Ponovimo (odstotki): Primer 3

Vrednost delnice se je v zadnjih šestih mesecih vsak mesec spremenila zaporedoma za: $+2$ %, $+2.3$ %, $+1.4$ %, -1.8 %, -2.1 %, -1.9 %. Je v pol leta vrednost delnice narasla ali padla?

- Zaporedni mesečni obrestovalni faktorji za vrednost delnice so torej $1.02, 1.023, 1.014, 0.982, 0.979, 0.981$.
- Če je bila V začetna vrednost delnice, bo končna vrednost torej enaka produktu $V \cdot 1.02 \cdot 1.023 \cdot 1.014 \cdot 0.982 \cdot 0.979 \cdot 0.981 \approx V \cdot 0.9979$, kar pomeni, da se je vrednost delnice skupno znižala za 0.21 % .

Primer 4

Zmešamo 2 litra 10%, 4 litre 15% in 6 litrov 12% mešanice. Koliko odstotno mešanico dobimo?

- Razmerje npr. $\frac{\text{alkohol}}{\text{alkohol+voda}}$: $\frac{2\times 0.1+4\times 0.15+6\times 0.12}{2+4+6} = 0.13 \longrightarrow 13\%$

Primer 5

Kolikšne obresti ima Bill Gates od 1 000 000 000 EUR pri 4% letni obrestni meri v enem letu? Kolikšne v enem dnevu? V eni sekundi?

- $r_l = 1.04$, $r_d = \sqrt[365]{1.04} = 1.000\,107\,459\,782\ldots$, $r_s = \sqrt[365\cdot 24\cdot 3\,600]{1.04} = 1.000\,000\,001\,244\ldots$
- $G = 1\,000\,000\,000$ EUR, $G_l = 1\,040\,000\,000$ EUR, $G_d = 1\,000\,107\,459.78$ EUR, $G_s = 1\,000\,000\,001.24$ EUR

Absolutna vrednost

Absolutna vrednost $|x|$ števila $x \in \mathbb{R}$ je razdalja števila x od števila 0 na številski premici in je enaka

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Razdalja med številoma x in y je enaka $|x-y|$.

- Dinamične ilustracije: https://www.geogebra.org/m/pgxp7m7u in https://www.geogebra.org/m/UEXHvvRk v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

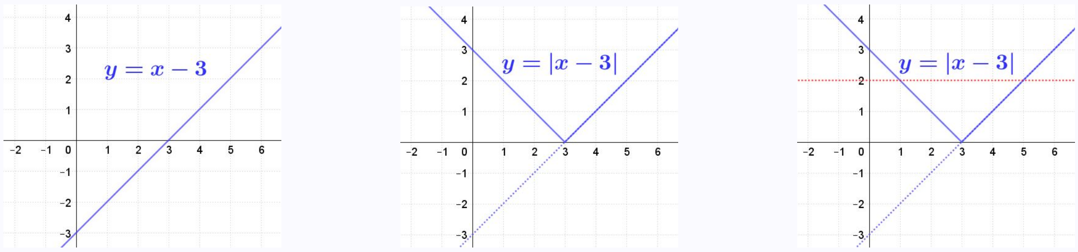
Osnovne lastnosti:

- $|x| \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$
- $|xy| = |x||y|$
- *trikotniška neenakost*: $|x+y| \leq |x| + |y|$

Absolutna vrednost geometrijsko

Določimo množico realnih števil, x, za katere velja $|x-3| \leq 2$.

- Način 1: To so vsa števila, ki so od 3 oddaljena manj ali enako 2. Če si to narišemo na številsko premico, je očitno, da je $x \in [1, 5]$.
- Način 2: Zaporedoma obravnavamo skice



in ugotovimo, da je $|x-3| \leq 2$ za $x \in [1, 5]$.

Naloge

- Določimo množico realnih števil, x, za katere velja $|x-3| = |x+1|$.
- Določimo množico realnih števil, x, za katere velja $||x-2|-2| < 1$.
- Določimo množico točk (x, y) v ravnini, za katere velja $|x| + |y| < 1$.

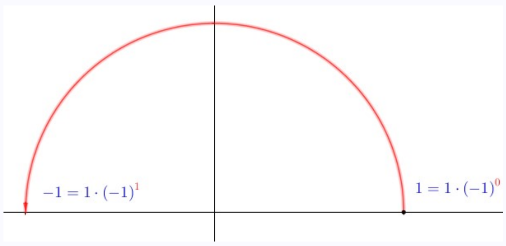
Kompleksna števila

Kompleksna števila so 'kompleksna' števila ali tudi 'dvodimenzionalna števila' s katerimi lahko uspešno računamo v ravnini.

Na $\mathbb{R}$ osi velja

$$1 = 1 \cdot (-1)^{0} \quad \text{in} \quad -1 = 1 \cdot (-1)^{1}$$

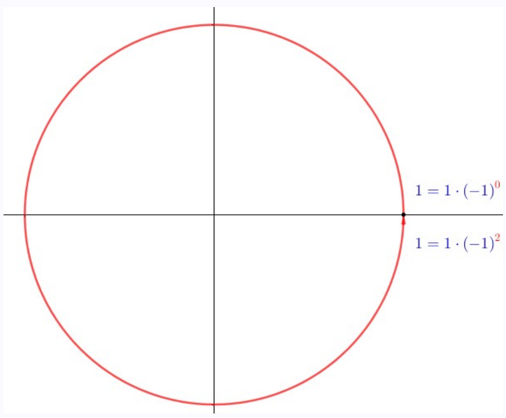
pri čemer nam rdeča potenca šteje kolikokrat smo število 1 zavrteli okrog izhodišča za 180^o v pozitivni smeri.



Tudi pomen dvakratnega vrtenje okrog izhodišča za 180^o v pozitivni smeri se ujema s preprosto enačbo

$$1 = 1 \cdot (-1)^{2}$$

in enako velja za vse cele potence $1 \cdot (-1)^n$.

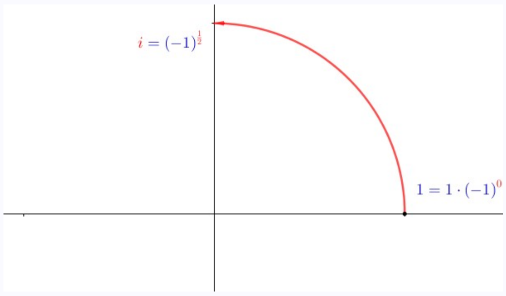


Imaginarna enota i

Če

$$1 \cdot (-1)^{\frac{1}{2}}$$

interpretiramo kot rotacijo števila 1 za polovico od 180^o, torej za 90^o okrog izhodišča v pozitivni smeri in to število označimo kot imaginarno enoto

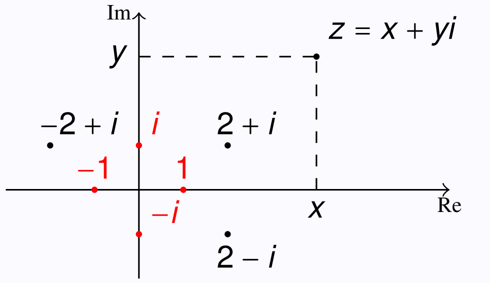


$$i = \sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} \quad \longrightarrow \quad i^2 = -1$$

dobimo novo in zelo uporabno teorijo kompleksnih števil, ki omogoča računanje v ravnini.

Kompleksno število $\quad z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}$, ima

- $x = \mathrm{Re}\,(z)$ realni del
- $y = \mathrm{Im}\,(z)$ imaginarni del



Oznaka za množico kompleksnih števil : $\mathbb{C}$

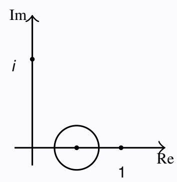
Absolutna vrednost

Absolutna vrednost kompleksnega števila z

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

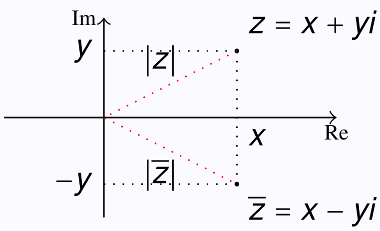
podobno kot pri realnih številih pomeni razdaljo števila od izhodišča.

- Absolutna vrednost razlike dveh kompleksnih števil pomeni razdaljo med številoma. Enačbo $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ rešijo vsa števila $z \in \mathbb{C}$, ki ležijo na krožnici s središčem v $\frac{1}{2}$ in radijem $\frac{1}{4}$.



Računanje v $\mathbb{C}$

- Konjugiranje:



$\overline{x + yi} = x - yi$ je konjugirano število.

Primer: $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$.

- Seštevanje in odštevanje: $(x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i$

  Primer: $(3 + 2i) + (1 - i) = (3 + 1) + (2 - 1)i = 4 + i$
- Množenje: $(x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i$

  Primer: $(3 + 2i)(1 - i) = 3 + 2i - 3i - 2i^2 = 3 - i - 2(-1) = 5 - i$

- Deljenje?

  Opazimo na primer: $(3+2i)(3-2i) = 9 + 6i - 6i + 4 = 13 = |3+2i|^2 \in \mathbb{R}$

  V splošnem: $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$

  Od tu dobimo formulo za deljenje: $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$

  Primer 1: $\frac{3-2i}{1+i} = \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

  Primer 2: $\frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{13-13i}{13} = 1 - i$

Nekatere lastnosti

- Dve kompleksni števili sta enaki, kadar imata enaka realna in imaginarna dela.
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z, \quad z - \overline{z} = 2i\, \mathrm{Im}\, z$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (trikotniška neenakost)

Primeri

Izračunajmo

- $(1+i)^2$
- $\frac{1-i}{1+i}$
- $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2016}$

Opišimo množico kompleksnih števil $z \in \mathbb{C}$, za katere velja

- $2z + 6i = 8$
- $z + \overline{z} = 5$
- $zi + 1 - i = 2(z - i)$
- $|z - 1 - i|^2 = 2$