Matematika VSP: 2. poskusni kolokvij

12. januar 2022

Čas pisanja je 60 minut. Dovoljena je uporaba 2 listov A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena.

Vse odgovore dobro utemelji!

---

1. **[35 točk]** Funkciji f in g sta dani s predpisoma

$$f(x) = x^2 + x - 8 \ \text{ in } \ g(x) = 4 - x^2 - x.$$

Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo grafa funkcij f in g, y-os ter leži v polravnini $x \geq 0$.

Rešitev: Presečišča obeh grafov so tam, kjer velja $x^2 + x - 8 = 4 - x^2 - x$ oziroma

$$x^2 + x - 6 = 0$$

in zato $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} = -3, 2$. (10 točk)

Ker se osredotočamo na 1. in 4. kvadrant (saj $x \geq 0$), pride v poštev le $x_2 = 2$. Naš lik je torej omejen z $0 \leq x \leq 2$ ter $x^2 + x - 8 \leq y \leq 4 - x^2 - x$. (5 točk)

Njegova ploščina je

$$\int_0^2 \Big((4 - x^2 - x) - (x^2 + x - 8)\Big)dx = \int_0^2 (12 - 2x - 2x^2)dx = (12x - x^2 - \frac{2x^3}{3})\Big|_0^2 = \frac{44}{3}. \text{ (20 točk)}$$

---

2. **[30 točk]** V prostoru je dan trikotnik $\triangle ABC$ z oglišči $A(2,1,1)$, $B(3,0,1)$ in $C(4,1,-2)$.

   (a) Poišči točko D, da bo $ABCD$ paralelogram. Ali je $ABCD$ pravokotnik?

   (b) Izračunaj obseg in ploščino trikotnika $\triangle ABC$.

Rešitev: (a) V paralelogramu velja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ in $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Krajevni vektor točke D dobimo kot

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = [3,2,-2]^{\mathsf{T}},$$

kjer je $\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = [1,1,-3]^{\mathsf{T}}$. (6 točk)

Lik $ABCD$ bo pravokotnik, če je med vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BC}$ pravi kot, to pa je natanko tedaj, ko je njun skalarni produkt enak 0:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = [1,-1,0]^{\mathsf{T}} \cdot [1,1,-2]^{\mathsf{T}} = 1 - 1 + 0 = 0,$$

torej je $ABCD$ pravokotnik. (9 točk)

(b) Obseg trikotnika je enak

$$\begin{aligned} o &= \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{AC}\| \\ &= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0} + \sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2} + \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{11} + \sqrt{13}. \text{ (5 točk)} \end{aligned}$$

Ker je lik pravokotnik, je ploščina enaka

$$P = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{11} = \frac{\sqrt{22}}{2}. \text{ (10 točk)}$$

---

3. **[35 točk]** Naj bo p premica skozi točko $(-8,4,-6)$ s smernim vektorjem $\vec{a} = [1,0,2]^\mathsf{T}$. Naj bo q premica skozi točko $(5,5,-2)$ s smernim vektorjem $\vec{b} = [2,1,-3]^\mathsf{T}$.

   (a) Določi enačbo ravnine Σ, ki je vzporedna p in q ter gre skozi točko $P(4,1,3)$.

   (b) Koliko sta premici p in q oddaljeni od ravnine Σ?

Rešitev:

(a) Ker je Σ vzporedna p in q, je njen normalni vektor $\vec{n}$ pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$, torej je $\vec{n}$ vzporeden $\vec{a} \times \vec{b} = [-2,7,1]^\mathsf{T}$. Ravnina ima torej enačbo $\vec{n} \cdot [x,y,z]^\mathsf{T} = \vec{n} \cdot \vec{r}_P$, t.j.

$$[-2,7,1]^\mathsf{T} \cdot [x,y,z]^\mathsf{T} = [-2,7,1]^\mathsf{T} \cdot [4,1,3]^\mathsf{T} \text{ oziroma } -2x + 7y + z = 2. \text{ (15 točk)}$$

(b) Ker sta premici p in q vzporedni ravnini Σ, sta od ravnine Σ oddaljeni toliko, kot sta točki $(-8,4,-6)$ in $(5,5,-2)$ oddaljeni od ravnine Σ. (10 točk)

Formula za oddaljenost točke T od ravnine $\Sigma : ax + by + cz = d$ z normalo $\vec{n}$ je

$$d(T,\Sigma) = \frac{\left|\vec{r}_T \cdot \vec{n} - d\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Dobimo torej

$$d(p,\Sigma) = \frac{|[-8,4,-6]^\mathsf{T} \cdot [-2,7,1]^\mathsf{T} - 2|}{\|[-2,7,1]^\mathsf{T}\|} = \frac{36}{\sqrt{54}} = 2\sqrt{6}. \text{ (5 točk)}$$

in

$$d(q,\Sigma) = \frac{|[5,5,-2]^\mathsf{T} \cdot [-2,7,1]^\mathsf{T} - 2|}{\|[-2,7,1]^\mathsf{T}\|} = \frac{21}{\sqrt{54}} = \frac{7}{\sqrt{6}}. \text{ (5 točk)}$$

Ime in priimek: ______________________________ Vpisna številka: ______________________

Informativni 2. Kolokvij (teorija) iz Matematike, 1RI VS, FRI, Januar 2022

Obkrožite pravilne odgovore (lahko je več pravilnih). Vsaka pravilno obkrožena rešitev prinaša 10 točk. Vsaka nepravilno obkrožena rešitev prinaša -2 točki. Čas reševanja je 30 minut.

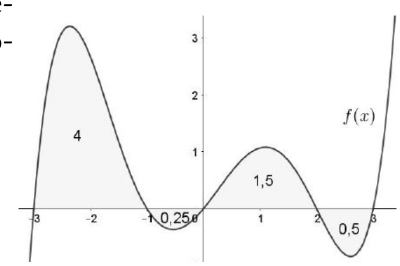
---

1. Če velja $F(x) = \int_1^x g(t)\,dt$, potem

A) $F'(x) = g(x)$ B) $F'(x) = g(x) + C$ C) $g'(x) = F(x)$
D) $g'(x) = F(x) + C$ E) $g(x) = F(x) + C$ F) $F(1) = 0$

---

2. Za funkcijo $f(x)$ na sliki velja, da so ploščine osenčenih delov zaporedoma od leve proti desni enake 4, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ (kot nakazano na skici). Koliko je določeni integral $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$



A) $\frac{21}{4}$ B) $\frac{19}{4}$ C) 6
D) $\frac{25}{4}$ E) $\frac{23}{4}$ F) 5

---

3. Če je $g(x) = 2f(x)$ in je $f(x)$ funkcija iz prejšnje naloge, koliko je določeni integral $\int_0^3 g(x)\,dx$

A) $\frac{5}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$ F) 5

---

4. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta nekolinearna. Za vektorja $\vec{c}$ in $\vec{d}$ pa velja $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Katera lastnost velja?

A) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0$ B) $\vec{c} \times \vec{d} = 0$ C) $|\vec{c}| \leq |\vec{d}|$ D) $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ E) $\vec{d} \times \vec{a} = 0$ F) $|\vec{c}| \geq |\vec{b}|$

---

5. Dani sta ravnina $\Pi : x - y + z + 2 = 0$ in premica $\delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{1}$. Katere trditve so pravilne?

A) Π vsebuje δ. B) δ seka Π pod kotom 45^o.
C) δ seka Π pod kotom 90^o. D) Π in δ nimata skupnih točk.
E) Smerni vektor δ in normala Π sta vzporedna. F) Smerni vektor δ in normala Π sta pravokotna.

---

6. Če obstaja, kakšno je število a, da bo trojka $x = a$, $y = 1$ in $z = 0$ rešitev linearnega sistema enačb

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ x - 2y + 3z &= 3 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) -1 E) 0 F) ne obstaja

7. Dane so matrike

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Katere izmed spodnjih izrazov je mogoče izračunati?

A) $P \cdot M - N$ B) $P \cdot N - M$ C) $M \cdot P - N$ D) $M \cdot N - P$ E) $N \cdot P - M$ F) $N \cdot M - P$

---

8. Katere izmed spodnjih matrik dobimo med smiselno in pravilno izračunanimi izrazi v prejšnji nalogi?

A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ F) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ocena:

Dodelite si 10 točk za vsako pravilno rešitev in -2 točki za vsako nepravilno rešitev. Točke seštejte. Oceno si izračunajte po ključu:

$91 - 100$	točk	10	(odlično)
$81 - 90$	točk	9	(prav dobro)
$71 - 80$	točk	8	(prav dobro)
$61 - 70$	točk	7	(dobro)
$51 - 60$	točk	6	(zadostno)
≤ 50	točk	5	(nezadostno)