

1. Izračunaj naslednje nedoločene integrale:

(a)  $\int (3x^2 - 5x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1 - \cos x) dx$

(b)  $\int (\sin x + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}) dx$

(c)  $\int (x^6 - 2)^2 dx$

(d)  $\int (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{1+x^2} + 5e^x) dx$

(e)  $\int \sin(3x) dx$

(f)  $\int \frac{dx}{5x-2}$

(g)  $\int \frac{dx}{e^{2x}}$

(h)  $\int \sin^4 x \cos x dx$

(i)  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(j)  $\int \frac{dx}{x \log^2(x)}$

(k)  $\int (x^2 - 1)^9 x dx$

(l)  $\int \tan x dx$

(m)  $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$

(n)  $\int x e^{-(x^2+1)} dx$

(o)  $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx$

(p)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

2. Izračunaj naslednje nedoločene integrale z uporabo metode *per partes*:

(a)  $\int x \log x dx$

(b)  $\int (2x - 1) \sin x dx$

(c)  $\int \arctan(x) dx$

(d)  $\int \arcsin(2x) dx$

3. Izračunaj nedoločene integrale naslednjih racionalnih funkcij.

(a)  $\int \frac{x+6}{(x-1)(x-8)} dx$

(b)  $\int \frac{x^2}{x+1} dx$

(c)  $\int \frac{x+3}{x-3} dx$

(d)  $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$

(e)  $\int \frac{x^3+1}{x^2+4} dx$

(f)  $\int \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2-1} dx$

(g)  $\int \frac{dx}{1-x^2}$

**Rešitev:**(a) Ulomek v integralu najprej razstavimo na *parcialne ulomke*. Uporabimo nastavek

$$\frac{x+6}{(x-1)(x-8)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-8}.$$

Če damo desno stran na skupni imenovalc

$$\frac{x+6}{(x-1)(x-8)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-8} = \frac{A(x-8) + B(x-1)}{(x-1)(x-8)},$$

se morata števcu ujemati

$$x+6 = Ax - 8A + Bx - B.$$

Dva polinoma sta enaka, natanko tedaj, ko so vsi koeficienti enaki, to pomeni, da se morata koeficienta pri  $x$  na levi in desni strani enačbe ujemati, prav tako tudi prosta člene. Tako dobimo 2 enačbi

$$1 = A + B$$

$$6 = -8A - B$$

Rešitev teh dveh enačb dobimo na primer z eliminacijo  $A = -1$  in  $B = 2$ . Če rezultat uporabimo v integralu, dobimo

$$\int \frac{x+6}{(x-1)(x-8)} dx = \int \frac{A}{x-1} + \int \frac{B}{x-8}.$$

Prvi integral izračunamo z vpeljavo nove spremenljivke  $t = x - 1$ ,  $dt = dx$ 

$$\int \frac{A}{x-1} dx = A \int \frac{1}{t} dt = A \log |t| + C = A \log |x-1| + C.$$

Podobno izračunamo tudi drugi integral.

**4. Izračunaj določene integrale**

(a)  $\int_1^2 2x(x^2+1)^2 dx$

(d)  $\int_1^e \frac{1+\log x}{x} dx,$

(b)  $\int_0^{\pi/3} \tan(x) dx$

(e)  $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

(c)  $\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$

(f)  $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx,$

5. Izračunaj

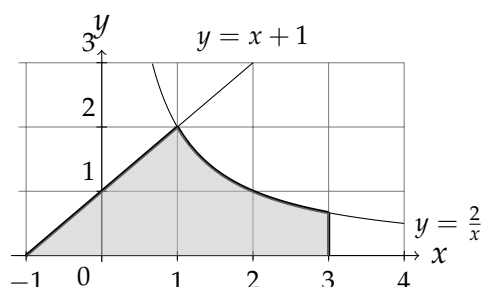
$$\int_{-1}^2 f(x) dx, \quad \text{kjer je } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{če } x \geq 1, \\ -2x + 4, & \text{če } x < 1. \end{cases}$$

6. Naj bo  $f(x) = \int_0^x 3 \sin(2t) dt$ .

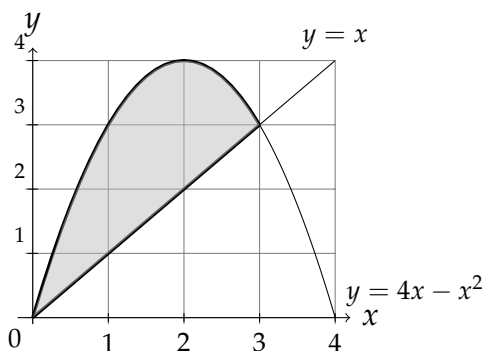
(a) Izračunaj  $f(2)$ .

(b) Določi  $f'(\frac{\pi}{8})$ .

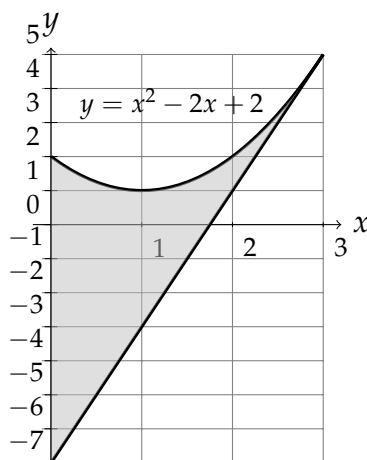
7. Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujejo krivulje  $y = 2/x$ ,  $y = x + 1$ ,  $x = 3$  in os  $x$ .



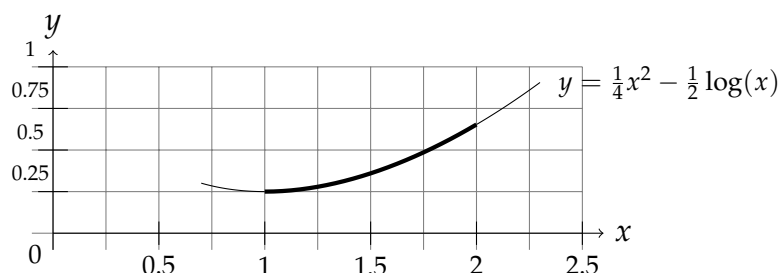
8. Izračunaj ploščino območja, ki ga omeujeta krivulji  $y = 4x - x^2$  in  $y = x$ .



9. Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujejo parabola  $y = x^2 - 2x + 2$ , tangenta k njej v točki (3, 5) in os  $y$ .



10. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji  $y = 2 \sin(x)$  in  $y = \tan(x)$  od  $x = 0$  do  $x = \pi/2$ .
11. Izračunaj dolžino loka krivulje  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \log(x)$  med točkama, kjer je  $x = 1$  in  $x = 2$ . Uporabi formulo  $l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ .



12. Izračunaj ločno dolžino polkubne parabole z enačbo  $y^2 = x^3$  med točkama z  $x$ -koordinatama 0 in 5.
13. Izračunaj prostornine vrtenin, ki jih dobiš, če:
- parabolo  $y = 1 - x^2$  zavrtiš okrog  $x$ -osi med obema ničloma,
  - graf funkcije  $\cos x$  zavrtiš okrog  $x$ -osi med  $-\frac{\pi}{2}$  in  $\frac{\pi}{2}$ .

Pomagaj si s formulo

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

14. Izračunaj površine vrtenin, ki jih dobiš, če:
- krivuljo  $y = \sqrt{4 - x^2}$  zavrtiš okrog  $x$ -osi med  $-2$  in  $2$  in med  $-1$  in  $1$ .
  - parabolo  $y = x^2/2$  zavrtiš okrog  $x$ -osi med  $0$  in  $1$ .

Pomagaj si s formulo

$$P_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

15. Izpelji formuli za površino in prostornino krogle s polmerom  $r$ .

*Namig:* Graf funkcije  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  zavrti okrog primerne osi in poišči površino in prostornino dobljene vrtenine.

16. Elipsa s polosema  $a$  in  $b$  ima enačbo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Kolikšna je površina *rotacijskega elipsoida* – telesa, ki ga dobimo, če elipso zavrtimo okrog  $x$ -osi?

17. Izpelji formuli za površino in prostornino *torusa* (ali svitka) z velikim polmerom  $R$  in malim polmerom  $r$ . Torus je telo, ki ga dobimo, ko krog s polmerom  $r$  s središčem v  $(0, R)$  zavrtimo okrog  $x$ -osi.