Vaje MAT VSP, 12.11.2020

NALOGA 27. *OR*

Skiciraj grafe in poišči definicijska območja funkcij s spodnjimi predpisi. Katera od teh funkcij je soda oz. liha? Katera od funkcij je injektvna/surjektivna? Zakaj je oz. zakaj ni?

a. $3-2x^2$,
b. $\operatorname{sign}(3-2x^2)$,
c. $6-5x+x^2$,
d. e^x+2,
e. $\log(x+2)$,
f. $\sin(2x)$,
g. $\log(\cos(x))$,
h. $\arctan\frac{x(x-2)}{x^2-1}$.

- Funkcija f je SODA, če velja $f(-x)=f(x)$ za vsak $x \in D_f$.
  (graf sode funkcije je simetričen glede na os y).

- Funkcija f je LIHA, če velja $f(-x)=-f(x)$ za vsak $x \in D_f$.
  (graf lihe funkcije je simetričen glede na koordinatno izhodišče)

- Funkcija $f: D_f \to \mathbb{R}$ je INJEKTIVNA, če

  $(A \Rightarrow B \quad \sim \neg B \Rightarrow \neg A)$

  $\forall x,y \in D_f : f(x)=f(y) \Rightarrow x=y.$

  $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

  (vsaka vodoravna premica seka graf

injektivne funkcije v največ eni točki)

- Funkcija $f: D_f \to \mathbb{R}$ je SURJEKTIVNA,

če $Z_f = \mathbb{R}$.

(vsaka vodoravna premica seka graf surjektivne funkcije v vsaj eni točki)

- Funkcija je BIJEKTIVNA, če je surjektivna in injektivna.

(vsaka vodoravna premica seka graf bijektivne funkcije v natanko eni točki)

---

a) $f(x) = 3 - 2x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

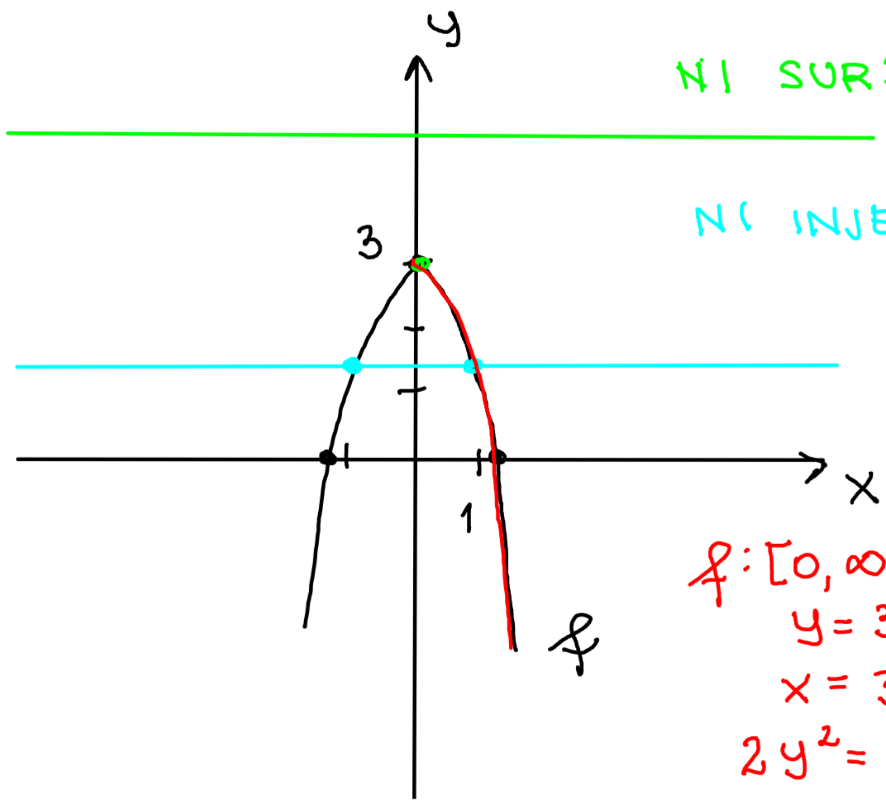
$D_f: \mathbb{R}$

ničle: $f(x) = 0$

$$3 - 2x^2 = 0$$
$$2x^2 = 3$$
$$x^2 = \frac{3}{2} \quad /\sqrt{\ }$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \doteq 1.2$$

zač. vr.: $f(0) = 3$

teme: $T(0,3)$



NI SURJEKTIVNA

$Z_f = (-\infty, 3] \neq \mathbb{R}$

NI INJEKTIVNA

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$y = 3 - 2x^2$

$x = 3 - 2y^2$

$2y^2 = 3 - x \quad y^2 = \frac{3-x}{2}$

$y = \sqrt{\frac{3-x}{2}}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad a > 0 \ \cup$, $\quad a < 0 \ \cap$

TEME: $T(p, q)$ $\quad p = -\frac{b}{2a} \quad q = -\frac{D}{4a}$

$D = b^2 - 4ac$

ničle: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

f je SODA (simetrična glede na os y)

$f(-x) = 3 - 2(-x)^2 = 3 - 2x^2 = f(x)$

$\Rightarrow f$ je SODA

f ni LIHA, ker je SODA

INJEKTIVNOST: $x_1, x_2 \in D_f$

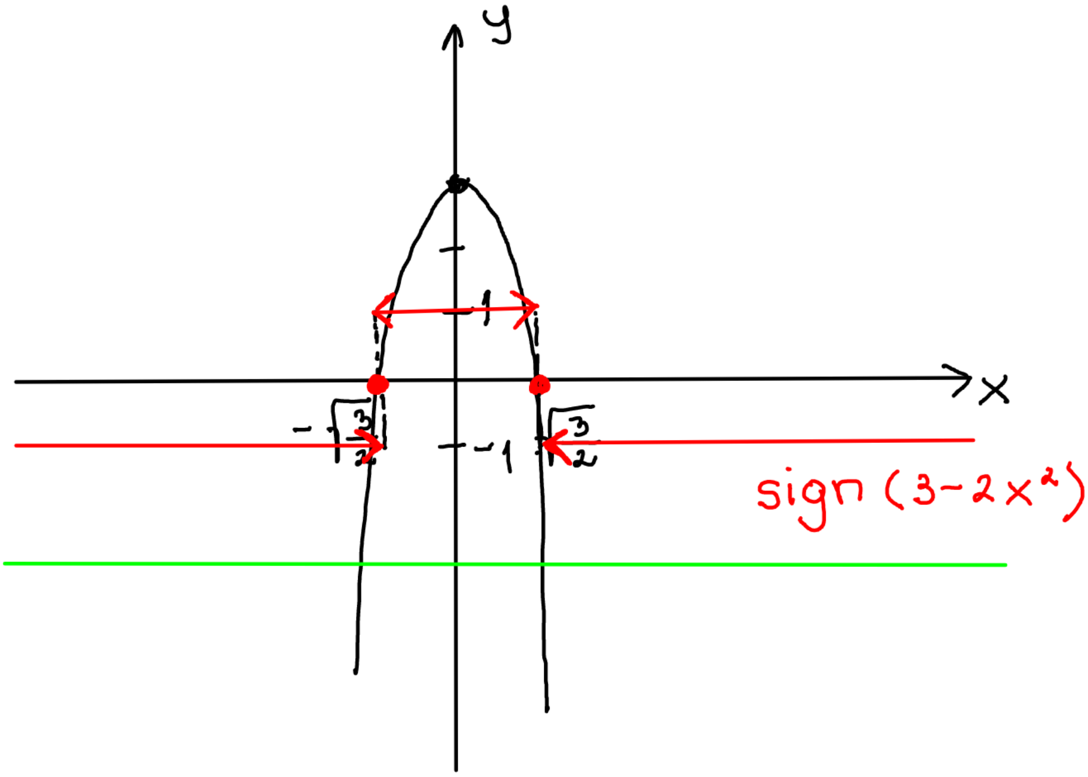
$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\cancel{3} - 2x_1^2 = \cancel{3} - 2x_2^2 \quad /:(-2)$$
$$x_1^2 = x_2^2 \quad /\sqrt{\ }$$
$$x_1 = \pm x_2 \rightarrow 2 \text{ rešitvi}$$

Zato f ni injektivna.

b) $g(x) = \text{sign}\,(3-2x^2)$

$$\text{sign}\,(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{sign}\,(3-2x^2) = \begin{cases} 1, & 3-2x^2 > 0 \\ 0, & 3-2x^2 = 0 \\ -1, & 3-2x^2 < 0 \end{cases}$$



$D_g : \mathbb{R}$

$Z_g : \{-1, 0, 1\}$

je SODA (simetrična glede na os y)

NI INJEKTIVNA

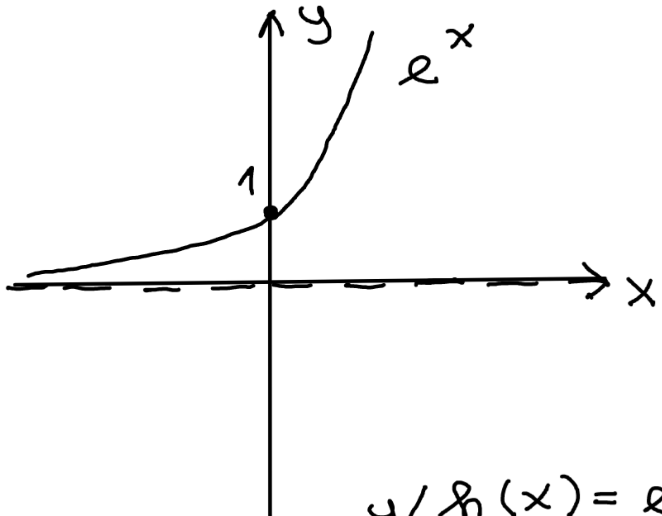
$+$

NI SURJEKTIVNA ($Z_g \neq \mathbb{R}$)

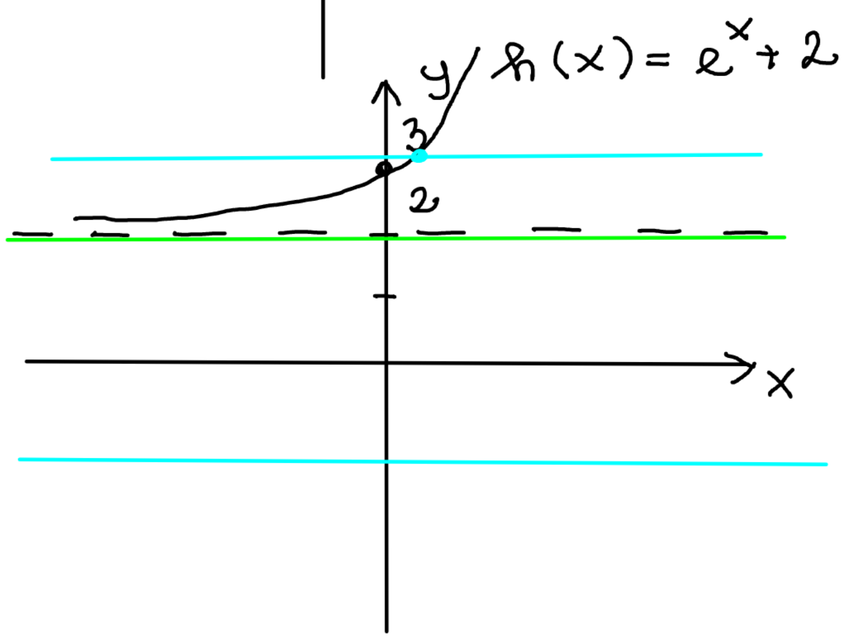
$\Downarrow$

NI BIJEKTIVNA

d) $h(x) = e^x + 2$



$D_h : \mathbb{R}$



JE INJEKTIVNA

NI SURJEKTIVNA

$Z_h : (2, \infty) \neq \mathbb{R}$

NI SODA (ni simetrična glede na os y)
NI LIHA (ni simetrična glede na koor. izh.)

$$h(-x) = e^{-x} + 2 \neq e^{x} + 2 = h(x)$$

$$h(-x) = e^{-x} + 2$$
$$-h(x) = -(e^{x} + 2) = -e^{x} - 2$$

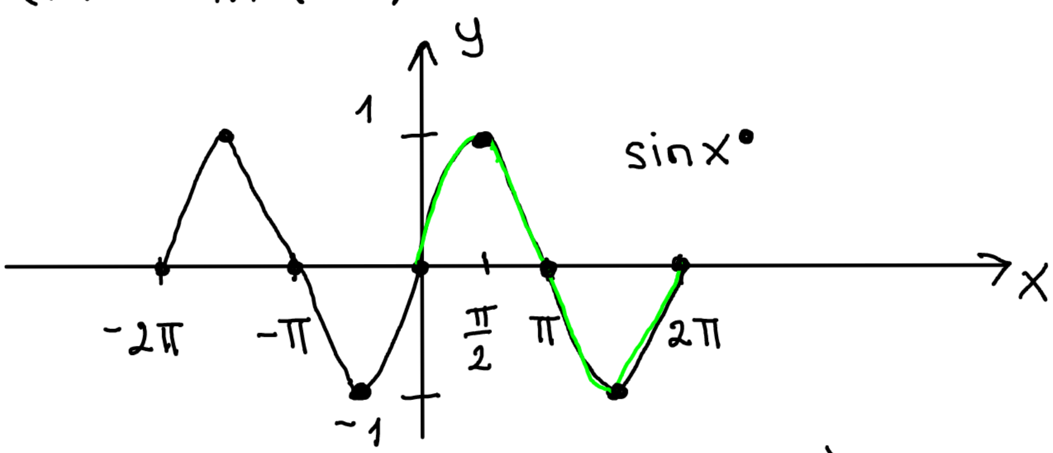
$$h(-x) \neq -h(x)$$

INJEKTIVNOST : $x_1, x_2 \in D_h$

$$h(x_1) = h(x_2)$$
$$e^{x_1} + \cancel{2} = e^{x_2} + \cancel{2}$$
$$e^{x_1} = e^{x_2} \quad / \log$$
$$\log e^{x_1} = \log e^{x_2}$$
$$x_1 = x_2$$

Sledi: h je INJEKTIVNA.

f) $h(x) = \sin(2x)$



$\sin(-x) = \sin x$
liha

ničle: $\sin(2x)=0 \quad / \arcsin$

$$2x = k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x = \frac{k\pi}{2}$$

maksimumi: $\sin(2x)=1$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

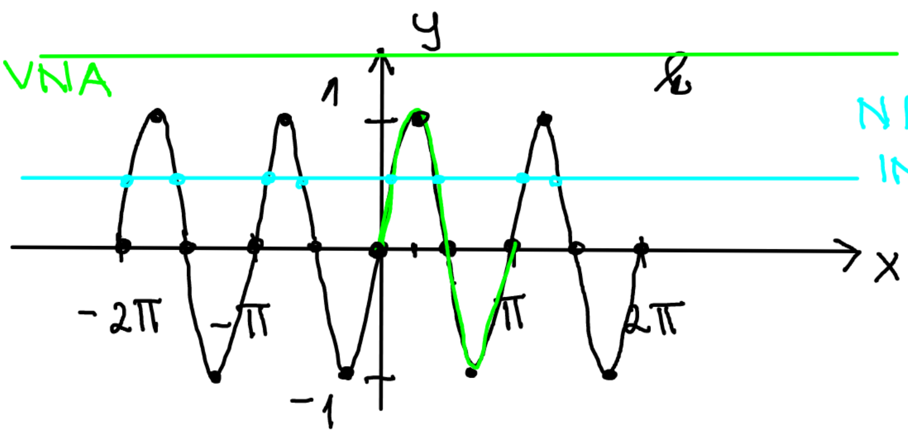
minimumi: $\sin(2x)=-1$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

NI SURJEKTIVNA

$Z_f \neq \mathbb{R}$



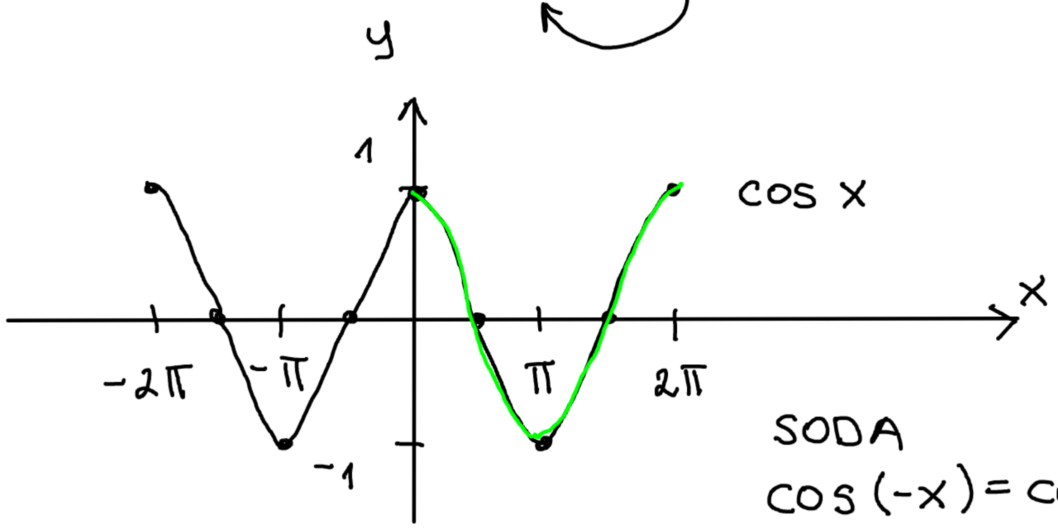
NI INJEKTIVNA

$D_f: \mathbb{R}$

$Z_f: [-1, 1]$

je LIHA (simetrična glede na koor. izh.)

$\sin(-2x) = -\sin(2x)$



$\cos x$

SODA

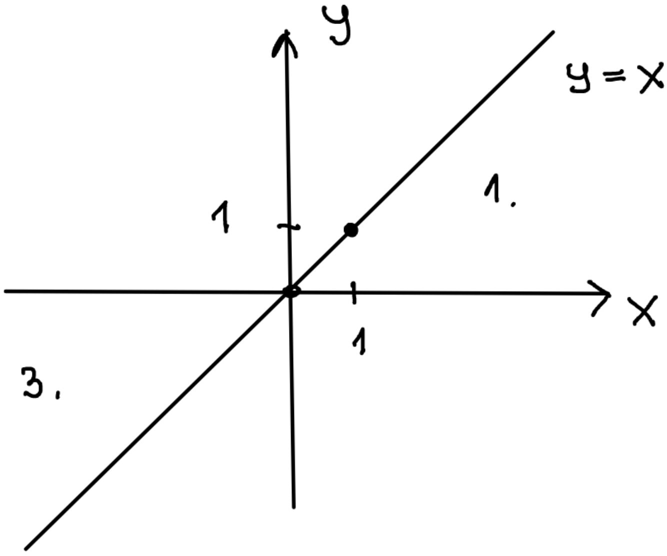
$\cos(-x) = \cos x$

NALOGA 28.
Ali predpisi x, $\sqrt{x^2}$ ter $(\sqrt{x})^2$ predstavljajo iste funkcije?

$f(x) = x$

$D_f : \mathbb{R}$

$Z_f : \mathbb{R}$

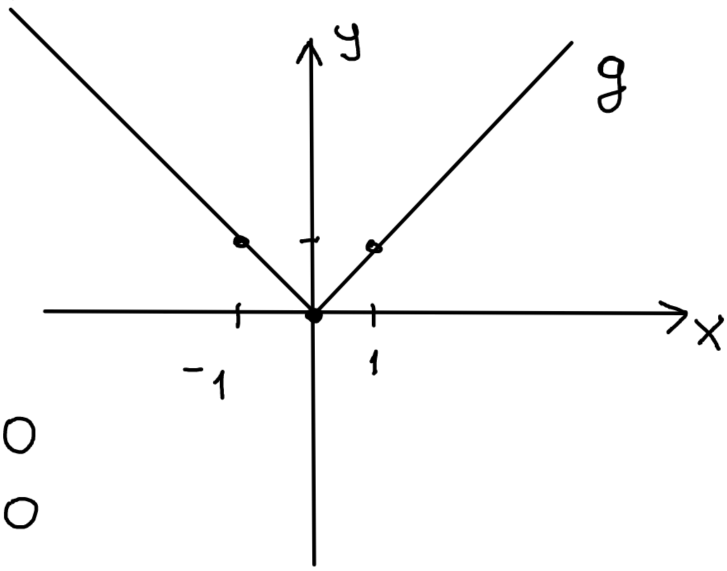


$g(x) = \sqrt{x^2}$

$D_g : \mathbb{R}$

$Z_g : [0, \infty)$

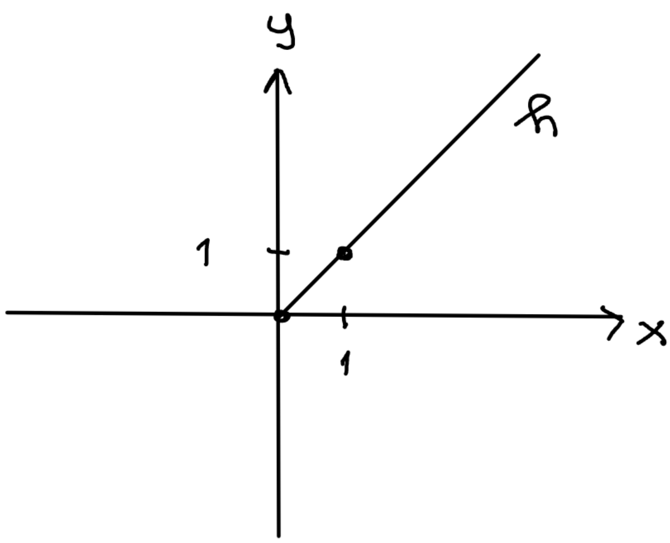
$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x ; & x \geq 0 \\ -x ; & x < 0 \end{cases}$$



$h(x) = (\sqrt{x})^2$

$D_h : [0, \infty)$

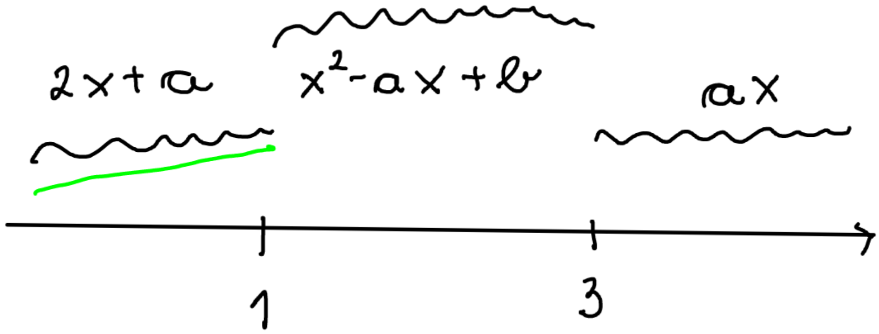
$Z_h : [0, \infty)$



NALOGA 30.
Določi realni števili a in b tako, da bo funkcija s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \leq 1 \\ x^2 - ax + b, & 1 \leq x \leq 3 \\ ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

zvezna.



Funkcija $f: D_f \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $x_0 \in D_f$, če velja

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Zveznost v $x=1$:

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} 2x+a = 2 \cdot 1 + a = 2+a$$

$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} x^2-ax+b = 1^2 - a \cdot 1 + b = 1-a+b$$

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} f(x)$$

$$2+a = 1-a+b$$

$$\boxed{2a-b=-1}$$

Zveznost v $x = 3$:

$$\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \uparrow 3} x^2 - ax + b = 9 - 3a + b$$

$$\lim_{x \downarrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} ax = 3a$$

$$\lim_{x \uparrow 3} f(x) = \lim_{x \downarrow 3} f(x)$$

$$9 - 3a + b = 3a$$

$$\boxed{-6a + b = -9}$$

$$\begin{aligned} 2a - b &= -1 \\ -6a + b &= -9 \quad (+) \\ \hline -4a &= -10 \\ a &= \frac{-10}{-4} \end{aligned}$$

$$\boxed{a = \frac{5}{2}}$$

$$2 \cdot \frac{5}{2} - b = -1$$

$$5 - b = -1$$

$$-b = -6 \quad / \cdot (-1)$$

$$\boxed{b = 6}$$

NALOGA 31.

Določi konstanto a tako, da bo f zvezna funkcija.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(3x)(x-2)}{x}, & x<0\\ ax+b, & 0\le x\le 1,\\ 2e^{x-1}-\cos(\pi x). & x>1\end{cases}$$

Zveznost v $x=0$:

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x)=\lim_{x\uparrow 0}\frac{\sin(3x)(x-2)\cdot 3}{x\cdot 3} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{kx}=1 \quad k\in\mathbb{R}\end{array}}$$

$$=\lim_{x\uparrow 0}\frac{\overbrace{\sin(3x)}^{1}\,3(x-2)}{3x}=1\cdot 3(0-2)$$

$$=-6$$

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x)=\lim_{x\downarrow 0} ax+b=a\cdot 0+b=b$$

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x)=\lim_{x\downarrow 0} f(x)$$

$$\boxed{-6=b}$$

Zveznost v $x=1$:

$$\lim_{x\uparrow 1} f(x)=a\cdot 1+b=a+b$$

$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} 2e^{x-1} - \cos(\pi \cdot x) =$$

$$= 2e^{1-1} - \cos(\pi \cdot 1) =$$

$$= 2 \cdot e^{0} - \cos \pi = 2 \cdot 1 - (-1) = 3$$

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} f(x)$$

$$a + b = 3$$

$$a - 6 = 3$$

$$\boxed{a = 9}$$