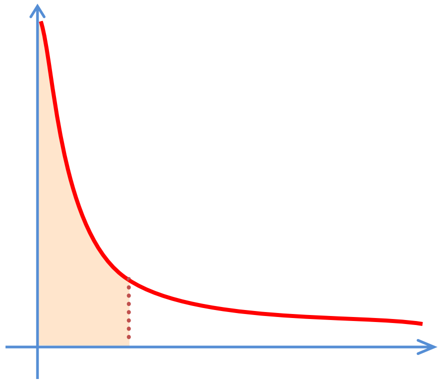
IZLIMITIRANI INTEGRALI

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = ?$$



integrand je neomejen, ne ustreza zahtevam za integrabilnost

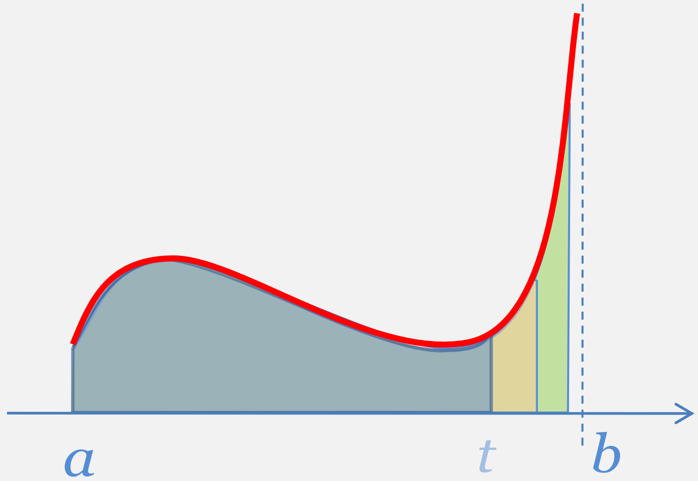
Formalno uporabimo Newton-Leibnizovo formulo:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$$

Ali je mogoče razširiti pojem integrabilnosti na tovrstne primere?

Osnovna primera:

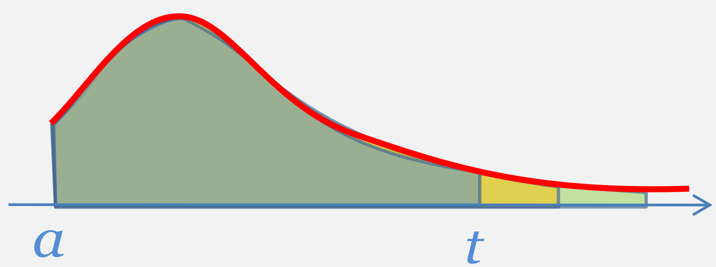
- f zvezna na $[a,b)$, pri b neomejena



$\int_a^t f$ obstaja za $t < b$

$$\boxed{\int_a^b f = \lim_{t \to b} \int_a^t f}$$

- f zvezna na neomejenem intervalu $[a,+\infty)$

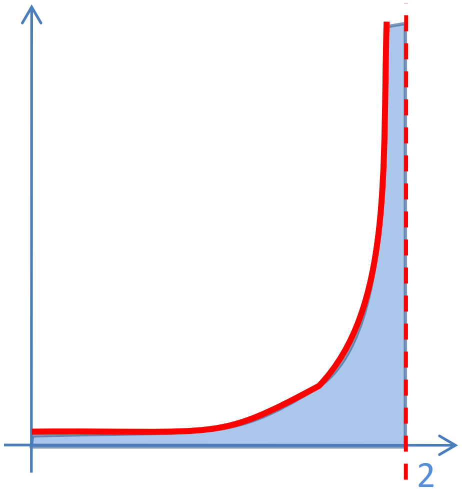


$$\boxed{\int_a^\infty f = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{t\to 2}\left(-\frac{1}{t-2}\right) - \frac{1}{2}$$

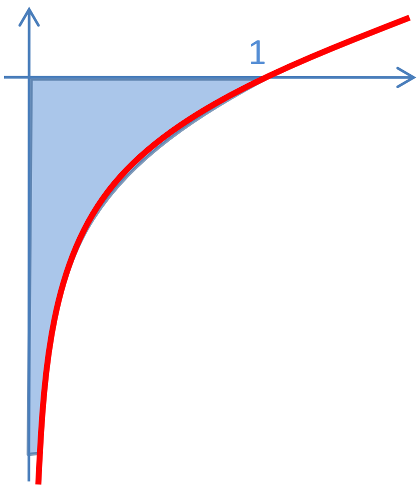
$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{x-2}$$

limita ne obstaja



$$\int_0^1 \ln x\,dx = -1 - \lim_{t\to 0}(t\ln t - t) = -1$$

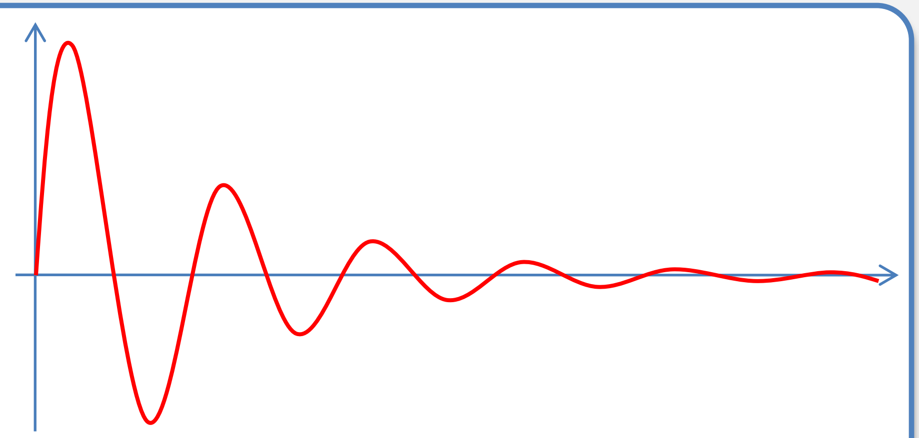
$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$



$$\int_0^\infty e^{-x}\sin 2x\,dx =$$

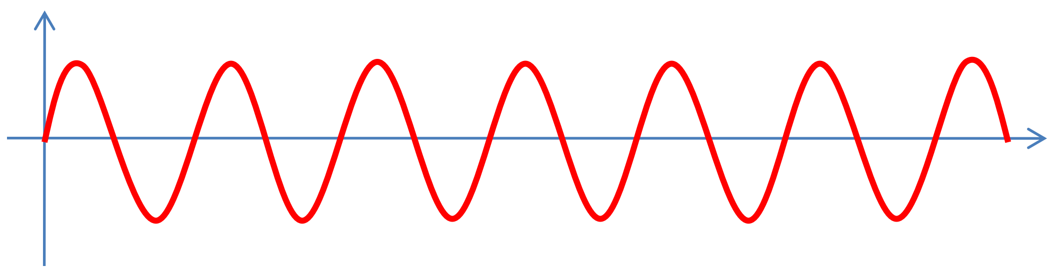
$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -\frac{e^{-x}}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{e^{-t}}{5}(\sin 2t + 2\cos 2t)\right) + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$



$$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{t\to\infty}(-\cos t) + 1$$

limita ne obstaja



Ocenjevanje konvergence: obstoj izlimitiranega integrala poskusimo ugotoviti na podlagi primerjave z znanimi integrali.

$$\int x^r dx = \begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} & r \neq -1 \\ \ln x & r = -1 \end{cases}$$

$\int_0^a \frac{1}{x^r}\,dx$ obstaja za $r < 1$, ne obstaja za $r \geq 1$

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$ obstaja za $r > 1$, ne obstaja za $r \leq 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{x^3+1}}\,dx$$

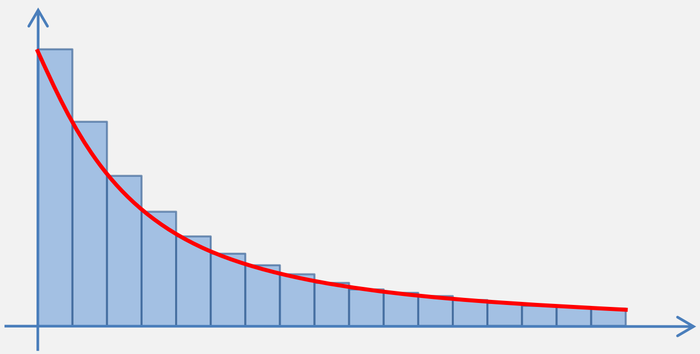
Za $x \to +\infty$ je $\frac{x+1}{x\sqrt{x^3+1}}$ primerljiva z $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ $\Longrightarrow$ integral obstaja

$$\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$$

Za $x \to 1$ je $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}\cdot\sqrt{x-1}}$ primerljiva z $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$,

ki pa je primerljiva z $\frac{1}{\sqrt{x}}$ za $x \to 0$ $\Longrightarrow$ integral obstaja

$f:\ 0,\infty\ \to \mathbb{R}$ padajoča pozitivna funkcija in zaporedje $a_n = f\ \ n$



$$a_n \geq \int_n^{n+1} f \geq a_{n+1}$$

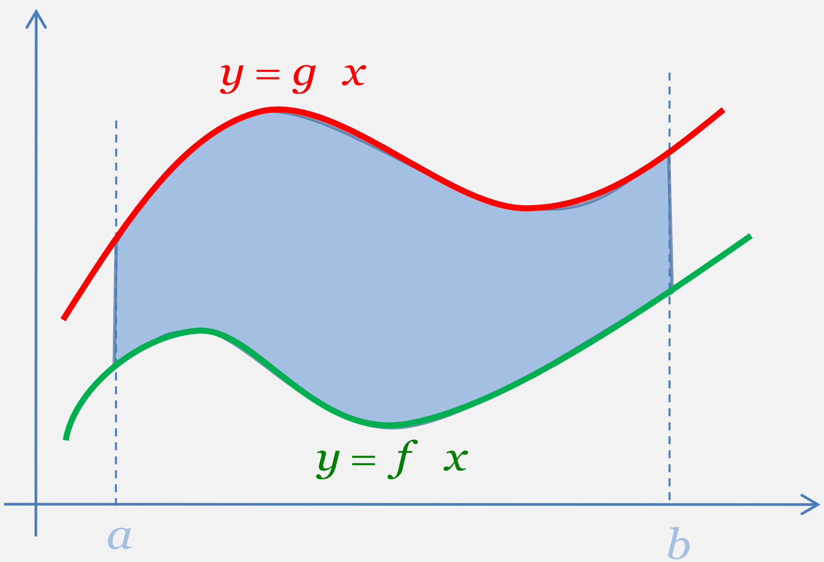
$$\Rightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \geq \int_1^{\infty} f \geq a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

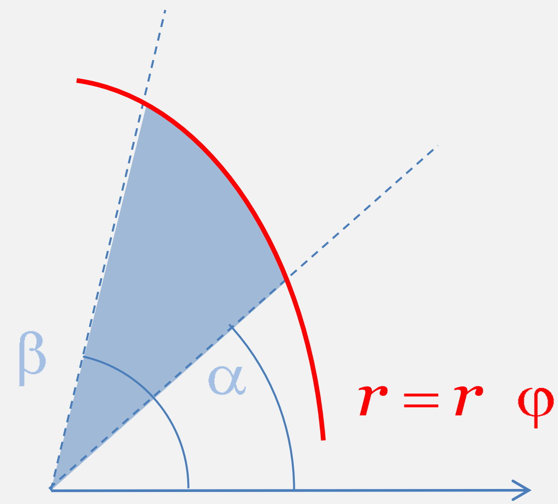
Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f\ \ n$ konvergira natanko takrat, ko konvergira integral $\int_1^{\infty} f$.

Velja še: $\sum_{n=a}^{\infty} f\ \ n - \int_a^{\infty} f \leq f\ \ a$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ konvergira natanko takrat, ko konvergira integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$, torej, ko je $r > 1$.

PLOŠČINE LIKOV



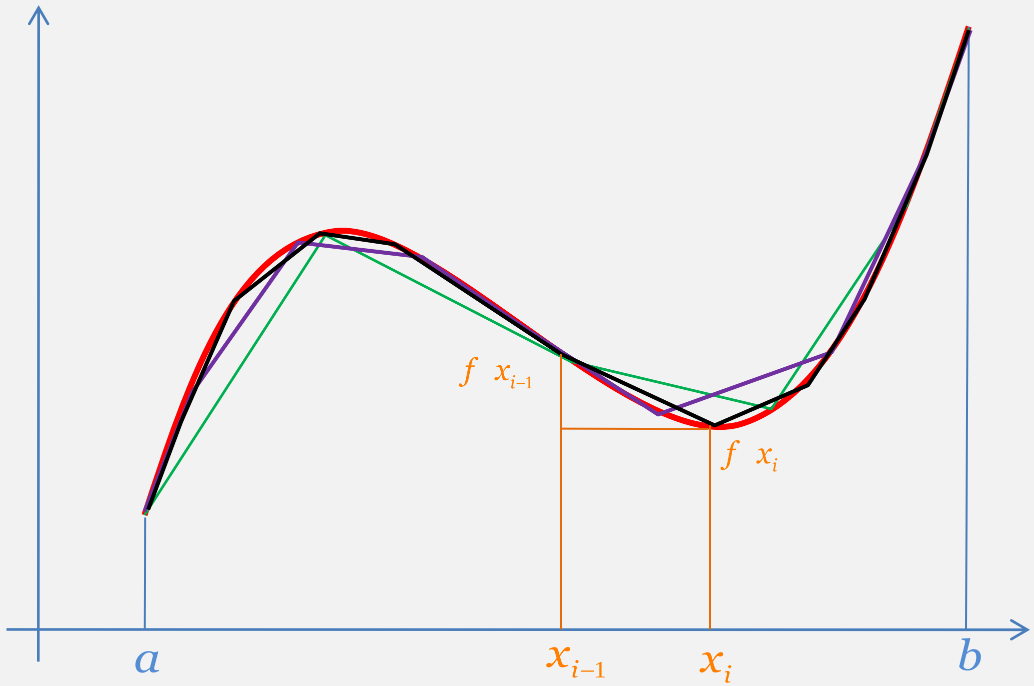


$$\text{ploščina} = \int_a^b g - f$$

$$\text{ploščina} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2$$

DOLŽINA KRIVULJE

Vsaka delitev intervala določa neko lomljenko. Dolžina krivulje je natančna zgornja meja dolžin lomljenk.



$$\text{dolžina lomljenke} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

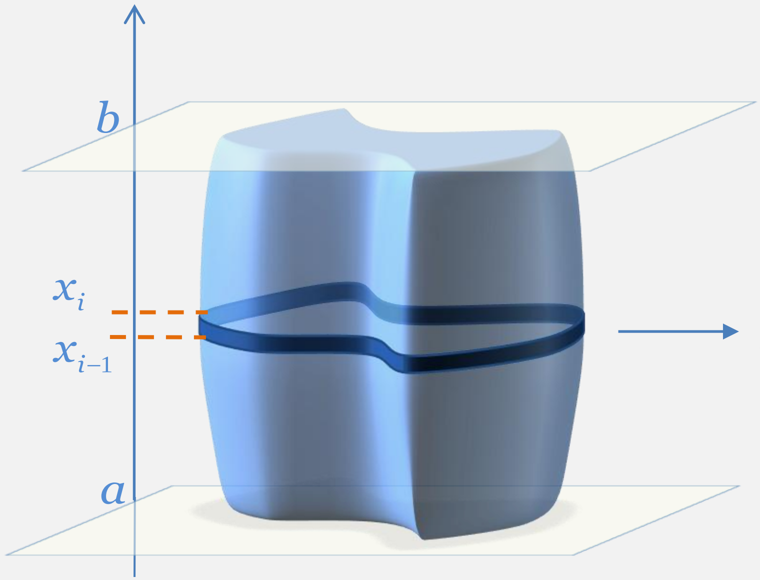
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}}\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

Riemannova vsota za funkcijo $\sqrt{1+(f')^2}$

Dolžina krivulje
(če je f zvezno odvedljiva)

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}}$$

PROSTORNINA TELESA



$P(t_i)$: ploščina prereza na višini t_i

$x_i - x_{i-1}$: debelina prereza

$$\sum_{i=1}^{n} P(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

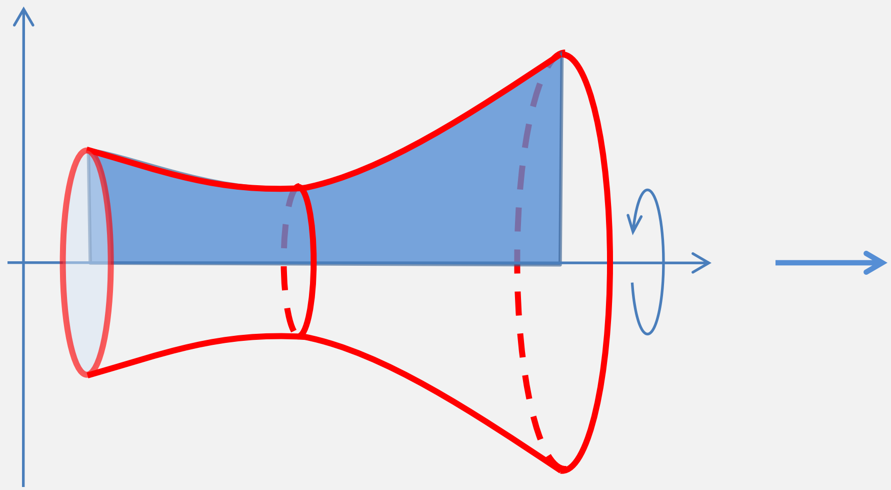
Riemannova vsota za funkcijo P

Prostornina telesa
(če je P zvezna)

$$\boxed{V = \int_a^b P}$$

VRTENINE

Vrtenina je telo, ki ga zaobjamemo z vrtenjem krivulje okoli osi.



Prerez na nivoju x je krog s ploščino $P(x)=f(x)^2\,\pi$.

Prostornina vrtenine

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2}$$

NEKATERE FIZIKALNE KOLIČINE, KI SE IZRAŽAJO Z INTEGRALOM

(Integriramo funkcije ene spremenljivke, zato se zaenkrat omejimo na primere, ki so 'enodimenzionalni'.)

- Dolžina poti, ki jo točka, ki se giblje premočrtno s hitrostjo $v=v(t)$ prepotuje v času od t_1 do t_2:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

- Masa krivulje, dane z enačbo $y=f(x)$ na $[a,b]$ in z dolžinsko gostoto $r=r(x)$:

$$m = \int_a^b r(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

- Težišče krivulje, dane z enačbo $y=f(x)$ na $[a,b]$ in z dolžinsko gostoto $r=r(x)$:

$$x_T = \frac{1}{m}\int_a^b x\cdot r(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$y_T = \frac{1}{m}\int_a^b f(x)\cdot r(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Težišče n točk (x_i,y_i), z masami m_i: $\quad x_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$

$$y_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} y_i m_i$$

- Delo, ki ga sila $F=F(x)$ opravi vzdolž osi x

$$A = \int_a^b F(x)\,dx$$