Še nekaj metod za računanje (določenih) integralov

Uvedba nove spremenljivke

- Iz pravila za posredno odvajanje dobimo pravilo za **uvedbo nove spremenljivke** pri računanju nedoločenega integrala:

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Pri tem je dobro du v drugem integralu razumeti kot $du = u'(x)\,dx$, kar ustreza diferencialu funkcije $u(x)$.

Primer 1

Izračunajmo

$$\int \tan x\,dx$$

- Zapišimo $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$
- Uvedemo novo spremenljivko $u(x) = \cos x$.
- Izračunamo $du = (\cos x)'dx = -\sin x\,dx$
- Torej velja $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du$
- Izračunamo integral $-\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C$.
- Ponovno upoštevamo, da je $u(x) = \cos x$ in dobimo $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$.

Primer 2

Izračunajmo $\int x\cos(x^2)\,dx$

- Uvedemo novo spremenljivko $u(x) = x^2$.
- Izračunamo $du = 2xdx$
- Torej velja $\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$.

Primer 3

Izračunajmo $\int \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx$.

- Uvedemo novo spremenljivko $u(x) = 1 + 2e^x$.
- Izračunamo $du = 2e^x\,dx$
- Torej velja $\int \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|1+2e^x| + C = \frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + C$.

Primeri za vajo (z uvedbo nove spremenljivke)

$$\int \sqrt{2x-5}\,dx, \quad \int \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx, \quad \int \frac{dx}{x+1}, \quad \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx, \quad \int \cos^3(x)\,dx$$

Računanje integralov ‘po delih’ - ‘per partes’

Iz pravila za odvajanje produkta dobimo pravilo za integriranje po delih (**per partes**)

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

oziroma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Primer 1

Izračunajmo $\int x \cdot e^x\,dx$.

- Zapišemo, oziroma uvedemo novi spremenljivki

$$\begin{array}{cc} u = x & dv = e^x\,dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = dx & v = e^x \end{array}$$

- Dobimo $\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C$.

Primer 2

Izračunajmo $\int \ln x\,dx$.

- Zapišemo, oziroma uvedemo novi spremenljivki

$$\begin{array}{cc} u = \ln x & dv = dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{array}$$

- Dobimo $\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C$.

Primer 3

Izračunajmo $\int x \cdot \ln x\,dx$.

- Zapišemo, oziroma uvedemo novi spremenljivki

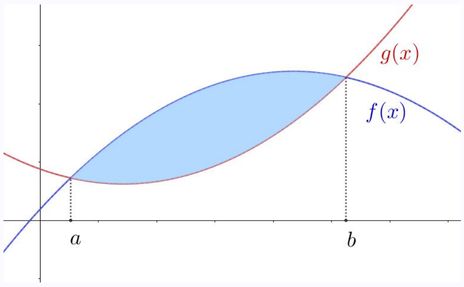
$$\begin{array}{cc} u = \ln x & dv = x\,dx \\ \downarrow & \downarrow \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

- Dobimo $\int x \cdot \ln x\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

Še o ploščini

Ploščina med grafoma $y = f(x)$ in $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a, b]$, je enaka

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

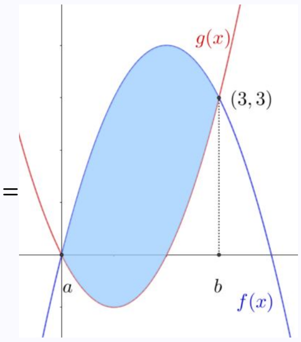


Primer

Kolikšna je ploščina med grafoma funkcij $f(x) = 4x - x^2$ in $g(x) = x^2 - 2x$?

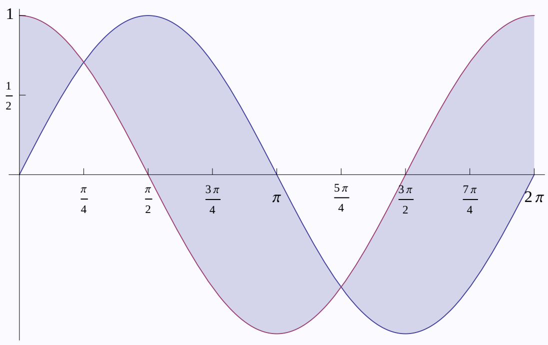
- Narišemo funkciji $f(x)$ in $g(x)$.
- Dločimo presečišči $(0, 0)$ in $(3, 3)$.
- Izračunamo

$$\int_0^3 \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int_0^3 \big(4x - x^2 - (x^2 - 2x)\big)\, dx = $$
$$= \int_0^3 \big(6x - 2x^2)\big)\, dx =$$
$$= \big(3x^2 - \tfrac{2}{3}x^3\big)\Big|_0^3 = 27 - 18 = 9$$



Primer

Kako bi določili ploščino med krivuljama $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \cos x$ na intervalu $[0, 2\pi]$?



- Določimo kje je $f(x) > g(x)$ in kje $f(x) < g(x)$.
- Zapišemo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big(\cos x - \sin x\big)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \big(\sin x - \cos x\big)\, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \big(\cos x - \sin x\big)\, dx =$$
$$= \big(\sin x + \cos x\big)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \big(\cos x + \sin x\big)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \big(\sin x + \cos x\big)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} =$$
$$= \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 + 1) - \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + (0 + 1) - \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}.$$

- Iz geometrijskega razumevanja lahko poenostavimo in ugotovimo, da je iskana ploščina enaka $2 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \big(\sin x - \cos x\big)\, dx = 4\sqrt{2}$.

Lastnosti določenega integrala

- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- Če je f liha, je $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
- Če je f soda, je $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Povprečna vrednost funkcije

Povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a,b]$ je

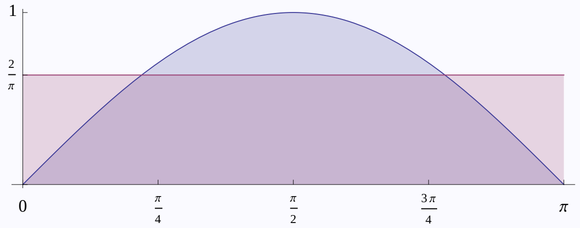
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

μ je višina pravokotnika z osnovnico $[a,b]$, ki ima ploščino enako kot območje pod grafom $y = f(x)$.

Primer

Ploščina pod krivuljo $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0,\pi]$ je enaka

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\big|_0^\pi = 2.$$



Isto ploščino ima na tem intervalu konstantna funkcija z vrednostjo $\mu = \frac{2}{\pi}$.

Zato rečemo, da ima funkcija $\sin x$ na intervalu $[0,\pi]$ povprečno vrednost $\mu = \frac{2}{\pi}$.

Uporaba integrala

- Ploščine likov omejenih s krivuljami.
- Prostornina vrtenine, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f(x) > 0$ na intervalu $[a, b]$ okrog x-osi je podana s formulo $\pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$.
- Dolžina loka grafa $y = f(x)$, na intervalu $[a, b]$ je podana s formulo $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.
- Površina plašča vrtenine, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f(x) > 0$ na intervalu $[a, b]$ okrog x-osi je podana s formulo $2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

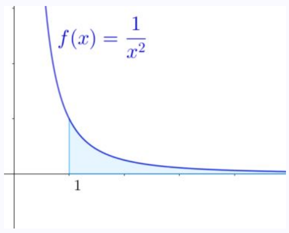
Integral na neomejenem intervalu

Smiselno je definirati

- $\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\, dx$ in podobno $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^b f(x)\, dx$.
- Tak (posplošen) integral ne obstaja vedno! Rečemo, da obstaja, če obstaja ustrezna limita.

Primer 1

Razmislimo o pomenu $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.



$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to\infty} (-\frac{1}{x})\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty} (-\frac{1}{M} + 1) = 1$$

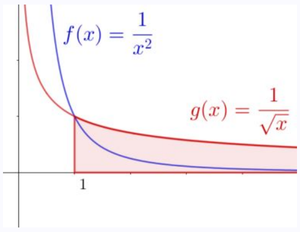
Ali v poenostavljenem zapisu

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = (-\frac{1}{x})\Big|_1^\infty = (-\frac{1}{\infty} + 1) = 0 + 1 = 1$$

Ploščina pod krivuljo je omejena in enaka 1. Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ obstaja in $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$.

Primer 2

Razmislimo o pomenu $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.



V primerjavi s funkcijo $\frac{1}{x^2}$, z naraščajočim x-om funkcija $\frac{1}{\sqrt{x}}$ veliko počasneje pada proti 0. To pokaže tudi integral.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{M\to\infty} (2\sqrt{x})\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty} (2\sqrt{M} - 2) = \infty$$

Torej (posplošen) integral ne obstaja. Krajše bi to zapisali

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = (2\sqrt{x})\Big|_1^\infty = (2\infty - 2) = \infty$$

Ploščina pod krivuljo je neomejena. Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ne obstaja.

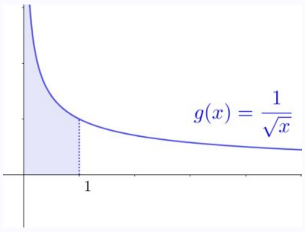
Integral neomejene funkcije

Tudi če funkcija $f(x)$ v neki točki ali na robu intervala ni omejena, lahko včasih govorimo o integralu na tem intervalu. Na primer, če funkcija $f(x)$ v točki $x = 0$ ni omejena, je pa zvezna na vsakem intervalu $[a, 1]$ za $a > 0$, lahko definiramo

- $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{m\to 0} \int_m^1 f(x)\,dx$
- Tak (posplošen) integral ne obstaja vedno! Rečemo, da obstaja, če obstaja ustrezna limita.

Primer 1

Razmislimo o pomenu $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{m\to 0} \int_m^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{m\to 0} (2\sqrt{x})\Big|_m^1 = \lim_{m\to 0} (2 - 2\sqrt{m}) = 2$$

Ali v poenostavljenem zapisu

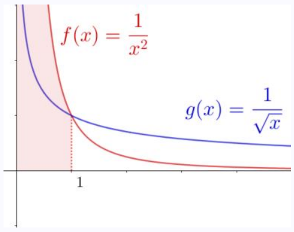
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = (2\sqrt{x})\Big|_0^1 = (2-0) = 2$$

Ploščina pod krivuljo je omejena in enaka 2. Integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ obstaja in $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.

Primer 2

Razmislimo o pomenu $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

V primerjavi s funkcijo $\frac{1}{\sqrt{x}}$, se z manjšanjem x-a proti 0 graf funkcije $\frac{1}{x^2}$ veliko počasneje približuje y-osi. To pokaže tudi integral.



$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{m\to 0} \int_m^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{m\to 0} (-\frac{1}{x})\Big|_m^1 = \lim_{m\to 0} (-1 + \frac{1}{m}) = \infty$$

Ali v poenostavljenem zapisu

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = (-\frac{1}{x})\Big|_0^1 = (-1 + \infty) = \infty$$

Ploščina pod krivuljo je neomejena. Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ ne obstaja.

Primer uporabe odvoda / integrala - diferencialne enačbe

Diferencialne enačbe srečamo na mnogih področjih razumevanja 'naravnih procesov'.

Zgled: Radi bi na primer razumeli širjenje virusa med ljudmi (v odvisnosti od časa).

Neznano funkcijo, ki naj opisuje število okuženih v času t (merjen na primer v dnevih), označimo z $N(t)$. Če vsak okuženi dnevno okuži (približno) k zdravih, rečemo, da je k **dnevni faktor rasti**. Recimo, da je ob začetku opazovanja število okuženih enako 1. Torej $N(0) = 1$ in $N(1) = 1 + k$.

Povečanje števila okuženih je seveda odvisno od trenutnega števila okuženih, od kužnosti virusa in od socialnega obnašanja ljudi. Da je sprememba ali prirast števila okuženih sorazmeren številu okuženih bi matematično natančno zapisali z diferencialno enačbo

$$\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N(t) \text{ oziroma } N'(t) = \lambda \cdot N(t).$$

Diferencialna enačba

$$N'(t) = \lambda \cdot N(t),$$

začetna vrednost $N(0) = 1$ in 'dnevni faktor rasti' k dobro opisujejo 'širjenje virusa'.

Kako se širi virus?

Rešitev dobimo po korakih

- $N'(t) = \lambda \cdot N(t)$
- $\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N(t)$
- $\frac{dN}{N(t)} = \lambda \cdot dt$
- $\int \frac{dN}{N(t)} = \int \lambda \cdot dt$
- $\ln N(t) = \lambda \cdot t + C$ (Ker nas zanimajo zgolj pozitivne količine, lahko absolutno vrednost izpustimo.)
- $N(t) = e^{\lambda t + C}$
- $N(t) = Ae^{\lambda t}$

V zadnjem zapisu smo konstanto e^C označili z A. Če upoštevamo pogoja $N(0) = 1$ in $N(1) = k + 1$, dobimo $A = 1$ in $\lambda = \ln(k + 1)$, oziroma $N(t) = e^{t \cdot \ln(k+1)} = (k + 1)^t$.

Kakšne funkcije dobimo pri različnih faktorjih rasti?

funkcija \k	2	1.5	**1**	0.5	0.2
$N(t) =$	3^t	2.5^t	$\mathbf{2^t}$	1.5^t	1.2^t

Kaj to pomeni za število okuženih čez nekaj dni?

dni \ k	2	1.5	**1**	0.5	0.2
$N(t) =$	3^t	2.5^t	$\mathbf{2^t}$	1.5^t	1.2^t
7	2 187	610	**128**	17	4
10	59 049	9 537	**1 024**	58	6
15	14 348 907	931 323	**32 768**	438	15

Nekoliko bolj zapleten primer uporabe diferencialnih enačb

Prej obravnavana diferencialna enačba

$$N'(t) = \lambda \cdot N(t),$$

opisuje zelo poenostavljeno naravno (eksponentno rast) na primer virusa v 'neskončni populaciji'.

Nekoliko bolj zapletena diferencialna enačba

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{Max}\right),$$

opisuje na primer širjenje virusa v 'omejeni populaciji'. Konstanta *Max* ustreza maksimalnemu številu okuženih.

Rešitev diferencialne enačbe

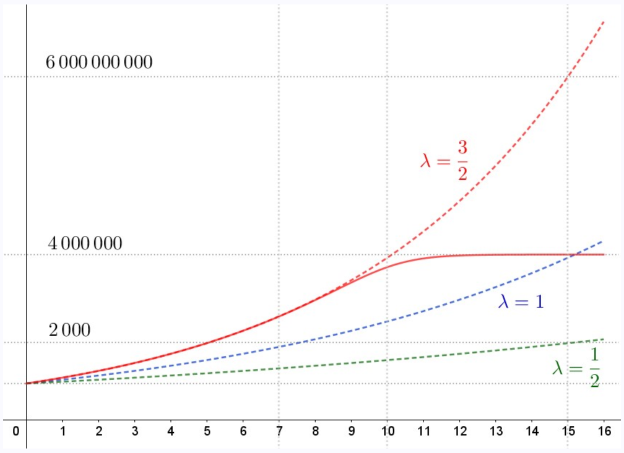
$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{Max}\right)$$

bi na primer pri začetnem pogoju $N(0) = 1$, koeficientu $\lambda = \frac{3}{2}$ in $Max = 4\,000\,000$, namesto navadne eksponentne rasti

$$N(t) = e^{\frac{3t}{2}}$$

bila funkcija

$$N(t) = \frac{4\,000\,000 \cdot e^{\frac{3t}{2}}}{e^{\frac{3t}{2}} + 3\,999\,999}$$

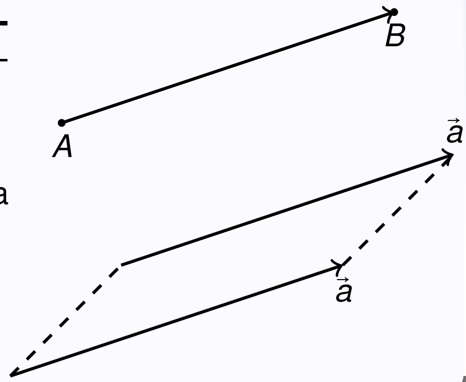


Na grafu so (črtkano) prikazane eksponentne rasti pri treh različnih faktorjih rasti (**zaradi eksponentne rasti je nujno uporabiti ne-linearno *y*-os**), z neprekinjeno rdečo črto pa je nakazana rešitev diferencialne enačbe (z zasičenjem).

Vektorji

Kaj so vektorji?

- **Vektor** je določen s smerjo in dolžino.
- Lahko rečemo tudi, da dve točki določata **vektor**. Poljubni točki A (začetna) in B (končna) določata **vektor**.
- Dva vektorja, ki sta vzporedna in enako dolga sta enaka. (Imata isto smer in dolžino!)

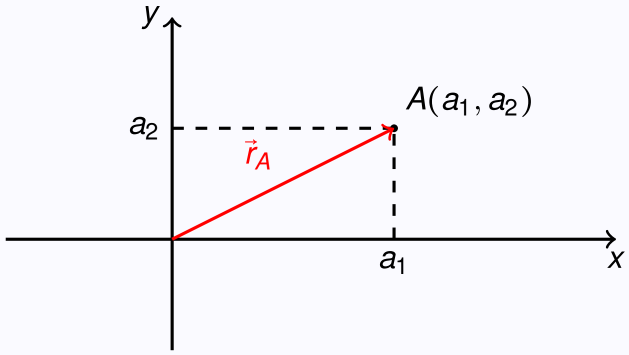


Vektorji v ravnini ali prostoru

- Vektorje v ravnini zapišemo s koordinatama $\vec{a} = (a, b)$. Vektor $\vec{a} = (a, b)$ pomeni vektor od točke $(0, 0)$ do točke (a, b).
- Vektorje v prostoru zapišemo s koordinatami $\vec{a} = (a, b, c)$. Vektor $\vec{a} = (a, b, c)$ pomeni vektor od točke $(0, 0, 0)$ do točke (a, b, c).
- a_1, a_2, a_3 so **koordinate** ali **komponente** vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Krajevni vektor

- Vektor $\vec{r}_A = (a_1, a_2)$ v ravnini imenujemo **krajevni vektor** točke $A(a_1, a_2)$.
- Vektor $\vec{r}_A = (a_1, a_2, a_3)$ v prostoru imenujemo **krajevni vektor** točke $A(a_1, a_2, a_3)$.
- Geometrijski pomen

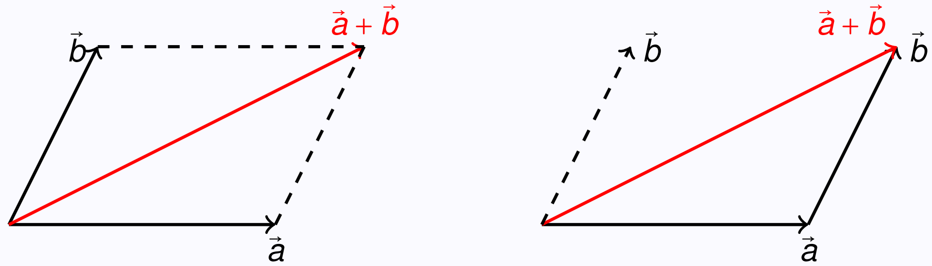


Seštevanje vektorjev

Vektorje seštevamo po komponentah.

- Za $\vec{a} = (a_1, a_2)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2)$ je
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$
- Za $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$
- Na primer za $\vec{a} = (1, 2)$ in $\vec{b} = (3, -1)$ je $\vec{a} + \vec{b} = (4, 1)$.
- Na primer za $\vec{a} = (1, 2, 3)$ in $\vec{b} = (3, -1, 1)$ je $\vec{a} + \vec{b} = (4, 1, 4)$.

Grafični pomen seštevanja vektorjev



Množenje vektorja s številom (skalarjem)

Vektor množimo s številom tako, da njegove komponente množimo s tem številom.

- Za $\vec{a} = (a_1, a_2)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (a_1, a_2) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2)$.
- Za $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3)$.
- Na primer za $\vec{a} = (2, 1)$ in $\alpha = -1$ dobimo $-1 \cdot (2, 1) = (-2, -1)$.
- Na primer za $\vec{a} = (2, 1)$ in $\alpha = \frac{1}{2}$ dobimo $\frac{1}{2} \cdot (2, 1) = (1, \frac{1}{2})$
- Na primer za $\vec{a} = (1, 2, 3)$ in $\alpha = 3$ dobimo $3 \cdot (1, 2, 3) = (3, 6, 9)$
- Geometrijski pomen (na primer za $\frac{1}{2}\vec{a}$ in $-\vec{a}$) :