$\boxed{1}$ Osnovni pojmi lin. algebre

⓪ Ponovitev

$\mathbb{R}$ števila $\mathbb{R}^n$ vektorji $\mathbb{R}^{m\times n}$ matrike (m vrstic, n stolpcev)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$N(A)$ ničelni prostor (jedro)

$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, A\vec{x} = \vec{0}\}$

rešitev homogenega sistema matrike A

lastni vekt., ki imajo l.vr. 0 $(+\vec{0})$

$C(A)$ stolpčni prostor (slika)

$=$ vse možne lin. komb. stolpcev

$\{\alpha_1 A^{(1)} + \alpha_2 A^{(2)} + \dots + \alpha_n A^{(n)}; \alpha_i \in \mathbb{R}\}$

rang(A) št. pivotov, št. lin. neodvisnih stolpcev

$\Downarrow$

$\text{rang}(A) = \dim C(A)$

$\dim C(A) + \dim N(A) = n$

rang se ohranja z G. elim.

pivotni stolpci $\to$ rang

ne -||- -||- $\to$ ničelni prostor

$N(A)^\perp = C(A^T)$

Če izračunamo $\det(A-\lambda I)$, bo to polinom Δ_A stopnje n, ki je karakteristični polinom. Ničle so l. vrednosti.

Det. matr. → pretvorimo v zg. trikotno, pomnožimo diag.

L. vekt.: vstavimo λ v $A-\lambda I$ .. l. podprostor pri vr. λ
$= N(A-\lambda I)$

l. vekt $\in N$(l. podpr.)

! l. vektor je tisti vektor, ki ga A pomnoži v njegov večkratnik
⇒ smeri, kjer matrika deluje kot razteg

Matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sta podobni, če obstaja taka obrnljiva matrika $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da →

obrnljiva: obstaja inverz – $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1}A$
⇔ rang $P = n$ .. je poln ⇔ $\det P \neq 0$ ⇔ 0 ni l. vr. od P

→ $A = PBP^{-1}$. Podobni matriki imata isti karakteristični polinom. ⇒ iste l. vr., isto det

---

Matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonalna, če
a) so vsi stolpci paroma pravokotni
b) je vsak stolpec dolžine 1.

$\vec{q}_i \perp \vec{q}_j, \; i \neq j$, $\|\vec{q}_i\| = 1$

$Q = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 & \vec{q}_2 & \cdots & \vec{q}_n \end{bmatrix}$

$\vec{q}_i \cdot \vec{q}_i = 0$ ⇝ če pomnožimo s samim sabo $=1$
če z drugim pravokotnim $=0$

V tem primeru je $Q^T Q = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 \\ \vdots \\ \vec{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_1 \vec{q}_2 \dots \vec{q}_n \end{bmatrix} = I$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalna $\Leftrightarrow Q^T Q = I$ $\qquad Q^{-1} = Q^T$

Q ortogonalna $\Leftrightarrow Q^T Q = I = Q Q^T$ $\qquad$ inverz!

veliko lepih lastnosti ... det, l.v, ...

A in B sta si ortogonalno podobni, če obstaja ortogonalna Q, da je

$$A = Q B Q^{-1} = Q B Q^T$$

① Sled matrike

$$A = [a_{i,j}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Sled A ... oznaka $tr(A)$

definicija $tr(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Le za kvadratne matrike, saj je lahko definirati diagonalo

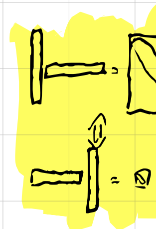
Lastnosti:

① $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ $\qquad$ linearnost

$tr(\alpha A) = \alpha \, tr(A)$

② $tr(AB) \neq tr(A)\,tr(B)$ multiplikativnost protiprimer: I_2 in $2I_2$

③ $tr(AB) = tr(BA)$ za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$



manjši tr za računat

dokaz:

$A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} =$$

def. produkta

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{k,i}\, a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} = tr(BA)$$

④ $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podobni $\Rightarrow A = PBP^{-1}$ za obrnljivo P

$tr(A) = tr(PBP^{-1}) = tr(P^{-1}PB) = tr(IB) = tr(B)$ (DEF)

tj. podobni matriki imata isto sled