1. Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ je **lastna vrednost** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z **lastnim vektorjem** $\vec{v} \neq \vec{0}$, če velja $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$

$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$ // dodamo I (identično matriko), ker smo izpostavili skalar in matriko pred vektorjem

ker $\vec{v} \neq \vec{0}$, velja $\det(A - \lambda I) = 0$, torej ko matrika $A - \lambda I$ ni obrnljiva

$\det(A - \lambda I) = \Delta_A(\lambda)$ // karakteristični polinom, njegove ničle so lastne vrednosti

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 & 2 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ // s transformacijami poskusimo priti do ničel v matriki, da bomo lažje izračunali determinanto – te transformacije so Gaussova eliminacija nad vrsticami IN STOLPCI - ko računamo determinante, lahko izvajamo operacije tudi nad stolpci, saj je $\det(A) = \det(A^T)$

$$\begin{vmatrix} \overset{\overset{-}{\curvearrowleft}}{-\lambda} & 2 & 2 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda-2 & 2 & 2 \\ 2+\lambda & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc} \boxed{-\lambda-2} & \begin{matrix} 2 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{matrix}} \end{array}\right| =$$ // dobili smo bločno zgornjetrikotno matriko

determinanta take matrike je determinanta posameznih blokov:

$= (-\lambda-2)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)((3-\lambda)^2 - 1) = -(\lambda+2)(3-\lambda-1)(3-\lambda+1)$
$= -(\lambda+2)(2-\lambda)(4-\lambda) = 0$

dobili smo ničle karakterističnega polinoma: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$ to so lastne vrednosti matrike A

poiščimo še pripadajoče lastne vektorje:
najprej vstavimo lastne vrednosti v enačbo $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$ (rešimo homogeni sistem)
z drugimi besedami: iščemo ničelni prostor matrike $(A - \lambda I)$ // ta matrika ni nikoli polnega ranga

$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{-2}$:   iščemo ničelni prostor: $N(A - \lambda_1 I) = N(A + 2I)$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ // reducirana stopničasta oblika

//ker je $\boldsymbol{\lambda_1} = -2$ lastna vrednost, moramo na koncu dobiti vsaj eno vrstico ničel (kar tudi smo)

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array} \qquad \begin{matrix} x + y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ // poiskali smo splošni lastni vek. ki pripada λ_1; vsi večkratniki vektorja $[-1,1,0]^T$ so lastni vektorji in razpenjajo pripadajoči lastni podprostor

Vzamemo $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{2}: \quad A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x - z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{4}: \quad A - \lambda_3 I = A - 4I = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

λ je lastna vrednost $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z lastnim vektorjem $\vec{v} \neq \vec{0}$, če velja $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$.

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \ \dots \ \boxed{(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}} \ \dots \ \underset{\Delta_A(\lambda)}{\underset{\parallel}{\det(A-\lambda I)}} = 0$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 3 & 1-\lambda & -3 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda-2 & 2 & 2 \\ 2+\lambda & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{-\lambda-2} & 2 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda-2)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) =$$

$$= -(\lambda+2)(3-\lambda-1)(3-\lambda+1) = -(\lambda+2)(2-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

To so lastne vrednosti matrike A. → $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$

Poiščimo še pripadajoče lastne vektorje:

- $\lambda_1 = -2$:

$$A - \lambda_1 I = A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{aligned} x + y &= 0 \ \dots \ x = -y \\ z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vzamemo $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- $\lambda_2 = 2$:

$$A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x - z = 0 \ \dots \ x = z$$
$$y = 0$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \xleftarrow{\text{vzamemo}} \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \leftsquigarrow$$

Za $\vec{v}_3$: DOMA!

LASTNOSTI SIMETRIČNIH MATRIK:

$A^T = A$

$\lambda \in \mathbb{R}$

pri različnih lastnih vrednostih so lastni vektorji ortogonalni

algebraična večkratnost lastnih vrednosti (stopnja ničle v karakterističnem polinomu) se ujema z geometrijsko večkratnostjo lastnih vrednosti (dimenzija lastnega podprostora)

simetrične matrike lahko diagonaliziramo z ortonormirano bazo (ONB): $A = QDQ^T$, kjer je Q ortogonalna matrika (njeni stolpci so ortonormirana baza – so dolžine 1 in so medseboj pravokotni) in D diagonalna matrika, kjer so lastne vrednosti po diagonali $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$

velja tudi v obratni smeri: matriko, ki jo lahko diagonaliziramo z ortonormirano bazo, je simetrična

$A = QDQ^T \Rightarrow A^T = (QDQ^T)^T = QDQ^T = A$

2. Poišči lastne vrednosti in ortogonalne baze pripadajočih lastnih podprostorov simetrične matrike

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

če izračunamo karakteristični polinom, vidimo, da sta 2 dvojni lastni vrednosti

ker je matrika simetrična, dobimo dvodimenzionalni ničelni prostor

če vstavimo 0,1 in 1,0, vektorja nista ortogonalna, zato rabimo Gram-Schmidtov postopek

3. Dana je $n \times n$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

tj. matrike sosednosti zvezde (kot neusmerjnega grafa).

(a) Poišči bazi za $N(A)$ in $C(A)$, tj. bazi ničelnega in stolpčnega prostora A.

(b) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.
Namig: Zakaj je $N(A)$ lastni podprostor za A? Zakaj je $N(A)^{\perp}$ vsota ostalih lastnih podprostorov za A?

ker ima matrika samo dva neodvisna stolpca (stolpci od 3. naprej so vsi enaki drugemu) je ranga 2, torej bo imela ničelni prostor dimenzije $n-2$

ničelni prostor je lastni podprostor za lastno vrednost 0: $A\vec{v} = 0 \cdot \vec{v}$ $\quad A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ $\quad N(A - 0I)$

a) $N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ Rešimo $A\vec{x} = \vec{0}$ (Gauss)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0 \rightarrow \ x_2 = -(x_3 + x_4 \ldots + x_n) \end{array}$$

// x_1 in x_2 sta edini spremenljivki, ki imata pivot, ostale spremenljivke so proste

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(x_3 + x_4 + \cdots + x_n) \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_n \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

to so lastni vektorji za lastne vrednosti $\lambda_{3,\ldots,n} = 0$

dobimo linearno kombinacijo linearno neodvisnih vektorjev, torej je baza za ničelni prostor matrike A:

$$B_{N(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \dim N(A) = n - 2 \qquad N(A) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

//dimenzija ničelnega prostora je št. vektorjev v bazi $= n - 2$

$$C(A) = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \ldots A\vec{x} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + \cdots + x_n\vec{a_n}$$

// to so linearne kombinacije stolpcev matrike

// vidimo, da so vsi stolpci od drugega naprej enaki, tj. lin. odvisni, prva dva pa sta lin. neodvisna, zato je baza:

$$B_{C(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \dim C(A) = 2$$

// je ok, ker mora veljati: $\dim N(A) + \dim C(A) = n$ (št. stolpcev matrike A)

b) $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ in $A\vec{x} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{x}$ tj. vsak $\vec{x} \in N(A)$ je lastni vektor A za lastno vrednost 0.

Torej A ima $(n-2)$-kratno lastno vrednost 0, pripadajoči linearno neodvisni lastni vektorji pa so iz $B_{N(A)}$.

Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ima največ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.
Ker je A simetrična, ima še točno 2 linearno neodvisna lastna vektorja.
// simetrične matrike imajo vedno n linearno neodvisni lastnih vektorjev, če so velikosti $n \times n$
// lastne vr. simetričnih matrik so vedno realne, lastne vek. se da »izbrati« tako, da so med seboj pravokotni

Lastni vektorji za različne lastne vrednosti simetrične matrike so avtomatično pravokotni med sabo.

Lastni vektorji za $\lambda \neq 0$ so pravokotni na vse lastne vektorje za $\lambda = 0$, tj. na $B_{N(A)}$. To so vektorji iz $N(A)^\perp$ (ortogonalni komplement ničelnega prostora).

Na splošno velja $N(A)^\perp = C(A^T)$, ker pa je A simetrična, velja $N(A)^\perp = C(A)$
v našem primeru:

$$N(A)^\perp = C(A) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = U \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

izračunajmo Au:

$$Au_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = u_2 \qquad Au_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (n-1)u_1$$

množenje A na prostoru U lahko predstavimo z 2×2 matriko: $B = \begin{array}{c|cc} & Au_1 & Au_2 \\ u_1 & 0 & n-1 \\ u_2 & 1 & 0 \end{array}$

lastne vrednosti matrik so invariantne glede na bazo vektorskega prostora s katero predstavimo linearne preslikave (za različne baze predstavimo linearne preslikave z različnimi matrikami, ampak vse te matrike bodo imele enake lastne vrednosti)

zato lahko določimo preostali dve lastni vrednosti za matriko A tako, da najdemo lastne vrednosti za matriko B:

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & n-1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (n-1) \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{n-1}$$

lastni vektorji:

$$\lambda_1 = \sqrt{n-1}\colon \begin{bmatrix} \sqrt{n-1} & n-1 \\ 1 & \sqrt{n-1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{n-1}\colon \ldots \quad v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

trik za 2×2 matrike:
v_2 se nahaja v stolpcih matrike $[B - \lambda_1 I]$

in obratno:
v_1 se naha v stolpcih matrike $[B-\lambda_2 I]$
ni važno kateri stolpec, samo da je neničeln

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} = -\sqrt{n-1}\, u_1 + u_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{n-1}\, u_1 + u_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iščemo $\vec{y} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0,\ \ \vec{y} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0,\ \ \dots,\ \ \vec{y} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$: $\ -y_2 + y_3 = 0, \quad -y_2 + y_4 = 0, \quad \dots, \quad -y_2 + y_n = 0$

$y_3 = y_2, \qquad y_4 = y_2, \qquad \dots, \quad y_n = y_2$

Torej $\vec{y} \in N(A)^{\perp}$ je oblike $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_2 \end{bmatrix}$.

// 2. način: stolpčni prostor simetrične matrike je ortogonalen na ničelni prostor (ničelni prostor je ortogonalni komplement na matrike A^T in ker je A simetrična, to pomeni da je ničelni prostor ortogonalen na stolpčnega).

Iz tega sledi: $\vec{y} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}$ oz. $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_2 \end{bmatrix}$

Poiščimo še ostale lastne vektorje in lastne vrednosti direktno iz definicije $A\vec{y} = \lambda\vec{y}$:

$$A\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n-1)y_2 \\ y_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_1 \end{bmatrix} = \lambda\vec{y} = \begin{bmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \\ \lambda y_3 \\ \vdots \\ \lambda y_n \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{matrix} (n-1)y_2 = \lambda y_1 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ \vdots \\ y_1 = \lambda y_2 \end{matrix} \quad \dots \quad (n-1)y_2 = \lambda^2 y_2 \quad \dots$$

… $(n-1) = \lambda^2$ // krajšamo y_2, ker ne more biti 0: če bi bil 0, bi bil $\vec{y} = \vec{0}$, to pa ne more biti lastni vektor

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{n-1}$

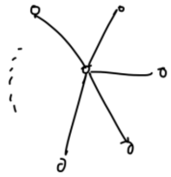
Upoštevamo še $y_1 = \lambda y_2 = \pm y_2\sqrt{n-1}$

$\lambda_1 = \sqrt{n-1}$ pripada lastni vektor $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_2\sqrt{n-1} \\ y_2 \\ \vdots \\ y_2 \end{bmatrix} = y_2 \begin{bmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -\sqrt{n-1}$ pripada lastni vektor $\vec{y} = \begin{bmatrix} -y_2\sqrt{n-1} \\ y_2 \\ \vdots \\ y_2 \end{bmatrix} = y_2 \begin{bmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Dana je $n \times n$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$



tj. matrike sosednosti zvezde (kot neusmerjnega grafa).

(a) Poišči bazi za $N(A)$ in $C(A)$, tj. bazi ničelnega in stolpčnega prostora A.

(b) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.
Namig: Zakaj je $N(A)$ lastni podprostor za A? Zakaj je $N(A)^\perp$ vsota ostalih lastnih podprostorov za A?

(a) $N(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0} \}$ Rešimo $A\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ... $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}$$

$x_1 = 0$

$x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0 \ldots x_2 = -(x_3 + x_4 + \ldots + x_n).$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(x_3 + x_4 + \ldots + x_n) \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_4 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Torej je:

$$B_{N(A)} = \Bigg\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{n-2} \Bigg\}, \quad \dim N(A) = n-2.$$

$$C(A) = \{ A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n \} \ldots\ldots \quad A\vec{x} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n$$

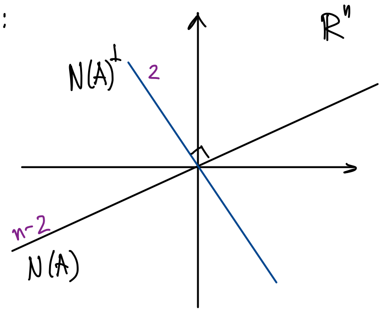
$$B_{C(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \ldots \quad \dim C(A) = 2$$

(b) $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $\qquad$ $A\vec{x} = \vec{0} = 0\cdot\vec{x}$, tj. vsak $\vec{x} \in N(A)$ je lastni vektor A, za lastno vrednost 0.

Torej A ima $(n-2)$-kratno lastno vrednost 0, pripadajoči linearno neodvisni lastni vektorji so iz $B_{N(A)}$.

Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima največ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev. Ker je naša A simetrična, ima še točno 2 lin. neodv. l. v.. Lastni vektorji za različne lastne vrednosti sim. mat. A so avtomatično pravokotni med sabo.

Lastni vekt. za $\lambda \neq 0$ so pravokotni na vse l. vekt. za $\lambda = 0$, tj. na $B_{N(A)}$, to so vektorji iz $N(A)^{\perp}$:



Iščemo: $\vec{y}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = 0$, $\vec{y}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = 0$, $\ldots$, $\vec{y}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} = 0$.

$\vec{y} = \begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$: $-y_2+y_3=0$, $-y_2+y_4=0$, ..., $-y_2+y_n=0$

$y_3 = y_2$, $y_4 = y_2$, $\ldots$, $y_n = y_2$

Torej $\vec{y} \in N(A)^{\perp}$ je oblike $\vec{y} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_2\\\vdots\\y_2\end{bmatrix}$.

Poiščimo še ostale l.v. in l.v. direktno iz def. $(A\vec{y} = \lambda\vec{y})$:

$$A\vec{y} = \begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\1 & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_2\\\vdots\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(n-1)y_2\\y_1\\y_1\\\vdots\\y_1\end{bmatrix} = \lambda\vec{y} = \begin{bmatrix}\lambda y_1\\\lambda y_2\\\vdots\\\lambda y_2\end{bmatrix} \ldots \begin{matrix}(n-1)y_2 = \lambda y_1 = \lambda^2 y_2\\ y_1 = \lambda y_2\end{matrix}$$

$\ldots (n-1)y_2 = \lambda^2 y_2 \;\ldots\; (n-1) = \lambda^2 \;\ldots\; \lambda = \pm\sqrt{n-1}$.

Upoštevamo še $y_1 = \lambda y_2 = \pm\sqrt{n-1}\, y_2$.

Končno: $\lambda = \pm\sqrt{n-1}$ pripada l. vektor $\vec{y} = \begin{bmatrix}\pm\sqrt{n-1}\,y_2\\y_2\\\vdots\\y_2\end{bmatrix} = y_2\begin{bmatrix}\pm\sqrt{n-1}\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$.

4. O *simetrični* matriki $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ vemo naslednje: 3 je 2-kratna lastna vrednost A, vektorja

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

pa A slika enega v drugega, tj. $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ in $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Poišči tako matriko A ali pa utemelji, zakaj ne obstaja!

$\lambda_{3,4} = 3$

$$\left.\begin{array}{l} A\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \\ A\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} + \;\rightarrow\; A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \;\ldots\; A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ - \;\rightarrow\; A\vec{v}_1 - A\vec{v}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \;\ldots\; A(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \end{array}$$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ je lastni vektor A za lastno vrednost 1 $\qquad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ je lastni vektor A za lastno vrednost -1 $\qquad \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$

2. način:
zapišemo matriko A va bazi v_1, v_2

$$B = \begin{array}{c|cc} & Av_1 & Av_2 \\ v_1 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 \end{array} \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm 1$$

lastna vektoja:

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

preverimo, če sta vektorja pravokotna (skalarni produkt)
če ne bi bila pravokotna, taka matrika ne obstaja (ker simetrične matrike imajo pravokotne lastne vektorje)

poiščemo še lastna vektorja za $\lambda_{3,4} = 3$ tako, da poiščemo ortogonalni komplement vektorjev u_1 in u_2

(bazo za $N(A - 3I)$) lahko poiščemo kot $\mathcal{L}(u_1, u_2)^\perp = C([u_1\; u_2])^\perp = N\left(\begin{bmatrix}u_1^T \\ u_2^T\end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

preverimo, da so vsi vektorji ortogonalni, drugače A ne obstaja

jih še normiramo:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad q_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = QDQ^T$$

če pa ne bi imeli ortonormirane matrike Q, pa bi mogli izračunati $A = PDP^{-1}$, kjer je $P = [u_1\ u_2\ u_3\ u_4]$

4. O *simetrični* matriki $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ vemo naslednje: 3 je 2-kratna lastna vrednost A, vektorja

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa A slika enega v drugega, tj. $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ in $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Poišči tako matriko A ali pa utemelji, zakaj ne obstaja!

$$\left.\begin{array}{l} A\vec v_1 = \vec v_2 \\ A\vec v_2 = \vec v_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} + \rightsquigarrow A\vec v_1 + A\vec v_2 = \vec v_2 + \vec v_1 \ \ldots\ A(\vec v_1 + \vec v_2) = \vec v_1 + \vec v_2 . \\ - \rightsquigarrow A\vec v_1 - A\vec v_2 = \vec v_2 - \vec v_1 \ \ldots\ A(\vec v_1 - \vec v_2) = -(\vec v_1 - \vec v_2) . \end{array}$$

Torej: $\vec v_1 + \vec v_2$ je lastni vektor A za l. vrednost 1, $\vec v_1 + \vec v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =: \vec u_1$

$\vec v_1 - \vec v_2$ je lastni vektor A za l. vrednost -1. $\vec v_1 - \vec v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} =: \vec u_2$

Lastna vektorja, ki pripadata (2-kratni) l. vrd. 3 sta (ker je A sim.) pravokotna na $\vec u_1$ in $\vec u_2$.

$$\begin{array}{l} \vec u_1 \cdot \vec u = 0 \\ \vec u_2 \cdot \vec u = 0 \end{array}, \quad \text{pišimo } \vec u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \text{ dobimo} \longrightarrow \begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ -x + y + z - w = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{torej} & 2y + 2z = 0, \text{ tj. } y = -z, \\ \text{in} & 2x + 2w = 0, \text{ tj. } x = -w. \end{array} \quad \text{Rešitev } \vec u = \begin{bmatrix} -w \\ -z \\ z \\ w \end{bmatrix} = z \underset{\overset{\shortparallel}{\vec u_3}}{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + w \underset{\overset{\shortparallel}{\vec u_4}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

linearno neodvisna last. vektorja A za lastno vrednost 3 $\rightarrow$

A je torej podobna diagonalni matriki

$$D = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{bmatrix} \quad \text{s prehodno matriko } P = [\vec u_2, \vec u_1, \vec u_3, \vec u_4] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tj. $A = PDP^{-1}$.

5. Eksponentna funkcija kvadratne $n \times n$ matrike A je (lahko) definirana z

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

(V Taylorjevo vrsto za e^x smo namesto števila x vstavili matriko A.) Utemelji, da drži naslednje: *Če je A podobna zgornje trikotni matriki, potem velja* $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

1. Eksponentna funkcija kvadratne $n \times n$ matrike A je (lahko) definirana z

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

(V Taylorjevo vrsto za e^x smo namesto števila x vstavili matriko A.)

(a) Utemelji, da velja $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

(b) Recimo, da je matrika A antisimetrična, tj. $A^\mathsf{T} = -A$. Dokaži, da je tedaj matrika e^A ortogonalna z determinanto 1.

(a) najprej pokažimo identiteto za zgornje trikotne matrike

produkt dveh zgornje trikotnih matrik je zgornje trikotna matrika, na njeni diagonali pa so produkti diagonalnih elementov:

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} a_1^k & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_1^k & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_1} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\det(e^T) = e^{a_1} \cdot \ldots \cdot e^{a_n} = e^{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \boldsymbol{e^{tr(T)}}$$

Schurov razcep: vsaka $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonalno podobna neki zgornje-trikotni matriki $A = QTQ^T$, kjer je T zgornje-trikotna in Q ortogonalna ($Q^T Q = QQ^T = I$)

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^K}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(QTQ^T)^K}{k!} = (\mathrm{A}^2 = QTQ^TQTQ^T = QT^2Q^T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{QT^kQ^T}{k!}$$

$$= Q\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}\right) Q^T = Qe^TQ^T$$

$$\det(e^A) = \det(Qe^TQ^T) = \cancel{\det(Q)} \det(e^T) \cancel{\det(Q^{-1})} = \det(e^T) = \boldsymbol{e^{tr(T)}}$$

$$tr(A) = tr(QTQ^T) = tr(T\cancel{QQ^T}) = tr(T)$$

$$\boldsymbol{e^{tr(T)}} = e^{tr(A)}$$

(a) Naj bo $A = QZQ^T$ Schurov razcep matrike A. Tedaj je

$$e^A = e^{QZQ^T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(QZQ^T\right)^k \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} QZ^kQ^T = Q\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Z^k\right)Q^T = Qe^ZQ^T.$$

$$\left(QZQ^T\right)^k = \underbrace{(QZ\overbrace{\cancel{Q^T})(\cancel{Q}}^{I}Z\cancel{Q^T})\cdot \ldots \cdot(\cancel{Q}ZQ^T)}_{k\text{-krat}}$$

Poleg tega: Z ima na diagonali lastne vrednosti λ_i matrike A in, ker je Z zgornje trikotna, velja, da ima Z^k na diagonali λ_i^k:

$$Z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \lambda_2 & * \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad Z^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & * & * \\ & \lambda_2^k & * \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Torej:

$$e^Z = I + Z + \frac{Z^2}{2} + \ldots + \frac{Z^k}{k!} + \ldots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ & \lambda_2 & * \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & * \\ & \lambda_2^2 & * \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + \ldots + \frac{1}{k!}\begin{bmatrix} \lambda_1^k & * \\ & \lambda_2^k & * \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & * \\ & e^{\lambda_2} & * \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Kar pomeni: $\det(e^A) = \det(Qe^ZQ^T) = \det(\overbrace{Q^TQ}^{I} e^Z) = \det(e^Z) =$

$$= e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} = e^{tr(A)}.$$

(b) $(e^A)^T e^A \underset{\uparrow}{=} e^{A^T} e^A = e^{-A} e^A \underset{\uparrow}{=} e^{-A+A} = e^0 = I$, torej je e^A ortogonalna.

$(e^A)^T = e^{A^T}$, preveri to!

Ker $-A$ in A komutirata.

$\det(e^A) = e^{tr(A)} = e^0 = 1.$

$tr(A) = tr(A^T) = tr(-A) = -tr(A)$, torej $2 \cdot tr(A) = 0$ oz. $tr(A) = 0$.

(Pazi: V splošnem <u>ne</u> velja $e^A e^B = e^{A+B}$, velja pa, če $AB = BA$.)

2. Poišči Schurova razcepa matrik

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

iskanje Schurovega razcepa je podobno dokazu da ima vsaka matrika Schurov razcep

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} = QZQ^T$$
$$Z = Q^T B Q$$

1. korak:

poiščemo eno izmed lastnih vrednosti in pripadajoči lastni vektor:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & \mathbf{0} \\ 0 & 1-\lambda & \mathbf{0} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \mathbf{2-\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

determinanta bo nič, če bo zadnji stolpec ničeln – vidimo eno lastno vrednost $\lambda_1 = 2$

opazimo, da je zadnji stolpec matrike B dvokratnik enotskega vektorja $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

in je lastni vektror za λ_1 enak $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad (Be_3 = 2e_3)$

pri B matriki smo prepoznali lastno vrednost 2 in njen lastni vektor, pri A pa je potrebno lastno vrednost izračunati

sestavimo ortogonalno matriko:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} e_3 & \begin{bmatrix} \text{ONB} \\ \text{za } e_3^{\perp} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

poiščemo ONB za lastni vektor s pomočjo enačbe $v^T x = 0$,

v našem primeru sta to kar e_1, e_2 $(\{e_1, e_2\}$ je ONB za $e_3^{\perp}$, vrstni red ni važen) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Q_1 = [e_3\ e_2\ e_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = Q_1^T B Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

// uničili smo modri stolpec, zdaj pa postopek ponovimo še za oranžno matriko

2. korak:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & [Q_2'] \end{bmatrix}$$

pri oranžni matriki $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ vidimo, da ima lastni vrednosti 1 in 2

izberemo $\lambda_2 = 2$ in opazimo da je njen lastni vektor $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Q_2' = \left[v_2 \begin{bmatrix} ONB \\ za\ v_2^{\perp} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = Q_2^T Z_1 Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = Q_2 Z_2 Q_2^T \Rightarrow B = Q_1 Q_2 Z_2 Q_2^T Q_1^T = QZQ^T \qquad \begin{matrix} Q = Q_1 Q_2 \\ Z = Z_2 \\ Q^T = Q_2^T Q_1^T \end{matrix}$$ ← našli smo Schurov razcep

Če bi v 1. koraku izbrali drugačno ONB, 2. korak ne bi bil potreben:

tj. če bi $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tak Q_1 bi lahko razbrali direktno iz matrike B, ker se jo da preoblikovati v zgornje trikotno matriko samo s permutacijo vrstic in stolpcev – torej s permutacijsko matriko Q_1

$$Z_1 = Q_1^T B Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Z$$

Schurov razcep matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je zapis $A = QZQ^T$.

ortogonalna, $Q^TQ=I$ zgornje trikotna

2. Poišči Schurova razcepa matrik

$$A=\begin{bmatrix}6&-1&1\\4&3&1\\2&2&3\end{bmatrix} \text{ in } B=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Začnemo z B. Poiščimo vsaj eno lastno vrednost in pripadajoč lastni vektor B.

$$\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&0\\0&1-\lambda&0\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&\boxed{2-\lambda}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\0&1-\lambda\end{vmatrix}(2-\lambda)=(2-\lambda)^2(1-\lambda)=0.$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=2$$

Poiščimo lastni vektor, ki pripada $\lambda_{2,3}=2$:

$$B-2I=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&-1&0\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad \vec{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix}=z\underset{\vec{v}_1}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}$$

$x=0$

$y=0$

$z\in\mathbb{R}$

je že normiran

$$Q^T\cdot/\ B=QZQ^T/\cdot Q\ \dots\quad Z=Q^TBQ$$

Prvi stolpec Q je $\overset{\text{normiran}}{\perp}$ lastni vektor, ki pripada "prvi" lastni vrednosti.

Vzemimo (zaenkrat): $Q_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

$\uparrow$ $\vec{v}_1$ | $\uparrow\ \uparrow$ dolžine 1 in pravokotna na $\vec{v}_1$ ter med sabo

$$Z_1=Q_1^TBQ_1=$$

$$\begin{bmatrix}\lambda&\vec{b}^T\\\vec{0}&B_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&2\\0&1&0\\2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\\boxed{0}&\boxed{1}&\boxed{0}\\\boxed{0}&\boxed{-1}&\boxed{2}\end{bmatrix}.$$

B_1

Vse skupaj ponovimo na bloku $\boxed{}$.

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, lastni vrednosti B_1 sta 1 in 2.

$\vec{v}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ je lastni vektor B_1 za l. v. 1. $\left(\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ za l. v. } 2 \right)$

Normiramo, dobimo $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$Q_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{bmatrix}$ ..... $Z_2' = Q_2'^T B_1 Q_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$

$\uparrow$ $\vec{v}_1$ $\uparrow$ pravokoten na $\vec{v}_1$ in dolžine 1

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \boxed{0} & 2 \end{bmatrix}$

Kako to 'zložimo skupaj'?

$$Q_2 := \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & Q_2' \end{bmatrix}, \text{ tedaj } Q_2^T \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda & \vec{b}^T \\ \vec{0} & B_1 \end{bmatrix}}^{Z_1} Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & Q_2'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \vec{b}^T \\ \vec{0} & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & Q_2' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & \vec{b}^T \\ \vec{0} & Q_2'^T B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & Q_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \vec{b}^T Q_2' \\ \vec{0} & Q_2'^T B_1 Q_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \vec{b}^T Q_2' \\ \vec{0} & Z_2' \end{bmatrix} = Z_2 = Z \leftarrow \text{iz Schurovega razcepa}$$

(V našem primeru bo to že konec rekurzije.)

Konkretno:

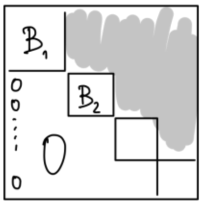
$$Z = Z_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{b}^T Q_2' = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [-2, 0]$$

Kaj pa Q iz Schurovega razcepa?

$$Z = Z_2 = Q_2^T Z_1 Q_2 = Q_2^T Q_1^T B \overbrace{Q_1 Q_2}^{Q}, \text{ tj.}$$

$$Q = Q_1 \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & Q_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kaj je Schurov razcep, če je B bločno zg. trikotna?



B_1 ima l. vred. λ_1 z l. vekt. $\vec{v}_1' = [\,]$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Naj bo I identična 2×2 matrika. Poišči ortonormirano bazo ortogonalnega komplementa I, $I^\perp \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$, glede na (Frobeniusov) skalarni produkt $\langle A, B\rangle_\mathrm{F} := \mathrm{tr}(A^\top B)$.

$$\langle A, B\rangle_F = tr(A^T B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

$\langle A, I\rangle_F = 0$
$tr(A^T I) = tr(A^T) = tr(A) = 0$

oz. $\langle\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\rangle = a_{11} + a_{22} = 0 \Rightarrow a_{11} = -a_{22}$

proste spremenljivke: a_{12}, a_{21}, a_{22}

zapišimo bazo za $I^\perp$: $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

če želimo, da je baza ortonormirana, moramo matrike še normirati: $\left||A|\right|_F^2 = \langle A, A\rangle_F$

$$ONB = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

4. Naj bo A poljubna matrika, U in V pa taki ortogonalni matriki, da obstaja produkt UAV. Preveri, da velja naslednje:

   (a) $\|UA\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}$,

   (b) $\|AV\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}$,

   (c) $\|UAV\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}$.

(a) $\|UA\|_F^2 = tr((UA)^T UA) = tr(A^T \cancel{U^T U} A) = tr(A^T A) = \|A\|_F^2$

(b) $\|AV\|_F^2 = tr((AV)^T AV) = tr(V^T A^T AV) = tr(A^T A \cancel{V V^T}) = \|A\|_F^2$

(c) $\|UAV\|_F =_{(a)} \|AV\| =_{(b)} \|A\|_F$

Frobeniusova norma matrike $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je

$$\|A\|_F = \sqrt{tr\,(A^T A)} = \sqrt{\text{"vsota kvadratov elementov } A\text{"}}.$$

(a) Če je U ortogonalna (tj. $U^T U = I$), potem $\|UA\|_F = \|A\|_F$.

(Že vemo $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$, če je U ortogonalna.)

$$\|UA\|_F^2 = tr\,((UA)^T (UA)) = tr\,(A^T \underbrace{U^T U}_{} A) = tr\,(A^T A) = \|A\|_F^2.$$

(b) $\|AV\|_F = \|(AV)^T\|_F = \|\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ortogonalna}}}{V^T} A^T\|_F \overset{I}{\underset{\substack{\uparrow \\ (a)}}{=}} \|A^T\|_F = \|A\|_F$

(c) $\|U(AV)\|_F \underset{\substack{\uparrow \\ (a)}}{=} \|AV\|_F \underset{\substack{\uparrow \\ (b)}}{=} \|A\|_F$.

Eckart-Young-ov izrek: Če je $A = USV^T$ SVD matrike A, $S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$, U, V ortogonalni, potem je matrika ranga k, ki je v Frobeniusovi normi najbližja A ravno:

$$A' = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_k & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} V^T. \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots)$$

5. Poišči matrike ranga 1, ki so (v Frobeniusovi normi) najbližje matrikam:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ali so take matrike enolične?

singularni (SVD) razcep matrike A: $A = USV^{\perp} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T$, U, V sta ortogonalni, S pa je diagonalna matrika $\begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$, kjer so singularne vrednosti nenegativne: $\sigma_1 \geq 0, \ldots, \sigma_n \geq 0$, matrike $[u_i v_i^T]$ pa so ranga 1 – singularne matrike

$$\|A\|_F = \|USV^T\|_F = (\text{kot smo pokazali pri prejšnji nalogi}) = \|S\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}$$

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ iščemo tako matriko M, ki bo ranga 1 in bo $\|A - M\|_F$ minimalna

Izrek Eckart-Young:

$$A =_{SVD} [u_1\ u_2\ u_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \sigma_3 u_3 v_3^T, \text{ kjer } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$$

vzamemo največjo singualno vrednost $= \sigma_1$ in ustrezen par singularnih vektorjev – u_1 in v_1^T
(oz. vzamemo prvi člen) in dobimo matriko M:
$M = \sigma_1 u_1 v_1^T$

$$A = USV^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \sigma_1 u_1 v_1^T = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|A - M\|_F = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{5}$$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = QDQ^T = USV^T$, ker je simetrična (singualrne vrednosti so lastne vrednosti)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda = 1 \pm 3 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 4 = \sigma_1$$

$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ← v stolpcih te matrike dobimo lastni vektor za λ_2 → $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ (trik pri 2x2 matrikah)

$$u_1 = (\text{normiran } v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M = 4 u_1 v_1^T = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|B - M\|_F = \sqrt{\sigma_2^2 (= \lambda_2^2)} = \sqrt{4} = 2$$

(c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\|C - M\|_F = 2$

(a) $$\overbrace{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}}^{A} = I\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}I^T = \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{U}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&+3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\underbrace{I^T}_{V^T}$$

Ker iščemo aproksimacijo ranga 1, dobimo:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}I^T = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ ← to je matrika ranga 1, ki je $\|\cdot\|_F$ najbližja A.

(b) $B = \begin{bmatrix}1&3\\3&1\end{bmatrix}$, B je simetrična, tj. $B = Q\underset{\substack{\uparrow\\ \text{diagonalna}}}{D}Q^T$

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 3^2 = (1-\lambda-3)(1-\lambda+3) =$$
$$= (-\lambda-2)(4-\lambda) = 0 \;..\; \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2.$$ ← lastni vred. B

Lastni vekt.: $\bullet\ \lambda_1 = 4 \ldots\ B-4I = \begin{bmatrix}-3&3\\3&-3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix} \ldots\ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}y\\y\end{bmatrix} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, da bo ta normiran.

$\bullet\ \lambda_2 = -2 \ldots\ B+2I = \begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} \ldots\ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-y\\y\end{bmatrix} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$Q = [\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ ← ta je ortogonalna

$$B = \underset{\substack{\shortparallel\\ U'}}{Q}\begin{bmatrix}4&0\\0&-2\end{bmatrix}\underset{\substack{\shortparallel\\ V^T}}{Q^T} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}}_{\substack{\shortparallel\\ U}}\underset{\substack{\shortparallel\\ S}}{\begin{bmatrix}4&0\\0&2\end{bmatrix}}\underset{\substack{\shortparallel\\ V^T}}{Q^T}.$$

Približek ranga 1 za B je torej:

$$B_1 = U\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}V^T = \underset{\uparrow}{\vec{u}_1}\cdot 4\cdot \underset{\uparrow}{\vec{v}_1^T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1] = 2\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}.$$

prva stolpca U in V

1. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ter $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Utemelji, da za *Kroneckerjevo vsoto*

$$A \oplus B := A \otimes I_n + I_m \otimes B$$

velja naslednje: Lastne vrednosti $A \oplus B$ so vse možne vsote $\lambda_i + \mu_j$, kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ lastne vrednosti A, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ pa lastne vrednosti B.

Z uporabo tega poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A \oplus B$, za

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kroneckerjev produkt

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1B} & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} A \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ B \in \mathbb{R}^{k\times l} \\ A \otimes B \in \mathbb{R}^{nk\times ml} \end{array}$$

Kroneckerjeva vsota
je definirana za kvadratni matriki A, B
$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{m\times m}$

če so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti A za lastne vektorje $u_1, \ldots, u_n$ in
$\mu_1, \ldots, \mu_m$ lastne vrednosti B za lastne vektorje $v_1, \ldots, v_n$
$\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_i \cdot \mu_j},\ i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$ so lastne vrednosti za $A \otimes B$, $u_i \otimes v_j$ pa lastni vektorji
$\Rightarrow \boldsymbol{\lambda_i + \mu_j}$ pa so lastne vrednosti $A \oplus B$, lastni vektorji pa so enaki - $u_i \otimes v_j$ dokaz:

$$(A \oplus B)(u_i \otimes v_j) = (A \otimes I + I \otimes B)(u_i \otimes v_j) = (A \otimes I)(u_i \otimes v_j) + (I \otimes B)(u_i \otimes v_j)$$
$$= \{(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \Rightarrow (A \otimes B)(\vec{u} \otimes \vec{v}) = A\vec{u} \otimes B\vec{v}\} = Au_i \otimes v_j + u_i \otimes Bv_j$$
$$= \lambda_1(u_i \otimes v_j) + \mu_j(u_i \otimes v_j) = (\lambda_i + \mu_j)(u_i \otimes v_j)$$

lastne vrednosti A: $\lambda_1 = -1, \lambda_3 = 3$ // ker gre za zgornje trikotno matriko, sta l.vr. na diagonali
$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ // za 2x2 matrike lahko preberemo v_2 iz stolpcev $A - \lambda_1 I$
$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ // enako kot zgoraj
lastne vrednosti B: $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$
$B - \mu_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad B - \mu_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{\lambda_i + \mu_j, \lambda_i \cdot \mu_j}$	**1**	**2**
-1	0, -1	1, -2
3	4, 3	5, 6

$\boldsymbol{u_i \otimes v_j}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

1. Let $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ and $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Show that the *Kronecker sum*

$$A \oplus B := A \otimes I_n + I_m \otimes B$$

has the property: Eigenvalues of $A \oplus B$ are all possible sums of the form $\lambda_i + \mu_j$, where $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ are eigenvalues of A, and $\mu_1, \dots, \mu_n$ eigenvalues of B.

Use this to find eigenvalues and eigenvectors of $A \oplus B$, where

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

For example $A \oplus B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & , 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & , 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Assume first $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, let $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ and $B\vec{u} = \mu\vec{u}$.

↑
$\vec{v}$ is an eigenvector of A corresponding to eigenvalue λ.

$$(A \oplus B)(\vec{v} \otimes \vec{u}) = (A \otimes I_n + I_m \otimes B)(\vec{v} \otimes \vec{u}) = (A \otimes I_n)(\vec{v} \otimes \vec{u}) + (I_m \otimes B)(\vec{v} \otimes \vec{u}) =$$

$$= \underbrace{(A\vec{v})}_{\lambda\vec{v}} \otimes \underbrace{(I_n\vec{u})}_{\vec{u}} + \underbrace{(I_m\vec{v})}_{\vec{v}} \otimes \underbrace{(B\vec{u})}_{\mu\vec{u}} = \lambda\vec{v} \otimes \vec{u} + \vec{v} \otimes (\mu\vec{u}) =$$

$$= \lambda(\vec{v} \otimes \vec{u}) + \mu(\vec{v} \otimes \vec{u}) = (\lambda + \mu)(\vec{v} \otimes \vec{u}).$$

So the eigenvalues of $A \oplus B$ are precisely the sums of eigenvalues of A and B, eigenvectors are corresponding Kronecker products.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Eigenvalues of $A \oplus B$ are therefore: $\lambda_1 + \mu_1 = 0$, $\lambda_1 + \mu_2 = 1$, $\lambda_2 + \mu_1 = 4$, $\lambda_2 + \mu_2 = 5$.

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{v}_1 \otimes \vec{u}_1$ $\qquad$ $\vec{v}_1 \otimes \vec{u}_2$ $\qquad$ $\vec{v}_2 \otimes \vec{u}_1$ $\qquad$ $\vec{v}_2 \otimes \vec{u}_2$

2. V tej nalogi želimo zapisati Sylvestrovo matrično enačbo $AX + XB = C$ v 'običajni' obliki ($\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$) z uporabo operatorja vec in jo nato rešiti.

   (a) Prepričaj se, da je matrična enačba $AX + XB = C$ z neznano matriko X enakovredna sistemu enačb
   $$(B^{\mathsf{T}} \oplus A)\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(C)$$
   z neznanim stolpcem $\mathrm{vec}(X)$.

   (b) Naj bosta A in B 2×2 matriki kot v prejšnji nalogi. Ali ima $AX+XB = 0$ netrivialno rešitev?

   (c) Poišči matriko X, ki reši
   $$AX + XB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$vec([a_1, a_2, \dots, a_n]) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a\_n \end{bmatrix}$$
$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vec(B)$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix}$$

(a)

$$vec(AX + XB) = vec(C)$$
$$vec(AXI) + vec(IXB) = vec(C)$$
$$(I \otimes A)vec(X) + (B^T \otimes I)vec(X) = vec(C)$$
$$(B^T \otimes I + I \otimes A)vec(X) = vec(C)$$

$$AX + XB = C \Leftrightarrow (B^T \oplus A)vec(X) = vec(C)$$

(b) $AX + XB = 0$ ima netrivialno rešitev $\Leftrightarrow$ $B^T \oplus A$ ima netrivialen ničelni prostor $\Leftrightarrow$ obstaja $v \neq 0$, ki reši enačbo $Mv = 0v \Leftrightarrow 0$ je lastna vrednost za M

lastne vrednosti $B^T \oplus A$ so enake $A \oplus B$, v prejšnji nalogi pa smo videli da $A \oplus B$ ima $\lambda = 0$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T \oplus A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad vec(X) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \qquad x = \begin{bmatrix} t & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. The objective of this exercise is to express the Sylvester matrix equation $AX + XB = C$ in the 'usual' form ($\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$) using the vec operator and then solve this equation.

   (a) Confirm that the matrix equation $AX + XB = C$ in the unknown matrix X is equivalent to the linear system

   $$(B^{\mathsf{T}} \oplus A)\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(C)$$

   $$\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\,\mathrm{vec}(B)$$

   in the unknovn column $\mathrm{vec}(X)$.

   (b) Let A and B be 2×2 matrices as in the previous exercise. Does $AX + XB = 0$ posses a nontrivial solution?

   (c) Find a matrix X which solves

   $$AX + XB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) $AX = AXI \;\ldots\; \mathrm{vec}(AX) = \mathrm{vec}(AXI) = (I^T \otimes A)\,\mathrm{vec}(X)$

$$= (I \otimes A)\,\mathrm{vec}(X)$$

$XB = IXB \;\ldots\; \mathrm{vec}(IXB) = (B^T \otimes I)\,\mathrm{vec}(X)$

Hence $\mathrm{vec}(AX + XB) - \mathrm{vec}(AX) + \mathrm{vec}(XB) = (I \otimes A)\,\mathrm{vec}(X) + (B^T \otimes I)\,\mathrm{vec}(X)$

$$= (I \otimes A + B^T \otimes I)\,\mathrm{vec}(X) = (B^T \oplus A)\,\mathrm{vec}(X)$$

Finally: $(B^T \oplus A)\,\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(C)$.

(b) A and B from the 1st exercise, does

$AX + XB = 0$ posses a non-zero solution?

$$(B^T \oplus A)\,\mathrm{vec}(X) = \underset{\mathrm{vec}(0)}{\vec{0}}$$

It depends on the $\mathrm{rk}\underbrace{(B^T \oplus A)}$. But $\mathrm{rk}(B^T \oplus A) = 3 < 4$,

this has eigenvalues 0, 1, 4, 5 (from exercise 1).

hence $(B^T \oplus A)\,\mathrm{vec}(X) = \vec{0}$ has a nonzero solution, ie.
$AX + XB = 0$ has a non-zero solution.

(c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $AX + XB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$B^T \oplus A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{r.h.s. } \mathrm{vec}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \nearrow$$

$$[B^T \oplus A \,|\, \mathrm{vec}(\ldots)] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

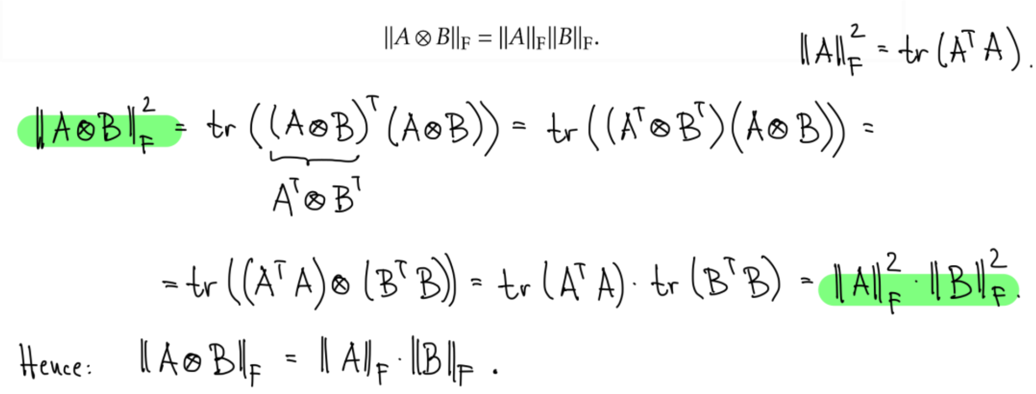
x_1 is arbitrary, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$, $\mathrm{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \underset{\uparrow}{\begin{bmatrix} x_1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$.

general solution.

3. Utemelji naslednjo lastnost Frobeniusove norme Kroneckerjevega produkta:

$$\|A \otimes B\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}\|B\|_{\mathrm{F}}.$$

$\|A\|_F^2 = tr(A^T A)$
$\|A \otimes B\|_F^2 = tr\big((A \otimes B)^T (A \otimes B)\big) = tr\big((A^T \otimes B^T)(A \otimes B)\big) = tr\big((A^T A) \otimes (B^T B)\big)$
$= tr(A^T A) tr(B^T B) = \|A\|_F^2 \cdot\ \|B\|_F^2$



$$\|A \otimes B\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}\|B\|_{\mathrm{F}}.$$

$\|A\|_F^2 = tr\,(A^T A).$

$\|A \otimes B\|_F^2 = tr\left(\underbrace{(A \otimes B)^T}_{A^T \otimes B^T} (A \otimes B)\right) = tr\left((A^T \otimes B^T)(A \otimes B)\right) =$

$= tr\left((A^T A) \otimes (B^T B)\right) = tr\,(A^T A) \cdot tr\,(B^T B) = \|A\|_F^2 \cdot \|B\|_F^2.$

Hence: $\|A \otimes B\|_F = \|A\|_F \cdot \|B\|_F$.

4. naloga

$\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$
$\|AB\|_F^2 \leq \|A\|_F^2\|B\|_F^2$
$\|AB\|_F^2 = tr\big((AB)^T(AB)\big) = tr(B^TA^TAB) = tr(A^TABB^T) = \langle A^TA, BB^T\rangle_F$

Cauchy-Schwarz
$|\langle A, B\rangle| \leq \|A\|\|B\| \qquad \|A\|^2 = \langle A, A\rangle$
(velja na splošno za norme in skalarne produkte)
(mogoče dokažemo kasneje)

$\langle A^TA, BB^T\rangle_F \leq \|A^TA\|_F\|BB^T\|_F$
dovolj je videti da velja $\|A^TA\|_F \leq \|A\|_F^2$

A^TA je simetrična pozitivno definitna matrika $\Leftrightarrow$ $\lambda_i \geq 0$ za vse lastne vrednosti λ_i
A^TA ima samo nenegativne lastne vrednosti
recimo da je λ lastna vrednost za A^TA in v lastni vektor:
$v^TA^TAv = (Av)^TAv = \langle Av, Av\rangle \geq 0$
po drugi strani, če $A^TAv = \lambda v$, imamo
$v^TA^TAv = v^T\lambda v = \lambda v^Tv = \lambda\langle v, v\rangle$
$\lambda\|v\|^2 = \|Av\|^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow \lambda \geq 0$

$\|A^TA\|_F^2 = tr\big((A^TA)(A^TA)\big) = tr((A^TA)^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$
če so $\lambda \geq 0$ lastne vrednosti A^T $\Rightarrow \lambda_i^2$ so lastne vrednosti $(A^TA)^2$

$\|A\|_F^2 = tr(A^TA) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad /^2$
$\|A\|_F^4 = \left(\sum_{i=1} \lambda_1\right)^2 = \sum_{i=1} \lambda_1^2 + \sum_{i\neq j} \lambda_1, \lambda_j \geq \sum_{i=1} \lambda_1^2 = \|A^TA\|_F^2$

1. Utemelji, da je Frobeniusova norma *submultiplikativna*, tj. za $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja

   $$\|AB\|_{\mathrm{F}} \leq \|A\|_{\mathrm{F}}\|B\|_{\mathrm{F}}.$$

   Namig: Uporabi Cauchy–Schwarzovo neenakost za Frobeniusov skalarni produkt in dejstvo, da sta matriki $A^{\top}A$ ter $B^{\top}B$ pozitivno semidefinitni.

$x \in \mathbb{R}$: $\langle xA + B, xA + B\rangle_F \geq 0$
$x^2\langle A, A\rangle + x\langle A, B\rangle + x\langle B, A\rangle + \langle B, B\rangle \geq 0$
$\langle A, A\rangle x^2 + 2\langle A, B\rangle x + \langle B, B\rangle \geq 0$

imamo neenačbo oblike $ax^2 + bx + c \geq 0 \iff D = 4b^2 - 4ac \leq 0$
$b^2 \leq ac$
$\langle A, B\rangle^2 \leq \langle A, A\rangle\langle B, B\rangle$
$\langle A, B\rangle^2 < \|A\|^2\|B\|^2$

1. Show that the Frobenius norm is *submultiplicative*, ie.

$$\|AB\|_F \le \|A\|_F\|B\|_F$$

holds for all $A\in\mathbb{R}^{m\times n}, B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ ~~$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$~~. *Hint:* Use the Cauchy–Schwarz inequality for Frobenius inner product and the fact that matrices $A^\top A$ and $B^\top B$ are positive semidefinite.

$$\langle A, B\rangle_F := \operatorname{tr}(A^T B) \quad \dots \quad \|A\|_F^2 = \langle A, A\rangle_F$$

$$|\langle A, B\rangle_F| \le \|A\|_F \cdot \|B\|_F \leftarrow$$ Cauchy - Schwarz inequality (for Frobenius inner product / norm)

A symmetric matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ is positvie semidefinite if $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$ for all $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, which is equivalent to: all eigenvalues of A are ≥ 0.

(*)

$$\|AB\|_F^2 = \langle AB, AB\rangle_F = \operatorname{tr}\left((AB)^T AB\right) = \operatorname{tr}\left(\underline{B^T A^T A \cdot B}\right) =$$

$$= \operatorname{tr}\left(B \cdot B^T A^T A\right) = \operatorname{tr}\left(\underline{(BB^T)^T} \cdot \underline{A^T A}\right) = \langle BB^T, A^T A\rangle_F \overset{\uparrow}{\leq}$$

those two are square, symmetric of the same dimension.

Cauchy - Schwarz inequality

$$\leq \|BB^T\|_F \cdot \|A^T A\|_F .$$

How does $\|A^T A\|_F$ compare to $\|A\|_F$?

Denote by $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ the eigenvalues of $A^T A$. Since $A^T A$ is positive semidefinite, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$.

$$\|A^T A\|_F^2 = \langle A^T A, A^T A\rangle_F = \operatorname{tr}\left(\underbrace{A^T A \cdot A^T A}\right) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$$

compare this to this

eigenvalues of $(A^T A)^2$ are λ_i^2

$$\bigwedge$$

sum of products of numbers ≥ 0

$$\|A\|_F^4 = \left(\operatorname{tr}(A^T A)\right)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 + \underbrace{\sum_{i\neq j} \lambda_i \lambda_j}_{\substack{\vee\!\mid \\ 0}}$$

$$\text{Hence } \overbrace{\|A^T A\|_F^2 \leq \|A\|_F^4}^{(**)}, \text{ also } \|BB^T\|_F^2 \leq \|B^T\|_F^4 = \|B\|_F^4 .$$

$$\text{Therefore: } \|AB\|_F^2 \underset{\text{by } (*)}{\overset{}{\leq}} \|A^T A\|_F \cdot \|BB^T\|_F \underset{\text{by } (**)}{\leq} \|A\|_F^2 \cdot \|B\|_F^2 .$$

We are done!

2. Poišči razcep Cholesky-ega ($A = LL^\mathsf{T}$, kjer je L spodnje trikotna matrika) matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

z uporabo spodnjega (rekurzivnega) algoritma:
Simetrično matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zapišemo v bločni obliki

$$A_1 := A = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{b}^\mathsf{T} \\ \mathbf{b} & B \end{bmatrix}$$

in definiramo

$$L_1 := \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\mathbf{b} & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{b}^\mathsf{T} \\ \mathbf{b} & B \end{bmatrix} = L_1 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & B - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T} \end{bmatrix} L_1^\mathsf{T}.$$

Ponovimo na simetrični matriki $A_2 := B - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.
Naj bodo $L_2, L_3, \ldots, L_n$ matrike, ki jih dobimo v ponovljenih korakih. Matrika L je potem

$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & L_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & L_n \end{bmatrix}.$$

$A = A^T$ A je pozitivno semidevinitna, če za vse $x \in \mathbb{R}^n$ velja $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ oz. $x^TAx \geq 0$

$\Leftrightarrow \lambda \geq 0$ za vse lastne vrednosti A

za p.s.d. matrike obstaja razcep Choleskyega $A = LL^T$, kjer je L spodnje trikotna matrika

podana je p.s.d. matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{bmatrix}$

$$L_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 \\ \dfrac{b}{\sqrt{a_{11}}} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad A = L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B - \dfrac{1}{a_{11}}bb^T \end{bmatrix} L_1^T$$

$$\left[B - \frac{1}{a_{11}}bb^T\right] = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L_2' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[B - \frac{1}{a_{11}}bb^T\right] = \left[5 - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 4\right] = 1 = a$$

// če $a \neq 0$, potem izračunamo še matriko L_3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = L_3\, L_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{bmatrix}$

$$A = L_1L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_2^TL_1^T = L_1L_2\, I\, L_2^TL_1^T = L\, L^T \quad \left(L = L_1L_2 = [L_1^1 \quad L_2^2 \quad L_3^3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

2. Find the Cholesky decomposition ($A = LL^{\mathsf{T}}$, where L is lower triangular) of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{array}\right] \qquad a_{11} = 1, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & \vec{0}^{\mathsf{T}} \\ \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \vec{b} & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hence $A_2 = B - \frac{1}{a_{11}} \vec{b}\vec{b}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} [2, -1] =$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 4 & 4 \\ \hline 4 & 5 \end{array}\right]. \quad (a_{11} = 4, \ \vec{b} = 4, \ B = 5)$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hence $A_3 = B - \frac{1}{a_{11}} \vec{b}\vec{b}^{\mathsf{T}} = 5 - \frac{1}{4} 4 \cdot 4 = 1$, $\therefore$ $L_3 = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$.

$$L = L_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{L_2}} \\ 0 & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}.$$

3. Dana je matrika

$$A=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&6&3\\1&3&2\end{bmatrix}.$$

(a) Preveri, da je A pozitivno semidefinitna.

(b) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

(c) Poišči $\sqrt{A}$ — pozitivno semidefinitno matriko S, za katero velja $S^2 = A$.

(a) lahko izračunamo vse lastne vrednosti, ali pa:
A je psd ⇔ vse glavne poddeterminante ≥ 0

$|2| \geq 0$ ✔

$\begin{vmatrix}2&3\\3&6\end{vmatrix} = 12-9 \geq 0$ ✔

$$\begin{vmatrix}2&3&1\\3&6&3\\1&3&2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&3&2\\3&6&3\\2&3&1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&3&2\\0&-3&-3\\0&-3&-3\end{vmatrix} = -(-3)(-3)\begin{vmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix} = -9\begin{vmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&0\end{vmatrix} = 0 \geq 0 \ ✔$$

(b) diagonaliziramo A: ker je A simetrična: $A = QDQ^T$

$tr(A) = \Sigma\lambda_1 \Rightarrow\ 2+6+2 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ in ker vidimo da je $\lambda_1 = 0$ (ker je determinanta 0), potem je $\lambda_2+\lambda_3 = 10$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&3&1\\3&6-\lambda&3\\1&3&2-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2-\lambda&3&1\\3&6-\lambda&3\\-1+\lambda&0&1-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3-\lambda&3&1\\6&6-\lambda&3\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&3\\6&6-\lambda\end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 1 \ \Rightarrow\ 1+\lambda_3 = 10 \Rightarrow \lambda_3 = 9$ ali pa:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&3\\6&6-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)-18 = 18-3\lambda-6\lambda+\lambda^2-18 = \lambda(\lambda-9)$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 9 \ \Rightarrow\ D = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

lastni vektorji:

$$\lambda_1 = 0:\ A-\lambda_1-I = \begin{bmatrix}2&3&1\\3&6&3\\1&3&2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x-z=0\\y+z=0\end{matrix} \Rightarrow z\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1:\ A-\lambda_2-I = \begin{bmatrix}5&3&1\\3&5&3\\1&3&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&3&1\\0&-4&0\\0&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 9:\ A-\lambda_3-I = \begin{bmatrix}-7&3&1\\3&-3&3\\1&3&-7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&1\\0&-4&8\\0&4&-8\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow v_3\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

moramo še normirati vektorje:

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \qquad q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \qquad q_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$A = QDQ^T \qquad Q = [q_1\ q_2\ q_3] = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{3}&1\\-\sqrt{2}&0&2\\\sqrt{2}&\sqrt{3}&1\end{bmatrix}, \qquad Q^{-1} = Q^T$$

(c) $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A \quad \sqrt{A} = S = Q\sqrt{D}\,Q^T \quad (S^2 = Q\sqrt{D}\,\cancel{Q^T Q}\,\sqrt{D}\,Q^T = QDQ^T = A$

v splošnem: $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (Taylorjeva vrsta) $\qquad f(A) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n A^n$

če $A = PDP^{-1} \Rightarrow f(A) = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n PD^nP^{-1} = P\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}P^{-1}$

$$S = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 12 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. You are given the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}. \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

(a) Check that A is positive semidefinite. ($-A$ is negative semidefinite)

(b) Find all eigenvalues and corresponding eigenvectors of A.

(c) Find $\sqrt{A}$ — the positive semidefinite matrix S, for which $S^2 = A$ holds.

The Sylvester criterion: a symmetric matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is positive semidefinite if all of its leading minors are non-negative.

determinant of those leading blocks are ≥ 0.

(a) $\underline{2 \geq 0}$, $\underline{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}} = 2\cdot 6 - 3\cdot 3 = 3 \geq \underline{0}$, $\underline{\det(A)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \geq \underline{0}$.

By the Sylvester criterion, A is positive semidefinite.

(b) $$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & 6-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 3 \\ -1+\lambda & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|cc} 1-\lambda & 3 & 1 \\ \hline 0 & 6-\lambda & 3 \\ 0 & 6 & 3-\lambda \end{array}\right| =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\cancel{18} - 3\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - \cancel{18}\right) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-9) = 0 \;\ldots\; \underbrace{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 9.}_{\text{eigenvalues of } A.}$$

Now: eigenvectors:

- $\lambda_1 = 0 \ldots\ A - 0\cdot I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \hline \end{array}\!\!\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -z \\ z \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ z=1}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $x - z = 0$, $y + z = 0$

- $\lambda_2 = 1 \ldots\ A - I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ z=1}}{=} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $x + z = 0$, $y = 0$

- $\lambda_3 = 9 \ldots\ A - 9I = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -7 \end{bmatrix} \to \ldots$ or: $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $A = PDP^{-1}$, where $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$S = \sqrt{A} = P\sqrt{D}\cdot P^{-1}$, where $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{0} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= P\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}P^{-1}$.

4. Dokaži:

   (a) Če sta A in B pozitivno semidefinitni, je tudi $A + B$ pozitivno semidefinitna.
   (b) Če je A pozitivno definitna, potem je tudi A^{-1} pozitivno definitna.

(a) semidefinitnost: $x^T Ax \geq 0$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$

$x^T Ax \geq 0 \qquad x^T Bx \geq 0$
$x^T(A+B)x \geq 0 \qquad x^T(A+B)x = x^T(Ax+Bx) = x^T Ax + x^T Bx \geq 0$

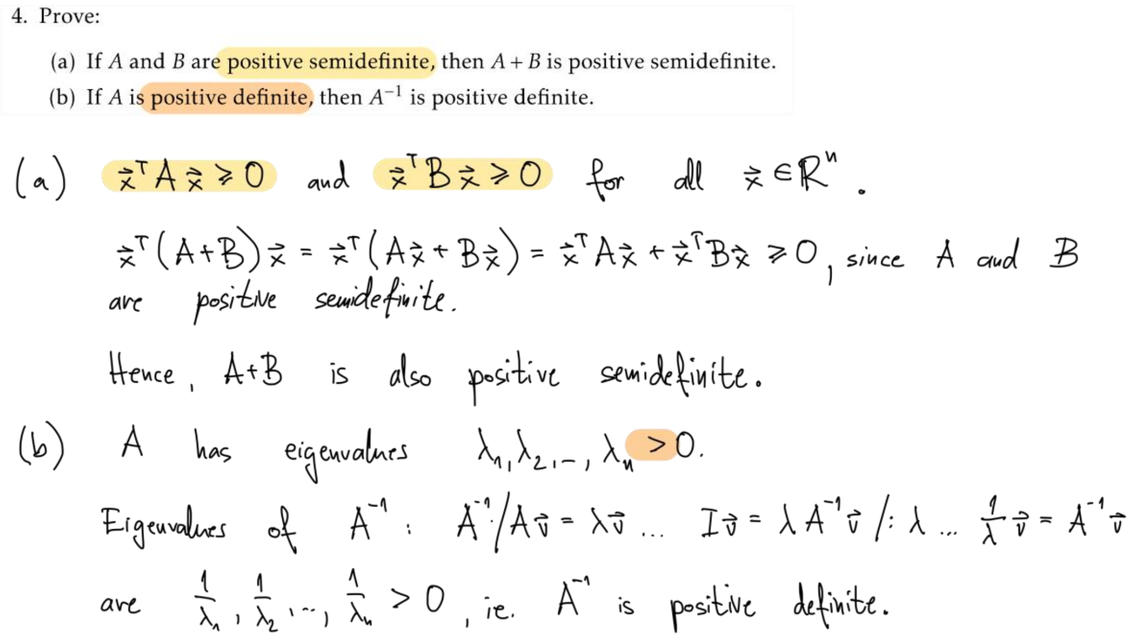
(b) $x^T Ax > 0$ za vse $x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$

za vse $x \neq 0$ velja $x^T Ax > 0$,
definiramo $y = A^{-1}x \Rightarrow x = Ay$
$x^T A^{-1} x = (A\,y)^T A^{-1}(A\,y) = y^T A^T A^{-1} Ay = y^T Ay > 0$ (po predpostavki)

2. način: $A\ pd \Leftrightarrow \lambda > 0$,
če je A obrnljiva in λ lastna vrednost $\Leftrightarrow \lambda^{-1}$ je lastna vrednost za A^{-1}
$Av = \lambda v \quad /A^{-1}$
$v = \lambda A^{-1} v$
$\lambda^{-1} v = A^{-1} v$

če $\lambda > 0$, potem je tudi $\lambda^{-1} > 0$

A je $pd \Leftrightarrow \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda^{-1} > 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ je pd



4. Prove:

   (a) If A and B are positive semidefinite, then $A + B$ is positive semidefinite.
   (b) If A is positive definite, then A^{-1} is positive definite.

(a) $\vec{x}^T A \vec{x} \geqslant 0$ and $\vec{x}^T B \vec{x} \geqslant 0$ for all $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

$\vec{x}^T(A+B)\vec{x} = \vec{x}^T(A\vec{x} + B\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x} + \vec{x}^T B\vec{x} \geqslant 0$, since A and B are positive semidefinite.

Hence, $A+B$ is also positive semidefinite.

(b) A has eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$.

Eigenvalues of A^{-1}: $A^{-1} / A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ... $I\vec{v} = \lambda A^{-1}\vec{v} \ /:\lambda$ ... $\frac{1}{\lambda}\vec{v} = A^{-1}\vec{v}$

are $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} > 0$, ie. A^{-1} is positive definite.

1. Naj bo F množica vseh Fibbonacijevih zaporedij, tj. zaporedij $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kjer sta a_0 in a_1 poljubni realni števili, za $n \geq 2$ pa velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Dokaži, da je F vektorski prostor za operaciji

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \text{ in } \alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\},$$

kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$. Poišči bazo za F in zapiši običajno Fibbonaccijevo zaporedje (tisto z $a_0 = a_1 = 1$) v tej bazi.
Rešitev: Preverjanje lastnosti vektorskega prostora je sicer dolgo, vendar rutinsko, zato ta del izpustimo. Bazo za F tvorita zaporedji $\{f_n\}$ in $\{g_n\}$ z začetnima členoma $f_0 = 1, f_1 = 0$ in $g_0 = 0, g_1 = 1$, tj.

$$\begin{aligned} \{f_n\} &= \{1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots\} \\ \text{in } \{g_n\} &= \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}. \end{aligned}$$

Fibonaccijevo zaporedje $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$ v tej bazi je $\{a_n\} = \{f_n\} + \{g_n\}$.

vekt. prostor $V = zaporedja$, kjer sta vsota in produkt definirana kot:
$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ // seštevamo po členih
$\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$ // množimo vse člene
$n \in \mathbb{N}$

podmnožica vseh zaporedij je množica fibbonacijevih zaporedij: $F \subseteq V$
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$

želimo pokazati da je F vektorski podprostor v V

$U \subseteq V$ je vektorski podprostor, če velja da je zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem:
1. za vse $u, v \in U$ velja $u + v \in U$
2. za vse $u \in U$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ velja $\alpha u \in U$
$\Leftrightarrow$
za vse $u, v \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U$

naj bosta zaporedji $\{a_n\}, \{b_n\} \in F$
in $\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$

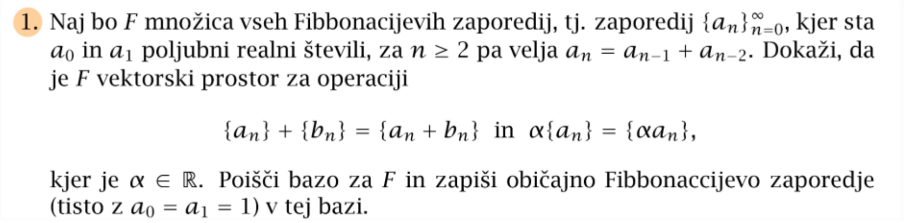
$$\Rightarrow \text{ velja } \left.\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ b_n &= b_{n-1} + b_{n-2} \end{aligned}\right\} + \qquad \begin{aligned} a_n + b_n &= a_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-2} \\ c_n &= c_{n-1} + c_{n-2} \end{aligned} \Rightarrow \{c_n\} \in F$$

$\alpha \in \mathbb{R}, \{a_n\} \in F \Rightarrow a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ /\cdot \alpha \ \Rightarrow \alpha a_n = \alpha a_{n-1} + \alpha a_{n-2}$
$\{c_n\} = \alpha\{a_n\} \Rightarrow c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \Rightarrow \{c_n\} \in F$

vidimo, da sta sledeči zaporedji baza za F:
$f_1 = \{1,0,1,1,2,3,5,8, \ldots\}$
$f_2 = \{0,1,1,2,3,5,8, \ldots\}$
poljubno zaporedje: $\{a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 + 2a_2, \ldots\} = a_1 f_1 + a_2 f_2$
vsako fibbonacijevo zaporedje lahko zapišemo kot linearno kombinacijo $f_1, f_2 \Rightarrow \{f_1, f_2\}$ je baza za F
$\Rightarrow \dim F = 2$

kako preverimo če sta vektorja linearno neodvisna:
če $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0 \Rightarrow\ x_1 = 0, x_2 = 0$

$x_1 f_1 + x_2 f_2 = \{x_1, 0, x_1, ..\} + \{0, x_2, x_2, ...\} = \{x_1, x_2, x_1 + x_2, ...\} = \{0,0, ...\} \Rightarrow x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$



1. Naj bo F množica vseh Fibbonacijevih zaporedij, tj. zaporedij $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kjer sta a_0 in a_1 poljubni realni števili, za $n \geq 2$ pa velja $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Dokaži, da je F vektorski prostor za operaciji

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \ \text{ in } \ \alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\},$$

kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$. Poišči bazo za F in zapiši običajno Fibbonaccijevo zaporedje (tisto z $a_0 = a_1 = 1$) v tej bazi.

$\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$, npr. $\{3, 5, 8, 13, \dots\}$

$\{b_n\} = \{b_0, b_1, b_2, b_3, \dots\}$

običajno seštevanje realnih števil

$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots\}$

$\alpha \cdot \{a_n\} = \{\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2 \dots\}$

Preverimo, da za ti dve operaciji veljajo vsi aksiomi def. vektorskega prostora:

(VP1) $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} = \{b_n + a_n\} = \{b_n\} + \{a_n\}$ (komutativnost)

$\{a_n\} + (\{b_n\} + \{c_n\}) = \{a_n\} + \{b_n + c_n\} = \{a_n + (b_n + c_n)\} =$

$= \{(a_n + b_n) + c_n\} = \dots = (\{a_n\} + \{b_n\}) + \{c_n\}$ (asociativnost)

(VP2) $\underbrace{\{0\} = \{0,0,0,\dots\}} \in F$ in velja $\{0\} + \{a_n\} = \{0 + a_n\} = \{a_n\}$ ✓

↑ to je "ničelni vektor" v F

(VP3) $-\{a_n\} = \{-a_n\} = \{-a_0, -a_1, -a_2, -a_3, \dots\} \in F$ in velja

$\{a_n\} + (-\{a_n\}) = \{a_n - a_n\} = \{0\}$, kar je "ničelni vektor" v F. ✓

(VP4) $1 \cdot \{a_n\} = \{1 \cdot a_n\} = \{a_n\}$ ✓ (unitalnost)

(VP5) $\alpha \cdot (\beta \cdot \{a_n\}) = \alpha \cdot \{\beta a_n\} = \{(\alpha\beta) a_n\} = (\alpha\beta) \cdot \{a_n\}$ ✓

(VP6) $(\alpha + \beta) \cdot \{a_n\} = \{(\alpha + \beta) a_n\} = \{\alpha a_n + \beta a_n\} = \{\alpha a_n\} + \{\beta a_n\} =$

$\alpha \cdot \{a_n\} + \beta \cdot \{a_n\}$ ✓

(VP7) $\alpha \cdot (\{a_n\} + \{b_n\}) = \{\alpha (a_n + b_n)\} = \{\alpha a_n + \alpha b_n\} = \alpha \cdot \{a_n\} + \alpha \cdot \{b_n\}$ ✓

$(F, +, \cdot)$ je torej res vektorski prostor.

Za "običajno" Fibonaccijevo zap. smatramo $\{f_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$.

Baza vektorskega prostora je "največja" linearno neodvisna podmnožica.

$\{a_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, \ldots\}$, tj. $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ $\qquad \{f_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$

$\{b_n\} = \{1, 0, 1, 1, 2, 3, \ldots\}$ $\qquad b_0 = 1,\ b_1 = 0$

$\{c_n\} = \{c_0, c_1, \ldots\} \in F$ $\qquad \underbrace{c_0,\ c_1}_{\in \mathbb{R}},\ c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$

$$c_1 \{a_n\} + c_0 \{b_n\} = \{c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots\} = \{c_n\}$$

Torej $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ (zgoraj izbrana) razpenjata F, ker sta lin. neodvisna, tvorita bazo za F.

$$B_F = \{\{a_n\}, \{b_n\}\}$$

Sta res linearno neodvisni? $\alpha\{a_n\} + \beta\{b_n\} = \{0\}$ $(\Longrightarrow \alpha = 0,\ \beta = 0)$

$\{\beta, \alpha, \alpha + \beta, \ldots\} = \{0, 0, 0, \ldots\}$, tj $\alpha = 0$ in $\beta = 0$, kar pomeni, da sta $\{a_n\}, \{b_n\} \in F$ res lin. neodvisna.

Koliko je $\dim(F)$? $\dim(F) = 2$.

2. Na odprtem intervalu $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ definiramo operacijo $x \oplus y := xy$, za skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ pa predpišemo še $\alpha \odot x = x^\alpha$. Preveri, da je $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ in poišči njegovo bazo. Katero število v $\mathbb{R}^+$ je ničelni vektor v tem primeru?

   Rešitev: Rutinsko preverjanje lastnosti vektorskega prostora ponovno izpustimo. Ničelni vektor v tem primeru je $1 \in \mathbb{R}^+$, baza za $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ pa je (recimo) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} = \{e\}$.

3. Katere podmnožice v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ – vseh realnih $n \times n$ matrik – so vektorski podprostori? Za tiste, ki so podprostori določi tudi dimenzijo!

   (a) Vse matrike, ki imajo na mestu $(2, 1)$ element 0.
   (b) Vse matrike, ki imajo na izbranem mestu $(2, 1)$ element 1.
   (c) Vse matrike s celimi elementi, tj. $A = [a_{ij}]$, kjer so $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.
   (d) Vse zgornje-trikotne matrike.
   (e) Vse simetrične matrike; $A = A^\mathsf{T}$.
   (f) Vse antisimetrične matrike; $A = -A^\mathsf{T}$.
   (g) Vse obrnljive matrike; podmnožica $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (h) Vse matrike z determinanto 0, tj. $\mathbb{R}^{n\times n} \setminus \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
   (i) Vse nilpotentne matrike, tj. matrike $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z lastnostjo $N^n = 0$.
   (j) Vse zgornje-trikotne nilpotentne matrike. *(Namig: Kaj je na diagonali zgornje-trikotne nilpotentne matrike?)*
   (k) Vse matrike s sledjo 0.

Rešitev:

(a) Da, $\dim = n^2 - 1$.
(b) Ne, saj ne vsebuje ničelne matrike.
(c) Ne, saj ni zaprt za množenje s skalarjem.
(d) Da, $\dim = \frac{n(n+1)}{2}$.
(e) Da, $\dim = \frac{n(n+1)}{2}$.
(f) Da, $\dim = \frac{n(n-1)}{2}$.
(g) Ne, saj ne vsebuje ničelne matrike.
(h) Ne, saj ni zaprt za seštevanje.
(i) Ne, matriki E_{12} in E_{21} sta nilpotentni, vendar $E_{12} + E_{21}$ *ni* nilpotentna.
(j) Da, $\dim = \frac{n(n-1)}{2}$.
(k) Da, $\dim = n^2 - 1$.

baza prostora $\mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} + a_{nn}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = E_{11} + E_{12} + E_{nn}$$

$$= \Sigma_{i,j=1}^{n}\ a_{ij}E_{ij}$$

baza za $\mathbb{R}^{n\times n} = \{E_{ij},\ \ i, j = 1, \dots, n\}$

(a) $U_1 = \{A, a_{21} = 0\}$

$$\begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \checkmark \qquad \alpha \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \checkmark$$

baza: $\left\{E_{ij},\ \ i, j = 1, \dots, n \quad (2,1) \neq (i, j)\right\} \Rightarrow \dim U_1 = n^2 - 1$

lahko gledamo tudi kot: n^2 spremenljivk in 1 linearna enačba $a_{21} = 0 \;\Rightarrow\; n^2 - 1$ prostih spremenljivk

(b) $U_2 = \{A, a_{21} = 1\}$

$$\begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 2 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \notin U_2 \Rightarrow \text{ni zaprta za seštevanje}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ \alpha & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \notin U_2 \Rightarrow \text{ni zaprta za množenje s skalarjem}$$

tudi $0 \notin U_2$

(c) $U_3 = \{A, a_{ij} \in \mathbb{Z}\}$
če $A \in U_3,\; B \in U_3 \Rightarrow A + B \in U_3$
$0 \cdot A = 0 \in U_3$
$\alpha A \notin U_3$ za npr. $\alpha = \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, \ldots \;\Rightarrow U_3$ ni vektorski podprostor

(d) $U_4 = \{\text{zgornjetrikonte matrike}\}$
množica je zaprta za seštevanje in množenje ⇒ je vektorski podprostor

baza: $\{E_{ij},\; i \le j\}$
$\dim U_4 = \text{št. el nad diagonalo} + \text{št. elementov na diagonali} = \binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$
oz. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
oz. imamo n^2 spremenljivk in linearne enačbe $a_{ij} = 0,\; i > j$ (teh je $\binom{n}{2}$) ⇒
imamo $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ prostih spremenljivk

(e) $U_5 = \{\text{simetrične matrike}\}$
$A^T = A \qquad A, B \in U_5 \Leftrightarrow A^T = A,\; B^T = B$
$\Rightarrow (A + B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A + B \in U_5$
$\alpha \in \mathbb{R}, A \in U_5$
$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A \Rightarrow \alpha A \in U_5$

$\dim U_5$: imamo n^2 spremenljivk in linearne enačbe $a_{ij} = a_{ji},\; i \ne j$ (teh je $\binom{n}{2}$) ⇒
imamo $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ prostih spremenljivk

baza U_5: $\{E_{ii},\; i = 1, \ldots, n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji}, i \ne j\}$

(f) $U_6 = \{\text{antisimetrične matrike}\}$ // take matrike imajo na diagonalah 0
$A^T = -A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \;\; A, B \in U_6$
$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T = \beta B^T = -(\alpha A + \beta B) \Rightarrow \alpha A + \beta B \in U_6 \;\Rightarrow$ je vektorski podprostor

$\dim U_6$: imamo n^2 spremenljivk in linearne enačbe $a_{ij} = -a_{ji}$ in $a_{ii} = 0 \Rightarrow$
imamo $n^2 - n - \binom{n}{2}$ prostih spremenljivk $= \frac{n(n-1)}{2}$

baza $U_6 = \{E_{ij} - E_{ji},\; j > i\}$

// lahko tudi najprej najdemo bazo in ker je U_6 linearna ogrinjača baze, je tudi vektorski podprostor

(g) $U_7 = \{\text{obrnljive matrike}\}$
protiprimer: $A + (-A) = 0,\;\; A \in U_7,\; -A \in U_7,\; 0 \notin U_7$
oz. ker ne vsebuje ničelne matrike

(h) $U_8 = \{\text{neobrnljive matrike}\}$

protiprimer: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \notin U_8$

(i) $U_9 = \{\text{nilpotentne matrike}\}$

obstaja m, da velja $A^m = 0$

$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = 0 \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = 0$

$N + M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je obrnljiva, $(N + M)^2 = I$ // nilpotentne matrike niso obrnljive

oz. vidimo, da bojo lihe potence $N + M$ enake $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sode pa I

kako vidimo da nilpotentne matrike niso obrnljive?

recimo, da imamo obrnljivo matriko A in velja $A^m = 0$

množimo to enačbo z A^{-m-1}: $A^m A^{-m-1} = A = 0$ (protislovje)

(j) $U_{10} = \{zgornjetrikotne \text{ nilpotentne matrike}\}$

pri potencah zgornje trikotnih matrik potencirajo diagonalni elementi:

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} x_1^m & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}$$

za zgornjetrikotne matrike velja: N je nilpotentna $\Leftrightarrow$ na diagonali same ničle

// potenca neke zgornjetrikotne matrike bo 0 samo, če bodo diagonalni elementi enaki 0, velja tudi obratno

baza $U_{10} = \{E_{ij},\ j > i\}$

dim $U_{10} = \binom{n}{2}$

(k) $U_{11} = \{A,\ \operatorname{tr}(A) = 0\}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad A, B \in U_{11} \quad tr(A) = tr(B) = 0$

$\Rightarrow \quad tr(\alpha A + \beta B) = \alpha\, tr(A) + \beta\, tr(B) = 0 \Rightarrow \alpha A + \beta B \in U_{11}$

dim U_{11}: imamo n^2 spremenljivk in linearno enačbo $a_{11} + \cdots + a_{nn} = 0 \ \Rightarrow n^2 - 1$ prostih spremenljivk

baza $U_{11} = \{E_{ij},\ i \neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{11},\ \ i > 2\}$

3. Katere podmnožice v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ – vseh realnih $n \times n$ matrik – so vektorski podprostori? Za tiste, ki so podprostori določi tudi dimenzijo!

(a) Vse matrike, ki imajo na mestu $(1,1)$ element 0. V_a

(b) Vse matrike, ki imajo na izbranem mestu $(1,1)$ element 1. V_b

(c) Vse matrike s celimi elementi, tj. $A = [a_{ij}]$, kjer so $a_{ij} \in \mathbb{Z}$.

(d) Vse zgornje-trikotne matrike.

(e) Vse simetrične matrike; $A = A^\mathsf{T}$.

(f) Vse antisimetrične matrike; $A = -A^\mathsf{T}$.

(g) Vse obrnljive matrike; podmnožica $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$.

(h) Vse matrike z determinanto 0, tj. $\mathbb{R}^{n\times n} \setminus \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

(i) Vse nilpotentne matrike, tj. matrike $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z lastnostjo $N^n = 0$.

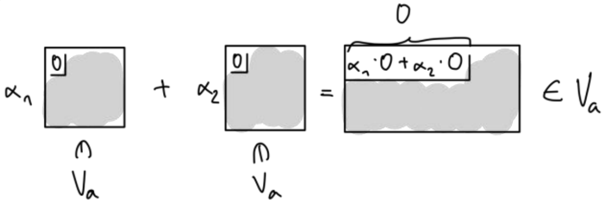
(j) Vse zgornje-trikotne nilpotentne matrike. *(Namig: Kaj je na diagonali zgornje-trikotne nilpotentne matrike?)*

S predavanj: $\mathbb{R}^{n\times n}$ je vektorski prostor – za seštevanje matrik in množenje s skalarjem.

S predavanj: $V \subseteq U$ je vektorski podprostor, če velja $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in V$ za vse $v_1, v_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

vekt. prostor

(a) $V_a = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}, \ldots \right\}$,



torej je V_a res vektorski podprostor.

Kaj je baza V_a? Vzamemo lahko E_{ij} za $i \neq 1$ in $j \neq 1$, takih je $n^2 - 1$,

tj. $\dim(V_a) = n^2 - 1$.

(Baza za $\mathbb{R}^{n\times n}$ je sest. iz $E_{ij} = \left[\underset{\overset{\uparrow}{j}}{1} \right] \leftarrow i$)

(b) $V_b = \{$  $\}$

Vsak vektorski podprostor vsebuje ničelni vektor. V $\mathbb{R}^{n\times n}$ je to $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$, take mat. pa v V_b ni, torej V_b <u>ni</u> vekt. podprostor.

(c) $V_c = \{ [a_{ij}] : a_{ij} \in \mathbb{Z} \}$

$$\underset{\mathbb{R}}{\overset{}{\alpha}} \overset{V_c}{[a_{ij}]} + \overset{\mathbb{R}}{\beta} \overset{V_c}{[b_{ij}]} = \overbrace{[\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}]}^{\overset{V_c}{\cup}},$$

ali so $\alpha a_{ij} + \beta b_{ij} \in \mathbb{Z}$? NE NUJNO.

Za npr. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in V_c$, vendar $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1/2 & \cdots & & 1/2 \end{bmatrix} \notin V_c$, tj.

V_c <u>ni</u> vektorski podprostor.

(f) $V_f = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = -A \}$

$A, B \in V_f$, tj. $A^T = -A$ in $B^T = -B$. Tedaj

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha(-A) + \beta \cdot (-B) = -(\alpha A + \beta B),$$

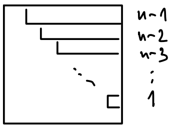
tj. $\alpha A + \beta B \in V_f$ in V_f je vektorski podprostor.

$[a_{ij}]^T = [a_{ji}] = -[a_{ij}]$ ... tj. $a_{ji} = -a_{ij}$ ← to velja za elemente antisimetrične matrike

Če je $i = j$ ... $a_{ii} = -a_{ii}$, tj. $2a_{ii} = 0$ oz $a_{ii} = 0$,
na diagonali so 0.
Izven diagonale: $a_{ji} = -a_{ij}$.

$\boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ & 0 \ddots & a_{ij} \\ -a_{ij} & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}$, baza za V_f je sest. iz matrik $\boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ & 0 \ . & 1 \\ -1 & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}$,

koliko je takih matrik? $\dim(V_f) = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.



(g) $V_g = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{obstaja } A^{-1} \}$,

Ničelna matrika 0 nima inverza, saj $0 \cdot X = X \cdot 0 = 0 \neq I$.

Torej $0 \notin V_g$ in V_g <u>ni</u> vektorski podprostor.

(h) $V_h = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) = 0\}$

$A \in V_h$, tj $\det(A) = 0$, tedaj $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) = \alpha^n \cdot 0 = 0$,
tj. $\alpha A \in V_h$.

Utemeljimo, da V_h kljub temu <u>ni</u> vektorski podprostor:

$$\underset{\substack{\cap \\ V_h \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} + \underset{\substack{\cap \\ V_h \in \mathbb{R}^{2\times 2}}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\not\in \\ V_h}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \Leftarrow \text{ta ima } \det = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

(i) $V_i = \{N \in \mathbb{R}^{n\times n} : N^n = 0\}$

$n=2$ npr. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^2}_{\text{ta } \underline{\text{ni}} \text{ nilpotentna, torej}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = I \neq 0$$

$V_i \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ ni vekt. podprostor.

Za vsak $n \geq 2$:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \quad N^n = 0,$$

preveri to!

zato tudi $(N^T)^n = (N^n)^T = 0$,

vendar

$$(N + N^T)^n = \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ sodo}}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}} \text{ ali } \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ liho}}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}} \neq 0,$$

torej $V_i \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ ni vektorski podprostor za $n \geq 2$.

(Še to: pri $n=1$ je $0^1 = 0$ edina nilpotentna matrika.
Tedaj je $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^1$ dejansko vektorski podprostor.)

4. Naj bo N matrika

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Preveri, da je množica vseh realnih 2×2 matrik, ki komutirajo z N, tj.

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : AN = NA\},$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Poišči bazo za U in določi njegovo dimenzijo!

Rešitev: Za poljubni $A, B \in U$ velja $AN = NA$ in $BN = NB$, zato je

$$(\alpha A + \beta B)N = \alpha AN + \beta BN = \alpha NA + \beta NB = N(\alpha A + \beta B),$$

torej je U zaprta za linearne kombinacije in je podprostor. $\mathcal{B}_U = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \right\}$, $\dim U = 2$.

Preverimo, da je U res vektorski podprostor:

$A, B \in U$, tj. $AN = NA$ in $BN = NB$, tedaj

$$(\alpha A + \beta B)N = \alpha AN + \beta BN = \alpha NA + \beta NB = N(\alpha A) + N(\beta B) = N(\alpha A + \beta B),$$

tj $\alpha A + \beta B \in U$ in U je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Kako "izgledajo" matrike iz U?

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ... $AN = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, tj. $\begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$,

$\|$

$NA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$ oziroma $b = 0$ in $d = a$.

Zato je $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$. ← tako "izgledajo" matrike iz U

To lahko zapišemo kot:

$$U \ni A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = a\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{I} + c\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{N},$$

torej $\{I, N\}$ razpenja U. Ali sta I in N linearno neodvisni? STA.

(saj $aI + cN = 0$ ... $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, tj. $a = 0$ in $c = 0$ ...)

Torej je $B_U = \{I, N\}$ baza za U. $\dim(U) = 2$.

$(\mathcal{L}(U) = U$, $\mathcal{L}(\{I, N\}) = U$ ...$)$

5. (a) Ali je množica $\{p(x) = ax + b : a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}\}$ vektorski podprostor v vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_1[x]$?
   (b) Ali je množica $\{p(x) : p(1) = 0\}$ vektorski podprostor v vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_2[x]$?
   (c) Ali je množica $\{p(x) : p(0) = 1\}$ vektorski podprostor v vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_n[x]$?
   (d) Ali je množica $\{p(x) : p''(3) = 0\ \}$ vektorski podprostor v vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_3[x]$?

Rešitev: (a) Ne, saj ne vsebuje ničelnega polinoma. (b) Da, baza $\{x - 1, x^2 - x\}$. (c) Ne, saj ne vsebuje ničelnega polinoma. (d) Da, baza $\{1, x, x^3 - 9x^2\}$.

(a) U_a ← polinomi st. točno 1 v $\mathbb{R}_1[x]$

Ali U_a vsebuje ničelni polinom $0 \cdot x + 0$? Ne, torej U_a ni vekt. podprostor.

(b) $U_b = \{p(x) : p(1) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$

Preverimo, da je vekt. podprostor:

$p, q \in U_b$ .... $p(1) = 0$ in $q(1) = 0$

$(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, tj. $\alpha p + \beta q \in U_b$,

U_b je vekt. podprostor v $\mathbb{R}_2[x]$.

Kaj je baza U_b?

V U_b so vsi polinomi (st. max. 2), ki imajo v $x = 1$ ničlo:

npr. $p_1(x) = x - 1$ in $p_2(x) = x(x-1)$ (ali $p_2(x) = x^2 - 1$)

Polinomov višjih stopenj v U_b ni.

Kako "izgledajo" vsi polinomi iz U_b? $p(x) = (ax+b)(x-1)$

(ali $p(x) = ax^2 + bx + c$ ... $p(1) = 0$, torej $a + b + c = 0$ oziroma $c = -a - b$, zato $p(x) = ax^2 + bx - a - b$.)

Bazo lahko izberemo tako, da proste parametre postavimo na 0, razen enega, ki ga postavimo na 1.

Torej $B_{U_b} = \{x(x-1), x-1\}$.

(ali $B_{U_b} = \{x^2 - 1, x - 1\}$)

(c) $U_c = \{p \in \mathbb{R}_n[x] : p(0) = 1\}$, ta spet ne vsebuje ničelnega polinoma (če $p(x) = 0$, potem tudi $p(0) = 0$), torej U_c ni vekt. podprostor.

(d) $U_d = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p''(3) = 0\}$

$p, q \in U_d \ldots \quad p''(3) = 0$ in $q''(3) = 0$

$(\alpha p + \beta q)''(3) = \alpha p''(3) + \beta q''(3) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, tj.

$\alpha p + \beta q \in U_d$, torej je U_d vektorski podprostor v $\mathbb{R}_3[x]$.

$1 \in U_d$, tj. $p(x) = 1$. (Saj $p''(x) = 0$, zato $p''(3) = 0$...)
$x \in U_d$, tj. $p(x) = x$. (— " — ..)

Iščemo še en polinom $\in U_d$, ki je lin. neodvisen od 1 in x ....

Recimo $p''(x) = x - 3 \ldots \quad p'(x) = \int (x-3)\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x$

$$p(x) = \int \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2}$$

Preverimo, da je $\{1, x, \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2}\}$ res baza za U_d.

6. Za polinom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in kvadratno matriko A označimo $p(A) = aA^3 + bA^2 + cA + dI$. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ množica tistih polinomov stopnje največ 3, za katere je $p(A) = 0$ (ničelna matrika).

(a) Dokaži, da je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Poišči bazo za podprostor U in določi $\dim U$.
(*Namig:* Če je $\Delta_A(x)$ karekteristični polinom A, potem je $\Delta_A(A) = 0$.)

(c) Naj bo $q(x) = x(x^2 - 2x - 3)$. Ali je množica vseh 2×2 matrik $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, za katere velja $q(X) = 0$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

Rešitev:

(a) Vzemimo polinoma $p, q \in U$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ker velja $p(A) = 0$ in $q(A) = 0$, sledi

$$(\alpha p + \beta q)(A) = \alpha p(A) + \beta q(A) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

kar pomeni $\alpha p + \beta q \in U$ in U je podprostor.

(b) Za karakteristični polinom $\Delta_A(x)$ matrike A velja $\Delta_A(A) = 0$ (ničelna matrika). Hitro vidimo

$$\Delta_A(x) = \det(A - xI) = x^2 - 2x - 3.$$

V U so torej lahko le tisti polinomi stopnje največ 3, ki so večkratniki $\Delta_A(x)$. Od tod dobimo $\mathcal{B}_U = \{x^2 - 2x - 3, x(x^2 - 2x - 3)\}$ in $\dim U = 2$.

7. *(Prostor polinomov)* Naj bo $\mathbb{R}[x]$ množica vseh polinomov z realnimi koeficienti v spremenljivki x. ($\mathbb{R}[x]$ torej vsebuje polinome vseh stopenj!) Preveri, da je $\mathbb{R}[x]$ vektorski prostor za običajni operaciji seštevanja polinomov in množenja s skalarjem. Poišči bazo za $\mathbb{R}[x]$. Poišči še bazo podprostora

$$W = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(1) = p(-1) = 0\}.$$

Koliko je $\dim \mathbb{R}[x]$ in koliko $\dim W$?

Rešitev: Baza za $\mathbb{R}[x]$ je recimo $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$. To je neskončna množica z močjo naravnih števil $\mathbb{N}$, zato je $\dim \mathbb{R}[x] = |\mathbb{N}|$, kar pogosto označimo z $\aleph_0$, dimenzija $\mathbb{R}[x]$ je torej (števno) neskončna.

Za bazo W pa lahko vzamemo $\{x^2 - 1, x(x^2 - 1), x^2(x^2 - 1), \ldots\}$. Tudi ta baza ima neskončno elementov, $\dim W = \aleph_0$.

Kaj je baza $R[x]$? $\quad B_{R[x]} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, \ldots\}$

Zakaj je W res podprostor v $R[x]$?

$p, q \in W \ldots \quad p(1) = p(-1) = 0$ in $q(1) = q(-1) = 0$

$(\alpha p + \beta q)(\pm 1) = \alpha p(\pm 1) + \beta q(\pm 1) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, tj. $\alpha p + \beta q \in W$,

W je torej vektorski podprostor.

$x^2 - 1$ ima 1 in -1 za ničli, torej $x^2 - 1 \in W$

$x(x^2-1) \in W$

$x^2(x^2-1) \in W$

$\vdots$

$B_W = \{x^2 - 1, x(x^2 - 1), x^2(x^2 - 1), \ldots\}$, $\dim W = \infty$.

8. *(Prostor formalnih potenčnih vrst)* Naj bo $\mathbb{R}[[x]]$ množica vseh formalnih potenčnih vrst z realnimi koeficienti, elementi $\mathbb{R}[[x]]$ so torej (formalne) vsote

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

ki jih lahko po komponentah seštevamo in množimo s skalarjem. Preveri, da je tudi $\mathbb{R}[[x]]$ vektorski prostor. Kako se $\mathbb{R}[[x]]$ razlikuje od $\mathbb{R}[x]$? (*Namig:* Poišči vsaj eno vrsto, ki ni polinom.) Koliko je $\dim \mathbb{R}[[x]]$?

Rešitev: Prostor $\mathbb{R}[[x]]$ je 'precej večji' od $\mathbb{R}[x]$, saj $\mathbb{R}[[x]]$ poleg polinomov vsebuje vse (tako konvergente kot divergentne) potenčne vrste. Recimo tisto za e^x; $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$. Množica $\{1, x, x^2, \ldots\}$ *ni* baza za $\mathbb{R}[[x]]$, saj že vrste za e^x ni mogoče izraziti s (končno!) linearno kombinacijo polinomov $1, x, x^2, \ldots$. Preostanek rešitve te naloge mogoče presega zahteve tega predmeta. Obstoj baze je (močna) posledica aksioma izbire. Tudi z aksiomom izbire baze ni mogoče eksplicitno zapisati, vemo pa, da je večja od baze za $\mathbb{R}[x]$; $\dim \mathbb{R}[[x]] = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$, tj. baznih vektorjev je toliko, kot je realnih števil.

9. Naj bo $V \subseteq C^{\infty}(0, 2\pi)$ množica vseh rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + y = 0.$$

Prepričaj se, da je V vektorski podprostor v $C^{\infty}(0, 2\pi)$. Poišči njegovo bazo!
Rešitev: Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi zgornje diferencialne enačbe. Potem je

$$(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'' + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1(y_1'' + y_1) + \alpha_2(y_2'' + y_2) = 0 + 0 = 0,$$

torej je V zaprta za linearne kombinacije in je vektorski podprostor. Vemo tudi, da lahko vsako rešitev te diferencialne enačbe zapišemo kot $y(x) = C \cos x + D \sin x$, kjer sta C in D realni števili. Baza za V je torej $\{\cos x, \sin x\}$, $\dim V = 2$.

1. Preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom

$$\tau(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Pokaži, da je τ linearna preslikava.

   (b) Določi njeno matriko v bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Rešitev: (a) Označimo $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Potem je

$$\begin{aligned} \tau(\alpha X + \beta Y) &= A(\alpha X + \beta Y) + (\alpha X + \beta Y)A = \alpha AX + \beta AY + \alpha XA + \beta YA \\ &= \alpha(AX + XA) + \beta(AY + YA) = \alpha\tau(X) + \beta\tau(Y), \end{aligned}$$

torej je τ linearna. (b) $A_\tau = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

$\varphi : U \to V$

φ je linearna, če velja: $\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in U$

primer: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(v) = Av$

// vsako linearno preslikavo lahko predstavimo kot matrično množenje z neko matriko, ampak šele ko izberemo konkretne baze v prostorih U in V

// torej lahko linearno preslikavo predstavimo z različnimi matrikami, imajo pa vse te matrike nekaj skupnih lastnosti: rang, dimenzijo stolpčnega in ničelnega prostora, lastne vrednosti, karakteristični polinom…

(a) $\tau(\alpha X + \beta Y) = A(\alpha X + \beta Y) + (\alpha X + \beta Y)A = \alpha(AX + XA) + \beta(AY + YA) = \alpha\,\tau(X) + \beta\,\tau(X)$

(b) $\tau(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2E_{11} + 1E_{21} + 1E_{12} + 0E_{22}$

$\tau(E_{12}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2E_{11} + 2E_{12}$

$\tau(E_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = E_{11} + E_{21} + E_{22}$

$\tau(E_{22}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{12} + E_{21}$

$$B = \begin{array}{ccccc} \tau(E_{11}) & \tau(E_{12}) & \tau(E_{21}) & \tau(E_{22}) & \\ 2 & 1 & 1 & 0 & E_{11} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & E_{12} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & E_{21} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & E_{22} \end{array} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

// $\tau(E_{11})$ … $\tau(E_{12})$ so bazni vektorji prostora iz katerega τ slika, E_{11} … E_{22} pa so bazni vektorji prostora kamor τ slika

1. Preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom

$$\tau(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad , \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Pokaži, da je τ linearna preslikava.

(b) Določi njeno matriko v bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) $\tau(X) = KX + XK$

$$\tau(\alpha X + \beta Y) = K(\alpha X + \beta Y) + (\alpha X + \beta Y)K =$$

$$= \alpha KX + \beta KY + \alpha XK + \beta YK = \alpha \underbrace{(KX + XK)}_{\overset{\shortparallel}{\tau(X)}} + \beta \underbrace{(KY + YK)}_{\overset{\shortparallel}{\tau(Y)}},$$

tj. τ je linearna.

(b)

$$\tau(E_{11}) = KE_{11} + E_{11}K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau(E_{12}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau(E_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau(E_{22}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot E_{11} + 1 \cdot E_{12} + 1 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22}$$

$$A_\tau = \begin{array}{cccc|c} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} & \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & E_{11} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & E_{12} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & E_{21} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & E_{22} \end{array}$$

$$\tau(I) = KI + IK = 2K = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = E_{11} + E_{22} \longleftrightarrow \vec{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ glede na std. bazo $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A_\tau \vec{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \tau(I)$$

2. Za polinom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in kvadratno matriko A označimo $p(A) = aA^3 + bA^2 + cA + dI$. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Prepričaj se, da je preslikava

$$\phi\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \phi(p) = p(A)$$

linearna in poišči matriko, ki ji pripada v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}_3[x]$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Poišči bazo za $\ker\phi$ in določi $\dim(\ker\phi)$. (*Namig:* Če je $\Delta_A(\lambda)$ karakteristični polinom A, potem je $\Delta_A(A) = 0$.)

(c) Naj bo $q(x) = x(x^2 - 2x - 3)$. Ali je množica vseh 2×2 matrik X, za katere velja $q(X) = 0$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

(a) $\phi(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)(A) =$ (preverite sami) $= \alpha p(A) + \beta q(A)$

$// \ (\alpha p + \beta q)(x) = \alpha p(x) + \beta q(x)$

$p(A) = a_3A^3 + a_2A^2 + a_1A + a_0I$

$q(A) = b_3A^3 + b_2A^2 + b_1A + b_0I$

… pokažeš da velja $\phi(\alpha p + \beta q) = \alpha\phi(p) + \beta\phi(q)$

standardna baza za prostor matrik $\mathbb{R}^{2\times 2} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

standardna baza za prostor polinimiv $\mathbb{R}_3[x] = \{1, x, x^2x^3\}$

$\phi(1) = I = E_{11} + E_{22}$

$\phi(x) = A$

$\phi(x^2) = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$\phi(x^3) = A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{bmatrix}$

$$B = [\phi]_{S,S} = \begin{array}{c|cccc|c} & \phi(1) & \phi(x) & \phi(x^2) & \phi(x^3) & \\ \hline & 1 & 1 & 5 & 13 & E_{11} \\ & 0 & 2 & 4 & 14 & E_{12} \\ & 0 & 2 & 4 & 14 & E_{21} \\ & 1 & 1 & 5 & 13 & E_{22} \end{array}$$

(b) $\ker\phi = \{p\colon\ \phi(p) = 0\} = \{p\colon\ p(A) = 0\} = N(B) = \{x \in \mathbb{R}^4\colon Bx = 0\}$

1. način: naredimo gausovo eliminacijo na matriki B

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

za x_3 in x_4 izberemo 1,0 in 0,1: $v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$p_1(x) = x^2 - 2x - 3$

$p_2(x) = x^3 - 7x - 6$

2. način: za kakšne polinome p velja $p(A) = 0$?

recimo da imamo poljubno kvadratno matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

in polinom $p(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$

in recimo da imamo diagonalizabilno matriko $A = PDP^{-1}$

$p(A) = a_mA^m + \cdots + a_0I = a_mPD^mP^{-1} + \cdots + PDP^{-1}a_1 + a_0PP^{-1}$

$= P(a_mD^m + \cdots + a_1D + a_0I)P^{-1}$

$= P\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p(\lambda_m) \end{bmatrix} P^{-1} = 0 \Rightarrow$ (ker je P obrnljiva) $\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p(\lambda_m) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_m) = 0$

$\Leftrightarrow$ lastne vrednosti A so ničle p

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 1-\lambda = \pm 2 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$$

$$p(A) = 0 \Leftrightarrow p(x) = (x+1)(x-3)(ax+b)$$

$$\ker \phi = \{p\colon\ \phi(p) = 0\} = \{p\colon\ p(A) = 0\} = \mathcal{L}\{(ax+b)(x+1)(x-3); a, b \in \mathbb{R}\}$$

$B_{\ker \phi}$ = (za a in b izberemo 1,0 in 0,1) = $\{x(x+1)(x-3),\ (x+1)(x-3)\}$

// dobili smo drugo bazo kot pri 1. načinu – en polinom je drugačen, je pa linearna kombinacija ostalih dveh iz druge baze, more pa veljat da imajo vsi te polinomi -1 in 3 za ničle, kar pa drži

(c) Ali je $N = \{B;\ \ q(B) = 0\}$ vektorski podprostor
vemo $q(A) = 0$ // ker sta lastni vrednosti A ničli polinoma q
$-A$ ima lastni vrednosti 1,-3 in zato $q(-A) \neq 0$ // ker za diagonalizabilne velja da polinom uniči matriko ntk. so vse lastne vrednosti ničle tega polinoma

$A \in N,\ -A \notin N \Rightarrow N$ ni vektorski podprostor

Cayley–Hamilton izrek: za $p_A(x) = \det(A - \lambda I)$ velja $p_A(A) = 0$
primer: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \Rightarrow\ p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 = p_B(\lambda)$

karakteristična polinoma uničita matriki: $p_A(A) = (1-A)^2 = [0]$ in $p_B(B) = (1-B)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = [0]$
A je diagonalizabilna, B pa ni

ampak karakteristični polinom ni minimalni polinom, ki uniči matriko A, obstaja še polinom minimalne stopnje $m_A(\lambda) = 1 - \lambda$

pri B pa karakteristični polinom je minimalni polinom: $m_B = p_B$

2. Za polinom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in kvadratno matriko A označimo $p(A) = aA^3 + bA^2 + cA + dI$. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Prepričaj se, da je preslikava

$$\phi\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \phi(p) = p(A)$$

linearna in poišči matriko, ki ji pripada v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}_3[x]$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Poišči bazo za $\ker\phi$ in določi $\dim(\ker\phi)$. (*Namig:* Če je $\Delta_A(\lambda)$ karakteristični polinom A, potem je $\Delta_A(A) = 0$.)

(c) Naj bo $q(x) = x(x^2-2x-3)$. Ali je množica vseh 2×2 matrik X, za katere velja $q(X) = 0$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

(a) Linearnost ϕ :

$$\phi(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)(A) = \alpha p(A) + \beta q(A) = \alpha\,\phi(p) + \beta\,\phi(q),$$

je linearna.

$B_{\mathbb{R}_3[x]} = \{1, x, x^2, x^3\}$ $\qquad$ $B_{\mathbb{R}^{2\times 2}} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

$$\phi(1) = I = E_{11} + E_{22} \qquad \phi(x) \overset{p(x)=x}{=} A = 1\cdot E_{11} + 2\cdot E_{12} + 2\cdot E_{21} + 1\cdot E_{22}$$

$$\phi(x^2) \overset{p(x)=x^2}{=} A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 5\cdot E_{11} + 4\cdot E_{12} + 4\cdot E_{21} + 5\cdot E_{22}$$

$$\phi(x^3) = A^3 = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{bmatrix} = 13\, E_{11} + 14\cdot E_{12} + 14\cdot E_{21} + 13\cdot E_{22}$$

$$A_\phi = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\left.\begin{array}{cccc} 1 & x & x^2 & x^3 \\ \end{array}\right.$$

$$A_\phi = \begin{array}{cccc|c} 1 & x & x^2 & x^3 & \\ 1 & 1 & 5 & 13 & E_{11} \\ 0 & 2 & 4 & 14 & E_{12} \\ 0 & 2 & 4 & 14 & E_{21} \\ 1 & 1 & 5 & 13 & E_{22} \end{array}$$

(a) Vzemimo polinoma $p, q \in U$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in preverimo, da ϕ ohranja linearne kombinacije:

$$\phi(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)(A) = \alpha p(A) + \beta q(A) = \alpha\phi(p) + \beta\phi(q),$$

ϕ je torej linearna. Za matriko A_ϕ poračunamo $\phi(p)$ za polinome p iz standardne baze $\mathbb{R}_3[x]$, $p \in \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$\phi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ \phi(x^2) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},\ \phi(x^3) = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{bmatrix}.$$

Martika, ki pripada ϕ je torej

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \\ 1 & 1 & 5 & 13 \end{bmatrix}.$$

$$\text{(b)}\quad \ker\phi = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \underset{\phi(p)}{\underset{\parallel}{p(A)}} = \overset{\mathbb{R}^{2\times 2}}{\overset{\in}{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}}} \}$$

Uporabimo Cayley-Hamiltonov izrek: $\Delta_A(A) = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, tj.

$\Delta_A \in \ker\phi$.

$$\Delta_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix}1-x & 2\\ 2 & 1-x\end{vmatrix} = (1-x)^2 - 2^2 = x^2-2x-3.$$

Torej $x^2-2x-3 \in \ker\phi \subseteq \mathbb{R}_3[x]$. Polinomi st. 1 ne uničijo matrike A (saj $cA + dI \neq \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ ...)

Kateri polinomi st. 3 uničijo A? Tisti, ki so deljivi z Δ_A.

Da dobimo bazo za $\ker\phi$, dodamo še $x(x^2-2x-3)$.

$$B_{\ker\phi} = \{\underset{\uparrow}{x^2-2x-3},\ \underset{\uparrow}{x(x^2-2x-3)}\},\quad \dim(\ker\phi) = 2.$$

Ta dva sta lin. neodvisna, ker sta različnih stopenj.

(b) Za karakteristični polinom $\Delta_A(x)$ matrike A velja $\Delta_A(A) = 0$ (ničelna matrika). Hitro vidimo

$$\Delta_A(x) = \det(A - xI) = x^2 - 2x - 3.$$

Ker noben polinom stopnje 1 ali manj ne uniči matrike A (Zakaj?), so v $\ker\phi$ le tisti polinomi stopnje ≤ 3, ki so deljivi z $\Delta_A(x)$. Od tod dobimo $\mathcal{B}_{\ker\phi} = \{x^2-2x-3, x(x^2-2x-3)\}$ in $\dim(\ker\phi) = 2$.

(c) Ne, ni podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Vemo $q(A) = 0$, vendar $q(2A) = 2A\left((2A)^2 - 2\cdot 2A - 3I\right) =$

$$= \underbrace{2A\left(4A^2 - 4A - 3I\right)}_{\substack{\neq \\ 0}} \neq 2q(A)$$

, tj. $2A$ ni vsebovana v množici matrik, ki jih q uniči.

(c) Ta podmnožica *ni* vektorski podprostor. Ničle polinoma q so $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ in $x_3 = 3$. To pomeni, da q uniči vse 2×2 matrike, ki imajo dve od teh ničel za lastni vrednosti. (Uniči sicer tudi 'polovico' od 2×2 matrik, ki imajo eno od teh ničel za dvojno lastno vrednost. Katerih ne?) Sedaj ni težko poiskati dveh matrik A in B, da velja $q(A) = 0$ in $q(B) = 0$, vendar $q(A+B) \neq 0$. (Ali matrike A, da je $q(A) = 0$, vendar $q(-A) \neq 0$.)

3. V $\mathbb{R}^3$ so dani vektorji $\mathbf{a} = [1,1,0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{b} = [1,0,1]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{c} = [0,1,1]^\mathsf{T}$ ter linearna preslikava $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, za katero velja

$$\tau(\mathbf{a}) = \mathbf{a}, \tau(\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \text{ ter } \tau(\mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

   (a) Pokaži, da je $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$.

   (b) Zapiši matriko preslikave τ v bazi $\mathcal{B} := \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

   (c) Zapiši matriko preslikave τ v standardni bazi $\mathcal{S} := \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

   (d) Kam preslika τ vektor $[1,1,1]^\mathsf{T}$?

Rešitev: (a) Vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ so linearno neodvisni. Ker jih je dovolj za $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, tvorijo bazo. (b) $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $A_{\tau,\mathcal{S},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\tau([1,1,1]^\mathsf{T}) = [2,2,1]^\mathsf{T}$.

$\varphi(xa + yb + zc)$, $\;x, y, z \in \mathbb{R}$, $\;\varphi$ je lin. presl. $= \; x\varphi(a) + y\varphi(b) + z\varphi(c)$

// Če imaš linearno preslikavo definirano za 3 vektorje, lahko izračunaš sliko za kakršnokoli linearno kombinacijo teh vektorjev. Če so te trije vektorji baza prostora, potem je φ definirana za vse vektorje.

(a) naredimo gausovo eliminacijo na matriki $[a\ b\ c]$ in preverimo če so 3je pivoti

(b) $A = \begin{array}{cccc} \tau(a) & \tau(b) & \tau(c) & \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\tau(e_1) = \tau\left(\frac{a+b-c}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(\tau(a) + \tau(b) + \tau(c)\big) = \frac{1}{2}\big(a + (a+b) - (a+c)\big) = \frac{1}{2}(a + b - c) =$
$\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$

enako za $\tau(e_2)$ in $\tau(e_3)$, nato pa vstavimo rezultate v matriko $B = \begin{array}{cccc} \tau(e_1) & \tau(e_2) & \tau(e_3) & \\ 1 & & & e_1 \\ 0 & & & e_2 \\ 0 & & & e_3 \end{array}$

2. način:
kako izrazimo $\{e_1, e_2, e_3\}$ v bazi $\{a, b, c\}$? (oz. na splošno kako izrazimo vektor v dani bazi)
poiskati moramo x_1, y_1, z_1, da bo veljalo $e_1 = x_1 a + y_1 b + z_1 c = [a\ b\ c]\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = Pv_1$

$\left(P = [a\ b\ c], v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right)$

$Pv_1 = e_1 \Rightarrow v_1 = P^{-1}e_1$
$Pv_2 = e_2 \Rightarrow v_2 = P^{-1}e_2$ $\}$ ta sistem enačb rešimo kot $[P \mid e_1\ e_2\ e_3] = [P \mid I]$ torej izračunamo inverz
$Pv_3 = e_3 \Rightarrow v_3 = P^{-1}e_3$
matrike P - z gausovo eliminacijo pridemo iz $[P \mid I]$ v $[I \mid P^{-1}]$, kar je pa enako $[I \mid v_1\ v_2\ v_3]$

$$[P \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & e_1 & e_2 & e_3 & \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & b \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & c \end{array}\right] = [I \mid P^{-1}] \Rightarrow \begin{aligned} e_1 &= \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c \\ e_2 &= \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c \\ e_3 &= -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c \end{aligned}$$

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

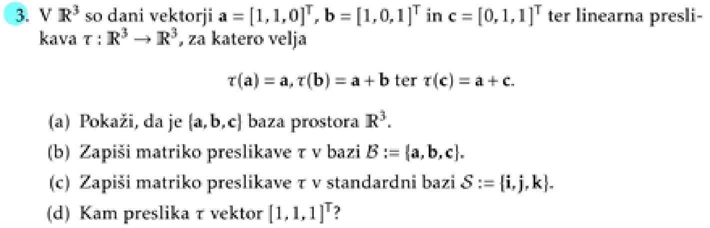
$$\begin{tikzcd}
\tau : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P"'] & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \arrow[d, shift right, "P"'] \\
\tau : (\mathbb{R}^3, S) \arrow[r, "B = P\underline{AP}^{-1}"] \arrow[u, shift right, "P^{-1}"'] \arrow[r, bend left=80] & (\mathbb{R}^3, S) \arrow[u, shift right, "P^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$B = PAP^{-1} = \cdots = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

recimo, da A predstavlja linearno preslikavo φ v standardni bazi
in recimo, da lahko A diagonaliziramo z lastnimi vrednostmi $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ in lastnimi vektorji $\{v_1, \dots, v_n\}$:

$A = PDP^{-1}$, $D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \Rightarrow D$ predstavlja φ v bazi $\{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad //Av_i = \lambda v_i$

$[\tau]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = A$
$[\tau]_{\mathcal{S},\mathcal{S}} = B = PAP^{-1}$
$[\tau]_{\mathcal{B},\mathcal{S}} = AP^{-1}$



3. V $\mathbb{R}^3$ so dani vektorji $\mathbf{a} = [1,1,0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{b} = [1,0,1]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{c} = [0,1,1]^\mathsf{T}$ ter linearna preslikava $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, za katero velja

$$\tau(\mathbf{a}) = \mathbf{a}, \tau(\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \text{ ter } \tau(\mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

(a) Pokaži, da je $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$.
(b) Zapiši matriko preslikave τ v bazi $\mathcal{B} := \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$.
(c) Zapiši matriko preslikave τ v standardni bazi $\mathcal{S} := \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$.
(d) Kam preslika τ vektor $[1,1,1]^\mathsf{T}$?

(a) Ker so $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ trije, bodo tvorili bazo $\mathbb{R}^3$ ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$), če so linearno neodvisni.

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{} \underset{\text{elim.}}{\overset{\text{Gauss}}{\cdots\cdots}} \xrightarrow{} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, ki je polnega ranga, torej so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lin. neodv., tj. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza $\mathbb{R}^3$.

(b) $A_{\tau,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{ccc|c} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \\ 1 & 1 & 1 & \vec{a} \\ 0 & 1 & 0 & \vec{b} \\ 0 & 0 & 1 & \vec{c} \end{array}\right]$.

(c) $A_{\tau,\mathcal{S},\mathcal{S}} = ?$, $\mathcal{S} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\tau(\vec{i}) = \tau\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\tau(\vec{a}) + \frac{1}{2}\tau(\vec{b}) - \frac{1}{2}\tau(\vec{c}) = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}{2} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\tau(\vec{j}) = \frac{1}{2}\tau(\vec{a}) - \frac{1}{2}\tau(\vec{b}) + \frac{1}{2}\tau(\vec{c}) = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}{2} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\tau(\vec{k}) = -\frac{1}{2}\tau(\vec{a}) + \frac{1}{2}\tau(\vec{b}) + \frac{1}{2}\tau(\vec{c}) = -\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Ker je $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza $\mathbb{R}^3$, lahko $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ zapišemo v tej bazi:

$$\vec{i} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\begin{bmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{bmatrix} \qquad \vec{k} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\begin{bmatrix}\alpha_3\\\beta_3\\\gamma_3\end{bmatrix}$$

$$\vec{j} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \gamma_2\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\begin{bmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{bmatrix}$$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix} = \left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right] = I, \text{ tj. } \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{bmatrix} = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]^{-1}.$$

$$\begin{array}{cccccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & +1 & 0 & +1/2 & -1/2 & +1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

vstavimo

$$A_{\tau,\mathcal{S},\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(d)

$$\tau\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = A_{\tau,\mathcal{S},\mathcal{S}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$$

Kako izrazimo $\tau\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$, če ne poznamo $A_{\tau,\mathcal{S},\mathcal{S}}$?

Izrazimo $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ v bazi $B = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$, torej je $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}_B \quad \ldots \quad A_{\tau,B,B}\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix}1\\1\\1/2\end{bmatrix}_B = 1\cdot\vec{a} + 1\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{S}}.$$

4. Naj bo $\mathbb{R}_3[x]$ vektorski prostor polinomov p stopnje kvečjemu 3.
   (a) Prepričaj se, da je preslikava $\phi\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$, $\phi(p) := [p(-1), p(0), p(1)]^\mathsf{T}$ linearna.
   (b) Poišči bazo $\mathcal{B}_{\ker\phi}$ jedra $\ker\phi$ preslikave ϕ.
   (c) Zapiši matriko, ki pripada ϕ v bazi $\{1, x, x^2, x^3\}$ za $\mathbb{R}_3[x]$ in standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

Rešitev: (b) $\mathcal{B}_{\ker\phi} = \{x^3 - x\}$, $\mathcal{B}_{\operatorname{im}\phi} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, (c) $A_\phi = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) $(\alpha p + \beta q)(x) = \alpha p(x) + \beta q(x)$

$$\phi(\alpha p + \beta q) = \begin{bmatrix} (\alpha p + \beta q)(-1) \\ (\alpha p + \beta q)(0) \\ (\alpha p + \beta q)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha p(-1) + \beta q(-1) \\ \alpha p(0) + \beta q(0) \\ \alpha p(1) + \beta q(1) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} = \alpha\phi(p) + \beta\phi(q)$$

(b) $\ker\phi = \{p\colon \phi(p) = 0\} = \left\{ p\colon \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} = 0 \right\}$ // množica polinomov, ki ima ničle -1,0,1

$p \in \ker\phi \Leftrightarrow p(x) = (x+1)(x-1)x \cdot \alpha$

$B_{\ker\phi} = \{(x+1)(x-1)x\}$

2. način: napišemo matriko in poiščemo ničelni prostor matrike: (tudi (c))

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phi(1) & \phi(x) & \phi(x^2) & \phi(x^3) \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \qquad \phi(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \phi(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \phi(x^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \phi(x^3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow p(x) = -x + x^3 = x(x-1)(x+1)$$

(a) $\phi\colon \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tj. $\phi(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$

$p \longmapsto \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$

S predavanj: Preslikava $\phi\colon U \longrightarrow V$ je linearna, če ohranja linearne kombinacije, tj. $\phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \phi(u_1) + \alpha_2 \phi(u_2)$.

$$\phi(\alpha p + \beta q) = \begin{bmatrix} (\alpha p + \beta q)(-1) \\ (\alpha p + \beta q)(0) \\ (\alpha p + \beta q)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha p(-1) + \beta q(-1) \\ \alpha p(0) + \beta q(0) \\ \alpha p(1) + \beta q(1) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} q(-1) \\ q(0) \\ q(1) \end{bmatrix} = \alpha\phi(p) + \beta\phi(q).$$

(Operaciji + in · sta na $\mathbb{R}_n[x]$ definirani tako: $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$, $(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$)

Torej je ϕ res linearna.

(b) $\ker(\phi) = \{ u \in \mathcal{U} : \phi(u) = 0 \} = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \phi(p) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \}$.

V našem primeru: $\begin{bmatrix}p(-1)\\p(0)\\p(1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, tj. $p(-1) = p(0) = p(1) = 0$ oz.

p ima ničle $-1, 0$ in 1 (in je stopnje največ 3).

Recimo $p(x) = a(x+1)x(x-1)$ ← to so vsi polinomi iz $\ker(\phi)$.

Kaj je baza? $B_{\ker\phi} = \{(x+1)x(x-1)\} = \{x^3 - x\}$. $(\dim(\ker\phi) = 1)$

(c) Matrika, ki pripada ϕ glede na bazo $\{1, x, x^2, x^3\}$ za $\mathbb{R}_3[x]$ in bazo $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$ za $\mathbb{R}^3$.

$$A_\phi = \begin{array}{cccc|c} 1 & x & x^2 & x^3 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & \vec{i} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \vec{j} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \vec{k} \end{array}$$

$$\phi(1) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ p(x)=x}}{\phi(x)} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = -1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k}$$

$$\phi(x^2) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\phi(x^3) = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Med odmorom: Kaj je $N(A_\phi)$?

$$A_\phi \vec{x} = \vec{0}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \to \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cancel{2}1 & 0\end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \therefore \vec{x} = \begin{bmatrix}0\\-x_4\\0\\x_4\end{bmatrix} \in N(A_\phi)$$

Glede na bazo $\{1, x, x^2, x^3\}$ so v $\vec{x}$ koeficienti linearne kombinacije baznih polinomov $\mathbb{R}_3[x]$, tj.:

$$0\cdot 1 + (-x_4)x + 0\cdot x^2 + x_4 \cdot x^3 = x_4(x^3 - x) \in \ker\phi.$$

5. Dana je preslikava $\psi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$(\psi(p))(x) = (xp(x+1))' - 2p(x).$$

Pokaži, da je ψ linearna. Poišči njeno matriko v bazi $\{1, x, x^2\}$ ter njeno jedro in sliko.

Rešitev: $A_\psi = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\ker\psi = \{a(x+1) : a \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}_{\ker\psi} = \{x+1\}$,
$\operatorname{im}\psi = \{a + 4bx + bx^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}_{\operatorname{im}\psi} = \{1, x^2 + 4x\}$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \psi(1) & \psi(x) & \psi(x^2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \end{array}$$

$$\psi(1)(x) = (x \cdot 1)' - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = \mathbf{-1}$$

$$\psi(x)(x) = \big(x(x+1)\big)' - 2x = (x^2 + x)' - 2x = 2x + 1 - 2x = \mathbf{1}$$

$$\psi(x^2)(x) = (x(x+1)^2)' - 2x^2 = (x^3 + 2x^2 + x)' - 2x^2 = \boldsymbol{x^2 + 4x + 1}$$

$\ker\psi = N(A)$ (v std. bazi) $\quad$ $\operatorname{im}\psi = C(A)$ (v std. bazi)

$$A \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{r} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p(x) = 1 + x$$ // to je vektor iz jedra

// za stolpčni prostor izberemo tiste stolpce, kjer so pivoti

$$B_{C(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad B_{\operatorname{im}\psi} = \{-1,\ 1 + 4x + x^2\}$$

$$B_{N(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad B_{\ker\psi} = \{1 + x\}$$

6. Naj bo $\mathbf{a} = [1,1]^{\mathsf{T}}$. Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je dana s predpisom

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,\mathbf{a}^{\mathsf{T}} = \mathbf{x}\,[1,1].$$

(a) Utemelji, da je ϕ linearna preslikava.

(b) Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) Določi $\dim(\ker\phi)$ in $\dim(\operatorname{im}\phi)$.

(d) Poišči bazo za $\operatorname{im}\phi$.

Rešitev: (a) Preverimo, da ϕ ohranja linearne kombinacije. Velja

$$\phi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})\mathbf{a}^{\mathsf{T}} = \alpha\mathbf{x}\,\mathbf{a}^{\mathsf{T}} + \beta\mathbf{y}\,\mathbf{a}^{\mathsf{T}} = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \alpha\phi(\mathbf{y})$$

za vse $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ in vse $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ϕ je linearna.

(b) Poračunajmo, v kaj ϕ preslika vektorje standardne baze $\mathbb{R}^2$.

$$\phi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}[1,1] = \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} = E_{11}+E_{12}$$
$$\phi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[1,1] = \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix} = E_{21}+E_{22}$$

Matrika, ki pripada ϕ je torej

$$A_\phi = \begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

(c) Matrika A_ϕ ima rang 2, torej $\dim(\operatorname{im}\phi) = \dim(C(A_\phi)) = 2$. Za jedro potem velja $\dim(\ker\phi) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(\operatorname{im}\phi) = 2-2 = 0$.

(d) Zagotovo sta v $\operatorname{im}\phi$ matriki $\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ in $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]$. Ker sta linearno neodvisni in je $\dim(\operatorname{im}\phi) = 2$, je baza za $\operatorname{im}\phi$ kar $\mathcal{B}_{\operatorname{im}\phi} = \left\{\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]\right\}$.

(a) $\phi(\alpha x + \beta y) = (\alpha,\beta \in \mathbb{R};\ x,y \in \mathbb{R}^2) = (\alpha x + \beta y)a^T = \alpha x a^T + \beta y a^T = \alpha\phi(x) + \beta\phi(y)$

(b) $A = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} \phi(e_1) & \phi(e_2) \end{array} & \\ \begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix} & \begin{array}{c} E_{11}\\ E_{12}\\ E_{21}\\ E_{22}\end{array} \end{array}$ $\quad \phi(e_1) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} \quad \phi(e_2) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$

(c in d) $A \sim \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$ $\ker\phi = \{0\}$ $\quad B_{C(A)} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\} \Rightarrow B_{\operatorname{im}\phi} = \left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\right\}$

$\phi(x) = \begin{bmatrix}x_1&x_1\\x_2&x_2\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$

7. Naj bosta U in V vektorska podprostora v vektorskem prostoru W. Definiramo množice:

$$\begin{aligned} U \times V &:= \{(u,v) : u \in U, v \in V\}, \\ U + V &:= \{u + v : u \in U, v \in V\} \text{ ter} \\ U \cap V &:= \{w \in W : w \in U \text{ in } w \in V\}. \end{aligned}$$

   (a) Prepričaj se, da sta $U + V$ in $U \cap V$ vektorska podprostora v W.

   (b) ‘Ugani’ ustrezno strukturo vektorskega prostora na $U \times V$. Utemelji, da je v tem primeru $U \times V$ res vektorski prostor! Kako lahko $\dim(U \times V)$ izraziš z $\dim U$ in $\dim V$?

   (c) Preslikava $\phi\colon U \times V \to W$ naj bo dana s $\phi(u,v) = u - v$. Prepričaj se, da je ϕ linearna. (Če ni, se vrni k točki (b) te naloge.) Določi $\ker\phi$ in $\operatorname{im}\phi$.

   (d) Preveri, da je preslikava $\psi\colon U \cap V \to \ker\phi$, $\psi(w) = (w,w)$ linearna in bijektivna, torej velja $\dim(U \cap V) = \dim(\ker\phi)$.

   (e) Zaključi, da velja $\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V)$.

Rešitev: (b) Seštevanje in množenje s skalarjem definiramo na ‘očiten’ način:

$$\begin{aligned} (u_1,v_1) + (u_2,v_2) &:= (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \\ \alpha(u,v) &:= (\alpha u, \alpha v), \end{aligned}$$

Za dimenzijo velja $\dim(U \times V) = \dim U + \dim V$.
(c) $\ker\phi = \{(w,w) : w \in U \cap V\}$, $\operatorname{im}\phi = U + V$.
(e) Iz dimenzijske enačbe

$$\dim(\ker\phi) + \dim(\operatorname{im}\phi) = \dim(U \times V)$$

sledi

$$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim U + \dim V.$$

1. Naj bo $\delta\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ operator odvajanja, $\delta(p) = p'$. Določi $\ker\delta$. Prepričaj se, da je $\ker\delta$ edini lastni podprostor za δ. (Kateri lastni vrednosti pripada?)
   Rešitev: $\mathcal{B}_{\ker\ \delta} = \{1\}$, $\ker\delta$ je lastni podprostor za lastno vrednost 0.

$\delta(p) = p'$
$(\alpha p + \beta q)' = \alpha p' + \beta q'$

$p'(x) = \lambda p(x)$?
edina možnost je $\lambda = 0$ za $p(x) = c \cdot 1$

lastni podprostor je prostor konstantnih polinomov

2. način: zapišemo matriko preslikave v standardni bazi

$$[\delta]_{S,S} = \begin{array}{c|ccccc|} & \delta(1) & \delta(x) & & \dots & \delta(x^n) \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \\ x^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

vidimo da imamo 1 n-kratno lastno vrednost 0 z enodimenzionalnim lastnim podprostorom
$(\dim(\ker\delta) = 1) \Rightarrow \delta$ ne moremo diagonalizirati

$\delta : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $\delta(p) = p'$

konstanta

$\ker \delta = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] : p' = 0 \}$ iz $p'(x) = 0$ sledi $p(x) = C$

$\ker \delta = \{ C = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \ldots + 0 \cdot x + C \cdot 1 : C \in \mathbb{R} \}$, $B_{\ker \delta} = \{1\}$

Kaj so lastni polinomi in lastne vrednosti δ?

$(\delta(p))(x) = \lambda p(x)$ .... $p'(x) = \lambda p(x)$

stopnja $p'(x)$ je $\leq$ stopnji $p(x)$

je $<$, če je stopnja $p \geq 1$
je $=$, če je stopnja p enaka 0.

- Če je stopnja p enaka 0, tj. $p(x) = C$, tedaj $p'(x) = 0 = \lambda \cdot p(x) = \lambda \cdot C$, kar pomeni $\lambda = 0$.
- Če je stopnja $p \geq 1$, tj. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, tedaj: $p'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1) x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 2x + a_1 =$
$= \lambda p(x) = \lambda \cdot (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$,
torej mora veljati $\lambda = 0$, zato $p'(x) = 0 \cdot p(x) = 0$, $p(x) = C$, kar je protislovje. Ta situacija se ne more zgoditi.

Edina lastna vrednost δ je 0 z lastnim polinomom $p(x) = C$.

L.v. in l.p. bi lahko poiskali tudi z uporabo matrike, ki pripada δ (glede na katerokoli bazo $\mathbb{R}_n[x]$).

Izberemo kar std. bazo $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

$1' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$, ..., $(x^n)' = n x^{n-1}$

$$A_\delta = \begin{array}{cccccc} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & \\ & & & & n & x^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^n \end{array} \qquad N(A_\delta) = \left\{ \begin{bmatrix} t_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} : t_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\updownarrow$

$p(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \ldots + 0 \cdot x + t_1 \cdot 1 \in \ker \delta$

Lastne vrednosti δ so lastne vrednosti A_δ, ki so (vse) 0.

2. Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je preslikava $\tau\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom

$$\tau(X) = AX - XA.$$

   (a) Pokaži, da je τ linearna preslikava.

   (b) Določi njeno matriko v standardni bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (c) Določi dimenzijo jedra preslikave τ.

   (d) Ali lahko τ diagonaliziramo?

Rešitev:

(a) Za $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}\tau(\alpha X + \beta Y) &= A(\alpha X + \beta Y) - (\alpha X + \beta Y)A = \alpha(AX - XA) + \beta(AY - YA) \\ &= \alpha\,\tau(X) + \beta\,\tau(Y),\end{aligned}$$

torej je τ linearna.

(b) Poračunamo

$$\begin{aligned}\tau(E_{11}) &= \tau\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -E_{12}, \\ \tau(E_{12}) &= \tau\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \\ \tau(E_{21}) &= \tau\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = E_{11} - E_{22}, \\ \tau(E_{22}) &= \tau\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{12},\end{aligned}$$

zato je matrika A_τ, ki priprada preslikavi τ, enaka

$$A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Očitno je rang matrike A_τ enak 2, zato je $\dim(\ker\tau) = 4 - \dim(\operatorname{im}\tau) = 2$.

(d) Najprej poračunamo lastne vrednosti preslikave τ. Karakteristični polinom matrike A_τ je enak

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4,$$

zato je 0 edina lastna vrednost. Ker smo v točki (c) izračunali, da imamo pri lastni vrednosti 0 le dva linearno neodvisna lastna vektorja, sledi, da preslikava τ ni diagonalizabilna.

2. Za $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je preslikava $\tau \colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom

$$\tau(X) = AX - XA.$$

(a) Pokaži, da je τ linearna preslikava. ← Preveri samostojno!

(b) Določi njeno matriko v standardni bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) Določi dimenzijo jedra preslikave τ.

(d) Ali lahko τ diagonaliziramo?

(b) $\tau(E_{11}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\tau(E_{12}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\tau(E_{21}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\tau(E_{22}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A_\tau = \begin{array}{cccc|c} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & E_{11} \\ -1 & 0 & 0 & 1 & E_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{21} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & E_{22} \end{array}$$

(c) $\dim(\ker \tau) = \dim(N(A_\tau)) = 2$

$A_\tau \to \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\operatorname{rang}(A_\tau) = 2 = \dim(C(A_\tau))$

$$\underbrace{\operatorname{rang}(A_\tau)}_{2} + \underbrace{\dim(N(A_\tau))}_{2} = 4$$

(d) Lin. preslikavo τ lahko diagonaliziramo, če ji v neki bazi pripada diagonalna matrika.

To se zgodi točno takrat, ko lahko A_τ diagonaliziramo.

Kaj so l. vrednosti A_τ v našem primeru?

$$\det(A_\tau - \lambda I) = \left|\begin{array}{cc|cc} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{array}\right| = \lambda^4 = 0 \quad \ldots \quad \lambda_{1,2,3,4} = 0,$$

tj. 0 je edina lastna vrednost τ

Da bi se τ dalo diagonalizirat, rabimo v lastnem podprostoru za l. vred. 0 4 linearno neodvisne l. matrike.
Lastni podprostor za l. vred. 0 je $\ker \tau$.
$\tau(X) = 0 \cdot X = 0$

Vendar $\dim(\ker \tau) = 2$ ... torej τ ne moremo diagonalizirat.

3. Dani so linearno neodvisni polinomi $p, q, r \in \mathbb{R}_2[x]$;

$$p(x) = 1 + x^2, \quad q(x) = 1 - x^2, \quad r(x) = 2 + x.$$

(a) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava, za katero velja

$$\tau(p) = q, \quad \tau(q) = p, \quad \tau(r) = -2r.$$

Ali obstaja baza za $\mathbb{R}_2[x]$, v kateri pripada τ diagonalna matrika? Če obstaja, jo določi!

(b) Naj bo $\phi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ še ena linearna preslikava, da je

$$\phi(p) = -p, \quad \phi(q) = q, \quad \phi(q) = q + r.$$

$$\phi(p) = q, \quad \phi(q) = p, \quad \phi(r) = p + q + r.$$

Ali obstaja baza za $\mathbb{R}_2[x]$, v kateri pripada ϕ diagonalna matrika? Če obstaja, jo določi!

Rešitev: (a) V bazi $\{p, q, r\}$ pripada τ matrika $A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom te matrike je $\det(A_\tau - \lambda I) = -(\lambda^2 - 1)(\lambda + 2)$, zato so lastne vrednosti $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = 1$. Ker ima τ tri različne lastne vrednosti, ima tudi (vsaj) tri linearno neodvisne lastne polinome. Obstaja torej baza $\mathbb{R}_2[x]$ iz lastnih polinomov τ, kar pomeni, da τ lahko diagonaliziramo.

(b) V bazi $\{p, q, r\}$ pripada ϕ matrika $A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Lastne vrednosti te matrike (in preslikave ϕ) so $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = 1$. Lastni podprostor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_{2,3} = 1$, je 1-razsežen (Preveri to!), zato ϕ ni mogoče diagonalizirati.

3. Dani so linearno neodvisni polinomi $p, q, r \in \mathbb{R}_2[x]$;

$$p(x) = 1 + x^2, \quad q(x) = 1 - x^2, \quad r(x) = 2 + x.$$

(a) Naj bo $\tau\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava, za katero velja

$$\tau(p) = q, \quad \tau(q) = p, \quad \tau(r) = -2r.$$

Ali obstaja baza za $\mathbb{R}_2[x]$, v kateri pripada τ diagonalna matrika? Če obstaja, jo določi!

(b) Naj bo $\phi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ še ena linearna preslikava, da je

~~$\phi(p) = -p, \quad \phi(q) = q, \quad \phi(q) = q + r.$~~

$$\phi(p) = q, \quad \phi(q) = p, \quad \phi(r) = p + q + r.$$

Ali obstaja baza za $\mathbb{R}_2[x]$, v kateri pripada ϕ diagonalna matrika? Če obstaja, jo določi!

(a) Ker so p, q, r linearno neodvisni in je $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, je $B = \{p, q, r\}$ baza za $\mathbb{R}_2[x]$. Glede na B pripada τ matrika:

$$A_\tau = \begin{array}{c|ccc|c} & p & q & r & \\ \hline & 0 & 1 & 0 & p \\ & 1 & 0 & 0 & q \\ & 0 & 0 & -2 & r \end{array}$$

Lastne vrednosti A_τ: $\det(A_\tau - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(\lambda^2 - 1) =$

$$= -(2+\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

to so hkrati lastne vrednosti $\tau \longrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$

Pri $\lambda_1 = -2$ imamo $\tau(r) = -2r$, tj. $r(x) = 2 + x$ je lastni polinom τ.

Pri $\lambda_2 = -1$: $A_\tau - (-1)I = A_\tau + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_B$

Pripadajoč lastni polinom je $1 \cdot p - 1 \cdot q + 0 \cdot r = 2x^2$.

Pri $\lambda_3 = 1$ uganemo $p + q = 2 \leftarrow$ lastni polinom za l.v. 1.

V bazi $B' = \{2 + x, 2x^2, 2\}$ pripada τ matrika

$$A'_\tau = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \tau \text{ lahko diagonaliziramo.}$$

4. Naj bo V vektorski prostor, $\psi\colon V \to V$ pa linearna preslikava, da velja $\psi^2 = \mathrm{id}_V$.

   (a) Dokaži, da sta edini lastni vrednosti ψ le -1 in 1.

   (b) Kakšen je geometrijski pomen ψ, če je $V = \mathbb{R}^n$, tj. $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A_\psi^2 = I$?

   (c) Naj bo $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zrcaljenje preko ravnine z enačbo $x + y + z = 0$. Poišči matriko, ki pripada ψ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

   (d) Poišči formulo za matriko zrcaljena preko ravnine skozi 0 z normalo $\mathbf{n}$.

Rešitev:

(a) Iz $\psi(\psi(v)) = v$ za lastni vektor v sledi $\lambda^2 v = v$. Ker $v \neq 0$, mora veljati $\lambda^2 = 1$ ali $\lambda = \pm 1$.

(b) 'Poševno' zrcaljenje preko lastnega podprostora za lastno vrednost 1 vzdolž lastnega podprostora za lastno vrednost -1.

(c) $A_\psi = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $H = I - 2\frac{\mathbf{n}\,\mathbf{n}^\mathsf{T}}{\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n}}$.

(a) $\psi\big(\psi(v)\big) = v$

recimo, da imamo $\psi(v) = \lambda v \Rightarrow \psi(\lambda v) = \lambda^2 v = v$

$(\lambda^2 - 1)v = 0, v \neq 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

(b) lastni podprostor za λ_1: $U = \ker(\psi - id_V)$

lastni podprostor za λ_2: $V = \ker(\psi + id_V)$

U in V se sekata v 0

$u \in U \Rightarrow \psi(u) = u$ // vektorje v tem podprostoru pusti na miru

$v \in V \Rightarrow \psi(v) = -v$ // vektorje v tem podprostoru pa prezrcali čez 0 (spremeni predznak)

ni izometrija, ker ne ohranja dolžin

(c) $\lambda = 1$: $U = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, x + y + z = 0\right\}$ v =premica, $\perp$ na U, $n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

izberemo bazo $\{u_1, u_2\}$ za U $\Rightarrow$ baza za $\mathbb{R}^3$ je $B = \{n, u_1, u_2\}$

$$\psi_{B,B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \psi_{S,S} = \begin{bmatrix} n & u_1 & u_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n & u_1 & u_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

izberemo 2 neodvisna vektorja, npr. $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\psi_{S,S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

boljši način (geometrijsko):

projeciramo v na n in rezultat (p) dvakrat odštejemo vektorju v

$p = \frac{n^T v}{n^T n} n$ (projekcija v na n)

$$Zv = v - 2p = v - 2n\frac{n^T v}{n^T n} = v - 2\frac{(n\,n^T)v}{n^T n} = \left(I - 2\frac{n\,n^T}{n^T n}\right)v$$

$Zn = -n$

$v \perp n \Rightarrow Zv = v$

$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (preverimo da je $Z^2 = 1$)

taka preslikave je izometrija, dolžine vseh slik so enake

če gre za zrcaljenje, potem velja $Z^2 = I$, če gre pa za pravokotno zrcaljenje pa dodatno velja še $Z^T = Z$

5. Naj bo $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poljubna kvadratna matrika, $\tau\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ pa linearna preslikava s predpisom $\tau(X) = TX$.
   (a) Preveri, da imata τ in T enake lastne vrednosti.
   (b) Preveri, da lahko τ diagonaliziramo, če lahko diagonaliziramo T.
   (c) Kaj so lastni vektorji (matrike) za τ, če poznaš lastne vektorje za T?
   (d) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje za τ, če je $T = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Rešitev: (d) Lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Lastni vektorji/matrike: $X_{11} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ in $X_{12} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ k lastni vrednost $\lambda_1 = 1$, $X_{21} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ in $X_{22} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ k lastni vrednost $\lambda_2 = -1$.

$$TX = T\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tv_1 & Tv_2 & \dots & Tv_n \end{bmatrix}$$

recimo, da imamo lastne vektorje v_i in lastne vrednosti λ_i za T

$$T\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tv_1 & Tv_2 & \dots & Tv_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

$TX = \lambda X$

$\begin{bmatrix} Tv_1 & Tv_2 & \dots & Tv_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 & \lambda v_2 & \dots & \lambda v_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ stolpci $v_1, \dots, v_n$ so lastni vektorji za T pri isti lastni vrednosti λ // torej X je sestavljen iz lastnih vektorjev od T pri isti lastni vrednosti

recimo da imamo bazo za $\mathbb{R}^n$ iz lastnih vektorjev matrike T (torej da lahko matriko T diagonaliziramo), koliko neodvisnih lastnih vektorjev (matrik X) lahko sestavimo?

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & v_i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow TB_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_i v_i & 0 \end{bmatrix} = \lambda_i B\_ij$$

lastni vektor v_i damo v j-ti stolpec
vse matrike B_{ij} so linearno neodvisne in n^2 jih je
$\Rightarrow$ dobimo n^2 lastnih »vektorjev« za τ (kar pomeni da lahko to preslikavo diagonaliziramo (ker imamo bazo iz lastnih vektorjev))

(d) $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_{1,2} = \pm 1 \ \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

baza za $\mathbb{R}^{2\times 2}$ iz lastnih vektorjev $\tau = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

$$[\tau]_{B,B} = \begin{array}{c|ccccccc} & \tau(B_{11}) & \dots & \tau(B_{1n}) & \dots & \tau(B_{n1}) & \dots & \tau(B_{nn}) \\ \hline B_{11} & \lambda_1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ B_{1n} & & & \lambda_1 & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & \\ B_{n1} & & & & & \lambda_n & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ B_{nn} & & & & & & & \lambda_n \end{array}$$

6. Naj bo $C^\infty(U)$ vektorski prostor vseh funkcij $f\colon U \to \mathbb{R}$ na odprtem intervalu $U \subseteq \mathbb{R}$, ki imajo odvode poljubnih redov. Kaj so lastne vrednosti in kaj pripadajoče lastne funkcije operatorja odvajanja $\delta\colon C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, $\delta(f) = f'$?

   Rešitev: Za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ ima diferencialna enačba $f' = \lambda f$ splošno rešitev $f(x) = Ce^{\lambda x}$. Vsako realno (celo kompleksno) število λ je torej lastna vrednost s pripadajočo lastno funkcijo $e^{\lambda x}$.

$D(f) = f' = \lambda f$
$f(x) = e^{\lambda x}$ je lastni »vektor« C za $\lambda \in \mathbb{R}$

se omenimo na končni interval:

$D\colon C^\infty([0,2\pi]) \to C^\infty([0,2\pi])$ periodične

Fouriereva »baza«: $e_0 = 1,\quad e_n = \cos(nx)\quad n = 1, \dots \qquad f_n = \sin(nx)$

$D(e_0) = 0,\ D(e_n) = (\cos(nx))' = -\sin(nx)\,n = -nf_n, \qquad D(f_n) = (\sin(nx))' = \cos(nx)\,n = ne_n$

$D\colon \mathcal{L}(e_n, f_n) \to \mathcal{L}(e_n, f_n)$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cc} & \\ \end{array}\end{array}\begin{array}{c|cc} & D(e_n) & D(f_n) \\ \hline e_n & 0 & n \\ f_n & -n & 0 \end{array} \qquad \lambda^2 + n^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm in$$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \qquad v_{1,2} = 1e_n \pm if_n = \cos(nx) \pm isin(nx) = e^{\pm inx}$

D lahko diagonaliziramo z vektorji 1, $e^{\pm nix}$

7. *Primer linearne preslikave brez lastnih vektorjev:* Naj bo $\mathbb{R}[x]$ prostor polinomov v spremenljivki x poljubnih stopenj. Definiramo linearno preslikavo $\sigma\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ s predpisom $(\sigma(p))(x) = x\,p(x)$. Prepričaj se, da σ *nima* lastnih polinomov! (Dve podnalogi: Prepričaj se, da je σ res linearna. Poišči bazo za $\mathbb{R}[x]$.)

   Rešitev: Lastni polinomi za σ so neničelni polinomi p, za katere velja $(\sigma(p))(x) = \lambda\,p(x)$ oziroma $x\,p(x) = \lambda\,p(x)$, tj. nek večkratnik polinoma p naj bi bil polinom stopnje, ki je za 1 večja kot je stopnja polinoma p. Jasno je, da to ne velja za noben neničeln polinom in σ *nima* lastnih polinomov. (Ena možna baza za $\mathbb{R}[x]$ je števno neskončna množica $\mathcal{B}_{\mathbb{R}[x]} = \{1, x, x^2, \ldots\}$.)

8. *Še en primer linearne preslikave brez lastnih vektorjev:* Naj bo $C(\mathbb{R})$ prostor vseh zveznih funkcij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\eta\colon C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ pa linearna preslikava s predpisom

$$(\eta(f))(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Prepričaj se, da η *nima* lastnih funkcij.
(Ena podnaloga: Prepričaj se, da je η res linearna. Ne išči baze za $C(\mathbb{R})$.)
Rešitev: Lastna funkcija za η je neničelna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero velja

$$\lambda f(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Najprej opazimo, da je f odvedljiva, še več: $\lambda f'(x) = f(x)$. Primer $\lambda = 0$ torej odpade, saj je f neničelna, za $\lambda \neq 0$ pa je splošna rešitev te diferencialne enačbe $f(x) = Ce^{x/\lambda}$. Pri $x = 0$ mora veljati

$$\lambda f(0) = \lambda \cdot C = \int_0^0 f(t)\,dt = 0,$$

torej $C = 0$ in $f(x) = 0$, to pa je spet ničelna funkcija. Tudi η *nima* lastnih funkcij.

(Linearnost η je lahko preveriti. Obstoj baze za $C(\mathbb{R})$ je posledica aksioma izbire, zato te baze ni mogoče eksplicitno zapisati.)

9. Naj bo $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ matrika

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Prepričaj se, da je Q ortogonalna in izračunaj $\lambda_1 = \det(Q)$.

(b) Preveri, da je λ_1 lastna vrednost Q in poišči pripadajoč lastni vektor $\mathbf{v}_1$.

(c) Dokaži, da je $V_1 = \mathbf{v}_1^\perp$ (ortogonalni komplement vektorja $\mathbf{v}_1$ v $\mathbb{R}^3$) invarianten podprostor za Q, tj. $QV_1 \subseteq V_1$.

(d) Poišči ortogonalno bazo $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ za V_1. Izračunaj kot α med $\mathbf{v}_2$ in $Q\mathbf{v}_2$.

(e) Opiši geometrijski pomen Q (zasuk, zrcaljenje ali zrcalni zasuk).

Rešitev: (a) $Q^\mathsf{T}Q = I$ z direktnim računom, $\lambda_1 = \det(Q) = -1$, (b) $\lambda_1 = -1$ pripada lastni vektor $\mathbf{v}_1 = [0, -1, 1]^\mathsf{T}$, (d) $\mathbf{v}_2 = [1, 0, 0]^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_3 = [0, 1, 1]^\mathsf{T}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, (e) zrcalni zasuk z osjo $\mathbf{v}_1$ za kot α.

(a) $Q^TQ = I$

če lahko ψ v neki ONB predstavimo z ortogonalno matriko, je to izometrija

kakšne so možne determinante? $\det(Q) = ?$
$QQ^T = I \Rightarrow \det(QQ^T) = \det(Q)\det(Q^T) = \det(Q)^2 = 1 \Rightarrow \det(Q) = \pm 1$
$(\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3)$
če je det=1, potem so to rotacije, če pa -1 pa zrcaljenja ali zrcalni zasuk

v našem primeru: $\det(Q) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

kakšne so možne lastne vrednosti (za izometrije)?
$\|Qv\| = \|v\|$
$\|\lambda v\| = \|v\|$ (če je v lastni vektor)
$|\lambda| \cdot \|v\| = \|v\|$
$\Rightarrow |\lambda| = 1$ (tj. v kompleksni ravnini so λ na enotski krožnici)

// pri lihih številih lastnih vrednostih mora biti vsaj ena realna, kompleksne so v konjugiranih parih ($e^{i\phi}$ in $e^{-i\phi}$), realne lastne vrednosti so lahko samo 1 ali -1

vsaka ortogonalna matrika, ki ima determinanto 1, predstavlja rotacijo, os te rotacije pa je lastni vektor za lastno vrednost 1

v $\mathbb{R}^3$:
$\lambda_1 = 1$ ali -1
$\lambda_{2,3} = e^{\pm i\varphi}$
$\det Q = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda_1$
$\mathrm{tr}(Q) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = \lambda_1 + 2\cos\varphi$

v našem primeru: $\mathrm{tr}Q = -\frac{1}{3} = -1 + 2\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{3}$

(b) iščemo lastni vektor za $\lambda_1 = -1$, torej $N(Q + I)$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

preslikava prezrcali preko ravnine, ki je pravokotna na v_1 in rotira v osi v_1 za kot φ (Q je zrcalni zasuk)

(c) invariantnost $\Leftrightarrow$ če je $u \in U = v_1^{\perp}$, potem $Qu \in U$

$u \perp v_1 \Leftrightarrow \langle u, v_1\rangle = 0$

$\langle Qu, v_1\rangle = \langle u, Q^T v_1\rangle \qquad (\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T y = x^T(A^T y) = \langle x, A^T y\rangle)$

$Qv_1 = -v_1 \ /Q^T$

$v_1 = -Q^T v_1$

$Q^T v_1 = -v_1$

$\langle Qu, v_1\rangle = \langle u, Q^T v_1\rangle = \langle u, -v_1\rangle = -\langle u, v_1\rangle = 0 \Rightarrow Qv \perp v_1$

preverimo, če se rotira za kot φ:

izberemo 2 vektorja, ki sta pravokotna na v_1: $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Qu_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\langle Qu_1, u_1\rangle = \frac{1}{3} = \|Qu_1\| \cdot \|u_1\| \cdot \cos\varphi = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{3}$

lahko bi enako preverili še za u_2

baza za $\mathbb{R}^3 = \{v_1, u_1, u_2\}$

$$Q = \begin{bmatrix} \\ v_1 & u_1 & u_2 \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ v_1 & u_1 & u_2 \\ \\ \end{bmatrix}^{-1}$$

10. Naj bo $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki najprej rotira za 90° okoli osi x, nato pa zrcali čez (x,z)-ravnino (t.j. ravnino $y = 0$).
    (a) Določi matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.
    (b) Utemelji, da je ϕ izometrija.
    (c) Katera izometrija je ϕ?
    (d) Poišči lastne vrednosti izometrije ϕ.
    (e) Ali je ϕ enaka preslikavi, ki najprej zrcali čez (x,z)-ravnino, nato pa rotira za 90° okoli osi x?

Rešitev: (a) $A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
(b) Dve utemeljitvi: ϕ je izometrija, saj je kompozitum dveh izometrij (rotacije in zrcaljenja) *ali* ϕ je izometrija, saj ji v ortonormirani bazi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ pripada ortogonalna matrika A_ϕ.
(c) ϕ je zrcaljenje preko podprostora (ravnine) z normalnim vektorjem $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_1 = -1$).
(d) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1$.
(e) Ne.

$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ (predstavljena z matriko C)
$\varphi_1 =$ rotacija okoli x osi za 90° (predstavljena z matriko A)
$\varphi_2 =$ zrcaljenje preko $y = 0$ (predstavljena z matriko B)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. možnost: $C = BA$

2.možnost: // za vsak bazni vektor pogledamo kam se slika in direkt za pišemo matriko

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)
1. argument: φ je kompozitum izometrij
2. argument: φ se izraža z ortogonalno metriko C
(če se preslikava v neki ONB izraža z ortogonalno matriko, potem je izometrija)

(c) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 = \lambda_1$

$\mathrm{tr}(C) = 1 = -1 + 2\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2,3} = e^{\pm 0} = 1$

$$N(C+I)\colon \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(e) $\varphi \neq \varphi_1 \circ \varphi_2 \qquad A\,B \neq B\,A$

10. Naj bo $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, ki najprej rotira za 90° okoli osi x, nato pa zrcali čez (x,z)-ravnino (t.j. ravnino $y = 0$).

(a) Določi matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.

(b) Utemelji, da je ϕ izometrija.

(c) Katera izometrija je ϕ? (zrcaljenje, zasuk, zrcalni zasuk)

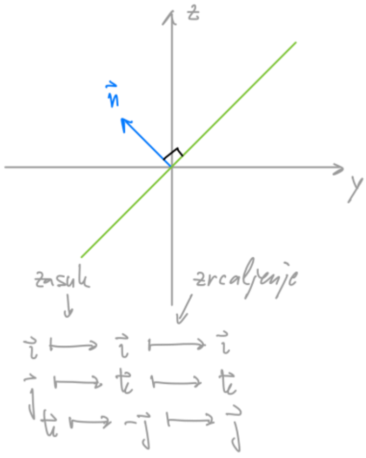
(d) Poišči lastne vrednosti izometrije ϕ.

(e) Ali je ϕ enaka preslikavi, ki najprej zrcali čez (x,z)-ravnino, nato pa rotira za 90° okoli osi x?

(a) $\phi(\vec{i}) = \vec{i}$

$\phi(\vec{j}) = \vec{k}$ $\qquad A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\phi(\vec{k}) = \vec{j}$



(b) ϕ je izometrija, če

$\|\phi(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ za vse $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

- Kompozitum izometrij je izometrija. Tak je tudi ϕ – kompozitum dveh izometrij, je ϕ izometrija.

ali

- S predavanj: Če $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glede na ortonormirano bazo pripada ortogonalna matrika, je ϕ izometrija.

$\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ je ortonormirana, A_ϕ je ortogonalna $(A_\phi^T A_\phi = I)$, zato je ϕ izometrija.

(c, d) Poiščimo l. vrednosti ϕ … A_ϕ:

$$\det(A_\phi - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 1.$

Torej je ϕ zrcaljenje.

Preko katere ravnine zrcali? Tiste, ki ima za normalni vektor lastni vektor za $\lambda_1 = -1$: to je ravno $\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

11. Linearna preslikava $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ poljuben vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ najprej zrcali preko ravnine $x - z = 0$, nato pa še preko ravnine $z = 0$.

    (a) Utemelji, da je ψ izometrija.

    (b) Poišči lastne vrednosti izometrije ψ ter tiste lastne vektorje ψ, ki pripadajo realnim lastnim vrednostim.

    (c) Katera izometrija je ψ?

Rešitev: (a) Ker je ψ kompozitum dveh zrcaljenj (ki sta izometriji), je tudi ψ izometrija.

(b) Narišemo skico in vidimo, da ψ slika vektorje standardne baze $\mathbb{R}^3$ tako:

$$\psi(\mathbf{i}) = -\mathbf{k}\ ,\ \ \psi(\mathbf{j}) = \mathbf{j}\ ,\ \ \psi(\mathbf{k}) = \mathbf{i}.$$

Matrika, ki pripada ψ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$ je torej

$$A_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom te matrike je $\det(A_\psi - \lambda I) = (1-\lambda)(1+\lambda^2)$. Lastne vrednosti so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$ in $\lambda_3 = i$. Pri edini realni lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ je lastni vektor kar $\mathbf{j}$ (od prej vemo $\psi(\mathbf{j}) = \mathbf{j}$).

(c) ψ je zasuk z osjo $\mathbf{j}$ za kot $\pi/2$. (Kot med vektorjema $\mathbf{k}$ in $\psi(\mathbf{k}) = \mathbf{i}$—pomembno je, da vzamemo vektor pravokoten na os vrtenja. Lahko pa kot določimo iz polarnega zapisa $\lambda_3 = i = e^{i\pi/2}$. Pri obeh načinih smo površni in zanemarjamo orientacijo.)

11. Linearna preslikava $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ poljuben vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ najprej zrcali preko ravnine $x - z = 0$, nato pa še preko ravnine $z = 0$.

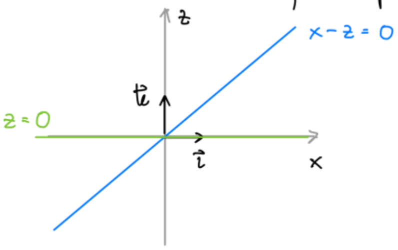
(a) Utemelji, da je ψ izometrija.

(b) Poišči lastne vrednosti izometrije ψ ter tiste lastne vektorje ψ, ki pripadajo realnim lastnim vrednostim.

(c) Katera izometrija je ψ?

(a) ψ je kompozitum dveh zrcaljenj (ki sta izometriji!) in je zato izometrija.

(b) Poiščimo mat., ki pripada ψ v std. bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ za $\mathbb{R}^3$:



zrcaljenje preko $x - z = 0$ $\downarrow$ zrcaljenje preko $z = 0$ $\swarrow$

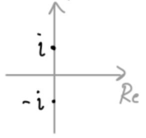
$$\vec{i} \longmapsto \vec{k} \longmapsto -\vec{k}$$
$$\vec{j} \longmapsto \vec{j} \longmapsto \vec{j}$$
$$\vec{k} \longmapsto \vec{i} \longmapsto \vec{i}$$

$$A_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti ψ so l. vred. A_ψ:

$$\det(A_\psi - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \\ -1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|c} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1-\lambda \end{array}\right| =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0 \quad \dots \quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = \pm i = e^{\pm \frac{\pi}{2} i}$$



Poiščimo še l. vekt. za l. vred. $\lambda_1 = 1$:

$$A_\psi - \lambda_1 I = A_\psi - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x_1 = 0$
$x_3 = 0$
x_2 poljuben

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{j}.$$

(c) ψ je zasuk z osjo vrtenja $\vec{v}_1 = \vec{j}$ (last. vektor za l. vred. 1).

Kot vrtenja je kot med $\vec{i}$ in $\psi(\vec{i}) = -\vec{k}$, tj. $270° = \frac{3\pi}{2}$.

$\uparrow$ vektor pravokoten na os vrtenja.

oz. $-90° = -\frac{\pi}{2}$.

12. Dani so vektorji $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$;

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

Linearna preslikava $\phi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ slika te tri vektorje tako:

$$\phi(\mathbf{u})=\mathbf{w},\ \phi(\mathbf{v})=-\mathbf{v},\ \phi(\mathbf{w})=-\mathbf{u}.$$

(a) Izberi bazo za $\mathbb{R}^3$ in zapiši matriko, ki pripada ϕ v izbrani bazi.

(b) Koliko je $\dim(\operatorname{im}\phi)$?

(c) Natančno utemelji, da je ϕ linearna izometrija (ali ekvivalentno: ortogonalna transformacija).

(d) Poišči realne lastne vrednosti preslikave ϕ in pripadajoče lastne vektorje.

(e) Klasificiraj linearno izometrijo ϕ.

Rešitev:

(a) Izberimo kar bazo $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$. V tej bazi pripada ϕ matrika

$$A=A_\phi=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

(b) $\dim(\operatorname{im}\phi)=\operatorname{rang}A_\phi=3$.

(c) Baza $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ je ortogonalna, ni pa ortonormirana. V ortonormirani bazi

$$\left\{\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|},\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|},\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

pripada ϕ ista matrika, tj. A. Ker velja $A^\mathsf{T}A=I$, je A ortogonalna, torej je ϕ linearna izometrija.

(d) Iz $\phi(\mathbf{v})=-\mathbf{v}$ sledi, da je $\mathbf{v}$ lastni vektor ϕ za lastno vrednost $\lambda_1=-1$. Vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{w}$ iz ortogonalnega komplementa $\mathbf{v}$ (ki je invarinten podprostor za ϕ) pa jasno nista lastna vektorja. Torej je $\lambda_1=-1$ edina realna lastna vrednost.

(e) Ker je -1 edina realna lastna vrednost, je ϕ zrcalni zasuk. Os vrtenja je $\mathbf{v}$, kot zasuka pa $\pi/2$ (kot med $\mathbf{u}$ in $\mathbf{w}$).

1. Skiciraj/opiši nekaj (smiselno izbranih) nivojnic in poišči parcialne odvode prvega reda za spodnje funkcije več spremenljivk.

(a) $f(x,y) = x^2 - y + 1$,

(b) $g(x,y) = 3 - xy$,

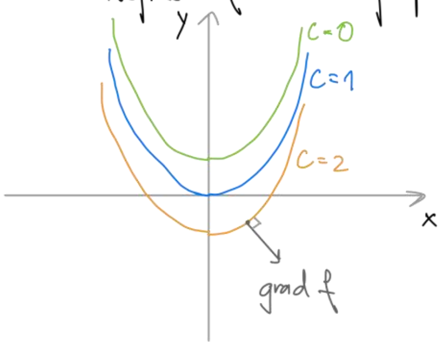
(c) $h(x,y,z) = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$,

(d) $k(u,v) = \dfrac{\sin(u^2+v^2)}{u^2+v^2}$.

Rešitev: (le parcialni odvodi 1. reda) (a) $f_x = 2x$, $f_y = -1$,
(b) $g_x = -y$, $g_y = -x$,
(c) $h_x = 2x$, $h_y = 2(y+1)$, $h_z = 2(z-1)$,
(d) $k_u = \frac{2u}{(u^2+v^2)^2}\Big((u^2+v^2)\cos(u^2+v^2) - \sin(u^2+v^2)\Big)$,
$k_v = \frac{2v}{(u^2+v^2)^2}\Big((u^2+v^2)\cos(u^2+v^2) - \sin(u^2+v^2)\Big)$.

(a) Nivojnice f so rešitve enačb $f(x,y) = C \leftarrow$ konst.

$x^2 - y + 1 = C$ .... $y = x^2 + 1 - C$ nivojnice f so torej parabole



$C = 1$ ... $y = x^2$
$C = 0$ ... $y = x^2 + 1$
$C = 2$ ... $y = x^2 - 1$

oznaki za parc. odvod f po spr. x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x - 0 + 0 = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 - 1 + 0 = -1$$

$$\text{grad } f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) $g(x,y) = 3 - xy$ ... nivojnice

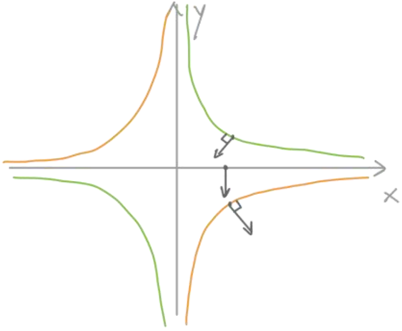
$g(x,y) = C$ ... $3 - xy = C$
... $xy = -C + 3$ ... $y = \frac{-C+3}{x}$

↑ to so hiperbole

za $C = 2$: $y = \frac{1}{x}$

za $C = 4$: $y = -\frac{1}{x}$

za $C = 3$: $y = 0$ (oz. $3 - xy = 3$, $xy = 0$)



$$\frac{\partial g}{\partial x} = g_x = -y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = g_y = -x$$

$$\text{grad}\, g = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

(c) $h(x,y,z) = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2(y+1)\cdot 1 = 2y+2, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = 2(z-1), \quad \text{grad}\, h = \begin{bmatrix} 2x \\ 2(y+1) \\ 2(z-1) \end{bmatrix}$$

Kaj so nivojnice h? $x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = C$, nivojnice so sfere s središčem v $(0,-1,1)$ v $\mathbb{R}^3$.

2. Naj bo $u(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$.

   (a) Poišči enačbo tangentne ravnine na graf funkcije u skozi točko $T(1,0,u(1,0))$.

   (b) Poišči Taylorjev polinom 1. reda funkcije u okrog točke $(1,0)$.

Rešitev: (a) Tangentna ravnina ima enačbo $3x - 3y - z = -2$.
(b) $u(x,y) = 5 + 3(x-1) - 3y + \cdots$

(a) $u_x = 3x^2 + 3y,\ \ u_y = 3y^2 - 3x$
$u_x(1{,}0) = 3 \quad u_y(1{,}0) = -3$

$$\vec{t}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x(1{,}0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{t}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y(1{,}0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

parametrični zapis tangentne ravnine: $\vec{r}(u,v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

linearna enačba tangentne ravnine: $ax + by + cz = d \qquad \vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad d = \vec{n}r_0$

$$\vec{n} = \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad -3x + 3y + z = 2$$

2. način: $z = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$
$F(x,y,z) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy - z$
$F(x,y,z) = 0$ implicitna ploskev
recimo, da imamo krivuljo $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ na ploskvi $F(x,y,z) = 0 \Rightarrow F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0$

$$F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_z \cdot \dot{z} = 0 \qquad \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \qquad \mathrm{grad}F = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{n} = \mathrm{grad}F\ (T) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. način je (b)
razvoj u okoli (x_0, y_0): $u(x_0 + k, y_0 + k) \doteq u(x_0, y_0) + hu_x(x_0, y_0) + ku_y(x_0, y_0)$
$u(x,y) \doteq u(x_0, y_0) + (x - x_0)u_x(x_0, y_0) + (y - y_0)u_y(x_0, y_0)$
$u(x,y) = 5 + (x-1)\ 3 + (y-0)(-3) = z \Rightarrow 3x - 3y - z = -2$

2. Naj bo $u(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$. $= u(y,x)$

(a) Poišči enačbo tangentne ravnine na graf funkcije u skozi točko $T(1,0,u(1,0))$.

(b) Poišči Taylorjev polinom 1. reda funkcije u okrog točke $(1,0)$.

(b) Taylorjev polinom 1. reda funkcije u okrog (x_0,y_0) je:

$$u(x,y) \doteq u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

V našem primeru $(x_0,y_0) = (1,0)$. Poiščimo u_x in u_y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y,$$ Poleg tega je $u(1,0) = 5$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = 3$$

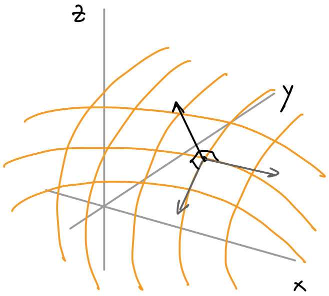
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = -3$$

Taylorjev polinom za u okrog $(1,0)$ je torej:

$$u(1,0) + \frac{\partial u}{\partial x}(1,0)\cdot(x-1) + \frac{\partial u}{\partial y}(1,0)\cdot(y-0) = 5 + 3(x-1) - 3y.$$

(a)



$\underline{z = u(x,y)}$ ..... $\underbrace{u(x,y) - z}_{v(x,y,z)} = 0$

Normalni vektor na graf u skozi točko $(1,0,u(1,0)) = (1,0,5)$ je točno gradient v v tej točki.

$$\text{grad } v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \\ -1 \end{bmatrix} \ldots (\text{grad } v)(1,0,5) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Enačba tangentne ravnine je torej: $3x - 3y - z = -2$.

(Če primerjamo z (b) delom: $z = 5 + 3(x-1) - 3y$

oz. $3x - 3y - z = -2$.)

3. Poišči enačbo tangentne ravnine na ploskev z enačbo $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ skozi točko $T(1,1,1)$.

   Rešitev: Tangentna ravnina ima enačbo $x + y - z = 1$.

4. Z uporabo linearne aproksimacije (Taylorjevega polinoma 1. reda okrog ustrezne točke) določi približno vrednost izrazov:

   (a) $1.02\log(0.98)$, (b) $\sin(0.1)e^{-0.2}$.

Rešitev: (a) $1.02\log(0.98) = (1+0.02)\log(1-0.02) \doteq 1\cdot\log(1) + \log(1)\cdot 0.02 + \frac{1}{1}\cdot(-0.02) = -0.02$.
(b) $\sin(0.1)e^{-0.2} = \sin(0+0.1)e^{0-0.2} \doteq \sin(0)e^{0} + \cos(0)e^{0}\cdot 0.1 + \sin(0)e^{0}\cdot(-0.2) = 0.1$.

(a) $f(x,y) = x\cdot\log y$ $\quad f(1.02, 0.98) = ?$
$(x_0,y_0) = (1,1)$ $\quad (h,k) = (0.02, -0.02)$
$f_x = \log y$ $\quad f_y = \frac{x}{y}$
$f(1.02, 0.98) = 0 + 0.02\cdot 0 + (-0.02)\cdot\frac{1}{1} = -0.02$

(b) $f(x,y) = \sin x\ e^{-y}$
$(x_0,y_0) = (0,0)$ $\quad (h,k) = (0.1, 0.2)$
$f_x = \cos x\ e^{-y}$ $\quad f_y = -\sin x\ e^{-y}$
$f(0.1, 0.2) = \sin 0.1\ e^{-0.2} = 0 + 0.1\cdot 1 + 0.2\cdot 0 = 0.1$

(a) $f(x,y) = x\log y \quad \dots \quad f(1.02, 0.98)$

$$f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$f_x = \log y$ $\quad$ Izberemo $x_0 = 1,\ y_0 = 1$

$f_y = \frac{x}{y}$

$$\underline{f(1.02, 0.98)} \doteq f(1,1) + f_x(1,1)\cdot(1.02-1) + f_y(1,1)\cdot(0.98-1) =$$
$$= 1\cdot\log 1 + \log(1)\cdot 0.02 + \frac{1}{1}\cdot(-0{,}02) = -0.02$$

(b) $f(x,y) = \sin x\cdot e^{y}$ $\quad x_0 = 0,\ y_0 = 0$, torej

$f_x = \cos x\cdot e^{y}$ $\quad f(0.1, -0.2) \doteq f(0,0) + f_x(0,0)\cdot 0.1 + f_y(0,0)\cdot(-0.2)$

$f_y = \sin x\cdot e^{y}$ $\quad \underline{\sin(0.1)\,e^{-0.2}} = 0 + 1\cdot 0.1 + 0\cdot(-0.2) = 0.1.$

0.08174...

5. Naj bo $R > 0$, $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa vektorska funkcija treh spremenljivk s predpisom

$$\mathbf{F}(r,\phi,\theta) = \mathbf{F}\left([r,\phi,\theta]^\mathsf{T}\right) = \begin{bmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ r\sin\theta \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči Jacobijevo matriko funkcije $\mathbf{F}$; $J\mathbf{F}$.

   (b) Poišči determinanto zgornje Jacobijeve matrike; $\det(J\mathbf{F})$.

Rešitev: (a) $J\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & -(R + r\cos\theta)\sin\phi & -r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & (R + r\cos\theta)\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{bmatrix}$.
(b) $\det(J\mathbf{F}) = r(R + r\cos\theta)$.

1. Izračunaj spodnje dvojne integrale.

   (a) $\iint_D (5-x-y)\,dxdy$, kjer je $D=[0,1]\times[0,1]$,

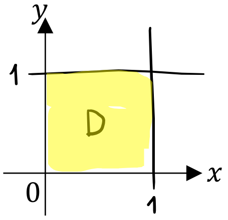
   (b) $\iint_D \frac{y}{x+1}\,dxdy$, kjer je D določeno z $x\geq 0$, $y\geq x$ in $x^2+y^2\leq 2$,

   (c) $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dxdy$, kjer je D trikotnik določen z $0\leq y\leq x$ in $x\leq\pi$,

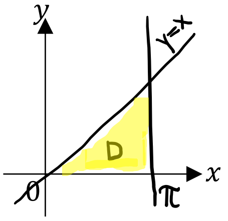
   (d) $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ in s pomočjo tega izračunaj $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

   Rešitev: (a) 4, (b) $\frac{1}{2}$, (c) 2, (d) Uvedemo polarne koordinate, dobimo π in $\sqrt{\pi}$.

(a) $\iint_D(5-x-y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{1}(5-x-y)\,dx\right)dy =$
$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1}(5-x-y)\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{1}\left(5y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{1}\,dx =$
$\int_{x=0}^{1}\left(5-x-\frac{1}{2}\right)\,dx = \left(\frac{9}{2}x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{9}{2}-\frac{1}{2} = 4$

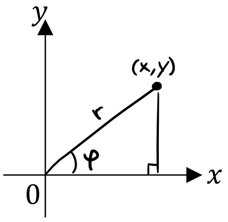


(c) $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy = \int_{y=0}^{\pi}\left(\int_{x=y}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right)dy = \int_{x=0}^{\pi}\left(\int_{y=0}^{x}\frac{\sin x}{x}dy\right)dy =$
$\int_{x=0}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\cdot y\,\Big|_{y=0}^{x}\,dx = \int_{x=0}^{\pi}\frac{\sin x}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,dx = -\cos x\,\Big|_{x=0}^{\pi} = -(-1)-(-1) = 2$

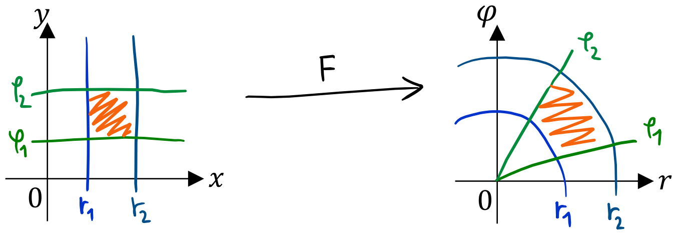


vpeljava nove spremenljivke pri enojnih integralih:
$\int f(x)\,dx$
$u = g(x)$
$du = g'(x)dx$

(d) $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}dx\,dy =$
// $x^2+y^2=r^2$ vrednost te funkcije je za vse točke, ki ležijo na neki razdalji r enaka, v takih primerih so koristne polarne koordinate
polarne koordinate: $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$
treba je izračunat determinanto Jacobijeve matrike preslikave iz polarnih v kartezične koordinate: $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\left(\begin{bmatrix}r\\ \varphi\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{bmatrix}\right)$



$JF = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{bmatrix}$
$|JF| = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$

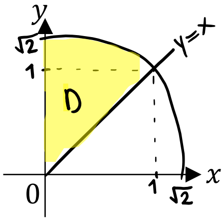


$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-r}{2}}\,|JF|\,dr\,d\varphi = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-r}{2}}\,r\,dr\,d\varphi = \int_{r=0}^{\infty}\left(\int_{0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,d\varphi\right)dr = 2\pi\int_{r=0}^{\infty} r\,e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr =$$
$u = \frac{r^2}{2}$, $du = r\,dr$ meje: $r=0\Rightarrow u=0$, $r=\infty\Rightarrow u=\infty$
$= 2\pi\int_{(u=0)}^{\infty} e^{-u}\,du = 2\pi(-e^{-u})\,\Big|_{(u=0)}^{\infty} = 2\pi\left(0-(-1)\right) = 2\pi$

$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dx\,dy = \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy \right) dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy \right) dx =$

$\left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy \right) \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx \right) = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx \right)^2 = 2\pi \Rightarrow \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \sqrt{2\pi}$

(b) $\iint_D \frac{y}{x+1}\ dx\,dy$

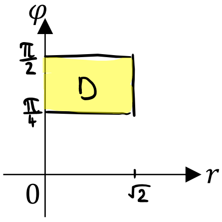


1. način: $\int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=0}^{y} \frac{y}{x+1} dx \right) dy + \int_{y=1}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x=0}^{\sqrt{2-y^2}} \frac{y}{x+1} dx \right) dy$

2. način: $\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{y}{x+1} dy\ \ dx$

3. način: polarne koordinate: $D = \left\{ (r,\varphi) \colon 0 \leq r \leq \sqrt{2},\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

$$\int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin\varphi}{r\cos\varphi + 1}\ r\,d\varphi\ \ dr$$



najbolj enostaven je 2. način:

$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{y}{x+1} dy\ \ dx = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{x+1} \left(\frac{y^2}{2}\ \Big|_{y=x}^{\sqrt{2-x^2}}\right) dx = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2} (2 - x^2 - x^2) dx =$

$\int_{x=0}^{1} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} (\cancel{2} - \cancel{2}x^2) dx = \int_{x=0}^{1} \frac{(1-x)\cancel{(1+x)}}{\cancel{x+1}} dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right)\ \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

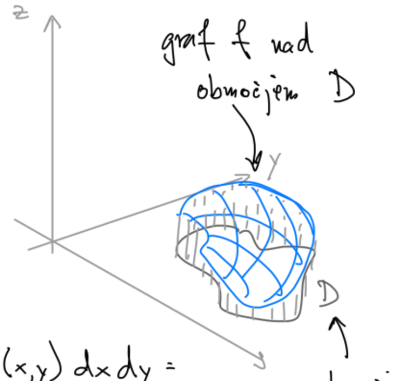
1. Izračunaj spodnje dvojne integrale.

(a) $\iint_D (5-x-y)\,dxdy$, kjer je $D=[0,1]\times[0,1]$,

(b) $\iint_D \frac{y}{x+1}\,dxdy$, kjer je D določeno z $x\geq 0$, $y\geq x$ in $x^2+y^2\leq 2$,

(c) $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dxdy$, kjer je D trikotnik določen z $0\leq y\leq x$ in $x\leq\pi$,

(d) $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ in s pomočjo tega izračunaj $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

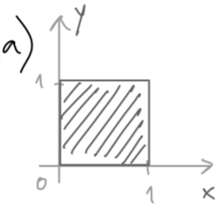


območje v (x,y)-ravnini

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$=$ "prostornina med (x,y)-ravnino in grafom f"

(a)



$$\iint_D (5-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^1 (5-x-y)\,dx\right)dy =$$

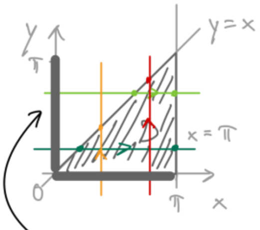
$$= \int_0^1 dy\int_0^1 (5-x-y)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(5x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1\left(\frac{9}{2}-y\right)dy = \left(\frac{9}{2}y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \underline{4}.$$

$$\left(= \int_0^1 dx\int_0^1 (5-x-y)\,dy = \ldots = 4\right)$$

(c) $$\iint_D \frac{\sin x}{x}\,dx\,dy =$$



projekcija D na y-os

$$\int\frac{\sin x}{x}\,dx = Si(x)+C$$

↑

integralski sinus

$$= \int_0^\pi dy\int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx =$$

= ne gre ... dobimo neelementarne integrale ..

poskusimo v obratnem vrstnem redu:

$$= \int_0^\pi dx\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy = \int_0^\pi\left(\frac{\sin x}{x}\cdot y\Bigg|_{y=0}^{y=x}\right)dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{\cancel{x}}\cancel{x}\,dx = (-\cos x)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} =$$

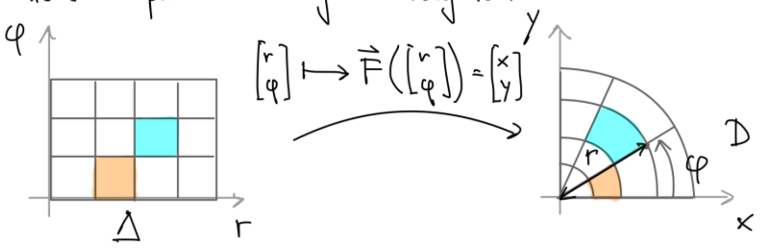
$$= -\cos\pi-(-\cos 0) = -(-1)-(-1) = \underline{2}$$

(d) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \Bigl(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx}_{\sqrt{\pi}}\Bigr)^2$$

Tega bomo izračunali z uvedbo "nove" spr. v dvojni integral:



$$\begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \longmapsto \vec{F}\left(\begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta} f\bigl(\vec{F}(r,\varphi)\bigr)\cdot \det\bigl(J\vec{F}(r,\varphi)\bigr)\,dr\,d\varphi$$

V našem primeru bo $\vec{F}(r,\varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (polarne koordinate)

s predavanj $\det J\vec{F}(r,\varphi) = r \left(= \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} \right)$

$$\underline{\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy} \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}}_{\overset{\shortparallel}{e^{-r^2}}}\cdot r\,d\varphi =$$

uvedemo "polarne koordinate"

$$= \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot r\,d\varphi = \underset{\substack{\uparrow \\ \int_0^{2\pi} d\varphi}}{\underline{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot \underline{r\,dr} \underset{\uparrow}{=}$$

$t = -r^2 \dots dt = -2r\,dr$

oz. $\underline{2r\,dr} = -dt$

$$= -\pi \int_0^{-\infty} e^t\,dt = -\pi\, e^t \Big|_{t=0}^{t=-\infty} = -\pi\cdot 0 - (-\pi\cdot 1) = \underline{\pi}.$$

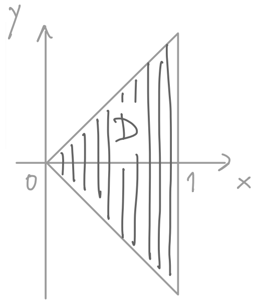
Torej je $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

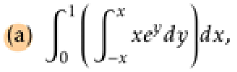
2. Skiciraj integracijsko območje in izračunaj dvakratna integrala.

(a) $\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} x e^y \, dy \right) dx$,

(b) $\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{y}{x+1} dx \right) dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-y^2}} \frac{y}{x+1} dx \right) dy$.

Rešitev: (a) $\frac{2}{e}$, (b) $\frac{1}{2}$.





(a) $\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} x e^y \, dy \right) dx$,

$$\int_0^1 dx \int_{-x}^{x} x e^y dy = \int_0^1 \left(x e^y \Big|_{y=-x}^{y=x} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x \left(e^x - e^{-x} \right) dx =$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$= x \left(e^x + e^{-x} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(e^x + e^{-x} \right) dx =$$

↑

po delih:

$u = x$ .... $du = dx$

$dv = (e^x - e^{-x})dx$ .... $v = e^x + e^{-x}$

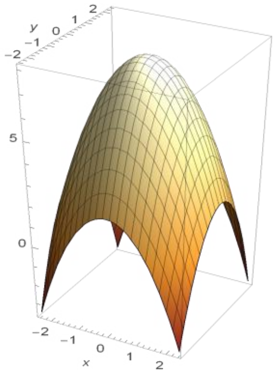
$$= e + \frac{1}{e} - \left(e^x - e^{-x} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \cancel{e} + \frac{1}{e} - \left(\cancel{e} - \frac{1}{e} \right) = \underline{\frac{2}{e}}.$$

Poskusimo zamenjati vrstni red integracije:

$$\iint_D x e^y \, dx dy = \underbrace{\int_0^1 dy \int_y^1 x e^y \, dx}_{\text{le integral po delu D nad x-osjo}} + \underbrace{\int_{-1}^0 dy \int_{-y}^1 x e^y \, dx}_{\text{integral po delu D pod x-osjo}}$$

3. Izračunaj prostornino telesa, ki je omejeno s paraboloidom $z = 8 - x^2 - y^2$ in ravnino $z = -1$.
Rešitev: $V = \frac{81\pi}{2}$.

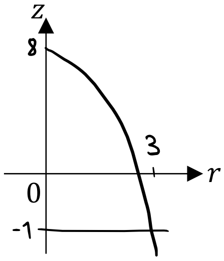
$r^2 = x^2 + y^2 \qquad z = 8 - r^2$



// dolžina intervala: $d([a,b]) = \int_a^b a\, dx = b - a$

// ploščina območja: $pl(D) = \iint_D 1\, dx\, dy$

// volumen območja: $V(D) = \iiint_D 1\, dx\, dy\, dz$



območje opišemo z cilindričnimi koordinatami:
presečišče: $-1 = 8 - r^2 \Rightarrow r = 3$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$

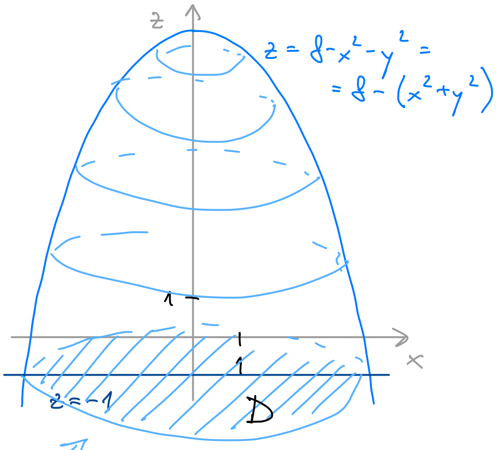
$$F\colon \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_D 1\, dx\, dy\, dz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{3} \int_{z=-1}^{8-r^2} r\, dz\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_{r=0}^{3} \left(r\, z\, |_{z=-1}^{8-r^2}\right) dr = 2\pi \int_{r=0}^{3} (8r - r^3 + r)\, dr$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{3} (9r - r^3)\, dr = 2\pi \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right) = 2\pi \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = \frac{81\pi}{2}$$

3. Izračunaj prostornino telesa, ki je omejeno s paraboloidom $z = 8 - x^2 - y^2$ in ravnino $z = -1$.

Kaj je projekcija tega telesa na (x,y)-ravnino ?



$8-x^2-y^2=-1$ oz. $x^2+y^2=9=3^2$

↑ to je krožnica s polmerom 3,

Proj. našega telesa je torej krog s polmerom 3.

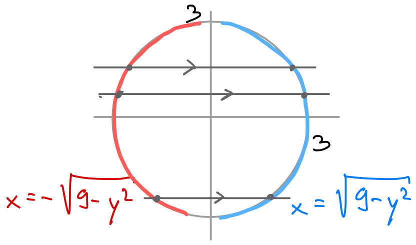
To bo hkrati naše int. območje D.

$$V=\iint_D \Big(\underbrace{(8-x^2-y^2)-(-1)}_{9-x^2-y^2}\Big)\,dx\,dy \overset{\uparrow}{=} \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} \big(\underbrace{9-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}_{9-r^2}\big)\cdot \overset{\det J\vec{F}}{\overset{\downarrow}{r}}\, d\varphi =$$

uvedemo polarne koordinate, saj je D krog.

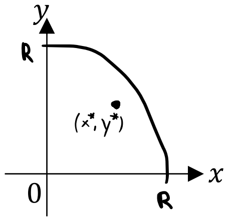
$$=2\pi\int_0^3 (9r - r^3)\,dr = 2\pi\left(\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=3} = 2\pi\left(\frac{9\cdot 3^2}{2}-\frac{3^4}{4}\right)=$$

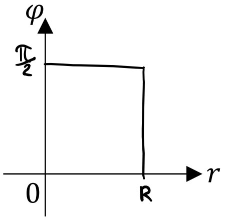
$$=\frac{81\pi}{2}.$$



$$V=\int_{-3}^{3} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} (9-x^2-y^2)\,dx = \dots$$

1. Poišči koordinate masnega središča četrtine kroga; $x^2+y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, če je gostota v vsaki točki enaka oddaljenosti od izhodišča, tj. $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
   Namig: masa lika $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je dana z $m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$, koordinati masnega središča pa sta $x^* = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy$ in $y^* = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy$. Uvedi polarne koordinate.
   Rešitev: $x^* = y^* = \frac{3R}{2\pi}$.





prehod na polarne koordinate:

$\rho(x,y) = r$

$$m(D) = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{R} r^2 dr\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{r=0}^{R} =$$
$$= \frac{\pi R^3}{6}$$

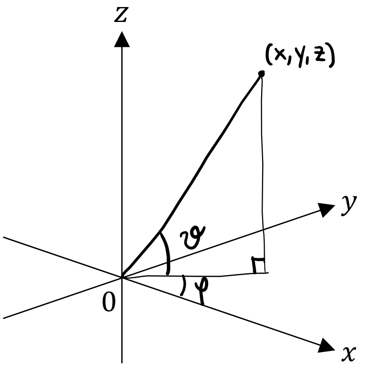
$$x^* = \frac{1}{m}\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{m}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{R} r^3\cos\varphi\,dr\,d\varphi =$$
$$\frac{1}{m}\left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_{r=0}^{R} r^3\cos\varphi\,dr\right) = \frac{1}{m}(\sin\varphi)\Big|_{(\varphi=0)}^{\pi}\ \left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{R} = \frac{R^4}{4m} = \frac{R^4}{4}\cdot\frac{6}{\pi R^3} = \frac{3R}{2\pi}$$

$$// f(x,y) = g(x)h(y) \Rightarrow \int_{x\in A}\int_{x\in B} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_{x\in A} g(x)\,dx\right)\left(\int_{y\in B} h(y)\,dy\right)$$

$$y^* = \frac{1}{m}\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{m}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{R} r^3\sin\varphi\,dr\,d\varphi = \cdots = \frac{3R}{2\pi}$$

// oz. takoj vidimo da sta zaradi simetrije x^* in y^* enaka

KROGELNE KOORDINATE

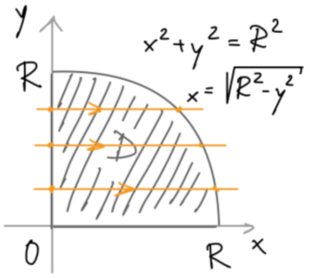


$x = r\cos\vartheta\cos\varphi$
$y = r\cos\vartheta\sin\varphi$
$z = r\sin\vartheta$

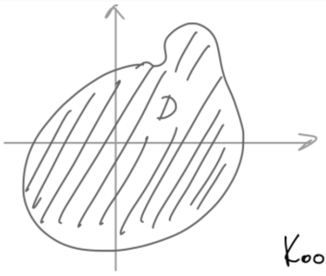
$$x^2+y^2+z^2 = r^2\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\vartheta = r^2$$

$$JF = \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= r^2\begin{vmatrix} {}^{+}\cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & -\cos\vartheta\sin\varphi \\ {}^{-}\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \\ {}^{+}\boldsymbol{\sin\vartheta} & {}^{-}\boldsymbol{\cos\vartheta} & 0 \end{vmatrix}$$
$$= r^2\left(\sin\vartheta\begin{vmatrix} -\boldsymbol{\sin\vartheta}\cos\varphi & -\boldsymbol{\cos\vartheta}\sin\varphi \\ -\boldsymbol{\sin\vartheta}\sin\varphi & \boldsymbol{\cos\vartheta}\cos\varphi \end{vmatrix}\right.$$
$$\left.-\cos\vartheta\begin{vmatrix} \boldsymbol{\cos\vartheta}\cos\varphi & -\boldsymbol{\cos\vartheta}\sin\varphi \\ \boldsymbol{\cos\vartheta}\sin\varphi & \boldsymbol{\cos\vartheta}\cos\varphi \end{vmatrix}\right)$$
$$= r^2\left(-\sin^2\vartheta\cos\vartheta\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} - \cos^3\vartheta\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}\right)$$
$$= r^2(-\sin^2\vartheta\cos\vartheta\cdot 1 - \cos^3\vartheta\cdot 1) = -r^2\cos\vartheta\,(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)$$
$$= -r^2\cos\vartheta\cdot 1$$

$$\text{abs}(JF) = |JF| = r^2\cos\vartheta$$



1. Poišči koordinate masnega središča četrtine kroga; $x^2+y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, če je gostota v vsaki točki enaka oddaljenosti od izhodišča, tj. $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
Namig: masa lika $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je dana z $m=\iint_D \rho(x,y)dxdy$, koordinati masnega središča pa sta $x^* = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy$ in $y^* = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy$. Uvedi polarne koordinate.



$$m = \iint_D \varrho(x,y)\,dx\,dy$$

↑ to je masa območja D s površinsko gostoto $\varrho(x,y)$

Koordinati masnega središča sta:

$$x^* = \frac{1}{m}\iint_D x\,\varrho(x,y)\,dx\,dy \quad , \quad y^* = \frac{1}{m}\iint_D y\,\varrho(x,y)\,dx\,dy .$$

Poskusimo (naivno) v kartezičnih koordinatah:

$$m = \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx \right) dy \quad \ldots\ldots$$

Kaj pa, če uvemo polarne koordinate? $\quad x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \qquad \det(J\vec{F}) = r$

$$m = \iint_D \varrho(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R \underbrace{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}}_{r} \cdot r\, dr\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R r^2\, dr\right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(\frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=R}\right)}_{\frac{R^3}{3}} d\varphi = \frac{R^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^3}{6} .$$

$$x^* = \frac{1}{m}\iint_D x\,\varrho(x,y)\,dx\,dy = \frac{6}{\pi R^3}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R r\cos\varphi \cdot r^2\, dr\right) d\varphi =$$

$$= \frac{6}{\pi R^3}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \underbrace{\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{r=R}}_{\frac{R^4}{4}} d\varphi = \frac{\cancel{6}3}{\pi \cancel{R^3}} \cdot \frac{R^{\cancel{4}}}{\cancel{4}2} \cdot \underbrace{\sin\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}}_{1} = \frac{3R}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{m} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)}_{2\pi} \cdot \underbrace{\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \sin\vartheta \cos\vartheta \; d\vartheta\right)}_{\|} \cdot \underbrace{\left(\int_0^2 r^3 \, dr\right)}_{4} = \frac{2\pi}{m} = \underbrace{\frac{3}{4(2-\sqrt{2})}}_{\overset{\|}{z^*}} .$$

$t = \sin\vartheta \rightarrow$
$dt = \cos\vartheta \, d\vartheta$

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{1} t \, dt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_{t=\sqrt{2}/2}^{t=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x^* = \frac{1}{m} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi \; d\varphi\right)}_{0} \cdot \;\; \ldots\ldots \;\; = \underline{0} \; \ldots \;\; y^* = \underline{0} .$$

2. Določi maso in koordinate masnega središča homogenega telesa (tj. $\rho(x,y,z)=1$), ki je omejeno s ploskvama $z^2=x^2+y^2$ ter $x^2+y^2+z^2=4$ in leži v polprostoru $z\geq 0$.

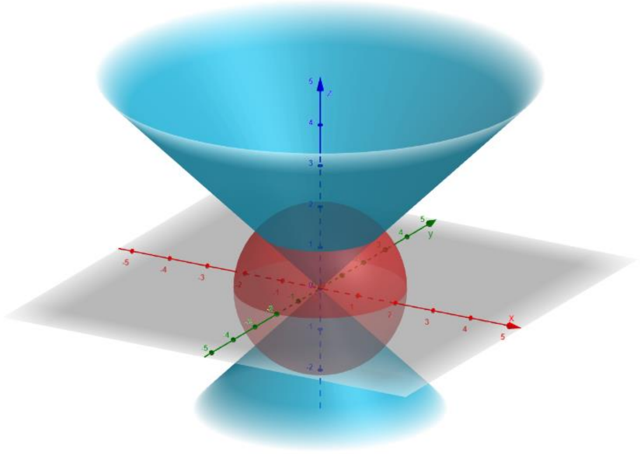
   Namig: Vpelji ti. sferne oz. krogelne koordinate:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\cos\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\sin\theta,$$

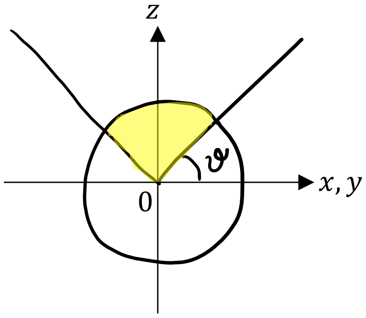
   tj. 'novo spremenljivko' $\mathbf{F}(r,\varphi,\theta)=[x,y,z]^{\mathsf{T}}$ (za katero je $\det(J\mathbf{F})=r^2\cos\theta$.)

   Rešitev: $m=\frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{2})$, $x^*=y^*=0$, $z^*=\frac{3}{8}(2+\sqrt{2})$.

$\varphi\in[0,2\pi],\ \ r\in[0,2],\ \ \vartheta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$



$z^2=x^2+y^2$
$r^2\sin^2\vartheta=r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi+r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi$
$r^2\sin^2\vartheta=r^2\cos^2\vartheta\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$
$\sin^2\vartheta=\cos^2\vartheta\Rightarrow\vartheta=\frac{\pi}{4}$



$$m=\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{2} r^2\cos\vartheta\ dr\,d\vartheta\,d\varphi=2\pi\int\limits_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{2} r^2\cos\vartheta\ dr\,d\vartheta=2\pi\int\limits_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\cdot\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{r=0}^{2}\ d\vartheta$$

$$=2\pi\int\limits_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\cdot\frac{8}{3}\ d\vartheta=\frac{16}{3}\pi\cdot(\sin\vartheta)\Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{8}{3}\pi(2-\sqrt{2})$$

težišče:

// vidimo da je težišče na y osi

$x^*=\iiint_D x\cdot\varrho\ dx\,dy\,dz=0$

$y^*=0$

$$z^*=?=\frac{1}{m}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{2}(r\sin\vartheta)\,r^2\cos\vartheta\ dr\,d\vartheta\,d\varphi=\frac{1}{m}\cdot2\pi\int\limits_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{2}\ d\vartheta$$

$$=\frac{1}{m}\cdot2\pi\int\limits_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\frac{16}{4}\ \ d\vartheta=\left(\begin{matrix}t=\sin\vartheta\\dt=\cos\vartheta\ d\vartheta\end{matrix}\right)=\frac{8\pi}{m}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}t\ dt=\frac{8\pi}{m}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{2\pi}{m}=\frac{3}{8}(2+\sqrt{2})$$

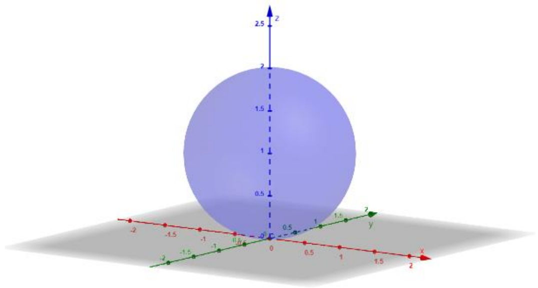
3. Izračunaj prostornino torusa z velikim polmerom R in malim polmerom r; telesa v $\mathbb{R}^3$ danega z neenačbo

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 \leq r^2.$$

Določi še prostornini 'notranje in zunanje polovice' torusa, teles, ki ju dobimo, če zgornji neenačbi dodamo še $x^2 + y^2 \leq R^2$ oziroma $x^2 + y^2 \geq R^2$.
Namig: Uporabi 'torusne' koordinate.
Rešitev: $2\pi^2 Rr^2$, $\frac{1}{3}\pi r^2(3\pi R - 4r)$, $\frac{1}{3}\pi r^2(3\pi R + 4r)$.

4. Določi maso in koordinate masnega središča krogle z neenačbo $x^2+y^2+z^2 \leq 2z$, če je njena gostota v vsaki točki enaka oddaljenosti od izhodišča.
Namig: Uvedi krogelne koordinate.
Rešitev: $m = \frac{8\pi}{5}$, $x^* = y^* = 0$, $z^* = \frac{8}{7}$.

$x^2+y^2+z^2 \leq 2z$
$x^2+y^2+z^2-2z+1 \leq 1$
$x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1$



$\varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

več načinov:

$$m = \iiint_D \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

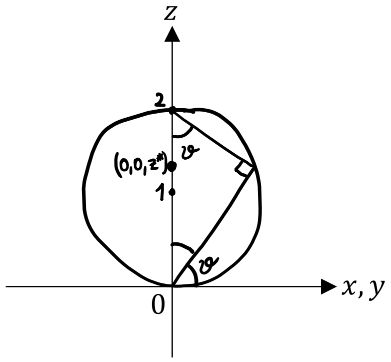
cilindrične koordinate: $\varrho(x,y,z) = \sqrt{r^2+z^2}$

v krogelnih koordinatah: $\varrho(x,y,z) = r$

$\varphi \in [0{,}2\pi],\ \ \vartheta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \ r \in [0{,}2\sin\vartheta]$

// območje za r razberemo iz slike ali pa izračunamo:

$x^2+y^2+z^2 \leq 2z$
$0 \leq r^2 \leq 2z$
$0 \leq r^2 \leq 2r\sin\vartheta$
$0 \leq r \leq 2\sin\vartheta$



$$m = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\sin\vartheta} \varrho\cdot|JF|\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\sin\vartheta} r^3\cos\vartheta\ dr\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\cdot\left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_{r=0}^{2\sin\vartheta} d\vartheta$$

$$= 2\pi\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\cdot 4\sin^4\vartheta\ d\vartheta = \left(\begin{matrix} t=\sin\vartheta \\ dt=\cos\vartheta\,d\vartheta\end{matrix}\right) = 8\pi\int_{t=0}^{1} t^4\,dt = \frac{8\pi}{5}\ \left(> \frac{4\pi}{3} = m(\text{homogena krogla})\right)$$

težišče:

// zaradi simetrije vidimo da bo težišče na z osi ($x^*=0,\ y^*=0$)

$$z^* = \frac{1}{m}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\sin\vartheta} z\cdot\varrho\cdot|JF|\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{1}{m}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2\sin\vartheta} r^4\sin\vartheta\cos\vartheta\ dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

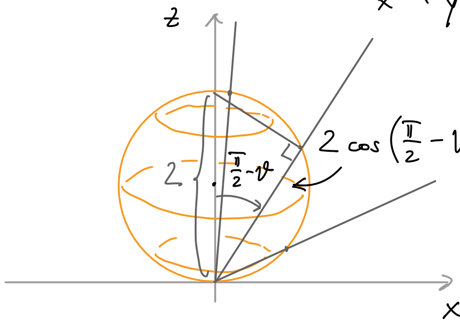
$$= \frac{2\pi}{m}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\left(\frac{r^5}{5}\right)\Big|_{r=0}^{2\sin\vartheta} d\vartheta = \frac{2\pi}{5m}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot(2\sin\vartheta)^5\,d\vartheta = \frac{64\pi}{5m}\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\vartheta\cos\vartheta\ d\vartheta$$

$$= \left(\begin{matrix} t=\sin\vartheta \\ dt=\cos\vartheta\,d\vartheta\end{matrix}\right) = \frac{64\pi}{5m}\int_{t=0}^{1} t^6\,dt = \frac{64\pi}{7\cdot 5m} = \frac{64\pi}{7\cdot 5}\cdot\frac{5}{8\pi} = \frac{8}{7}$$

4. Določi maso in koordinate masnega središča krogle z neenačbo $x^2+y^2+z^2 \leq 2z$, če je njena gostota v vsaki točki enaka oddaljenosti od izhodišča.
Namig: Uvedi krogelne koordinate.

$x^2+y^2+z^2 \leq 2z \quad \ldots \quad x^2+y^2+z^2-2z \leq 0 \quad /+1$

$x^2+y^2+\underbrace{z^2-2z+1}_{(z-1)^2} \leq 1 \leftarrow$ to je krogla s polmerom 1 in središčem v $(0,0,1)$.



$2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right) = 2\sin\vartheta$

$$m = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\sin\vartheta} r \cdot r^2 \cos\vartheta \, dr\right) d\vartheta\right) d\varphi =$$

$\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \cdot \frac{r^4}{4}\Bigg|_{r=0}^{r=2\sin\vartheta} d\vartheta\right) d\varphi =$$

$t = \sin\vartheta, dt = \cos\vartheta \, d\vartheta$

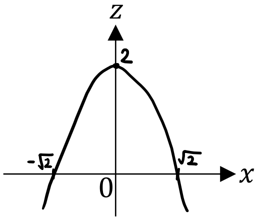
$$= 4\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \cdot \sin^4\vartheta \, d\vartheta\right) d\varphi =$$

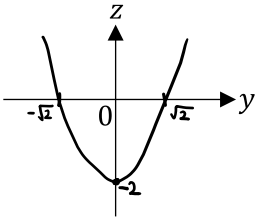
$$= 4 \cdot 2\pi \int_0^1 t^4 \, dt = \underline{\frac{8}{5}\pi}.$$

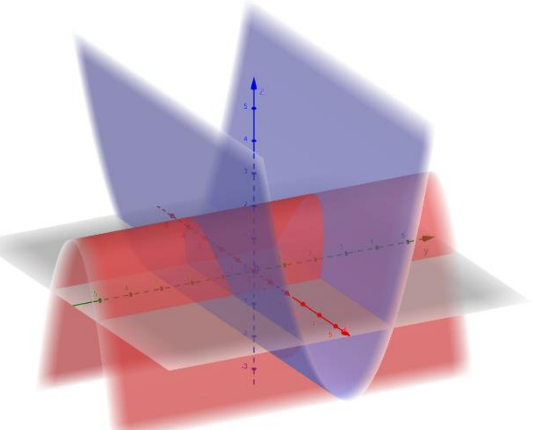
$z^* = \frac{1}{m} \cdot \ldots\ldots$ samostojno doma!

5. Telo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je omejeno s paraboličnima valjema $z = 2 - x^2$ in $z = y^2 - 2$. Izračunaj prostornino in maso tega telesa, če je gostota enaka $\rho(x, y, z) = y^2$.
Namig: Poišči (pravokotno) projekcijo tega telesa na xy-ravnino, uvedi cilindrične koordinate.
Rešitev: $V = 8\pi$, $m = \frac{16\pi}{3}$.

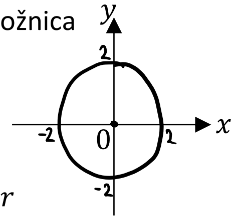
$z = 2 - x^2$ $\qquad$ $z = y^2 - 2$





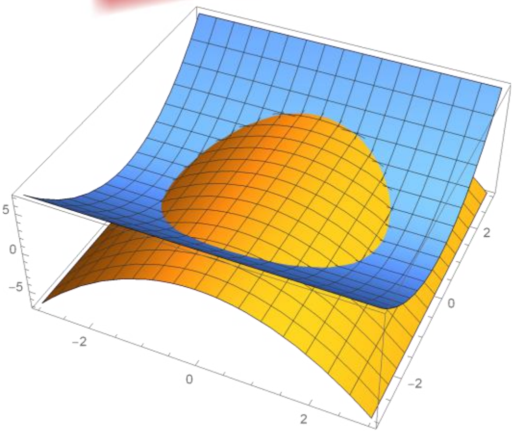


če pogledamo iz vrha, je presek »žlebov« krožnica
to se da sklepati tudi iz enačb:
presek: $2 - x^2 = y^2 - 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$



cilindrične koordinate:
$x = r\cos\varphi,\;\; y = r\sin\varphi,\;\; z = z,\;\; |JF| = r$

$\varphi \in [0, 2\pi]$
$r \in [0, 2]$
$z \in [y^2 - 2, 2 - x^2] = [r^2\sin^2\varphi - 2, 2 - r^2\cos^2\varphi]$



$$\varrho = 1{:}\;\; m = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r^2\sin^2\varphi-2}^{2-r^2\cos^2\varphi} \varrho\cdot|JF|\,dz\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r^2\sin^2\varphi-2}^{2-r^2\cos^2\varphi} r\,dz\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r\cdot(z)\Big|_{z=r^2\sin^2\varphi-2}^{2-r^2\cos^2\varphi}\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r\cdot\left((2 - r^2\cos^2\varphi) - (r^2\sin^2\varphi - 2)\right)dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r\cdot(4 - r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} 4r - r^3\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_{r=0}^{2} 4r - r^3\,dr = 2\pi\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 2\pi\,(8 - 4) = 8\pi$$

$$\varrho = y^2{:}\;\; m = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r^2\sin^2\varphi-2}^{2-r^2\cos^2\varphi} \varrho\cdot|JF|\,dz\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r^2\sin^2\varphi-2}^{2-r^2\cos^2\varphi} (r\sin\varphi)^2\,r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=r^2\sin^2\varphi-2}^{2-r^2\cos^2\varphi} r^3\sin^2\varphi\;\,dz\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r^3\sin^2\varphi\;\,(4 - r^2)\;\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^2\varphi\int_{r=0}^{2} 4r^3 - r^5\;\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^2\varphi\left(r^4 - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^2\,d\varphi = \left(16 - \frac{64}{6}\right)\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^2\varphi\;\,d\varphi$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{formula za polovični kot:}\\ \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)\end{matrix}\right) = \frac{16}{6}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(1 - \cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{8}{3}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{8}{3}\cdot 2\pi = \frac{16\pi}{3}$$

6. Poišči in kasificiraj stacionarne točke spodnjih funkcij.

   (a) $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$
   (b) $g(x,y) = xe^x + 2ye^y + 1$
   (c) $h(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$
   (d) $k(x,y,z) = x^3 + y^3 + 3z^2 - 3xyz$
   (e) $r(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$
   (f) $u(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$
   (g) $v(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2$

Rešitev: (a) Stacionarni točki sta $T_1(0,0)$, ki je lokalni maksimum, in $T_2(2,2)$, ki je sedlasta točka.
(b) Stacionarna točka je $T(-1,-1)$, ki je lokalni minimum.
(c) Stacionarne točke so $T_k(2k\pi, 0)$, ki so lokalni maksimi, in $U_k((2k+1)\pi, -2)$, ki so sedlaste točke.
(d) Stacionarni točki sta $T_1(0,0,0)$, za katero na podlagi H_k ne moremo odločiti tipa, saj $H_k(0,0,0)$ ni polnega ranga, in $T_2(2,2,2)$, ki ni ekstrem.
(e) Stacionarne točke so $T_0(0,0,0)$, ki je lokalni minimum, ter $T_{1,2}(\pm1,\pm1,1)$ in $T_{3,4}(\pm1,\mp1,-1)$, ki so sedlaste točke.
(f) Stacionarni točki sta $T_1(0,0)$, ki ni lokalni ekstrem, in $T_2(1,1)$, ki je lokalni minimum.
(g) Stacionarne točke so $T_1(0,0)$, ki je lokalni maksimum, $T_2(0,2)$, ki je lokalni minimum, ter $T_3(-1,1)$ in $T_4(1,1)$, ki sta sedlasti točki.

stacionarne točke = točke, kjer je gradient 0
če je $f'' > 0$ je lokalni minimum,
če je $f'' < 0$ je lokalni maksimum
več spremenljivk:
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\operatorname{grad} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$
če je funkcija zvezno odvedljiva, je H simetrična, ker vrstni red odvajanja ni pomemben

$$\left(H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{xy} \end{bmatrix}, \qquad f_{xy} = f_{yx}\right)$$

simetrične matrike se dajo diagonalizirati v ONB (kjer so 2. odvodi lastne vrednosti)
zanimajo nas samo predznaki lastnih vrednosti H, ki pa jih ni treba izračunati, lahko pogledamo samo determinanto: $\det H = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ in Sylvestrov kriterij: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow$glavne poddeterminante > 0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow$glavne poddeterminante alternirajo
// če je $\det H = 0$ je 2. odvod = 0, kar pomeni da se ne veš ali je lokalni ekstrem ali ne

(a) $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 8x + 2y \\ 2x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y$
$\Rightarrow$ (vstavimo v 1. enačbo) $\Rightarrow 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$
dobimo 2 rešitvi: $T_1(0,0)$ in $T_2(2,2)$
$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x - 8 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad H_1 = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad H_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$
$\det H_1 = 12 > 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 > 0$ pri H_1 je lokalni ekstrem, ker imata lastni vrednosti enak predznak,
$\det H_2 = -12 < 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 < 0$ pri H_2 pa je sedlo, ker imata lastni vrednosti različne predznake

pri H_1 glavne poddeterminante alternirajo $\Leftrightarrow$ so vse lastne vrednosti negativne $\Rightarrow$ **lokalni maksimum**

(e) $r(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

$$\operatorname{grad} r = \begin{bmatrix} 2x - 2yz \\ 2y - 2xz \\ 2z - 2xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = yz \\ y = xz \\ z = xy \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = xy^2 \\ y = x^2 y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x(1-y^2) = 0 \\ y(1-x^2) = 0 \end{matrix}$$

1. $x = 0: \quad y = 0,\ z = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1(0,0,0)$

// vidimo, da če je ena koordinata 0, potem sta tudi ostali dve 0, torej ali so vse 0 ali pa nobena

2. $x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad z \neq 0$

$(1-y)(1+y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$

$(1-x)(1+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \pm 1$

$T_2(1,1,1),\ T_3(1,-1,-1),\ T_4(-1,1,-1),\ T_5(-1,-1,1)$

$$H_r = \begin{bmatrix} 2 & -2z & -2y \\ -2x & 2 & -2x \\ -2y & -2x & 2 \end{bmatrix}$$ // Hessejeva matrika je simetrična, če je funkcija dvakrat zvezno odvedljiva

$$T_1: H_r(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad T_2: H_r(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad T_3: H_r(1,-1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T_4: H_r(-1,1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad T_5: H_r(-1,-1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

// če je Hessejeva matrika PD je v tej točki lokalni min, če pa ND pa max

// definitnost preverimo s Sylvestrovim kriterijem

// če je vsaj ena lastna vrednost 0 (<=> detH = 0), potem ne moremo sklepati

// v ostalih primerih pa je sedlo

$T_1: H_r(0,0,0) = PD \Rightarrow T_1\ lok.min$

$T_2: H_r(1,1,1)$: poddeterminante: $2, 0, -32 \Rightarrow$ sedlo, ker $\det H \neq 0$

(d) $k(x,y,z) = x^3 + y^3 + 3z^2 - 3xyz$

$$\nabla k = \begin{bmatrix} 3\,(x^2 - \ y\, z) \\ 3\,(y^2 - \ x\, z) \\ 3(2\, z - \ x\, y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = yz \\ y^2 = xz \Rightarrow \\ 2x = xy \end{matrix} \quad z = \frac{xy}{2}$$

1. $x = 0: \quad y = 0,\ z = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1(0,0,0)$

2. $x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad z \neq 0$

$x^2 = \frac{xy^2}{2} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}$ (ker $x \neq 0$)

$y^2 = \frac{x^2 y}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2}$ (ker $y \neq 0$)

$x = \frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{8} \Rightarrow 1 = \frac{x^3}{8} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2, z = 2 \Rightarrow \quad T_2(2,2,2)$

$$H_k(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6\,x & -3\,z & -3\,y \\ -3\,z & 6\,y & -3\,x \\ -3\,y & -3\,x & 6 \end{bmatrix}$$

$H_k(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ → ne moremo sklepat, lahko pa iz funkcije sklepamo da je v tej točki prevoj

$H_k(2,2,2) = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ poddeterminante: 2,3,-3 ⇒ sedlo

6. Poišči in kasificiraj stacionarne točke spodnjih funkcij.

(a) $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$
(b) $g(x,y) = xe^x + 2ye^y + 1$
(c) $h(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$

(a) $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 8x + 2y = 0 \;\dots\; 3x^2 - 8x + 2x = 0 \;\dots\; 3x(x-2) = 0$$

$x_1 = 0, \; x_2 = 2$

↑ vstavimo

$y_1 = 0, \; y_2 = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \;\dots\; x = y$$

f ima 2 stacionarni točki $T_1(0,0)$, $T_2(2,2)$.

Ali sta ti dve točki tudi lok. ekstrema?

Tip stac. točke določimo z uporabo Hessejeve mat. f:

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x-8, & 2 \\ 2, & -2 \end{bmatrix}$$

V stac. točkah je:

$$T_1 : \; H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} -8 < 0 \\ \det H_f(0,0) = 12 > 0 \end{matrix}\right\} \text{je neg. definitna}$$

Torej je T_1 lokalni maksimum.

$$T_2 : \; H_f(2,2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} 4 > 0 \\ \det(H_f(2,2)) = -12 \end{matrix}\right\} \text{ni definitna}$$

Torej T_2 <u>ni</u> lokalni ekstrem (je sedlasta točka).

(c) $h(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$

Stacionarne točke h so ničle gradienta $\operatorname{grad} h = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}$:

$h_x = -(1+e^y)\sin x = 0$ .... $\sin x = 0$ .... $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ↩ vstavimo

$h_y = e^y\cos x - (e^y + ye^y) = e^y(\cos x - 1 - y) = 0$

$e^y(\cos(k\pi) - 1 - y) = 0$ ... $\cos(k\pi) - 1 - y = 0$,

tj. $y = \cos(k\pi) - 1$

Stac. točke h so $T_k(k\pi, \overbrace{\cos(k\pi)}^{(-1)^k} - 1)$ oz. $T_k(k\pi, (-1)^k - 1)$.

Tip teh stac. točk?

$$Hh = \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1+e^y)\cos x, & -e^y\sin x \\ -e^y\sin x, & e^y \cdot (\cos x - 2 - y) \end{bmatrix}$$

$h_{yy} = e^y \cdot (\cos x - 1 - y) + e^y \cdot (-1)$

Vrednost H_h v T_k:

$$Hh(k\pi, (-1)^k - 1) = \begin{bmatrix} -(1 + e^{(-1)^k - 1}) \cdot (-1)^k & 0 \\ 0 & e^{(-1)^k - 1} \cdot \underbrace{(\cancel{(-1)^k} - 2 - (\cancel{(-1)^k} - 1))}_{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \underset{\overset{\uparrow}{\text{sod } k}}{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \quad \text{oz.} \quad \underset{\overset{\uparrow}{\text{lih } k}}{\begin{bmatrix} 1 + e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{bmatrix}}$$

Pri sodih k ima Hh neg. last. vrednosti, torej je negativno definitna, zato so $T_k(k\pi, 0)$ za sode k lokalni maksimi.

Pri lihih k ima Hh ima neg. in poz. lastne vrednosti, tj. ni definitna, zato so $T_k(k\pi, -2)$ za lihe k sedlaste točke (niso lok. ekstremi).

(d) $k(x,y,z) = x^3 + y^3 + 3z^2 - 3xyz$

$k_x = 3x^2 - 3yz = 0 \dots \quad 3x^2 - 3y \cdot \frac{1}{2}xy = 0 \dots \quad x^2 - \frac{1}{2}xy^2 = 0 \quad (*)$

$k_y = 3y^2 - 3xz = 0 \dots \quad 3y^2 - 3x \cdot \frac{1}{2}xy = 0 \dots \quad y^2 - \frac{1}{2}x^2y = 0 \quad (**)$

$k_z = 6z - 3xy = 0 \dots \quad z = \frac{1}{2}xy$

$x\left(x - \frac{1}{2}y^2\right) = 0$

torej $x = 0$ ali $x - \frac{1}{2}y^2 = 0$

iz $(**)$ dobimo

$y^2 = 0 \dots y = 0$

zato $z = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$T_1(0,0,0)$

tj. $x = \frac{1}{2}y^2$. Iz $(**)$:

$y^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2 y = 0$

$y^2\left(1 - \frac{1}{8}y^3\right) = 0$

$y = 0$ ali $1 - \frac{y^3}{8} = 0$

oz. $y = 0$ ali $y = 2$

$x = \frac{1}{2}y^2 = 0$ | $x = \frac{1}{2}2^2 = 2$

$z = \frac{1}{2}xy = 0$ | $z = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

$T_2(2,2,2)$

Tip teh stac. točk:

$$H_k = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3z & -3y \\ -3z & 6y & -3x \\ -3y & -3x & 6 \end{bmatrix}$$

$$H_k(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$ ← last. vred. so 0, 0, 6, mat. je le semidefinitna, na podlagi H_k tipa stac. točke ne moremo določit.

$$H_k(2,2,2) = \begin{bmatrix} 12 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

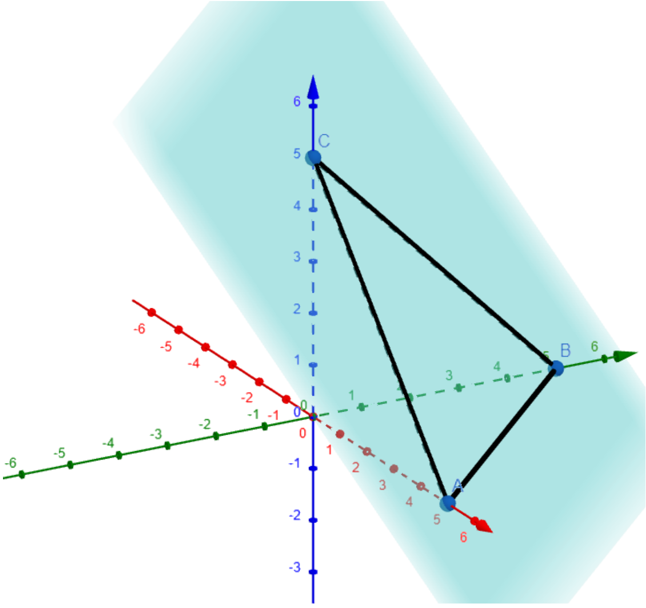
$12 > 0$

$\begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 36 > 0$

$\det(H_k(2,2,2)) < 0$, mat. ni definitna, stac. točka T_2 je torej sedlo.

1. Naj bo T trikotnik, ki ga prvi oktant izreže iz ravnine z enačbo $x+y+z=5$. V kateri točki na tem trikotniku zavzame funkcija $g(x,y,z)=xy^2z^2$ svojo največjo vrednost?
   Rešitev: Največjo vrednost 16 funkcija g zavzame v $P(1,2,2)$.

$D=\{(x,y,z)\colon\ x+y+z=5,\ \ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$



če je $x=0$ ali $y=0$ ali $z=0$, potem $g(x,y,z)=0$
če je $x>0$, potem $g(x,y,z)>0$
$\Rightarrow \min\limits_{x,y,z\in D} g(x,y,z)=0$ (minimum dosežen na robu)

$L(x,y,z,\lambda)=g(x,y,z)-\lambda\, h(x,y,z)$
funkcija, ki jo maksimiziramo: $g(x,y,z)=xy^2z^2$
vez: $h(x,y,z)=x+y+z-5=0$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y^2z^2-\lambda=0\Rightarrow\lambda=y^2z^2$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=2xyz^2-\lambda=0\Rightarrow\lambda=2xyz^2$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}=2xy^2z-\lambda=0\Rightarrow\lambda=2xy^2z$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x+y+z-5)=-h(x,y,z)=0$$

$$\begin{aligned} y^2z^2&=2xyz^2\\ 2xyz^2&=2xy^2z \end{aligned}\ \Rightarrow \text{(lahko krajšamo ker so x,y,z > 0)} \Rightarrow \begin{aligned} y&=2x\\ z=y&=2x \end{aligned}$$

vstavimo v $-h(x,y,z)=0:\ \ x+2x+2x=5\Rightarrow \boldsymbol{x=1}\Rightarrow \boldsymbol{y=2}, \boldsymbol{z=2}\quad T(1{,}2{,}2)$

$g(1{,}2{,}2)=16$

2. V katerih točkah na območju, ki ga opisuje neenačba

$$4(x-1)^2 + y^2 \leq 16,$$

zavzame funkcija

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2$$

največjo in najmanjšo vrednost?

Rešitev: Največjo vrednost 20 zavzame v točkah $(2,-2\sqrt{3})$ in $(-2,2\sqrt{3})$, najmanjšo 0 pa v točki $(0,0)$.

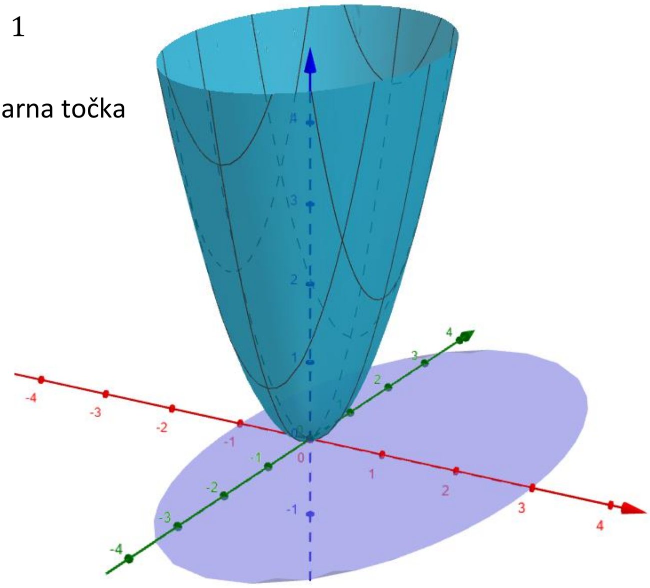
$D = \{(x,y):\ \ 4(x-1)^2 + y^2 \leq 16\}\quad \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{y^2}{4} \leq 1$

$\nabla f = \begin{bmatrix} 4x \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T_0(0{,}0)$ (edina) globalna stacionarna točka

$H_f = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow T_0$ je globalni minimum

$\Rightarrow \min\limits_{x,y\in D} f = 0$ pri $T_0(0{,}0)$

ker ni globalnih maksimumov, sklepamo da bo lokalni maksimum na robu danega območja



$L(x,y,\lambda) = 2x^2 + y^2 - \lambda(4(x-1)^2 + y^2 - 16)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x - 8\lambda(x-1) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda y = 0 \Rightarrow y(1-\lambda) = 0$

1. $y = 0$: $\quad 4(x-1)^2 = 16 \Rightarrow x - 1 = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$
   $T_1(-1{,}0)$: $f(-1{,}0) = 2, \qquad T_2(3{,}0)$: $f(3{,}0) = 18$

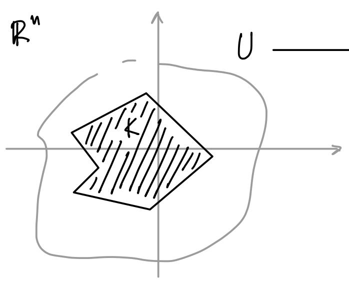
2. $\lambda = 1$: $\quad x - 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 4 + y^2 - 16 = 0 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$
   $T_3(2{,}2\sqrt{3})$: $f(2{,}2\sqrt{3}) = 20, \qquad T_4(2,-2\sqrt{3})$: $f(2,-2\sqrt{3}) = 20$

$\Rightarrow \max\limits_{x,y\in D} f = 20$ pri $T_3(2{,}2\sqrt{3})$ in $T_4(2,-2\sqrt{3})$

3. Poišči tiste točke na elipsi z enačbo

$$x^2 - xy + y^2 = 3,$$

ki so najbolj oddaljene od koordinatnega izhodišča.
Rešitev: Od izhodišča sta najbolj oddaljeni točki $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ in $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.



$$U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Kaj je največja in najmanjša vrednost, ki jo f zavzame na K?

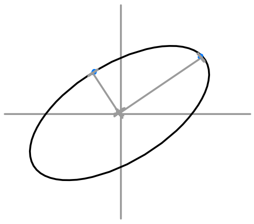
(Če je K omejena in $\underbrace{\text{vsebuje svoj rob}}_{\text{zaprta v } \mathbb{R}^n}$, f pa zvezna, potem f zavzame min. in max. vrednost.)

K bo dana s sistemom (ne)enačb. Če je dana z eno samo enačbo, recimo $\underbrace{g(\vec{x}) = 0}_{\text{vez.}}$, potem so kandidati za globalne ekstreme stac. točke pripadajoče Lagrangeove funkcije:

$$L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) - \lambda g(\vec{x}).$$

V našem primeru: K je opisana z en. $x^2 - xy + y^2 = 3$
... $\underbrace{x^2 - xy + y^2 - 3}_{g(x,y)} = 0$

Funkcija: $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$



Pripadajoča Lagrangeova funkcija:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 2x - \lambda(2x - y) = 0 \;\dots\; \lambda = \dfrac{2x}{2x-y} \\ L_y = 2y - \lambda(2y - x) = 0 \dots\; \lambda = \dfrac{2y}{2y-x} \end{array}\right\} \quad \frac{2x}{2x-y} = \frac{2y}{2y-x} \;\Big/\cdot (2x-y)(2y-x)$$

$$L_\lambda = -(x^2 - xy + y^2 - 3) = 0$$

$$2x(2y - x) = 2y(2x - y)$$

$$\cancel{4xy} - 2x^2 = \cancel{4xy} - 2y^2$$

$$x^2 = y^2 \quad \text{oz.} \quad y = \pm x$$

$\longrightarrow$

$y = \pm x$ vstavimo v en. vezi $g(x,y) = 0$ (oz. $L_\lambda = 0$):

$y = x$: $\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + x^2 - 3 = 0$ ... $x = \pm\sqrt{3}$, $y = \pm\sqrt{3}$, $T_1(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $T_2(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

$y = -x$: $x^2 - x\cdot(-x) + x^2 - 3 = 0$ ... $3x^2 = 3$ ... $x = \pm 1$, $y = \mp 1$

$T_3(1,-1)$, $T_4(-1,1)$

To so kandidati za globalne ekstreme f pri pogoju $g(x,y) = 0$.

V f sedaj vstavimo te stac. točke:

(x,y)	$f(x,y) = x^2 + y^2$	
T_1	6	← T_1 in T_2 sta najbolj oddaljeni (na razdalji $\sqrt{6}$),
T_2	6	←
T_3	2	←
T_4	2	← T_3 in T_4 sta najbližji $(0,0)$ (na razdalji $\sqrt{2}$).

4. Katere točke na implicitno dani krivulji z enačbo

$$(x^2+y^2)^2 = x^3+y^3$$

so najbolj oddaljene od koordinatnega izhodišča? Katere so najbolj oddaljene od y-osi?

Rešitev: Od izhodišča sta najbolj oddaljeni točki $T_1(0,1)$ ter $T_2(1,0)$. Od y-osi je najbolj oddaljena točka $T_2(1,0)$.

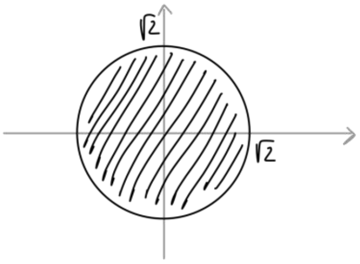
5. Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = xy - x + y - 1$

   (a) na krogu danem z $x^2 + y^2 \leq 2$,

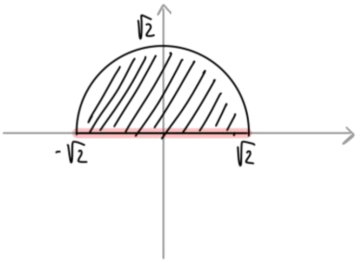
   (b) na polkrogu danem z $x^2 + y^2 \leq 2$ in $y \geq 0$.

Rešitev: (a) Največja vrednost je 1/2, najmanjša vrednost pa −4.
(b) Največja vrednost je 1/2, najmanjša vrednost pa $-1-\sqrt{2}$.

(a)



(b)



(a) Ločimo rob in notranjost kroga (območja):

- Rob je dan z en. $x^2+y^2=2$ ... $x^2+y^2-2=0$

Pripadajoča L. funk. je $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(x^2+y^2-2) =$

$= xy - x + y - 1 - \lambda(x^2+y^2-2)$

$$L_x = y-1-\lambda\cdot 2x = 0 \ \ldots \ \lambda = \frac{y-1}{2x}$$

$$\parallel$$

$$L_y = x+1-\lambda\cdot 2y = 0 \ \ldots \ \lambda = \frac{x+1}{2y}$$

$$L_\lambda = -(x^2+y^2-2) = 0 \quad (*)$$

$$\frac{y-1}{2x} = \frac{x+1}{2y} \ \ldots \ (y-1)y = (x+1)x$$

$$y^2-y = x^2+x$$

$$y^2-x^2-y-x=0$$

$$(y-x)(y+x)-(y+x)=0$$

$$(y-x-1)(y+x)=0$$

Torej: $y-x-1=0$

$y = x+1$, vstavimo v $(*)$:

$$x^2+(x+1)^2-2=0$$

$$2x^2+2x-1=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{4} =$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$T_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $T_2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ali

$y+x=0$

$y=-x$, vstavimo v $(*)$:

$$x^2+x^2-2=0 \ \ldots \ 2x^2=2$$

$x = \pm 1$

$y = \mp 1$

$T_3(1,-1)$

$T_4(-1,1)$

- notranjost: $x^2+y^2<2$; poiščemo stac. točke f, ki ustrezajo tej neenačbi:

$$f_x = y-1 = 0 \quad \dots \quad y = 1$$
$$f_y = x+1 = 0 \quad \dots \quad x = -1$$

$T_5(-1,1)$, ali ta leži v notranjosti?
$(-1)^2+1^2 = 2 \nless 2$, kandidatov za ekstreme v notranjosti ni.

Vrednosti f v kandidatih za globalne ekstreme:

(x,y)	$f(x,y) = xy - x + y - 1$	
T_1	$1/2$	← največja vrednost
T_2	$1/2$	
T_3	-4	← najmanjša vrednost
T_4	0	

(b) Poleg ekstremov na ⌒ delu roba (označeni z 🟥 na prejšnji strani), preverimo kaj so kandidati za ekstreme na ______ delu roba.

To je interval $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ na x-osi (tj. $y=0$)

$f(x,y) = xy - x + y - 1 \dots f(x,0) = -x-1$, min./max. vrednost te funk. 1 spremenljivke na $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ pa je $\underline{-\sqrt{2}-1}$ / $\underline{\sqrt{2}-1}$

Torej je $-\sqrt{2}-1$ najmanjša, $\frac{1}{2}$ pa največja vrednost f na ▨.

6. Elipsoid v $\mathbb{R}^3$ je dan z enačbo
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$
Kvader, katerega robovi so vzporedni osem x, y in z, včrtamo v ta elipsoid.

   (a) Kolikšna je največja možna prostornina včrtanega kvadra?
   (b) Kolikšna je največja možna površina včrtanega kvadra?

Rešitev: (a) Največja možna prostornina je $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.
(b) Poskusite izpeljati, da je parameter λ iz metode Lagrangeevih množiteljev lastna vrednost matrike
$$L=2\begin{bmatrix}0 & a^2 & a^2\\ b^2 & 0 & b^2\\ c^2 & c^2 & 0\end{bmatrix},$$
komponente lastnega vektorja $[x,y,z]^{\mathsf{T}}$ te matrike, ki zadoščajo enačbi elipsoida, pa določajo preostanek rešitve.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

$$V=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz$$

$$L(x,y,z,\lambda)=8xyz-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}=8yz-\frac{2\lambda x}{a^2}\Rightarrow\lambda=\frac{4yza^2}{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=8xz-\frac{2\lambda y}{b^2}\Rightarrow\lambda=\frac{4xzb^2}{y}$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}=8xy-\frac{2\lambda z}{c^2}\Rightarrow\lambda=\frac{4xyc^2}{z}$$

$\begin{matrix}\frac{4yza^2}{x}=\frac{4xzb^2}{y}\\ \frac{4xzb^2}{y}=\frac{4xyc^2}{z}\end{matrix}$ ⇒ (krajšamo, ker nas situaciji kjer je z=0 ali x=0 ne zanimata) ⇒ $\begin{matrix}y^2a^2=x^2b^2\\ z^2b^2=y^2c^2\end{matrix}$ ⇒ $\begin{matrix}x^2=\frac{y^2a^2}{b^2}\\ z^2=\frac{y^2c^2}{b^2}\end{matrix}$

vstavimo v $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}=3\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2=\frac{b^2}{3}$ ⇒ (ker je (x,y,z) v prvem kvadrantu) ⇒ $y=\frac{b}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{3}},\ z=\frac{c}{\sqrt{3}}$

$$V=\frac{8abc}{\left(\sqrt{3}\right)^3}$$

7. Imamo ℓ metrov dolgo tanko palico. Razrežemo jo na 12 krajših palic, iz katerih lahko sestavimo ogrodje kvadra.

   (a) Na kako dolge kose moramo palico razrezati, da bo dobljeno ogrodje kvadra zavzelo največjo možno prostornino?

   (b) Isto vprašanje kot prej, vendar dodatno želimo, da je ploščina osnovne ploskve dobljenega kvadra enaka A.

Rešitev: (a) Palico moramo razrezati na 12 *enako dolgih* kosov, iz njih sestavimo ogrodje kocke.
(b) Odrežemo 8 kosov dolžine $\sqrt{A}$, preostanek palice pa razrežemo na 4 enako dolge kose.

8. Iz ℓ metrov dolge tanke palice želimo sestaviti ogrodje tristrane prizme (osnovna ploskev naj bo enakostranični trikotnik).

   (a) Na kako dolge kose moramo palico razrezati, da bo dobljeno ogrodje kvadra zavzelo največjo možno prostornino?

   (b) Na kako dolge kose moramo palico razrezati, da bo imela dobljena prizma največjo možno površino?

Rešitev: (a) Palico moramo razrezati na 9 *enako dolgih* kosov.

(b) Tako: 6 kosov za stranice dveh enakostraničnih trikotnikov z dolžino $a = \frac{\ell}{66}(6+\sqrt{3})$ in 3 kose za višino prizme z dolžino $v = \frac{\ell}{33}(5-\sqrt{3})$.

9. Za $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ naj bo $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{a})(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{b})$. Izračunaj

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \text{ in } \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}.$$

Rešitev: $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T} + \mathbf{b}\mathbf{a}^\mathsf{T})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T} + \mathbf{b}\mathbf{a}^\mathsf{T}$.

10. Poišči tisti vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, za katerega je vsota kvadratov razdalj do vektorjev $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ najmanjša možna.

Rešitev: $\mathbf{x} = \frac{1}{k}(\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_k)$.

$$\underbrace{\|\vec{x}-\vec{a}_1\|^2}_{(\vec{x}-\vec{a}_1)^T(\vec{x}-\vec{a}_1)} + \|\vec{x}-\vec{a}_2\|^2 + \ldots + \underbrace{\|\vec{x}-\vec{a}_k\|^2}_{(\vec{x}-\vec{a}_k)^T(\vec{x}-\vec{a}_k)} = f(\vec{x}) \leftarrow \text{iščemo minimum}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \text{grad } f = \underbrace{(2\vec{x}^T - 2\vec{a}_1^T) + (2\vec{x}^T - \vec{a}_2^T) + \ldots + (2\vec{x}^T - 2\vec{a}_k^T)}_{2k\vec{x}^T - 2(\vec{a}_1^T + \vec{a}_2^T + \ldots + \vec{a}_k^T)} = \vec{0}^T$$

$$\frac{\partial \overbrace{(\vec{x}-\vec{a}_i)^T(\vec{x}-\vec{a}_i)}^{\vec{x}^T\vec{x} - 2\vec{a}_i^T\vec{x} + \vec{a}_i^T\vec{a}_i}}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^T - 2\vec{a}_i^T$$

Torej $\cancel{2}k\vec{x}^T = \cancel{2}(\vec{a}_1^T + \vec{a}_2^T + \ldots + \vec{a}_k^T) \;/ : k$

$$\underline{\vec{x} = \frac{1}{k}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_k)}.$$

11. Naj bo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $d \geq 0$ pa dano realno število.

    (a) Poišči največjo oz. najmanjšo vrednost izraza $\mathbf{a}^\top \mathbf{x}$, če je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor s predpisano dolžino; $\|\mathbf{x}\| = d$.

    (b) Geometrijsko utemelji zgornjo rešitev.

Rešitev: (a) $\pm d\|\mathbf{a}\|$.

12. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d pa pozitivno realno število.

    (a) Poišči največjo in najmanjšo vrednost $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T} A\mathbf{x}$ pri pogoju $\|\mathbf{x}\| = d$.

    (b) Poišči največjo in najmanjšo vrednost $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogoju $\mathbf{x}^\mathsf{T} A\mathbf{x} = d^2$, če je A simetrična in pozitivno definitna.

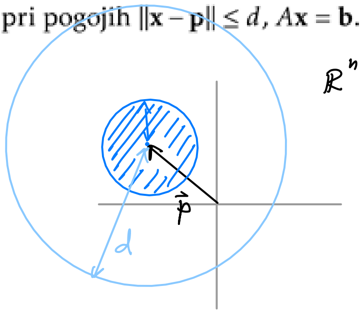
Rešitev: (a) $\frac{\lambda_{\max} d^2}{2}$ in $\frac{\lambda_{\min} d^2}{2}$, kjer sta $\lambda_{\max}$ in $\lambda_{\min}$ največja in najmanjša lastna vrednost matrike $A + A^\mathsf{T}$.
(b) $\frac{d^2}{\lambda_{\max}}$ in $\frac{d^2}{\lambda_{\min}}$, kjer sta $\lambda_{\max}$ in $\lambda_{\min}$ največja in najmanjša lastna vrednost matrike A.

13. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n}$ ter $d > 0$ realno število.

(a) Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogoju $\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| \le d$.

(b) Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogoju $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(c) Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ pri pogojih $\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| \le d$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.



(a) • V notranjosti: kandidati so lokalni ekstremi f:

$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 = \vec{x}^T\vec{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^T = \vec{0}^T \;\dots\; \vec{x} = \vec{0}$$ (ta je v območju, če je $\|\vec{p}\| < d$, sicer ni)

• Na robu: vezani ekstremi: $\|\vec{x}-\vec{p}\| = d \;\dots\; \|\vec{x}-\vec{p}\|^2 = d^2 \;\dots\; \|\vec{x}-\vec{p}\|^2 - d^2 = 0$

$$L(\vec{x},\lambda) = f(\vec{x}) - \lambda\left(\|\vec{x}-\vec{p}\|^2 - d^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^T - \lambda\left(2\vec{x}^T - 2\vec{p}^T\right) = \vec{0} \;\dots\; (2-2\lambda)\vec{x} = -2\lambda\vec{p}$$, tj. $\vec{x} \parallel \vec{p}$

oz. $\vec{x} = \alpha\vec{p}$ (ali $\vec{x} = \frac{2\lambda}{2\lambda-2}\vec{p}$)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(\|\vec{x}-\vec{p}\|^2 - d^2\right) = 0$$

$$\|\alpha\vec{p} - \vec{p}\|^2 - d^2 = 0 \;\dots\; \|(\alpha-1)\vec{p}\| = d \;\dots\; |\alpha-1|\cdot\|\vec{p}\| = d$$

$$\alpha = 1 \pm \frac{d}{\|\vec{p}\|} \;\Leftarrow\; \alpha - 1 = \pm\frac{d}{\|\vec{p}\|} \;\Longleftarrow\; |\alpha-1| = \frac{d}{\|\vec{p}\|}$$

Torej $f(\alpha\vec{p}) = f\left(\left(1 \pm \frac{d}{\|\vec{p}\|}\right)\vec{p}\right) = \left|1 \pm \frac{d}{\|\vec{p}\|}\right|^2 \cdot \|\vec{p}\|^2 =$

$$= \left(1 + \frac{d^2}{\|\vec{p}\|^2} \pm 2\frac{d}{\|\vec{p}\|}\right)\cdot\|\vec{p}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 + d^2 \pm 2d\|\vec{p}\|.$$

(b) Z Lagrangeovo metodo: $(A\vec{x}=\vec{b} \ \ldots \ A\vec{x}-\vec{b}=\vec{0})$

$$L(\vec{x},\vec{\lambda}) = \|\vec{x}\|^2 - \vec{\lambda}^T(A\vec{x}-\vec{b}) \qquad 2\vec{x}^T = \vec{\lambda}^T A$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^T - \vec{\lambda}^T A = \vec{0}^T \Big/^T \ldots\ldots \ \underbrace{\vec{x} = \frac{1}{2}A^T\vec{\lambda}}$$

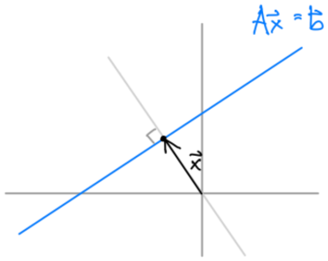
$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\lambda}} = -(A\vec{x}-\vec{b}) = \vec{0} \ \ldots \ A\vec{x}=\vec{b} \ \ldots \ \frac{1}{2}AA^T\vec{\lambda} = \vec{b}$$

Če je A polnega ranga, $\vec{\lambda} = 2(AA^T)^{-1}\vec{b}$.

Torej: $\vec{x} = \frac{1}{2}A^T\vec{\lambda} = A^T(AA^T)^{-1}\vec{b}$.

V splošnem (za A, ki mogoče ni polnega ranga)

dobimo $\vec{x} = A^+\vec{b}$, kjer je A^+ Moore-Penroseov posplošeni inverz A.



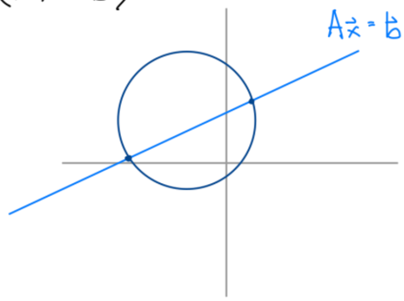
(c) • Spet z Lagrangeovo metodo (za rob dan z $\|\vec{x}-\vec{p}\|=d$ in $A\vec{x}=\vec{b}$):

$$L(\vec{x},\mu,\vec{\lambda}) = \|x\|^2 - \mu(\|\vec{x}-\vec{p}\|^2 - d^2) - \vec{\lambda}^T(A\vec{x}-\vec{b})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^T - 2\mu(\vec{x}-\vec{p})^T - \vec{\lambda}^T A = \vec{0}^T \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -(\|\vec{x}-\vec{p}\|^2 - d^2) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\lambda}} = -(A\vec{x}-\vec{b}) = \vec{0} \qquad (3)$$



(1)… $(2-2\mu)\vec{x} = A^T\vec{\lambda} - 2\mu\vec{p} \ \ldots \ \vec{x} = \frac{1}{2-2\mu}(A^T\vec{\lambda} - 2\mu\vec{p})$

Vstavimo v (3): $A(A^T\vec{\lambda} - 2\mu\vec{p}) = (2-2\mu)\vec{b}$

$AA^T\vec{\lambda} = (2-2\mu)\vec{b} + 2\mu A\vec{p} \ \ldots \ \vec{\lambda} = (AA^T)^{-1}((2-2\mu)\vec{b} + 2\mu A\vec{p})$

vstavimo λ
s prejšnje strani

Torej $\vec{x} = \frac{1}{2-2\mu}(A^T\vec{\lambda} - 2\mu\vec{p}) = \frac{1}{2-2\mu}\left(A^T\left((AA^T)^{-1}((2-2\mu)\vec{b} + 2\mu A\vec{p})\right) - 2\mu\vec{p}\right) =$

$$= \frac{1}{2-2\mu}\left((2-2\mu)A^T(AA^T)^{-1}\vec{b} + 2\mu(A^TA\vec{p} - \vec{p})\right) =$$

$$\vec{x} = A^T(AA^T)^{-1}\vec{b} + \frac{\mu}{1-\mu}(A^TA - I)\vec{p}$$

To sedaj vstavimo v (2) oz. $\|\vec{x}-\vec{p}\| = d$: …..

…. je konec blizu? Ugotovi samostojno!

KKT

minimiziramo $f(x_1, .\,., x_d)$ pri pogojih: $h_i(x_1, \dots, x_d) = 0$ za $i = 1 \dots m$ in $g_j(x_1, \dots, x_d) \leq 0$ za $j = 1, \dots, m$

$L(x_1, \dots, x_d, \mu_1, \dots, \mu_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, h_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j$

KKT:
$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \;\; i = 1, \dots, d$
$h_i = 0$
$g_i \leq 0$
$\boldsymbol{\lambda_j \leq 0}, \;\; j = 1, \dots, m$
$\boldsymbol{\lambda_j g_j (x_1, \dots, x_d) = 0}, \;\;\; j = 1, \dots, m$

za vsako neenačbo ločiš 2 primera:

1. $\lambda_j = 0$: v notranjosti območja $g_j \leq 0$ je minimum
2. $g_j(x_1, \dots, x_d) = 0$: minimum je na robu območja $g_j \leq 0$

2. V katerih točkah na območju, ki ga opisuje neenačba

$$4(x-1)^2+y^2 \leq 16,$$

zavzame funkcija

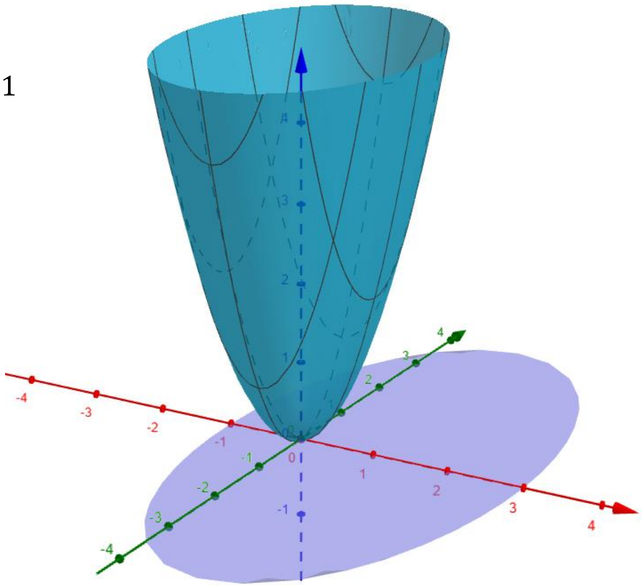
$$f(x,y) = 2x^2+y^2$$

največjo in najmanjšo vrednost?

Rešitev: Največjo vrednost 20 zavzame v točkah $(2,-2\sqrt{3})$ in $(-2,2\sqrt{3})$, najmanjšo 0 pa v točki $(0,0)$.

ponovno rešimo to nalogo, tokrat z uporabo KKT:

$D = \{(x,y):\ \ 4(x-1)^2+y^2 \leq 16\}\ \ \frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{y^2}{4} \leq 1$



$L(x,y,\lambda) = 2x^2+y^2-\lambda(4(x-1)^2+y^2-16)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x-8\lambda(x-1) = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y-2\lambda y = 0 \Rightarrow y(1-\lambda) = 0$

1. $\lambda = 0$:

$4x = 0 \Rightarrow x = 0$

$y(1-0) = 0 \Rightarrow y = 0$

✔ izpolnjeni so vsi KKT pogoji $\Rightarrow T(0{,}0)$ je minimum

2. $\lambda \neq 0$:

$4(x-1)^2 = 16$

$y(1-\lambda) = 0$

2.1. $1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

✗ ni izpolnjen KKT pogoj $\lambda_j \leq 0 \Rightarrow$ ni minimum

2.2. $y = 0$:

$4(x-1)^2+0^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$

x_1: $4 \cdot 3-8\lambda(3-1) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}$ ✗ ni izpolnjen KKT pogoj $\lambda_j \leq 0 \Rightarrow$ ni minimum

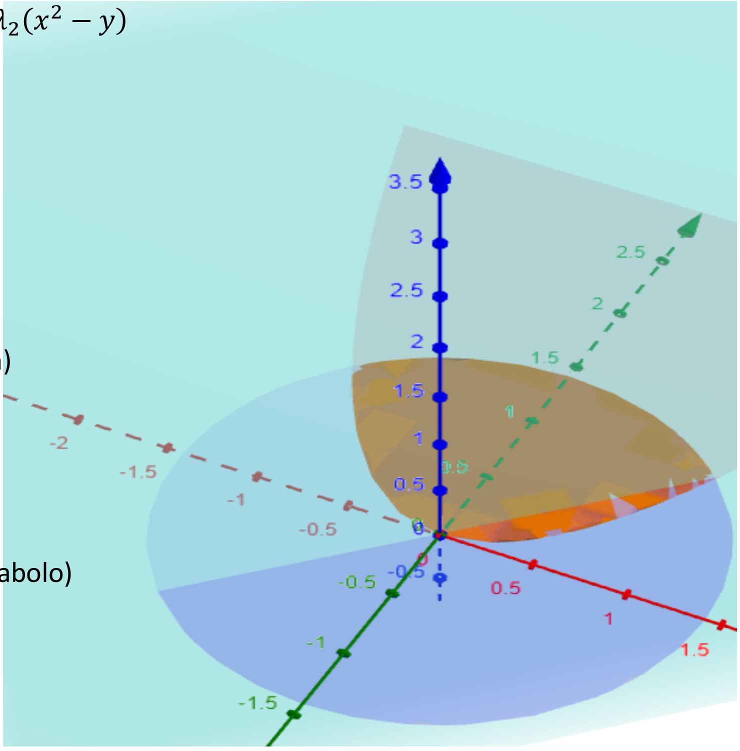
x_2: : $4 \cdot (-1)-8\lambda(-1-1) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$ ✗ ni izpolnjen KKT pogoj $\lambda_j \leq 0 \Rightarrow$ ni minimum

iskanje maksimuma:

ena možnost: iščemo minimum $-f(x,y)$

naloga: iščemo minimum $f(x,y)=y-x$ pri pogojih $x^2+y^2\leq 2$ in $y\geq x^2$

$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=y-x-\lambda_1(x^2+y^2-2)-\lambda_2(x^2-y)$
$\frac{\partial L}{\partial x}=-1-2\lambda_1 x-2\lambda_2 x=0 \quad *$
$\frac{\partial L}{\partial y}=1-2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \quad *$
$\lambda_1,\lambda_2\leq 0$
$\lambda_1(x^2+y^2-2)=0$ in $\lambda_2(x^2-y)=0$



imamo 4 možnosti:

1. $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=0$ (iščemo globalni ekstrem)
λ_1,λ_2 vstavimo v enačbi $*$
$-1-2\cdot 0\cdot x-2\cdot 0\cdot x=0\Rightarrow -1=0 \ \rightarrow\leftarrow$
$1-2\cdot 0\cdot y+0=0\Rightarrow 1=0 \ \rightarrow\leftarrow$

2. $\lambda_1=0,\quad \lambda_2\neq 0$
$(x^2-y)=0\Rightarrow y=x^2$ (iščemo min nad parabolo)
λ_1 vstavimo v enačbi $*$
$-1-2\lambda_2 x=0 \qquad \Rightarrow x=\frac{1}{2}$
$1+\lambda_2=0\Rightarrow \lambda_2=-1$
$y=x^2=\frac{1}{4}$
$T_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ ✓ izpolnjuje vse KKT pogoje

3. $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2=0$ (iščemo min nad krožnico)
$(x^2+y^2-2)=0\Rightarrow x^2+y^2=2$
λ_2 vstavimo v enačbi $*$
$-1-2\lambda_1 x=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2\lambda_1}$
$1-2\lambda_1 y=0\Rightarrow y=\frac{1}{2\lambda_1}$
$x^2+y^2=2\Rightarrow \frac{1}{4\lambda_1^2}+\frac{1}{4\lambda_1^2}=2\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1^2}=4\Rightarrow \lambda_{1_1}=-\frac{1}{2},\ \lambda_{1_2}=\frac{1}{2}$ ✗ λ_{1_2} ne izpolnjuje pogoja $\lambda_1\leq 0$
$\lambda_{1_1}=-\frac{1}{2}:\ \ x=1, y=-1$
$T_2(1,-1)$ ✗ ne izpolnjuje pogoja $y\geq x^2$

4. $\lambda_1\neq 0,\ \lambda_2\neq 0$ (iščemo min na obeh robovih (oz. na presečišču))
$x^2+y^2=2,\quad y=x^2 \quad\Rightarrow\quad T_3(-1{,}1),\ T_4(1{,}1)$
$T_3(-1{,}1):$
$-1+2\lambda_1+2\lambda_2=0$
$1-2\lambda_1+\lambda_2=0 \qquad \Rightarrow \lambda_2=0\Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{2}$ ✗ ne izpolnjuje pogoja $\lambda_1\leq 0$
$T_4(1{,}1):$
$-1-2\lambda_1+2\lambda_2=0$
$1-2\lambda_1+\lambda_2=0 \qquad \Rightarrow 2+3\lambda_2=0\Rightarrow \lambda_2=-\frac{2}{3}\Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{6}$ ✗ ne izpolnjuje pogoja $\lambda_1\leq 0$

edina točka, ki izpolnjuje pogoje je $T_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right):\ \ (x,y,\lambda_1,\lambda_2)=(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0,-1)$
ker je to edina rešitev in ker je to potreben pogoj, lahko sklepamo da je ta točka minimum

iskanje maksimuma: lahko obrnemo predznak funkcije $f(x,y)$,
lahko pa vzamemo isto funkcijo, in za lambde prilagodimo pogoj, da so pozitivne: $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$

(4) Write the Karush–Kuhn–Tucker conditions for the problems:

(a)

$$\begin{aligned} \text{minimise}_{x,y,z}\ & x + y^2 + z^2 \\ \text{such that}\ & x^2 + 2y^2 \leq 4 \\ & x + y + z = 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{minimise}_{x,y,z}\ & xyz \\ \text{such that}\ & x^2 + 2y^2 \leq 4 \\ & x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{aligned}$$

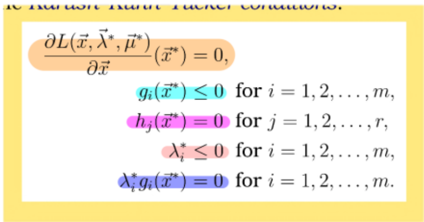
(c)

$$\begin{aligned} \text{minimise}_{x,y,z}\ & 2x + 2y^2 + xz \\ \text{such that}\ & x^2 + y^2 = 1 \\ & x + z = 0 \\ & xy \geq 0 \end{aligned}$$

(a) $f(x,y,z) = x + y^2 + z^2$ with condidions $\overbrace{x^2 + 2y^2 - 4}^{g(x,y,z)} \leq 0$

$\underbrace{x + y + z - 1}_{h(x,y,z)} = 0$

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = \overbrace{x + y^2 + z^2}^{f(x,y,z)} - \lambda\big(\overbrace{x^2 + 2y^2 - 4}^{g(x,y,z)}\big) - \mu\big(\underbrace{x + y + z - 1}_{h(x,y,z)}\big)$$


e Karush–Kuhn–Tucker conditions:

$$\frac{\partial L(\vec{x}, \vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*)}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^*) = 0,$$

$g_i(\vec{x}^*) \leq 0$ for $i = 1, 2, \ldots, m,$

$h_j(\vec{x}^*) = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, r,$

$\lambda_i^* \leq 0$ for $i = 1, 2, \ldots, m,$

$\lambda_i^* g_i(\vec{x}^*) = 0$ for $i = 1, 2, \ldots, m.$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2x\lambda - \mu = 0 \ldots \mu = 1 - 2x\lambda$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 4y\lambda - \mu = 0 \ldots \mu = 2y - 4y\lambda$

$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \mu = 0 \ \ldots \ \mu = 2z \ ,$

hence:

$2z = 1 - 2x\lambda \ \ldots \ 2(1-x-y) = 1 - 2x\lambda \quad (*)$

$2z = 2y - 4y\lambda \ \ldots \ \cancel{2}(1-x-y) = \cancel{2}y - \underset{2}{\cancel{4}}y\lambda \quad (**)$

$x^2 + 2y^2 - 4 \leq 0$

$x + y + z - 1 = 0 \ \ldots \ z = 1 - x - y$

$\lambda \leq 0$

$\lambda(x^2 + 2y^2 - 4) = 0$

$(*) \ldots 2x\lambda = 2x + 2y - 1 \ /:x \ \ldots \ 2\lambda = \dfrac{2x + 2y - 1}{x}$

$(**) \ldots 2y\lambda = x + 2y - 1 \ /:y \ \ldots \ 2\lambda = \dfrac{x + 2y - 1}{y}$

Hence: $\dfrac{2x + 2y - 1}{x} = \dfrac{x + 2y - 1}{y} \ /\cdot xy \ \ldots \ y(2x + 2y - 1) = x(x + 2y - 1)$

$y(2x+2y-1) = x(x+2y-1)$ … $\cancel{2xy} + 2y^2 - y = x^2 + \cancel{2xy} - x$

$2y^2 - y - x^2 + x = 0$

From 🟦 : $\lambda = 0$

from (*) and (**) we get:

$$\begin{array}{r} 2x+2y-1=0 \\ x+2y-1=0 \\ \hline x=0 \\ y=1/2 \end{array}$$

from 🟪 :

$0 + 1/2 + z - 1 = 0$

$z = 1/2$

Also $0^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \le 0$,
ie. 🟦 is satisfied.

$T_1\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ is one candidate for a global minimum.

$$\underline{f\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.}$$

or

$x^2 + 2y^2 - 4 = 0$

$2y^2 = 4 - x^2$

$4 - x^2 - y - x^2 + x = 0$

$y = 4 + x - 2x^2$

from $2\lambda = \frac{2x+2y-1}{x}$ we get

$$2\lambda = \frac{2x + 4 + x - 2x^2 - 1}{x} =$$

$$= \frac{3x - 2x^2 + 3}{x} \le 0$$

$2x^2 - 3x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4\cdot3\cdot2}}{4} = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

⋮

No solutions in this case, hence

5. Find ~~the largest and~~ the least value of the function $f(x,y)=xy-y+x-1$

(a) on the disk given by $x^2+y^2\le 2$,

(b) on the half-disk given by $x^2+y^2\le 2$ and $y\ge 0$.

(a) $\underbrace{x^2+y^2-2}_{g(x,y)} \le 0$ ... $L(x,y,\lambda) = xy-y+x-1-\lambda(x^2+y^2-2)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\vec{x},\vec{\lambda}^*,\vec{\mu}^*)}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^*) &= 0,\\
g_i(\vec{x}^*) \le 0 &\quad \text{for } i=1,2,\ldots,m,\\
h_j(\vec{x}^*) = 0 &\quad \text{for } j=1,2,\ldots,r,\\
\lambda_i^* \le 0 &\quad \text{for } i=1,2,\ldots,m,\\
\lambda_i^* g_i(\vec{x}^*) = 0 &\quad \text{for } i=1,2,\ldots,m.
\end{aligned}$$

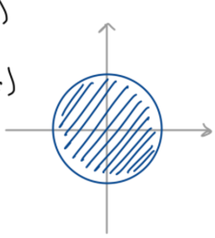
$\frac{\partial L}{\partial x} = y+1-2x\lambda = 0$ (*)

$\frac{\partial L}{\partial y} = x-1-2y\lambda = 0$ (**)

$x^2+y^2-2 \le 0$

$\lambda \le 0$

$\lambda(x^2+y^2-2) = 0$



$\lambda = 0$ or $x^2+y^2-2=0$

plug this into first two equations:

$y+1=0$

$x-1=0$

$x=1,\ y=-1$

$T_1(1,-1)$

From $1^2+(-1)^2-2=0\le 0$, this is an acceptable candidate.

(*) ... $2\lambda = \frac{y+1}{x}$

(**) ... $2\lambda = \frac{x-1}{y}$

$\frac{y+1}{x} = \frac{x-1}{y}$ $/\cdot xy$ ...

... $y(y+1) = x(x-1)$

$y^2+y-x^2+x=0$

$(y+x)(y-x)+(y+x)=0$

$(y+x)(y-x+1)=0$

$y=-x$ or $y=x-1$

$x^2+x^2-2=0$

$\begin{cases} x=\pm 1\\ y=\mp 1\end{cases}$

$2\lambda = \frac{-1+1}{1} = 0$

or $2\lambda = \frac{1+1}{-1} = -2$

those are also candidates for global minima

$\boxed{T_2(-1,1)}$

$x^2+(x-1)^2-2=0$

$2x^2-2x-1=0$

$x_{1,2} = \frac{2\pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

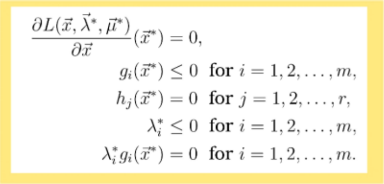
~~$2\lambda = \frac{y_1+1}{x_1} = 1,\ 2\lambda = \frac{y_2+1}{x_2} = 1$~~

~~$\lambda\le 0$ is not satisfied~~

$f(1,-1)=0,\ \underline{f(-1,1)=-4}$ ← global min.

(b) $f(x,y) = xy - y + x - 1$, $\overbrace{x^2+y^2-2}^{g_1(x,y)} \leq 0$, $y \geq 0$ ... $\overbrace{-y}^{g_2(x,y)} \leq 0$

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = xy - y + x - 1 - \lambda_1(x^2+y^2-2) - \lambda_2(-y)$$



$$\frac{\partial L(\vec{x},\vec{\lambda}^*,\vec{\mu}^*)}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^*) = 0,$$
$$g_i(\vec{x}^*) \leq 0 \text{ for } i = 1,2,\ldots,m,$$
$$h_j(\vec{x}^*) = 0 \text{ for } j = 1,2,\ldots,r,$$
$$\lambda_i^* \leq 0 \text{ for } i = 1,2,\ldots,m,$$
$$\lambda_i^* g_i(\vec{x}^*) = 0 \text{ for } i = 1,2,\ldots,m.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 1 - 2\lambda_1 x = 0 \qquad (*)$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \qquad (**)$$
$$x^2 + y^2 - 2 \leq 0$$
$$-y \leq 0$$
$$\lambda_1 \leq 0$$
$$\lambda_2 \leq 0$$

$$\lambda_1(x^2+y^2-2) = 0$$
$$\lambda_2 \cdot (-y) = 0$$

- $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 = 0$, then $(*)$ ... $y + 1 = 0$
  $(**)$ ... $x - 1 = 0$ ~~$T(1,-1)$~~ is not a valid candidate, as it does not satisfy $-y \leq 0$!

- $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 < 0$: $(*)$... $y + 1 = 0$
  $(**)$... $x - 1 + \lambda_2 = 0$
  from $\lambda_2 \cdot (-y) = 0$ ... $y = 0$
  contradiction, no solutions in this case

- $\lambda_1 < 0$ and $\lambda_2 = 0$; $(*)$ ... $y + 1 - 2\lambda_1 x = 0$
  $(**)$ ... $x - 1 - 2\lambda_1 y = 0$
  from $\lambda_1(x^2+y^2-2) = 0$ ... $x^2+y^2-2 = 0$

We have already solved this system on the previous page, y candidates were $T_{1,2}(\pm 1, \mp 1)$, T_1 is not acceptable since $-(-1) \nleq 0$. $T_2(-1,1)$? Is acceptable.

- $\lambda_1 < 0$ and $\lambda_2 < 0$: $x^2 + y^2 - 2 = 0$ and $-y = 0$
  $T_{3,4}(\pm\sqrt{2}, 0)$
  $x^2 - 2 = 0$
  $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 0$

Plug this into $(*)$ and $(**)$:

$0 + 1 - 2\sqrt{2}\lambda_1 = 0$... $\lambda_1 = +\frac{1}{2\sqrt{2}} \nleq 0$, so $T_3(\sqrt{2}, 0)$ is not acceptable

For $T_4(-\sqrt{2}, 0)$ we get:

$(*) \ldots \ 0 + 1 + 2\sqrt{2}\,\lambda_1 = 0 \ \ldots \ \lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq 0$ ✓

$(**) \ldots -\sqrt{2} - 1 + \lambda_2 = 0 \ \ldots \ \lambda_2 = \sqrt{2} + 1 \nleq 0 \ldots T_4$ is not acceptable.

Hence $f(-1, 1) = -4$ is the minimal value.

VEKTORSKO ODVAJANJE

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}} = I \quad \frac{\partial (A\vec{x})}{\partial \vec{x}} = A \quad \frac{\partial (\vec{x}^\top A \vec{x})}{\partial \vec{x}} = \vec{x}^\top (A^\top + A) \quad \frac{\partial (\vec{y}^\top \vec{z})}{\partial \vec{x}} = \vec{z}^\top \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} + \vec{y}^\top \frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{x}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right)^\top$$

primer 1: $f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{a}\|^2 + \vec{b}^\top \vec{x}$

$f(\vec{x}) = (\vec{x} - \vec{a})^\top (\vec{x} - \vec{a}) + \vec{b}^\top \vec{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = (\vec{x} - \vec{a})^\top \cdot I + (\vec{x} - \vec{a})^\top \cdot I + \vec{b}^\top = 0 \Rightarrow 2(\vec{x} - \vec{a})^\top + \vec{b}^\top = 0$

$2\vec{x} - 2\vec{a} + \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{2}\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2}$

$\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right)^\top = 2(\vec{x} - \vec{a}) + \vec{b} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} = 2I$ vse lastne vrednosti so $2 \geq 0$ $\Rightarrow$ lokalni minimum

primer 2: $\min f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pri pogoju $A\vec{x} = \vec{b}$ (m enačb)

za dane $b \in \mathbb{R}^n$ in $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$, A polnega ranga

$L(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \|\vec{x}\|^2 - \vec{\lambda}^\top (A\vec{x} - \vec{b})$

$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^\top - \vec{\lambda}^\top A = 0 \Rightarrow 2\vec{x} = A^\top \vec{\lambda} \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{2} A^\top \vec{\lambda}$

iz pogoja $A\vec{x} = \vec{b} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} A A^\top \vec{\lambda} = \vec{b}$ rezultat $AA^\top$ je $m \times m$ matrika, ki je polnega ranga $\Rightarrow$ je obrnljiva

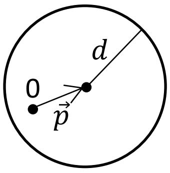
zato lahko izrazimo λ: $\vec{\lambda} = 2(AA^\top)^{-1} \vec{b}$ in vstavimo v $\vec{x} = \frac{1}{2} A^\top \vec{\lambda} = \boldsymbol{A}^\top (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top)^{-\mathbf{1}} \vec{\boldsymbol{b}}$

primer 3: $\min f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pri pogoju $\|\vec{x} - \vec{p}\|^2 \leq d^2$

uporabimo KKT pogoje:

$L(\vec{x}, \lambda) = \|\vec{x}\|^2 - \lambda(\|\vec{x} - \vec{p}\|^2 - d^2)$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^\top - 2\lambda(\vec{x} - \vec{p})^\top = 0 \Rightarrow \vec{x} = \lambda(\vec{x} - \vec{p})$$



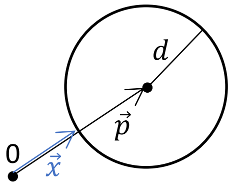
1. $\lambda = 0$: $\vec{x} = 0$ to je rešitev v primeru $\|\vec{p}\|^2 \leq d^2$

2. $\lambda \neq 0$: to je rešitev v primeru $\|\vec{x} - \vec{p}\|^2 = d^2$

$$\vec{x} = \lambda(\vec{x} - \vec{p}) \Rightarrow \vec{x} = \lambda\vec{x} - \lambda\vec{p} \Rightarrow \vec{x}(1 - \lambda) = \lambda\vec{p} \Rightarrow \vec{x} = \frac{\lambda\vec{p}}{\lambda - 1}$$

$$\vec{x} - \vec{p} = \frac{\lambda\vec{p}}{\lambda - 1} - \frac{(\lambda - 1)\vec{p}}{\lambda - 1} = \frac{\vec{p}}{\lambda - 1}$$

$$\|\vec{x} - \vec{p}\| = \frac{\|\vec{p}\|}{|\lambda - 1|} = d \Rightarrow |\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1}| = \frac{\|\boldsymbol{\vec{p}}\|}{\boldsymbol{d}}$$



2.1. $\lambda - 1 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 1$ ✗ ne izpolnjuje pogoja $\lambda \leq 0$

2.2. $\lambda - 1 < 0 \Rightarrow \lambda < 1 \Rightarrow -\lambda + 1 = \frac{\|\vec{p}\|}{d} \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{\|\vec{p}\|}{d}$

$\vec{x} = \frac{\lambda\vec{p}}{\lambda - 1} = \frac{\left(1 - \frac{\|\vec{p}\|}{d}\right)\vec{p}}{-\frac{\|\vec{p}\|}{d}} = \frac{(\|\vec{p}\| - d)\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$ če pogledamo geometrijsko, pride enako: $\frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} \cdot (\|\vec{p}\| - d)$

$$\lambda < 0 \Rightarrow 1 - \frac{\|\vec{p}\|}{d} < 0 \Rightarrow \|\vec{p}\| > d$$

↯(11) Naj bodo dani vektorji in matriki

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \vec{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Poiščite najmanjšo vrednost funkcije $\vec{x}^\mathsf{T} P\vec{x} + \vec{q}^\mathsf{T}(\vec{x} + \vec{r})$pri pogoju, da $\vec{x}$ reši linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$.

$f(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T} P \vec{x} + \vec{q}^\mathsf{T}(\vec{x}+\vec{r})$ pri pogoju $A\vec{x} = \vec{b}$ ... $\underbrace{A\vec{x} - \vec{b}}_{\vec{g}(\vec{x})} = \vec{0}$

$L(\vec{x},\vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^\mathsf{T} \vec{g}(\vec{x}) =$

$= \vec{x}^\mathsf{T} P \vec{x} + \vec{q}^\mathsf{T}(\vec{x}+\vec{r}) - \vec{\lambda}^\mathsf{T}(A\vec{x} - \vec{b})$

$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \vec{x}^\mathsf{T}(P+P^\mathsf{T}) + \vec{q}^\mathsf{T} - \vec{\lambda}^\mathsf{T} A = \vec{0}^\mathsf{T} \,/^\mathsf{T} \ldots\ (P+P^\mathsf{T})\vec{x} + A^\mathsf{T}\vec{\lambda} = -\vec{q}$

$\frac{\partial L}{\partial \vec{\lambda}} = -(A\vec{x} - \vec{b}) = \vec{0} \ \ldots\ldots \quad A\vec{x} = \vec{b}$

Torej: $\begin{bmatrix} P+P^\mathsf{T} & A^\mathsf{T} \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{q} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$, $\vec{x}$ - komponente rešitve tega linearnega sistema vstavimo v f.

V našem primeru je

$$\begin{bmatrix} P+P^\mathsf{T} & A^\mathsf{T} \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} -\vec{q} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešitev je (preveri) $\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, torej $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Najmanjša vrednost f je torej:

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = [-1,1,0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + [0,1,1]\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \underline{6}.$$