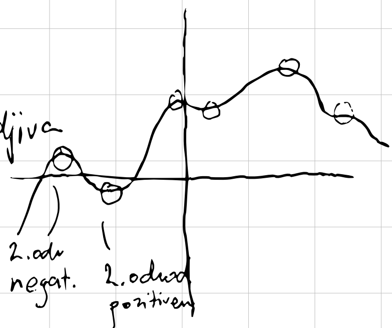
3.4. Lokalni ekstremi

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2x zvezno odvedljiva
3x
⋮



V obkroženih točkah je $f'(x)=0$.
Da vidimo, če je ekstrem: $f''(x)$

>0: lok. min
<0: lok. maks
$=0$?? prevoj, lahko tudi ekstrem (x^4) → moramo še naprej odvajati

---

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def: Funkcija f ima v točki $\underline{a}$

a) **lokalni minimum**, če je $f(\underline{x}) \geq f(\underline{a})$ za vsako $\underline{x}$, ki je "dovolj blizu $\underline{a}$". ("$\|\underline{x}-\underline{a}\|$ poljubno majhna")
($\underline{a}$ je lok. min., če obstaja $\varepsilon > 0$, da je $f(\underline{x}) \geq f(\underline{a})$ za $\forall \underline{x}$, $\|\underline{x}-\underline{a}\| < \varepsilon$)

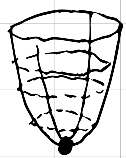
b) **lokalni maksimum**, če $\exists \varepsilon > 0$, da je $f(\underline{x}) \leq f(\underline{a})$ za $\forall \underline{x}$, $\|\underline{x}-\underline{a}\| < \varepsilon$.

c) **lokalni ekstrem**, če je lok. min. ali lok. maks.

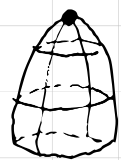
Naj bo $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (dovoljkrat) zvezno odvedljiva.

$n=2$

lok. min



lok. max.



$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a})=0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a})=0$$

$$\swarrow$$

$$(\operatorname{grad} f)(\underline{a})=0$$

(Tangentna ravnina v $\underline{a}$ na $z=f(x_1,x_2)$ je vzporedna z x-y ravnino.)

Če je $\underline{a}$ lokalni ekstrem funkcije f, je $(\operatorname{grad} f)(\underline{a})=0$ (vsi parcialni odvodi so enake 0).

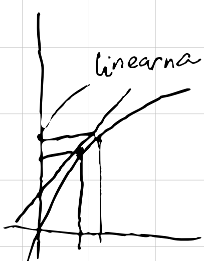
To so stacionarne točke funkcije f.

Vsaka stac. točka funkcije f je lahko

- lok. minimum
- lok. maksimum
- sedlo 

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

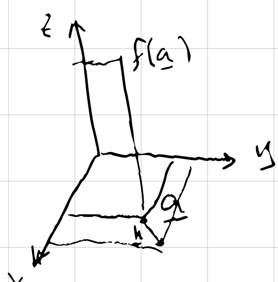
$$f(\underbrace{a+h}_{\text{mali prirastek}}) \doteq \underbrace{\underbrace{f(a) + h \cdot f'(a)}_{\text{linearna aproksimacija}} + \frac{f''(a)}{2} h^2}_{\text{kvadratna aproks.}} + \frac{f'''(a)}{3} + h^3 + \dots$$



$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\underline{a} \in D_f \qquad \underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$\underline{h}$ "vektor male spremembe" $\quad \underline{h} = (h_1, \dots, h_n)$



$$f(\underline{a}+\underline{h}) \doteq f(\underline{a}) + (\mathrm{grad}\, f)(\underline{a}) \cdot \underline{h}^T + \tfrac{1}{2} \underline{h}\, H_f(\underline{a}) \cdot \underline{h}^T$$

Če je $\underline{a}$ stac. točka (vsaj 2x odvedljive) funkcije $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, potem

$$f(\underline{a}+\underline{h}) \doteq f(\underline{a}) + 0 + \underbrace{\tfrac{1}{2} \overset{\vec{x}^T}{\underline{h}} \cdot \overset{M}{H_f(\underline{a})} \overset{\vec{x}}{\underline{h}^T}}_{> 2a \ \forall \underline{h}}$$

Izrek: Naj bo $\underline{a}$ stac. točka $D20$ funkcije $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

① Če $H_f(\underline{a})$ PD, potem $\left(\frac{1}{2}\underline{h} H_f(\underline{a}) \underline{h}^T \geq 0 \Rightarrow f(\underline{a}+\underline{h}) \geq f(\underline{a})\right) =$ je $\underline{a}$ lokalni minimum funkcije f.

② Če $H_f(\underline{a})$ ND, potem je $\underline{a}$ lok. maksimum funkcije f.

③ Če $H_f(\underline{a})$ nedefinitna, je $\underline{a}$ sedlo.

④ Če $\det H_f(\underline{a}) = 0$, uporabimo alternativne metode.

Primer: $b \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + bxy$$

a) Izračunajmo vse stacionarne točke f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + by$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + bx$$

$\Rightarrow$ Iščemo skupne ničle

$$4x + by = 0$$

$$2y + bx = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}bx \Rightarrow 4x + b\left(-\frac{1}{2}bx\right) = 0$$

$$\Rightarrow 8x - b^2 x = 0$$

$$(8 - b^2)x = 0$$

Rešitve: ① $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow S_1(0,0)$

② $x \neq 0 \Rightarrow 8 - b^2 = 0 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$

$$4x \pm 2\sqrt{2}\, y = 0$$

$$2y \pm 2\sqrt{2}\, x = 0$$

$$y = \mp\sqrt{2}\, x \leftarrow \text{edina veljavna enačba}$$

$$4x \pm 2\sqrt{2}(\mp\sqrt{2}\, x) = 0$$

$$4x - 4x = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Torej

$S_2(x, \mp\sqrt{2}\, x)$ če $b = \pm 2\sqrt{2}$

b) Klasificirajmo stacionarne točke
(poiščimo lok. ekstreme)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \qquad H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & b \\ b & 2 \end{bmatrix}$$

← neodvisno od x, y (slučajno)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = b = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Testirajmo.

S_1: $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & b \\ b & 2 \end{bmatrix}$ Zanima nas če je PD.

$4 > 0$ Sylvester

$\det D_f(0,0) = 8 - b^2$

a) $8 - b^2 > 0 \Rightarrow b \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

$H_f(0,0)$ je PD $\rightarrow$ $S_1(0,0)$ je lokalni minimum

b) $8 - b^2 < 0 \Rightarrow b > 2\sqrt{2}$ ali $b < -2\sqrt{2}$

$H_f(0,0)$ ni definitna $\Rightarrow$ $S_1(0,0)$ je sedlo.

S_2: Če $b = \pm 2\sqrt{2}$

$H_f(x, \mp\sqrt{2}x) = \begin{bmatrix} \overset{=4}{\boxed{4}} & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ $4 > 0$

$\det H_f(x, \mp\sqrt{2}x) = 8 - 8 = 0$

$\Rightarrow$ Ne vemo, kaj se zgodi (bi morali preveriti višje odvode)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A simetrična

$f(\underline{x}) = \frac{1}{2}\underline{x} A \underline{x}^T$

$\left(= \frac{1}{2}a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + \frac{1}{2}a_{22}x_2^2 + \ldots + \frac{1}{2}a_{nn}x_n^2\right)$

Določimo lok. ekstreme f in jih klasificirajmo.

$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^T A \vec{x}$ $\quad \frac{1}{2}\frac{\partial(x^T A x)}{\partial \vec{x}} = \frac{1}{2} 2\vec{x}^T A = \vec{x}^T A$

Iščemo tiste $\vec{x}$: $\vec{x}^T A = \vec{0}$ $/^T$

$$A^T \vec{x} = \vec{0}$$

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

Torej: $\vec{x} \in N(A)$

$n=2$: $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & 1 \end{bmatrix}$ $\quad b^2 = 8$

Hessejeva matrika? $\quad \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}}_{\text{grad} f}\Big)^T = H_f$ $\quad$ splošna def.

V našem primeru:

$$H_f(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)^T = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\vec{x}^T A\right)^T \overset{\text{sim.}}{=} \frac{\partial(A\vec{x})}{\partial \vec{x}} = A$$

Če A PD, je $\vec{x}$ lok. minimum.

ND, je $\vec{x}$ lok. max.

nedef., je $\vec{x}$ sedlo.

$\det A = 0, \ldots$???

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (DZOF) je ① konveksna na območju D, če je $H_f(\underset{\sim}{a})$ PD za $\forall \underset{\sim}{a} \in D$.

② konkavna na D, če $H_f(\underset{\sim}{a})$ ND za $\forall \underset{\sim}{a} \in D$.

($\Leftrightarrow$ $-f$ konveksna

$\Leftrightarrow H_{-f}(\underset{\sim}{a})$ PD za $\forall \underset{\sim}{a} \in D$.)