$A^T A$ je PSD

velja tudi, da če M PSD, je $M = A^T A$ za neko matriko

Razcep Choleskega

$M = LL^T$, kjer je L spΔ $\qquad L =$

A PSD

$$A = \begin{bmatrix} a & \boxed{b^T} \\ \boxed{b} & \boxed{B} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R}^n \\ B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} \end{matrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \vec{0}^T \\ \frac{1}{\sqrt{a}} b & I \end{bmatrix} \qquad L_1 \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & \underbrace{B - \frac{1}{a} b b^T}_{A_2' \text{ -- postopek ponovimo}} \end{bmatrix} L_1^T = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \vec{0}^T \\ \frac{1}{\sqrt{a}} b & B - \frac{1}{a} b b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \frac{1}{\sqrt{a}} b^T \\ \vec{0} & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & b^T \\ b & \frac{1}{a} b b^T + B - \frac{1}{a} b b^T \end{bmatrix} = A$$

$$L = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & L_2' \end{bmatrix}$$

---

①

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 8 & 2\\ -1 & 2 & 6\end{bmatrix}$$ Naredimo razcep Chol.

B

$$a=1,\quad b=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

$$B-\frac{1}{a}bb^T=\begin{bmatrix}8 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}-\frac{1}{1}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}=A_2$$

$$L_1=\begin{bmatrix}\sqrt{1} & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{1}}2 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{1}}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

A_2: $a=4\quad b=[4]\quad B=[5]\quad B-\frac{1}{a}bb^T=5-\frac{1}{4}16=1$

$$L_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{4} & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\qquad L_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{1}\end{bmatrix}$$

$$L=L_1L_2L_3\overset{(I)}{=}L_1L_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

LL^T mora biti A

Če ne bi bila PSD, bi pri korenjenju prišel lahko en minus

2

$$A=\begin{bmatrix}4&2&-2\\2&2&1\\-2&1&6\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3&-4&-4\\-4&2&-2\\-4&-2&-5\end{bmatrix}$$

Ugotovimo, če sta PD

če so vse označene determ. pozitivne so vse lastne vr. pozitivne

B: $D_1=3$ poz.

$D_2=6-16=-10$ neg. $\Rightarrow$ B ni PD

A: $D_1=4$ poz.

$D_2=8-4=4$ poz

$$D_3=6\cdot 4-\begin{vmatrix}4&2\\-2&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&2\\-2&1\end{vmatrix}=24-(4+4)-2(2+4)=$$
$$=24-8-12=4 \text{ poz.}$$

[1] $a=4$ $\quad B=\begin{bmatrix}2&1\\1&6\end{bmatrix}$

$b=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$ $\quad B-\frac{1}{a}bb^T=\begin{bmatrix}2&1\\1&6\end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$

$$L_1=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

[2] $a=2$ $\quad b=2$ $\quad B=5$ $\quad 5-1\cdot 2\cdot 2=1$

$$L_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&2&1\end{bmatrix} \qquad L_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\sqrt{1}\end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

Ponavljanje

(5) $J=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$ $N=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $J+N=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&-1&1\\2&0&1\end{bmatrix}$

zagotovo se da diag., ker je sim.

a) J in $J+N$ isti karakteristični polinom

$$\det(J-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\0&-1-\lambda&0\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\det(J+N-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\-1&-1-\lambda&1\\2&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

isto, če razvijemo po srednjem stolpcu

$$=(-1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-4\right)=$$

$$=(-1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-4)=(-1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

$\lambda_1=3 \quad \lambda_{2,3}=-1$

Matrike se ne da diagonalizirati, kadar ima večkratno l.vr. in 2

Imamo 2D l. podpr.

$N(J-(-1)I)$ $\begin{bmatrix}2&0&2\\0&0&0\\2&0&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $x+z=1$, y,z sta prosti $v_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$N(J+N-(-1)I):\begin{bmatrix}2&0&2\\-1&0&1\\2&0&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ y prosta $v_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ imamo 1D l. podpr.

$N(J-3I):\begin{bmatrix}-2&0&2\\0&-4&0\\2&0&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $x-z=0$, $y=0$, prosta je z $v_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix}3&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$ (l. vrednosti) $P=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ $J=PDP^{-1}$ (lahko preverimo)

lahko dobimo tudi $Q=\begin{bmatrix}q_1&q_2&q_3\end{bmatrix}$ $J=QDQ^T$

③ $K=\begin{bmatrix}2&2&1\\2&1&2\\1&2&2\end{bmatrix}$ Želimo najboljši aproksimaciji ranga 1 in 2

X_1 rang 1 $\|X_1-K\|_F$ min.

X_2 rang 2 $\|X_2-K\|_F$ min

Je sim.: $K^T=K \Rightarrow K=U\Sigma V^T=QDQ^T$

L.vr.:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&2&1\\2&1-\lambda&2\\1&2&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&1\\2&1-\lambda&2\\-1+\lambda&0&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&1\\4&1-\lambda&2\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\big((3-\lambda)(1-\lambda)-8\big)=(1-\lambda)(-5-4\lambda+\lambda^2)=$$

$$=(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5)\quad \lambda_1=5\quad \lambda_2=1\quad \lambda_3=-1$$

$\boxed{\lambda_1=5}$

$$\begin{bmatrix}-3&2&1\\2&-4&2\\1&2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&1\\-3&2&1\\1&2&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&-4&4\\0&4&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}x-z=0\\y-z=0\end{matrix}\quad v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\underset{[q_1 q_2 q_3]}{Q}\,D\,\underset{[\ldots q_1 \ldots]}{Q^T}=\lambda_1 q_1 q_1^T+\lambda_2 q_2 q_2^T+\lambda_3 q_3 q_3^T$$

Za aproksimacijo ranga 1 imamo že dovolj.

Izračunajmo:

$$5\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}=\frac{5}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=X_1$$

Pozor: Morali smo izbrati pravi vrstni red lastnih vrednosti!

$\boxed{\lambda_2=1}$

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&2\\1&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{matrix}x+z=0\\y=0\end{matrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$X_2=\lambda_1 q_1 q_1^T+\lambda_2 q_2 q_2^T=X_1+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\ldots$$

4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Želimo SVD razcep te matrike.

$A = U \Sigma V^T$

Računamo ali $A^T A$ ali $A A^T$ - izberemo manjšo. ($\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^{3\times 3}$)

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = A^T A = (U \Sigma V^T)^T (U \Sigma V^T) = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T$$
$$= Q D Q^T$$

en l. vekt. bo gotovo $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ker je sim., so l. vekt. $\perp$.

Ni veliko izbire ... $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Bv_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1 \cdot 1$

$Bv_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \end{bmatrix} = v_2 \cdot 9$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\lambda_1 = 1}_{= \sigma_2^2}$, $\lambda_2 = 9 = \sigma_1^2$

$\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 1$

$V = [q_1, q_2]$ $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

stolpci V so ONB $\mathbb{R}^2$

stolpci U so ONB $\mathbb{R}^3$

Velja $Aq_1 = \sigma_1 u_1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A q_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$A q_2 = \sigma_2 u_2 \Rightarrow u_2 = \dots$

dobimo 2 stolpca matrike U.

3. stolpec $\to$ vekt. pr.

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \boxed{u_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ \boxed{0 & 0} \end{bmatrix} [q_1, q_2] = A$$

$\to$ vseeno