Ponovimo (odstotki): Primer 3

Vrednost delnice se je v zadnjih šestih mesecih vsak mesec spremenila zaporedoma za: $+2$ %, $+2.3$ %, $+1.4$ %, -1.8 %, -2.1 %, -1.9 %. Je v pol leta vrednost delnice narasla ali padla?

- Zaporedni mesečni obrestovalni faktorji za vrednost delnice so torej $1.02, 1.023, 1.014, 0.982, 0.979, 0.981$.
- Če je bila V začetna vrednost delnice, bo končna vrednost torej enaka produktu $V \cdot 1.02 \cdot 1.023 \cdot 1.014 \cdot 0.982 \cdot 0.979 \cdot 0.981 \approx V \cdot 0.9979$, kar pomeni, da se je vrednost delnice skupno znižala za 0.21 % .

Primer 4

Zmešamo 2 litra 10%, 4 litre 15% in 6 litrov 12% mešanice. Koliko odstotno mešanico dobimo?

- Razmerje npr. $\frac{\text{alkohol}}{\text{alkohol+voda}}$: $\frac{2\times 0.1+4\times 0.15+6\times 0.12}{2+4+6} = 0.13 \longrightarrow 13\%$

Absolutna vrednost

Absolutna vrednost $|x|$ števila $x \in \mathbb{R}$ je razdalja števila x od števila 0 na številski premici in je enaka

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Razdalja med številoma x in y je enaka $|x-y|$.

- Dinamične ilustracije: https://www.geogebra.org/m/pgxp7m7u in https://www.geogebra.org/m/UEXHvvRk v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

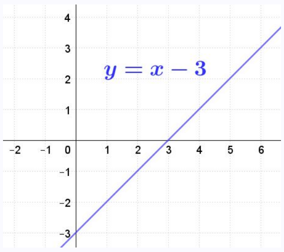
Osnovne lastnosti:

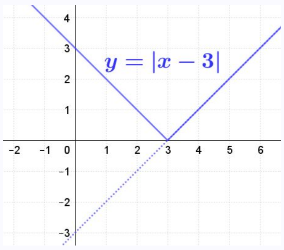
- $|x| \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$
- $|xy| = |x||y|$
- *trikotniška neenakost*: $|x+y| \leq |x| + |y|$

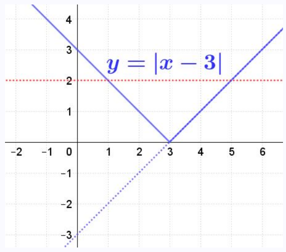
Absolutna vrednost geometrijsko

Določimo množico realnih števil, x, za katere velja $|x-3| \leq 2$.

- Način 1: To so vsa števila, ki so od 3 oddaljena manj ali enako 2. Če si to narišemo na številsko premico, je očitno, da je $x \in [1,5]$.
- Način 2: Zaporedoma obravnavamo skice







in ugotovimo, da je $|x-3| \leq 2$ za $x \in [1,5]$.

Naloge

- Določimo množico realnih števil, x, za katere velja $|x-3| = |x+1|$.
- Določimo množico realnih števil, x, za katere velja $||x-2|-2| < 1$.
- Določimo množico točk (x,y) v ravnini, za katere velja $|x| + |y| < 1$.

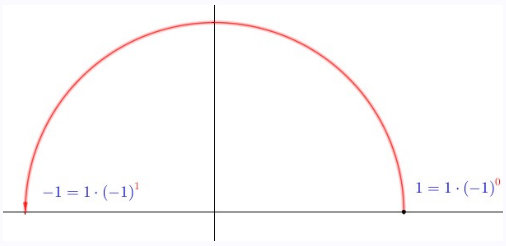
Kompleksna števila

Kompleksna števila so 'kompleksna' števila ali tudi 'dvodimenzionalna števila' s katerimi lahko uspešno računamo v ravnini.

Na $\mathbb{R}$ osi velja

$$1 = 1 \cdot (-1)^{0} \quad \text{in} \quad -1 = 1 \cdot (-1)^{1}$$

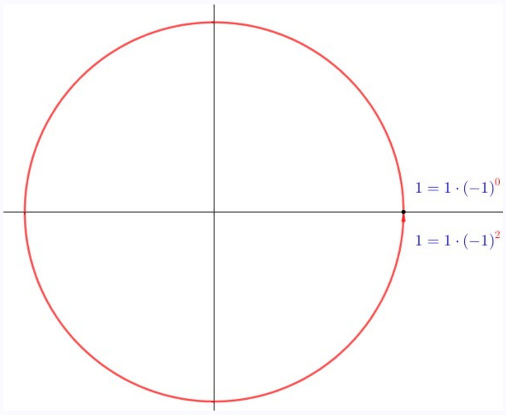
pri čemer nam rdeča potenca šteje kolikokrat smo število 1 zavrteli okrog izhodišča za 180^o v pozitivni smeri.



Tudi pomen dvakratnega vrtenje okrog izhodišča za 180^o v pozitivni smeri se ujema s preprosto enačbo

$$1 = 1 \cdot (-1)^{2}$$

in enako velja za vse cele potence $1 \cdot (-1)^{n}$.

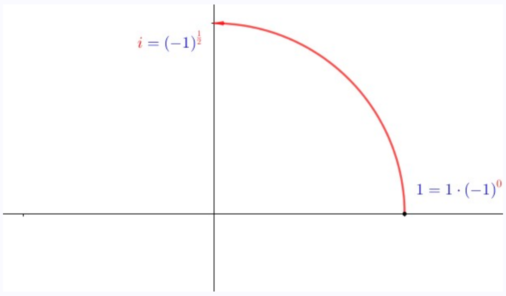


Imaginarna enota i

Če

$$1 \cdot (-1)^{\frac{1}{2}}$$

interpretiramo kot rotacijo števila 1 za polovico od 180^o, torej za 90^o okrog izhodišča v pozitivni smeri in to število označimo kot imaginarno enoto

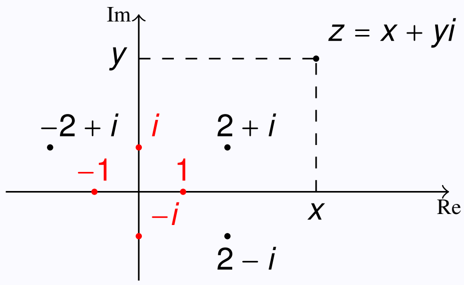


$$i = \sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} \quad \longrightarrow \quad i^2 = -1$$

dobimo novo in zelo uporabno teorijo kompleksnih števil, ki omogoča računanje v ravnini.

Kompleksno število $\quad z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R},$
ima

- $x = \mathrm{Re}\,(z)$ realni del
- $y = \mathrm{Im}\,(z)$ imaginarni del



Oznaka za množico kompleksnih števil : $\mathbb{C}$

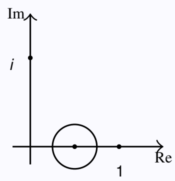
Absolutna vrednost

Absolutna vrednost kompleksnega števila z

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

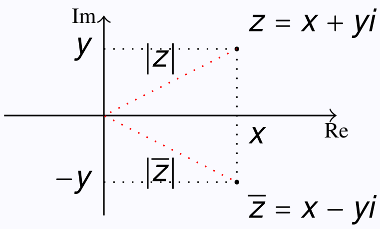
podobno kot pri realnih številih pomeni razdaljo števila od izhodišča.

- Absolutna vrednost razlike dveh kompleksnih števil pomeni razdaljo med številoma. Enačbo $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ rešijo vsa števila $z \in \mathbb{C}$, ki ležijo na krožnici s središčem v $\frac{1}{2}$ in radijem $\frac{1}{4}$.



Računanje v $\mathbb{C}$

- Konjugiranje:



$\overline{x + yi} = x - yi$ je konjugirano število.

Primer: $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$.

- Seštevanje in odštevanje: $(x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$

  Primer: $(3 + 2i) + (1 - i) = (3 + 1) + (2 - 1)i = 4 + i$
- Množenje: $(x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i$

  Primer: $(3 + 2i)(1 - i) = 3 + 2i - 3i - 2i^2 = 3 - i - 2(-1) = 5 - i$

- Deljenje?
  Opazimo na primer: $(3+2i)(3-2i) = 9+6i-6i+4 = 13 = |3+2i|^2 \in \mathbb{R}$
  V splošnem: $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$
  Od tu dobimo formulo za deljenje: $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$
  Primer 1: $\frac{3-2i}{1+i} = \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$
  Primer 2: $\frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{13-13i}{13} = 1-i$

Nekatere lastnosti

- Dve kompleksni števili sta enaki, kadar imata enaka realna in imaginarna dela.
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z, \quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$ (trikotniška neenakost)

Primeri

Izračunajmo
- $(1+i)^2$
- $\frac{1-i}{1+i}$
- $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2016}$

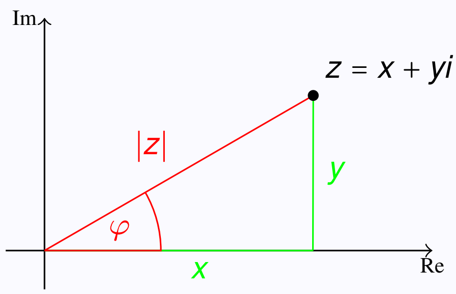
Opišimo množico kompleksnih števil $z \in \mathbb{C}$, za katere velja
- $2z + 6i = 8$
- $z + \overline{z} = 5$
- $zi + 1 - i = 2(z-i)$
- $|z-1-i|^2 = 2$

Opišimo in narišimo množico kompleksnih števil $z \in \mathbb{C}$, za katere velja

- $2\bar{z} - z^2 = 0$
- $|z - 3 + 2i| = 4$
- $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z^2 = 2$
- $|z + i| < |z - 1|$
- $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$
- $|z - 1| + |z + 1| = 4$

$z \quad \mapsto \quad z + (3 + 2i)$

Polarni zapis kompleksnega števila



$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

$x = |z| \cos \varphi$ in $y = |z| \sin \varphi$

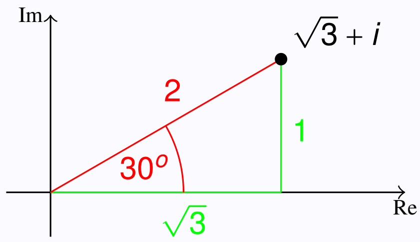
$z = x + iy = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$

Kompleksno število $z = x + iy$ zapišemo v polarnem zapisu kot

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

$\varphi = \operatorname{Arg}(z)$ imenujemo polarni kot ali argument. Argument je določen samo do mnogokratnika celega kota $2\pi^{rd} = 360^o$ natanko.

Primer



$$2 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} \quad \text{in} \quad 30^o = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} = 2\cos 30^o \quad \text{in} \quad 1 = 2\sin 30^o$$

$$\sqrt{3} + i = 2 \cdot (\cos 30^o + i \sin 30^o) \; = 2 \cdot e^{i \cdot 30^o}$$

Zakaj polarni zapis?

- Izračunamo produkt $(x + yi) \cdot (u + vi) = xu - yv + (yu + xv)i$.
- Izračunamo produkt

$$\begin{aligned} & [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] \cdot [q(\cos\psi + i\sin\psi)] = \\ = \; & r \cdot q(\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi) + (\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi)i = \\ = \; & r \cdot q[\cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)i] \end{aligned}$$

Torej

$$\begin{aligned} & r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot q(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ = \; & \underbrace{r \cdot q}_{\text{produkt absolutnih vrednosti}} \; (\cos \underbrace{(\varphi + \psi)}_{\text{vsota kotov}} + i \sin \underbrace{(\varphi + \psi)}_{\text{vsota kotov}}) \end{aligned}$$

- Dinamična ilustracija: https://www.geogebra.org/m/vthctagb v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

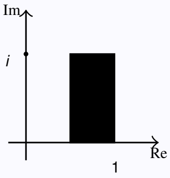
Računanje v polarni obliki

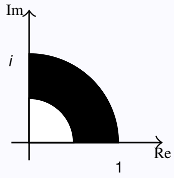
- Eulerjev zapis: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
- Polarni zapis se poenostavi: $z = |z|e^{i\varphi}$.
- Števila $z = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$ so na enotski krožnici $|z| = 1$.
- Množenje se poenostavi: $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
  - Množenje: absolutni vrednosti se zmnožita, argumenta se seštejeta.
  - Potenciranje: $z = |z|e^{i\varphi} \longrightarrow z^n = |z|^n e^{i\varphi n}$ (de Moivrova formula)
  - Korenjenje: $z = |z|e^{i\varphi} \longrightarrow z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi}{n}}$ (de Moivrova formula)
- Velja:
  - $\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$,
  - $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|} e^{-i\varphi}$
  - $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- Dinamična ilustracija: https://www.geogebra.org/m/nmymchxk v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Primeri

- Zapišimo v polarni obliki števila1, -1, i, $-i$, $1 + i$, $-1 - i$.
- Za $z = 1 - i\sqrt{3}$ narišimo in določimo števila z, z^2, z^3, z^4, z^5, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$.

- Zapišimo množici:





$\{x + iy; 0.5 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ $\qquad$ $\{re^{i\varphi}; 0.5 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$

Koreni kompleksnega števila

n-ti koreni števila $a \in \mathbb{C}$ so rešitve enačbe $z^n = a$.

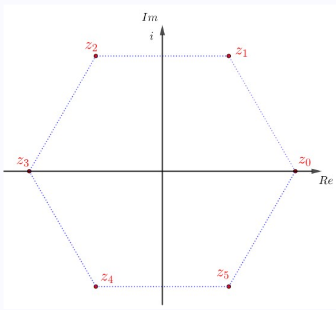
- Enačbo zapišemo v polarni obliki: $a = |a| \cdot e^{i\varphi}$.
- Dobimo n različnih rešitev

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

- Rešitve ležijo na ogliščih pravilnega n-kotnika v kompleksni ravnini.

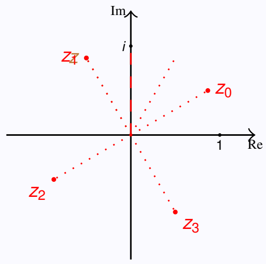
Primer 1

- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $z^6 = 1$.
  - Velja $1 = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$
  - Velja tudi $1 = \cos(2k\pi) + i \cdot \sin(2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
  - Zato $z = 1^{\frac{1}{6}} = \cos(\frac{2k\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{2k\pi}{6}), k \in \mathbb{Z}$.
  - Izračunamo rešitve
    - $k = 0 : z_0 = \cos(0) + i \cdot \sin(0) = 1$
    - $k = 1 : z_1 = \cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - $k = 2 : z_2 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - $k = 3 : z_3 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1$
    - $k = 4 : z_4 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - $k = 5 : z_5 = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



Primer 2

- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $2z^4 + 1 = \sqrt{3}i$.
  - Zapišemo
    $z^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
  - Zato $z = 1^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$.
  - Izračunamo rešitve
    - $k = 0 : z_0 = \cos(\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$
    - $k = 1 : z_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - $k = 2 : z_2 = \cos(\frac{7\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$
    - $k = 3 : z_3 = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

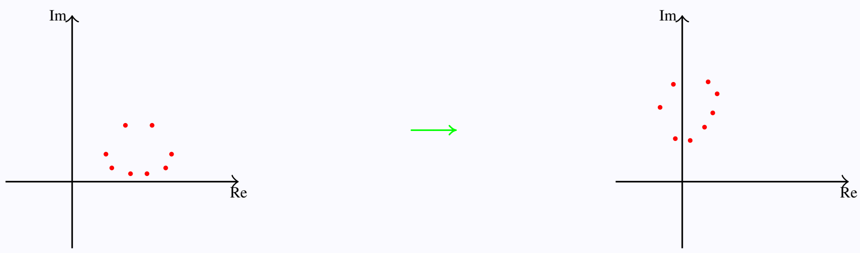


- Dinamična ilustracija: https://www.geogebra.org/m/kcqjnmv7 v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs
- Polarna oblika je še posebej koristna pri množenju, potenciranju in korenjenju.

Primeri

- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $(z^3 - 2)(z^4 + i) = 0$.
- Poiščimo z^{2016} za $z = \frac{1-i}{i}$.

- Vizualizirajmo $z \longrightarrow ze^{i\frac{\pi}{3}}$



Geometrija osnovnih operacij v kompleksni ravnini

$w = |w|e^{i\varphi}$

Preslikava	transformacija v $\mathbb{C}$
$z \mapsto z + w$	premik za w
$z \mapsto e^{i\varphi}z$	zasuk okrog izhodišča za kot φ
$z \mapsto w \cdot z$	razteg (ali krčenje) za $\lvert w\rvert$ in zasuk za φ