost potovanja v desno.
- Kaj pa $-1 + 1 - 1 + \dots$ ? Če tu razmišljamo, da bi vsoto začeli računati z zaporednim dodajanjem členov, bi izmenoma dobili vsoto $-1$ in 0. Če seštejemo pet členov dobimo $-1$, če seštejemo šest členov dobimo 0, če seštejemo sedem členov dobimo spet $-1$, ..., če seštejemo 131 členov dobimo $-1$, če seštejemo 132 členov dobimo 0 in tako naprej. Na drugačen način kot v prejšnjem primeru, a spet se zdi, da je to neskončno vsoto nemogoče izračunati, oziroma, da ne obstaja. Vsoto si lahko predstavljamo kot potovanje, kjer naredimo en korak v desno in naslednjega v levo. Neobstoj vsote si lahko predstavljamo kot neskončno spreminjanje lege.



- Primer $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ je spet povsem drugačen in bomo videli pozneje, tudi zapleten. Z vsakim prištetim številom sicer vsoto povečamo, a dodajamo vse manjša števila in ni čisto jasno, kaj to pomeni. Vsoto si lahko predstavljamo kot neskončno potovanje v desno, pri čemer so naši koraki sicer vse krajši, a vseeno nikakor ni jasno, kako daleč uspemo priti.
- Primer $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ je poučen in intuitivno poveden. Tu lahko zaporedno prištevanje členov razumemo na sledeči način. S prvim členom smo pri 1 torej na polovici poti med 0 in 2. Ko dodamo $\frac{1}{2}$, smo razdaljo do 2 še razpolovili. Ko dodamo še $\frac{1}{4}$, smo preostanek poti do 2 ponovno razpolovili in tako naprej v neskončnost. Tu postane pomen te vsote precej drugačen in intuitivno jasen. Očitno je, da se vse bolj približujemo številu 2. Dlje kot seštevamo, bližje smo 2 (skica spodaj). V tem primeru bo torej smiselno reči, da ta neskončna vsota (**neskončna vrsta**) obstaja in je enaka 2.




Intuitivno pomen te (geometrijske) vrste lepo ponazori dinamična vizualizacija https://ggbm.at/xruhpnuw v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5.

### Definicija (končne) vrste

**Vrsta** je lahko končna vsota členov:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k,$$

ki jo zapišemo krajše s sumacijskim znakom

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

### Primer 1

- Za $a_i = i$ lahko zapišemo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{i=1}^{5} i = 15$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = \sum_{i=1}^{100} i = 5\,050$$



### Primer 2

- Za $a_i = \frac{1}{i}$ lahko zapišemo:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i} = \frac{137}{60} \doteq 2.2833$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{77} = \sum_{i=1}^{77} \frac{1}{i} \doteq 4.9275$$

### Definicija (neskončne) vrste

(Neskončna) **vrsta** je simbolična vsota

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

ki jo zapišemo krajše s sumacijskim znakom

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Njena vrednost je določena z **limito**

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

ali s sumacijskim znakom

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Za neskončno vrsto $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, rečemo, da je

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$n$-ta delna vsota te vrste. Vrednost neskončne vrste torej definiramo kot **limito njenih delnih vsot**.



Vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je **konvergentna**, če je konvergentno zaporedje delnih vsot $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Vrsta je torej konvergentna, če lahko smiselno govorimo o njeni vsoti. Vrsta, ki ni konvergentna, je **divergentna**.

### Geometrijska vrsta

Spomnimo se produkta vsote in razlike in množenja polinomov/izrazov.

$$\begin{array}{lcl}
(1-x)(1+x) & = & 1-x^2 \\
(1-x)(1+x+x^2) & = & 1-x^3 \\
(1-x)(1+x+x^2+x^3) & = & 1-x^4 \\
\ldots & & \\
(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) & = & 1-x^{n+1}
\end{array}$$

Od tu dobimo formulo

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

## Geometrijska vrsta - nadaljevanje

Spomnimo se, da je

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^n, \dots$$

geometrijsko zaporedje z začetnim členom $a$ in količnikom $q$. Končni vsoti

$$\sum_{i=0}^{n} aq^i = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n$$

bomo zato rekli (končna) geometrijska vrsta. Iz zgornje formule takoj dobimo

$$\sum_{i=0}^{n} aq^i = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Neskončni vsoti

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} aq^i$$

bomo rekli (neskončna) geometrijska vrsta. Po definiciji (neskončne) vrste je zato

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} aq^i &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{i=0}^{n} aq^i = \\
&= \lim_{n\to\infty} (a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n) = \\
&= a \cdot \lim_{n\to\infty} (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) = \quad \text{in po prejšnji formuli} \\
&= a \cdot \lim_{n\to\infty} \tfrac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}$$



## Geometrijska vrsta - nadaljevanje

Ker je

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{za } |q| < 1 \\ \infty & \text{za } |q| > 1 \end{cases}$$

dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{za } |q| < 1 \\ \text{ne obstaja} & \text{za } |q| \geq 1 \end{cases}$$

Torej za vsoto (neskončne) geometrijske vrste velja

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & \text{za } |q| < 1 \\ \text{ne obstaja} & \text{za } |q| \geq 1 \end{cases}$$

## Primer 1

Za $a = 1$ in $q = \frac{1}{2}$ in ker je $|\frac{1}{2}| < 1$, dobimo konvergentno vrsto

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

katere vsota se ujema s četrtim primerom 'intuitivne obravnave' na začetku tega poglavja.

Intuitivni vpogled v numerični izračun https://www.geogebra.org/m/vrj77ckq.

## Primer 2

Za $a = 2$ in $q = \frac{1}{3}$ in ker je $|\frac{1}{3}| < 1$, dobimo konvergentno vrsto

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3.$$



## Primer 3

Za $a = 1$ in $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ in ker je $|\frac{1}{\sqrt{3}}| < 1$, dobimo konvergentno vrsto

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}.$$

## Primer 4

Za $a = 1$ in $q = \sqrt{3}$ in ker je $|\sqrt{3}| \geq 1$, dobimo divergentno vrsto

$$1 + \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{3}^i.$$

## Splošno o konvergencah vrst - nadaljevanje

- Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Obratno pa ni nujno res. **Harmonična vrsta**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ni konvergentna. To je nekoliko težje razumeti in dokazati. Pomeni pa, da če bi dovolj dolgo seštevali člene v tej vrsti, bi prišli do poljubno velikega števila.

- Če za pozitivne člene $a_n$ velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ konvergentna. Slednje je mogoče intuitivno hitro razumeti na sledeči način: Gibljemo se tako, da so naši koraki vse manjši in se približujejo 0 in obenem sta vsaka dva zaporedna koraka v obratni smeri. Če bi opazovali tako gibanje, bi izgledalo kot 'dušeno nihanje' desno-levo proti točki, ki predstavlja limito in končno vrednost vrste.



## Splošno o konvergencah vrst

- Za primer $a_n = \frac{1}{n}$ torej velja, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergentna, medtem ko je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

konvergentna in torej obstaja njena vsota. Vsote $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ni lahko izračunati, izkaže pa se, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 = -0.693147\dots.$$

Intuitivno konvergenco in divergenco zgornjih vrst ponazorita dinamični vizualizaciji https://www.geogebra.org/m/zkkz3kww in https://www.geogebra.org/m/sfebjvtf v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5.

## Funkcije - Splošno

### Kaj je funkcija?

Najprej bomo obravnavali preproste funkcije. To so številske funkcije ene spremenljivke.

**Funkcija** je predpis, ki vsakemu elementu $x$ iz **definicijskega območja** $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ priredi natanko določeno število $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

- Neodvisno spremenljivko, imenovano tudi **argument**, običajno označimo z $x$.
- Odvisno spremenljivko običajno označimo z $y = f(x)$. 'Odvisnost' se tu nanaša na odvisnost od neodvisne spremenljivke $x$ in seveda od predpisa funkcije $f$.
- **Definicijsko območje** $\mathcal{D}_f$ so vse vrednosti $x$, za katere lahko izračunamo $f(x)$, oziroma, za katere ima predpis $f(x)$ smisel.
- **Zaloga vrednosti** $\mathcal{Z}_f = f(\mathcal{D}_f)$ so vse vrednosti $y$, ki jih dobimo kot $y = f(x)$, ko neodvisna spremenljivka $x$ preteče celo definicijsko območje $\mathcal{D}_f$.



### Kaj je graf funkcije?

**Graf** funkcije $f$ je množica točk $(x, f(x))$ v ravnini

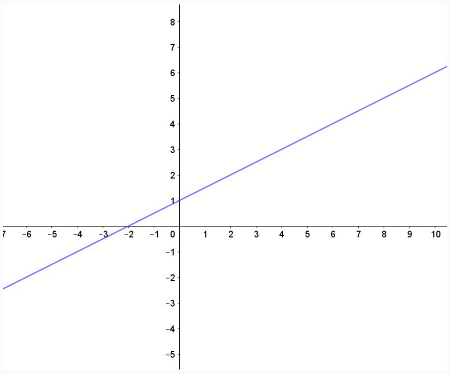
$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

To so vse točke s koordinatami $(x, f(x))$, ko vrednosti neodvisne spremenljivke $x$ pretečejo vse vrednosti $\mathcal{D}$.

- Graf funkcije $f$ je krivulja v ravnini.
- Iz definicije funkcije sledi, da graf funkcije seka poljubno navpično premico največ v eni točki. Namreč, za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ dobimo točno določeno (in samo eno!) vrednost $f(x)$.

### Primer 1

Za funkcijo $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ velja

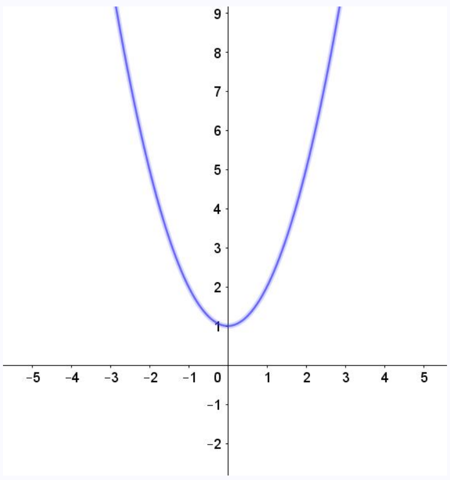


- Definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ so vsa realna števila, saj lahko za neodvisno spremenljivko $x$ v funkcijo vstavimo poljubno število $x \in \mathbb{R}$.
- Zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$ so vsa realna števila, saj lahko v obliki $\frac{1}{2}x + 1$ zapišemo vsako število $y \in \mathbb{R}$.
- Definicijsko območje, zalogo vrednosti in mnoge druge lastnosti funkcije lahko nazorno interpretiramo tudi iz grafa (skica levo), katerega v našem primeru predstavljajo vse točke oblike $(x, \frac{1}{2}x + 1)$, ko $x$ preteče definicijsko območje $\mathcal{D}_f$.



### Primer 2

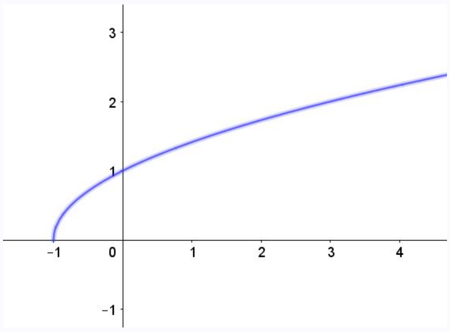
Za funkcijo $f(x) = x^2 + 1$ velja



- Definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ so vsa realna števila, saj lahko za neodvisno spremenljivko $x$ v funkcijo vstavimo poljubno število $x \in \mathbb{R}$.
- Zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$ so vsa realna števila, ki so večja ali enaka 1, saj lahko v obliki $x^2 + 1$ zapišemo samo števila iz intervala $[1, \infty)$. Torej $\mathcal{Z}_f = [1, \infty)$.
- Vse povedano lahko ponazorimo tudi na grafu (skica levo), katerega v našem primeru predstavljajo vse točke oblike $(x, x^2 + 1)$, ko $x$ preteče definicijsko območje $\mathcal{D}_f$.

## Primer 3

Za funkcijo $f(x) = \sqrt{x+1}$ velja




- Definicijsko območje $\mathcal{D}_f$ so vsa realna števila, ki so večja ali enaka $-1$. Kvadratni koren namreč lahko izračunamo le za pozitivna števila, torej mora veljati $x \geq -1$ in je $\mathcal{D}_f = [-1, \infty)$.
- Zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$ so vsa pozitivna realna števila. Torej $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$. **Poudarimo:** Ko govorimo o funkciji, ki je določena s kvadratnim korenom, za vrednost korena vedno vzamemo samo pozitivno vrednost.

  Na primer, v našem primeru za $f(x) = \sqrt{x+1}$ velja $f(3) = 2$ in $f(3) \neq -2$. Dve različni vrednosti funkcije pri isti neodvisni spremenljivki $x = 3$ bi bile namreč v nasprotju z definicijo funkcije.
- Vse povedano je ponazorjeno tudi na grafu (skica desno), katerega v našem primeru predstavljajo vse točke oblike $(x, \sqrt{x+1})$, ko $x$ preteče definicijsko območje $\mathcal{D}_f$.



## Funkcije: naraščanje in padanje

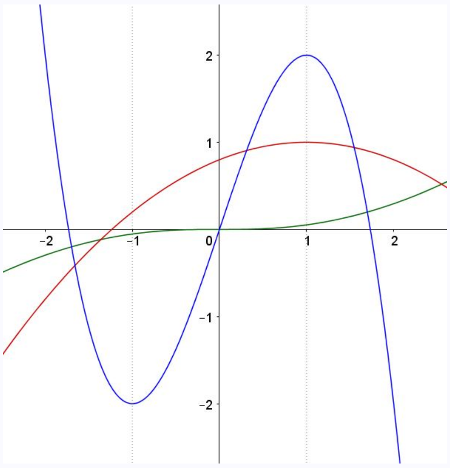
Če za funkcijo na nekem intervalu iz definicijskega območja velja

- $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, rečemo, da funkcija na tem intervalu **narašča**.
- $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, rečemo, da funkcija na tem intervalu **pada**.

Pomen naraščanja in padanja funkcije sovpada z naraščanjem in padanjem grafa funkcije v smeri od leve proti desni.

## Primer

Za funkcije na sliki velja




- Zelena: narašča povsod.
- Rdeča: narašča na $(-\infty, 1]$ in pada na $[1, \infty)$.
- Modra: narašča na $[-1, 1]$ in pada na $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

---

- Z računom bi na primer za 'rdečo' funkcijo $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ in za poljubni dve števili $x_1 \leq x_2$ iz intervala $(-\infty, 1]$ dobili $f(x_1) \leq f(x_2)$.

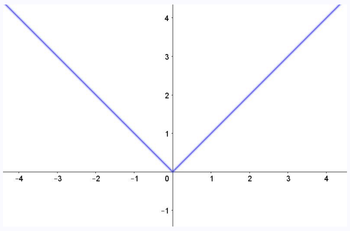
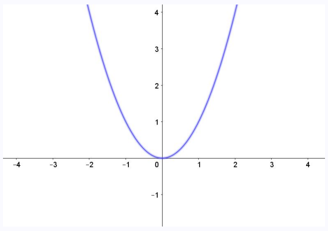
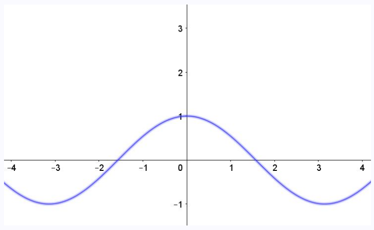
  Vzemimo na primer $-1 \leq 0$ in izračunamo $f(-1) = \frac{1}{5} \leq \frac{4}{5} = f(0)$.

## Sode in lihe funkcije

- Funkcija $f(x)$ je **soda**, če je simetrična preko $y$ osi. Zapišemo: $f(-x) = f(x)$. Soda funkcija ima torej isto vrednost pri $x$-u kot pri $-x$-u.
- Funkcija $f(x)$ je **liha**, če je simetrična preko izhodišča. Zapišemo: $f(-x) = -f(x)$.
  Liha funkcija ima torej pri $x$-u obratno predznačeno in po absolutni vrednosti isto vrednost kot pri $-x$-u.

### Primer 1

Funkcije $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ in $h(x) = \cos x$ so zaporedoma predstavljene na spodnjih treh grafih:

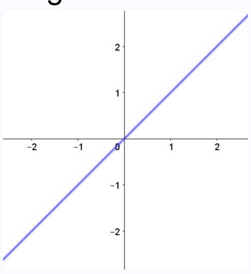
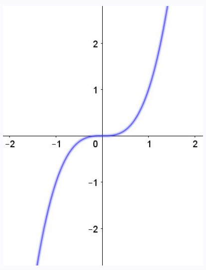
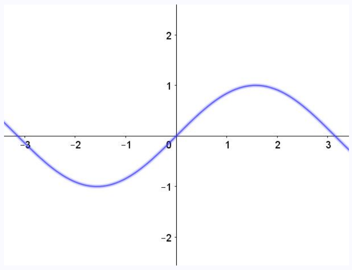




Vse tri funkcije so sode.



### Primer 2

Funkcije $f(x) = x$, $g(x) = x^3$ in $h(x) = \sin x$ so zaporedoma predstavljene na spodnjih treh grafih:

Vse tri funkcije so lihe.