TEMPUS NOVUM

Gregor Pavlič
Dušan Kavka
Marina Rugelj
Janez Šparovec

Matematika za gimnazije

Modrijan

TEMPUS novum

Matematika za gimnazije

Avtorji
Gregor Pavlič, Dušan Kavka, Marina Rugelj, Janez Šparovec

Recenzenta
dr. Marjan Jerman, Hanka Lebič

Urednica
Simona Knez

Lektorici
Renata Vrčkovnik, Aleksandra Kocmut

Ilustracije
Darko Simeršek

Fotografije
Arhiv založbe Modrijan, Bigstock, Mojmir Fortuna, Igor Modic, Gregor Pavlič, Marina Rugelj

Oprema in oblikovanje
Andreja Globočnik

Izdala in založila Modrijan založba, d. o. o.
Za založbo Branimir Nešović
Natisnjeno v Sloveniji
Naklada 2500 izvodov
Ljubljana 2016
Prva izdaja, tretjii natis

Strokovni svet Republike Slovenije za splošno izobraževanje je na seji dne 21. 5. 2015 s sklepom št. 613-2/205 potrdil učbenik Tempus novum, matematika za gimnazije, ki so ga napisali Gregor Pavlič, Dušan Kavka, Marina Rugelj in Janez Šparovec.

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.3)

TEMPUS novum : matematika za gimnazije / Gregor Pavlič ... [et al.] ; [ilustracije Darko Simeršek ; fotografije arhiv založbe Modrijan ... et al.]. – 1. izd., 3. natis. – Ljubljana : Modrijan, 2016

ISBN 978-961-241-800-7
1. Pavlič, Gregor, 1954–
283413760

www.modrijan.si

KAZALO

UVOD

Tempus fugit (čas teče) in iztekel se je tudi staremu učbeniku *Tempus*. Pred vami je prenovljen učbenik. S tem se je zaključila prenova serije učbenikov, ki ste jih dijaki in učitelji celo desetletje z veseljem jemali v roke.

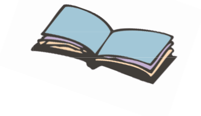
Tudi *Tempus novum* sledi prenovljenemu učnemu načrtu, ki več poudarka namenja povezavi matematike s svetom in življenjem, modeliranju in uporabi informacijske tehnologije. Učbeniku so dodane tudi zanimive vsebine, ki jih lahko učitelji po svoji presoji vključijo v pouk in niso obvezne.

Poleg nove likovne podobe učbenik vsebuje tudi veliko novih zanimivih zgledov in svežih nalog za utrjevanje znanja, zato pri njegovi uporabi ne bodo potrebne dodatne zbirke vaj.

Novim generacijam dijakov in njihovim učiteljem želimo, da bi prenovljeni učbenik s še večjim veseljem jemali v roke kot njegovega predhodnika in se dobro pripravili na študij.

avtor prenove Gregor Pavlič

Legenda:

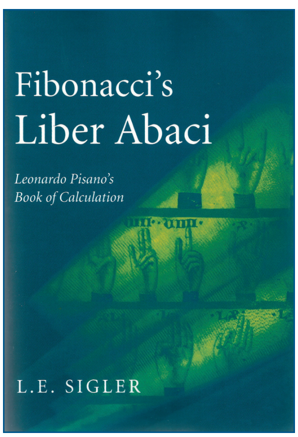
 zgledi  naloge

posebna in izbirna znanja

1. **1.** težje naloge in zgledi

ZAPOREDJA

- Zaporedja in njihove lastnosti
- Aritmetično zaporedje
- Geometrijsko zaporedje
- Matematična ali popolna indukcija
- Limita zaporedja
- Neskončne vrste
- Navadno in obrestno obrestovanje



Leta 1202 je v Pisi izšla knjiga, ki je v temeljih pretresla evropsko matematiko. Leonardo iz Pise (1180–1250) je namreč napisal delo *Liber Abaci* (*Knjiga o računanju*), v katerem je predstavil prednosti indijskega načina pisanja števil, ki ga uporabljamo še danes, in računanje z njim. S tem se je začel zaton rimskih števil in mestni številski sistem je zamenjal nerodnega seštevalnega.

Leonardo Pisano ali Fibonacci, kot se je sam podpisoval (figlio ali sin Bonaccija), se je rodil v pomembni italijanski družini. Oče je bil bogat trgovec in je na svoja potovanja po Sredozemlju jemal tudi malega Leonarda. Nekaj časa je bil oče celo upravnik trgovske postojanke v Buggii v današnji Alžiriji. Na teh potovanjih je Fibonacci prihajal v stik z mnogimi tujci, in ker je bil odprte glave, je opazil njihovo spretnost pri računanju.

Čeprav ima knjiga *Liber Abaci* v angleškem prevodu kar 600 strani, je danes najbolj znana po nalogi o zajčkih.

Zajčji par postane ploden po enem mesecu. Po enem mesecu in potem vsak naslednji mesec ta par skoti po en par novih zajčkov različnega spola. Koliko parov zajčkov je na svetu po n mesecih?

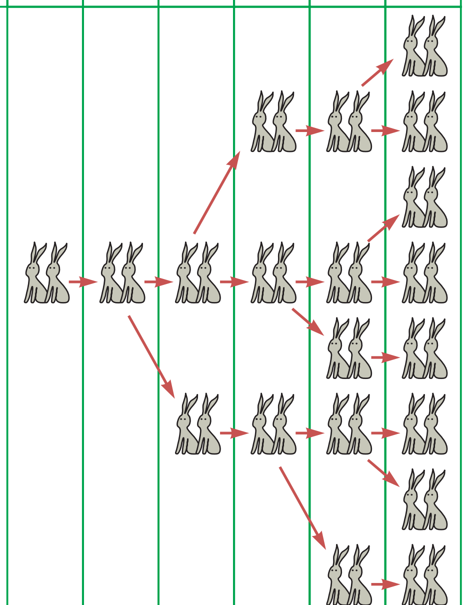
Na začetku imamo en par, po enem mesecu še vedno samo en par; po drugem mesecu sta že dva para zajčkov, saj je imel prvi par potomce; po treh mesecih so na svetu trije pari zajčkov: prvi par je imel drugič potomce, drugi par pa jih še ne more imeti … Rešitev naloge najlaže prikažemo z drevesno strukturo, iz katere preberemo člene zaporedja ter zakonitost oz. rekurzivno formulo Fibonaccijevega zaporedja:

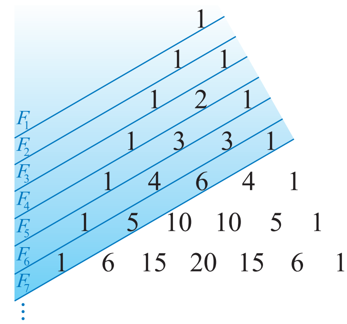
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \dots$$

Pisa: krstilnica, stolnica, v ozadju 54 m visoki kampanile, znameniti poševni stolp

$$F(1) = 1,\ F(2) = 1,\ F(n+2) = F(n) + F(n+1)$$

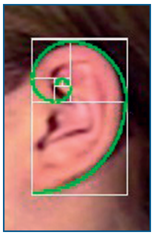
Čas	0	1	2	3	4	5	...
Število parov	1	1	2	3	5	8	...

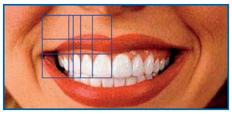


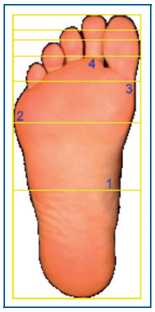


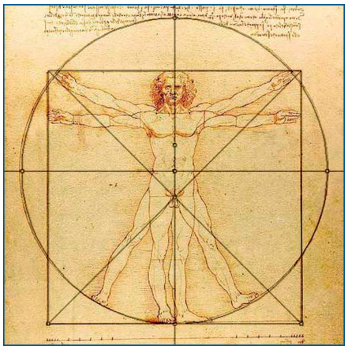
Fibonaccijevo zaporedje najdemo tudi v Pascalovem trikotniku.

Leta 1755 je škotski matematik Robert Simpson dokazal, da se razmerja dveh zaporednih členov Fibonaccijevega zaporedja: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \ldots, \frac{F_{n+1}}{F_n}$, bližajo iracionalnemu številu $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ki ga imenujemo tudi zlato število oz. delitev daljice v razmerju **zlatega reza**. To pomeni, da je razmerje celote proti večjemu delu enako razmerju večjega dela proti manjšemu.



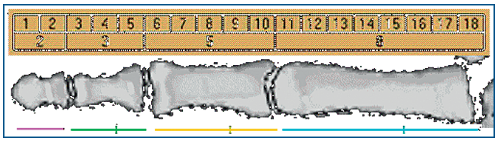


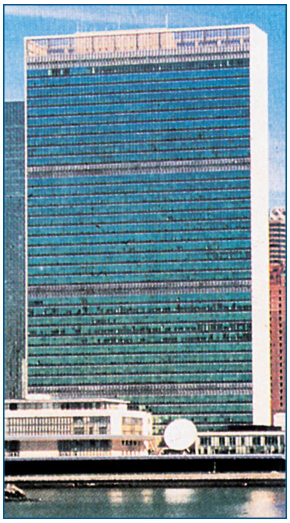




Da Vincijev »človek v krogu« (1410) interpretira razmerja človeškega telesa po rimskem arhitektu Vetruviju.

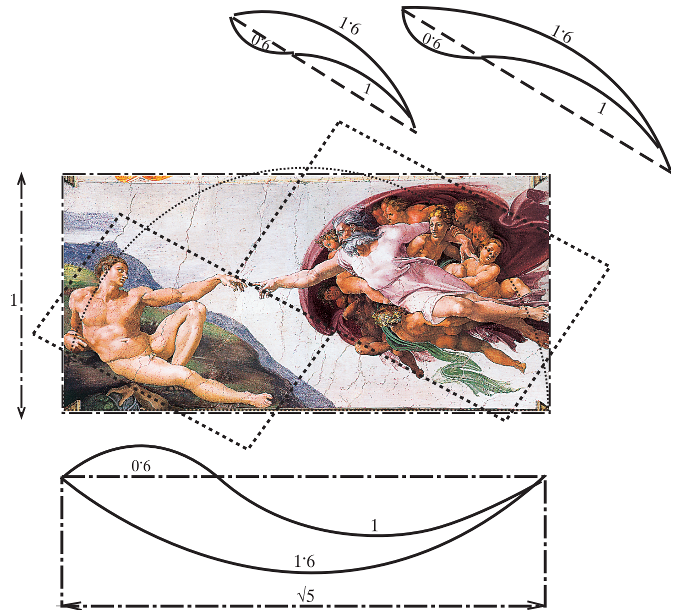
Grki so to razmerje imenovali tudi stalno razmerje. Ker so predmeti v zlatem rezu očem najbolj všečni in so tudi razmerja v človeškem telesu taka, so ga uporabljali umetniki od antike naprej.





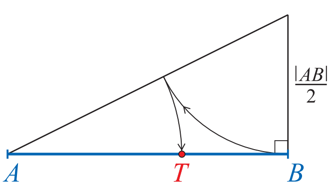
Palača Združenih narodov v New Yorku je vizualno razdeljena na tretjine, ki so ravno takih dimenzij kot Partenon.

Najbolj znani kipi v zlatem rezu so iz klasične grške dobe, v istem razmerju so tudi mere svetišča Partenon v Atenah. To razmerje je uporabil tudi Michelangelo pri slikanju slavne freske *Stvarjenje človeka* na stropu Sikstinske kapele. V času renesanse so zlati rez imenovali kar *božansko razmerje* ali *proportio divina*.



Michelangelo (1475–1564): Stvarjenje prvega človeka

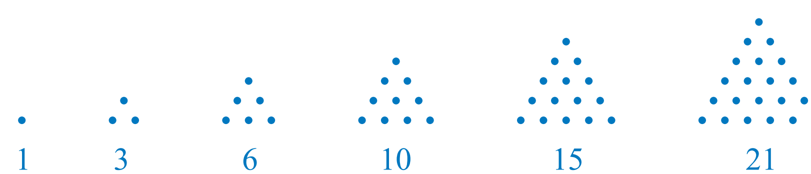
Načrtovanje točke T, ki deli daljico AB v zlatem rezu:



Pravokotnikom, katerih razmerje stranic je zlato število $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pravimo zlati pravokotniki.

Še ena številska zaporedja so v zgodovini matematike odigrala pomembno vlogo, nekateri celo trdijo, da predstavljajo most med geometrijo in algebro, to so t. i. **figurativna števila**. Ponazorimo jih s pikami, ki oblikujejo določen lik. Najbolj znana so trikotniška, kvadratna, pentagonalna, heksagonalna … števila. Lahko pa so pike tudi prostorsko urejene in dobimo kubična, tetraedrska, piramidalna … števila.

V množici figurativnih števil samo za okus poškilimo na trikotniška števila.

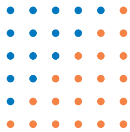


Členi zaporedja 1, 3, 6, 10, 15, 21 … so v resnici vsote prvih naravnih števil, kar se lepo vidi iz strukture same. Vrednost kateregakoli trikotniškega števila dobimo po formuli:

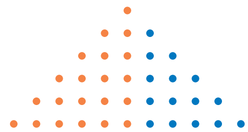
$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Trikotniška števila imajo še vrsto lepih lastnosti, npr.:

- vsota dveh zaporednih trikotniških števil je kvadratno število: $T_{n-1} + T_n = n^2$, prav tako tudi vsota vseh lihih števil od 1 do $2n-1$,

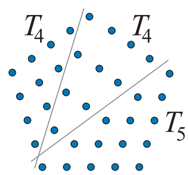


$T_{n-1}+T_n=n^2$



$T_{n-1}+T_n=1+3+5+\ldots+(2n-1)$

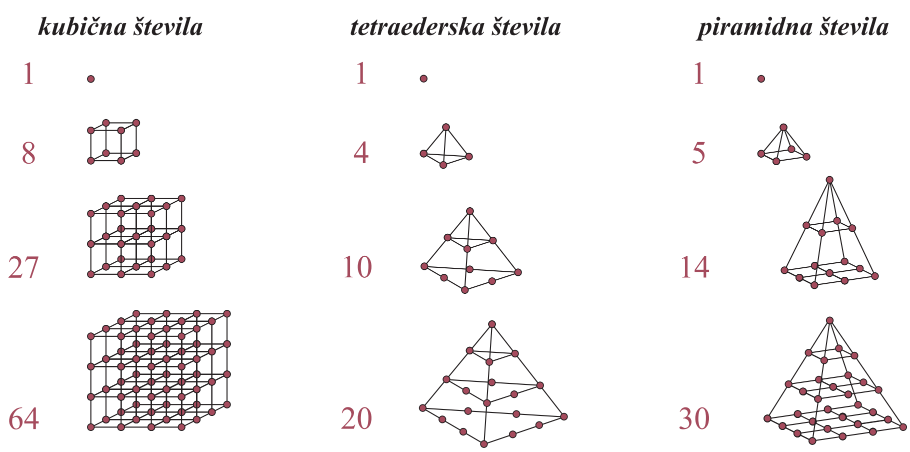
- vsota treh trikotniških števil je pentagonalno število:
  $2T_{n-1}+T_n=P_n$,



$P_n=T_n+2T_{n-1}$

- razlika kvadratov zaporednih trikotniških števil je kubično število:
  ${T_{n+1}}^2-{T_n}^2=(n+1)^3$.

Poznamo še več vrst figurativnih števil v treh dimenzijah:



Jurij Vega je 20. avgusta 1789 izračunal število π na 140 (137 pravilnih) decimalk in tako dosegel tedanji svetovni rekord. Do njega je prišel tako, da je izpopolnil Marchinovo enačbo iz leta 1706 in dobil enačbo, ki hitreje konvergira.

Marchinova enačba:

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot 5^{2k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot 239^{2k+1}}$$

Vegova enačba:

$$\pi=4\left(5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{3}{79}\right)$$

Pitagorejci so od vseh števil najbolj spoštovali število 10. Vsoto 1 + 2 + 3 + 4 = 10 so imenovali tetraktys (posvečena četverica) in je zastopala osnovne elemente: ogenj, vodo, zrak in zemljo.

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28
29 30 31 32 33 34 35 36

Trikotniška števila so na hipotenuzi trikotnika naravnih števil.

Zaporedja in njihove lastnosti

Prva tri leta gimnazijske matematike smo se ukvarjali z realnimi funkcijami realne spremenljivke $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tokrat bomo množico neodvisnih spremenljivk $\mathbb{R}$ zamenjali z množico naravnih števil $\mathbb{N}$. Tako dobljene funkcije niso **zvezne** ali **odsekoma zvezne**, temveč **diskretne**.

Zaporedje lahko predstavimo tudi kot funkcijo, kjer so originali indeksi zaporedja.

Zaporedje je funkcija, ki vsakemu naravnemu številu priredi natanko določeno realno število. Lahko rečemo tudi, da je zaporedje po nekem pravilu urejena množica realnih števil.

$$\boldsymbol{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}}$$

$$\boldsymbol{f\colon n \mapsto a_n; \quad f(n) = a_n}$$

$$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1} \ldots} \quad \textbf{členi zaporedja } \{\boldsymbol{a_n}\}$$

Prvi člen označimo z a_1, n-ti ali **splošni člen** pa z a_n.

Zaporedje $\{a_n\}$ lahko predstavimo na različne načine.

a) Povemo predpis $f(n) = a_n$.

b) Navedemo prvih nekaj členov zaporedja in potem iz njih »ugotovimo« pravilo za tvorjenje naslednjih. Tu je potrebno opozorilo, da ima vsako končno zaporedje neskončno mnogo nadaljevanj in da po navadi »uganemo« tisto pravilo, ki je najenostavnejše in vidno »na oko«.

c) Zaporedje definiramo rekurzivno. To pomeni, da z dvema ali več členi podamo pravilo za tvorjenje ostalih členov.

Kot smo že navajeni, lahko funkcijam narišemo graf. **Graf zaporedja** je množica urejenih parov $\{(n, a_n);\ n \in \mathbb{N}\}$, če je zaporedje **neskončno**, ali $\{(i, a_i);\ i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$, če je zaporedje **končno**.

ZGLEDI

1. Zapišimo 365. in 2014. člen zaporedij $f(n) = 2n - 300$ in $g(n) = \frac{n-1}{n+1}$.

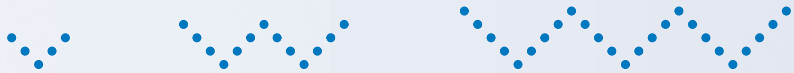
$$f(365) = 2 \cdot 365 - 300 = 430$$

$$g(365) = \frac{365-1}{365+1} = \frac{364}{366} = \frac{183}{183}$$

$$f(2014) = 2 \cdot 2014 - 300 = 3728$$

$$g(2014) = \frac{2014-1}{2014+1} = \frac{2013}{2015}$$

2. Koliko pik bi vsebovali naslednji členi, če bi zaporedje nadaljevali? Poiščimo še splošni člen zaporedja.



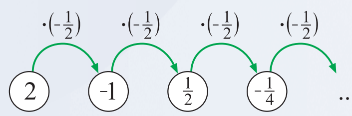
Zamislimo si četrti člen zaporedja in iz vseh štirih s štetjem pik ugotovimo: $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_3 = 25$, $a_4 = 41$.

Če pri vseh členih/likih odstranimo zgornjo vrstico, liki razpadejo na V-je; vsak člen na toliko V-jev, kolikor je njegov indeks. Zaporedni V-ji znotraj člena imajo liho število pik. Ko dodamo še pike zgornje vrstice (zaporedna naravna števila, začenši z 2), dobimo naslednjo formulo:

$a_n = n(2n+1) + (n+1) = 2n^2 + 2n + 1 = n^2 + (n+1)^2$

Vsak člen tega zaporedja je enak vsoti kvadratov dveh zaporednih naravnih števil.

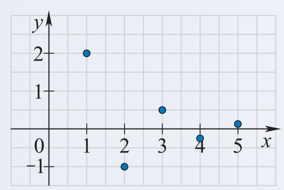
3. Poiščimo enega od predpisov zaporedja, če poznamo prvih nekaj členov zaporedja $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$ …, in narišimo njegov graf.



Vsak člen zaporedja je polovica prejšnjega s spremenjenim predznakom.

Velja $f(1) = 2, f(2) = -1, f(3) = \frac{1}{2}$
in splošno

$f(n) = 2(-\frac{1}{2})^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot 2^{2-n}$.



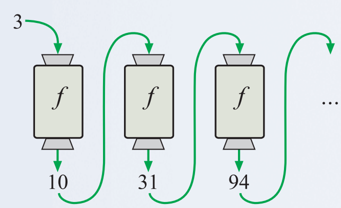
V tem zaporedju se členom izmenjuje predznak. Takim zaporedjem pravimo, da so **alternirajoča**.

4. Poglejmo še dve rekurzivno podani zaporedji.

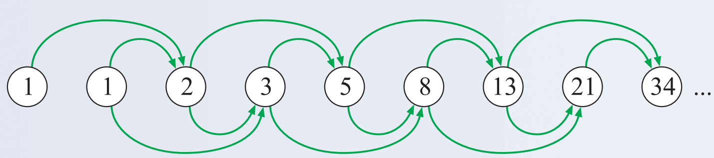
$a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Zaporedji dobimo s postopnim in potrpežljivim sestavljanjem.



- Funkcija f pomeni: pomnoži vstopni podatek s 3 in prištej 1.
  $a_1 = 3$, $a_2 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$, $a_3 = 3 \cdot 10 + 1 = 31$, $a_4 = 3 \cdot 31 + 1 = 94$ …
- Pri drugem zaporedju vidimo, da je vsak člen, od vključno tretjega naprej, enak vsoti prejšnjih dveh.



Prepoznali smo rekurzivno formulo Fibonaccijevega zaporedja.

Podobno kot realne funkcije realne spremenljivke imajo tudi zaporedja različne lastnosti.

Zaporedje $\{a_n\}$ je **naraščajoče**, če za vsak indeks n velja:

- $a_n < a_{n+1}$ oziroma $a_{n+1} - a_n > 0$ — *diferenčni test*

ali

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ — *kvocientni test* (velja pod pogojem, da so vsi členi zaporedja pozitivni)

Zaporedje $\{a_n\}$ je **padajoče**, če za vsak indeks n velja:

- $a_n > a_{n+1}$ oziroma $a_{n+1} - a_n < 0$ — *diferenčni test*

ali

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ — *kvocientni test* (velja pod pogojem, da so vsi členi zaporedja pozitivni)

ZGLEDI

1. Pokažimo, da je zaporedje $a_n = \dfrac{4n}{n+1}$ naraščajoče.

Izračunamo razliko $a_{n+1} - a_n$ in vidimo, da je za poljubna dva zaporedna člena pozitivna.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4(n+1)}{n+2} - \frac{4n}{n+1} = \frac{4(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{4n(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0$$

2. Dokažimo, da je zaporedje $a_n = \dfrac{1-n^2}{n}$ padajoče.

Izračunamo razliko $a_{n+1} - a_n$, ki je za poljubna dva zaporedna člena negativna.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1-(n+1)^2}{n+1} - \frac{1-n^2}{n} = \frac{-n^2-n-1}{n(n+1)} = -\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} < 0;\ \text{za vsak } n \in \mathbb{N}$$

3. Ugotovimo, ali je zaporedje $a_n = (n-4)^2$ naraščajoče ali padajoče.

Izračunamo razliko dveh sosednjih členov zaporedja.

$$a_{n+1} - a_n = ((n+1)-4)^2 - (n-4)^2 = (n-3)^2 - (n-4)^2 =$$
$$= (n^2 - 6n + 9) - (n^2 - 8n + 16) = 2n - 7$$

Razlika je za naravna števila 1, 2 in 3 negativna, za $n > 3$ pa pozitivna. Zaporedje ni niti naraščajoče niti padajoče.

4. Pokažimo, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{4n}{n+1}$ naraščajoče.

Ker so vsi členi zaporedja pozitivni, lahko uporabimo kvocientni kriterij.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4(n+1)}{(n+1)+1}}{\frac{4n}{n+1}} = \frac{4(n+1)^2}{4n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$$

Ker je števec večji od imenovalca, je ulomek večji od ena. Zato je zaporedje naraščajoče.

Zaporedje je **konstantno**, če so vsi njegovi členi enaki.

Zaporedje je **navzgor omejeno**, če obstaja tako realno število M, da so vsi členi zaporedja manjši ali enaki M; $a_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Če obstaja člen zaporedja, ki je večji od vseh ostalih členov, mu pravimo **maksimum** ali **največji člen zaporedja**.

Za navzgor omejeno zaporedje se izkaže, da med realnim števili, ki so zgornje meje, obstaja najmanjše. Pravimo mu **natančna zgornja meja** in ni nujno člen zaporedja.

Zaporedje je **navzdol omejeno**, če obstaja tako realno število m, da so vsi členi zaporedja večji ali enaki m; $a_n \geq m,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Če obstaja člen zaporedja, ki je manjši od vseh ostalih členov, mu pravimo **minimum** ali **najmanjši člen zaporedja**.

Za navzdol omejeno zaporedje se izkaže, da med realnim števili, ki so spodnje meje, obstaja največje. Pravimo mu **natančna spodnja meja** in ni nujno člen zaporedja.

Zaporedje je **omejeno**, če je omejeno navzgor in navzdol.

ZGLEDI

1. Raziščimo omejenost zaporedja $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Iz zapisa prvih nekaj členov $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7} \ldots$ lahko predvidevamo, da je zaporedje naraščajoče, kar dokažemo z diferenčnim testom.

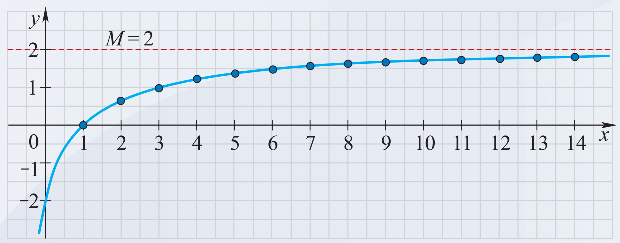
$$a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{-n+n+1}{(n+1)n} = \frac{1}{(n+1)n}$$

Najmanjši člen zaporedja je $a_1 = 0$, zato je tudi minimum tega zaporedja. Največjega člena zaporedja ne moremo ugotoviti, vendar noben člen ne presega števila 1, zato je 1 natančna zgornja meja tega zaporedja.

2. Pokažimo, da je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n-2}{n+1}$ omejeno, in poiščimo natančno spodnjo in zgornjo mejo.

Nalogo rešimo s pomočjo znanja racionalnih funkcij iz 3. letnika. Graf zaporedja je podmnožica grafa racionalne funkcije $f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$. Njena ničla je $x = 1$, pol $x = -1$ in premica $y = 2$ vodoravna asimptota. Za nas pomemben je del grafa za $x > 0$.

Iz grafa preberemo, da je minimum zaporedja $m = 0$, natančna zgornja meja pa $M = 2$ in da je zaporedje naraščajoče.



3. Ugotovimo, ali je zaporedje $a_n = (-2)^n + 1$ omejeno.

Iz prvih nekaj členov −1, 5, −7, 17, −31 … vidimo, da se členi od izhodišča oddaljujejo. Členi s sodim indeksom so pozitivni, členi z lihim indeksom pa negativni. Absolutna vrednost členov zelo hitro raste. Zaporedje ni omejeno niti navzgor niti navzdol.

NALOGE

1. Zapišite prvih šest členov zaporedij s splošnim členom in narišite njihove grafe.
a) $a_n = 2n - 3$
b) $a_n = 10 - 3n$
c) $a_n = n^2 - 6n + 5$
č) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = -\frac{a_n}{2}$

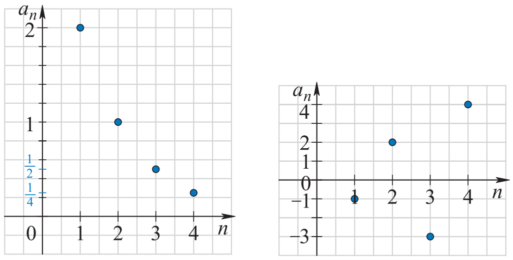
2. Zapišite prvih šest členov zaporedij.
a) $a_n = n^2 - 4$
b) $a_n = -\frac{2}{n}$
c) $a_n = \frac{n}{2^n}$
č) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$
d) $a_n = \log_2 n$
e) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$
f) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{n\pi}{2}\right)$
g) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2$
h) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,$
$a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$

3. Zapišite prvih devet členov zaporedja, danega s splošnim členom $a_n = \sin\frac{n\pi}{4}$, in narišite graf zaporedja.

4. Za dana zaporedja poiščite splošni člen.
a) 5, 10, 15, 20, 25 …
b) 1, 5, 9, 13, 17 …
c) −1, 4, −9, 16, −25 …
č) 2, −4, 8, −16 …
d) $1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ 4 \cdot 5$ …
e) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ …
f) $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}$ …
g) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ …
h) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}$ …

5. Zapišite predpisa za rekurzivni zaporedji.
a) 2, 5, 14, 41 …
b) 1, 3, 6, 10, 15 …

6. Na slikah sta dana grafa zaporedij. Zapišite predpisa za splošna člena.



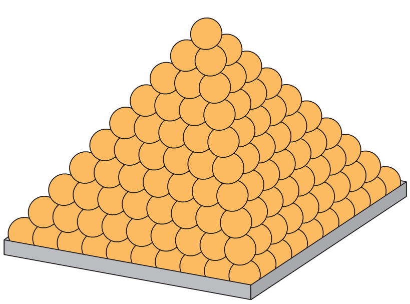
7. Zapišite splošni člen zaporedja 15, 12, 9, 6, 3 … in pokažite, da je 17. člen enak −33.

8. Zapišite splošni člen zaporedja 4, 10, 18, 28, 40 … Kateri člen zaporedja je enak 130?

9. Zapišite prvih 6 členov zaporedja $a_n=\frac{n+1}{n}$.
Koliko členov leži v $[\frac{3}{2}, 2]$ in koliko v $[1, \frac{3}{2}]$?

10. Zapišite prvih 5 členov zaporedja $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+n$ in na številski premici narišite točke, ki jih predstavljajo. Koliko členov je manjših od 50?

11. Na sliki so zložene krogle. Števila krogel na posamezni ravni, ki oblikujejo kvadrat, sestavljajo neko zaporedje. Zaporedje opisujmo tako, da za $n=1$ je $a_1=1$ (na vrhu je 1 krogla), za $n=2$ je a_2 število krogel pod zgornjo kroglo v drugi vrsti … Zapišite obrazec, s katerim izračunamo število krogel v n-ti vrsti (gledano od zgoraj navzdol). Koliko je vseh krogel v kupu?



12. Zapišite lastnosti zaporedij, danih s splošnim členom.

a) $a_n=2n-5$ č) $a_n=\frac{n^2}{n+5}$

b) $a_n=1-n^2$ d) $a_n=n^2-4n$

c) $a_n=(-\frac{1}{2})^n$ e) $a_n=\frac{6}{3-2n}$

13. Ugotovite, ali so dana zaporedja naraščajoča ali padajoča, in to tudi dokažite.

a) $a_n=\frac{3n+4}{n+2}$ c) $a_n=\frac{n+1}{n^2}$

b) $a_n=\frac{n+3}{n}$ č) $a_n=\frac{n^2}{n+1}$

14. Pokažite, da so dana zaporedja navzdol in navzgor omejena.

a) $a_n=\frac{n+3}{n}$ c) $a_n=\frac{2n+5}{2n-1}$

b) $a_n=\frac{2n}{n+3}$ č) $a_n=\frac{4n-3}{2n+1}$

15. Dana so zaporedja s splošnim členom.

a) $a_n=-\frac{1}{n}$ c) $a_n=\frac{n}{n+1}$

b) $a_n=\frac{n+2}{n}$ č) $a_n=\frac{3-2n}{n+2}$

Ugotovite lastnosti zaporedij in jih tudi dokažite.

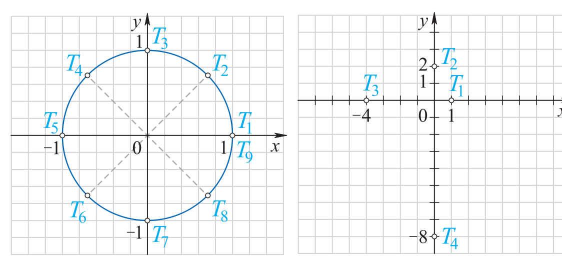
16. Zapišite vsaj eno zaporedje, ki je omejeno z:

a) 0 in 2   b) −3 in 3

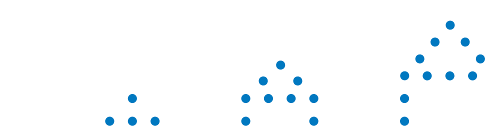
17. Zapišite vsaj eno naraščajoče zaporedje, ki je navzgor omejeno z 2.

18. Zapišite vsaj eno padajoče zaporedje, ki je navzdol omejeno s 3.

19. Na sliki sta v ravnini podani zaporedji točk. Zapišite predpisa za splošna člena.



20. Koliko pik bi vsebovale naslednje figure, če bi zaporedje nadaljevali? Poskusite poiskati splošni člen tega zaporedja.



Aritmetično zaporedje

Naslednja tri zaporedja imajo nekaj skupnega.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 …

7, 4, 1, –2, –5, –8, –11 …

$-\frac{11}{8}, -1, -\frac{5}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$ …

Pri prvih dveh zaporedjih je za prvih osem členov očitno, da je razlika med sosednjima členoma konstantna (v prvem primeru 1, v drugem –3), zato predvidevamo, da ta lastnost velja tudi za ostale člene. Če je to tista lastnost, ki jo iščemo, mora biti tako tudi v tretjem primeru. Ker lastnost ni tako očitna, zapišimo vse člene z istim imenovalcem: $-\frac{11}{8}, -\frac{8}{8}, -\frac{5}{8}, -\frac{2}{8}, \frac{1}{8}, \frac{4}{8}, \frac{7}{8}$ …, in že vidimo, da je vsak naslednji člen večji od prejšnjega za $\frac{3}{8}$.

Zaporedje je **aritmetično**, če je razlika med poljubnim ($n > 1$) členom in predstoječim členom konstantna.

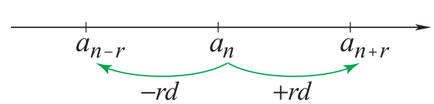
$\boldsymbol{a_{n+1} - a_n = d}$	Število d je **diferenca** aritmetičnega zaporedja.
$\boldsymbol{a_1}$	
$a_2 = a_1 + d$	
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$	
$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$	
…	
$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$	**splošni člen** aritmetičnega zaporedja
$n \in \mathbb{N}$	**indeks člena** zaporedja

Aritmetično zaporedje je:

- **naraščajoče**, če in samo če je $d > 0$,
- **padajoče**, če in samo če je $d < 0$,
- **konstantno**, če in samo če je $d = 0$.

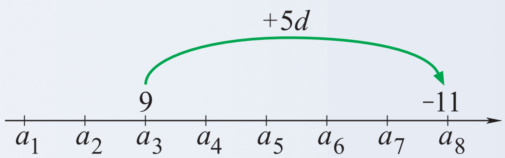
Vsak člen aritmetičnega zaporedja ($n > 1$) lahko zapišemo kot **aritmetično sredino** simetrično ležečih členov.

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-r} + a_{n+r}}{2}\ ;\ n > r}$$



ZGLEDI

1. Tretji člen aritmetičnega zaporedja je 9, osmi pa -11. Izračunajmo diferenco in prvi člen. Pomagajmo si z risbo.



$a_8 - a_3 = 5d$; $5d = -11 - 9 = -20$, $d = -4$

$a_1 = a_3 - 2d = 9 - 2(-4) = 17$

Pri tej nalogi smo spoznali koristno formulo

$\boldsymbol{a_n - a_m = (n - m)d;\ n > m}$.

2. Dokažimo formulo za aritmetično sredino.

Uporabili bomo samo osnovno formulo za zapis n-tega člena s prvim členom in diferenco zaporedja:

$$a_{n-r} + a_{n+r} = a_1 + (n - r - 1)d + a_1 + (n + r - 1)d = 2a_1 + (2n - 2)d =$$
$$= 2[a_1 + (n - 1)d] = 2a_n$$

$a_n = \frac{a_{n-r} + a_{n+r}}{2}$; $n > r$

3. Za katera števila x so $x^2 + 2$, $2x + 3$, $2x^2$ zaporedni členi končnega aritmetičnega zaporedja?

Zaporedje je aritmetično, če je razlika dveh zaporednih členov konstantna. Razliki drugega in prvega ter tretjega in drugega člena morata biti enaki:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$2x + 3 - (x^2 + 2) = 2x^2 - (2x + 3)$

Dobimo kvadratno enačbo

$3x^2 - 4x - 4 = 0$

z rešitvama:

$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6}$

$x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2}{3}$

Zaporedni členi iskanega zaporedja so 6, 7, 8 in $\frac{22}{9}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{8}{9}$.

4. Prvi člen aritmetičnega zaporedja je 121, diferenca pa –3. Koliko členov zaporedja je pozitivnih?

$$a_n = a_1 + (n-1)d > 0$$
$$121 + (n-1)(-3) > 0$$
$$-3n > -124$$
$$n < 41\tfrac{1}{3}$$

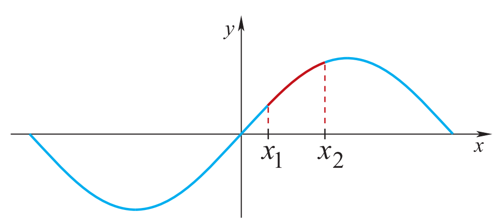
Naravna števila n, za katera je $n < 41\frac{1}{3}$, so 1, 2, 3 … 41.

Pozitivnih je 41 členov zaporedja.

Ko še ni bilo žepnih računal, je bilo delo s kotnimi funkcijami vezano na uporabo tabel, ki so imele korak $10'$. Za izračun npr. $\sin 52°17'$ smo poiskali v tablicah vrednosti $\sin 52°10'$ in $\sin 52°20'$ ter nato del sinusoide nad intervalom $(52°10', 52°20')$ aproksimirali s premico, saj je ta del krivulje zelo podoben premici. Potem smo razliko vrednosti $\sin 52°20' - \sin 52°10'$ delili z deset, rezultat pomnožili s 7 in ga prišteli spodnji vrednosti $\sin 52°10'$.

$$\sin 52°10' = 0{\cdot}7898$$
$$\sin 52°20' = 0{\cdot}7916$$
$$\sin 52°20' - \sin 52°10' = 0{\cdot}0018$$
$$\sin 52°17' = \sin 52°10' + \tfrac{7}{10}(\sin 52°20' - \sin 52°10') =$$
$$= 0{\cdot}7898 + \tfrac{7}{10}(0{\cdot}7916 - 0{\cdot}7898 = 0{\cdot}7911$$

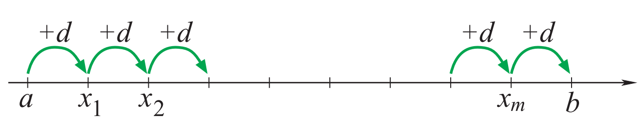
Seveda je treba pri tem paziti, ali je funkcija na danem intervalu naraščajoča ali padajoča.



Temu postopku pravimo **linearna interpolacija**.

Med poljubni realni števili a in b lahko vselej **vrinemo – interpoliramo** m števil tako, da vseh $m+2$ števil tvori aritmetično zaporedje. Iz naslednje slike lahko preberemo, da je diferenca tega zaporedja

$$\boldsymbol{d = \frac{b-a}{m+1}}.$$



ZGLED

Vrinimo med 2 in 11 pet števil tako, da nastane končno aritmetično zaporedje.

Vrednosti 2 in 11 lahko zapišemo kot vrednosti prvega in sedmega člena aritmetičnega zaporedja.

$a_1 = 2,\ a_7 = 11$

Iz formule $a_n = a_1 + (n-1)d$ najprej izračunamo d in nato še vrinjena števila $a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_1 + 2d \ldots\ a_6 = a_1 + 5d$:

$d = \frac{a_7 - a_1}{7-1}$

$d = 1{\cdot}5$

Vrinjena števila so: $3{\cdot}5$, 5, $6{\cdot}5$, 8 in $9{\cdot}5$.

Končna aritmetična vrsta

Anekdota pravi, da je bil mali Gauss v šoli včasih kar preveč živahen. Da bi ga učitelj umiril, je moral sešteti prvih 100 naravnih števil. Fantiček ga je presenetil s takojšnjim odgovorom 5050 in zanimivim načinom razmišljanja.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

ZGLED

$$\begin{aligned} &1+2+3+\ldots+98+99+100 = \\ &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51) = \\ &= 101+101+101+\ldots+101 = 50 \cdot 101 = 5050 \end{aligned}$$

Gaussovo metodo bomo uporabili za izračun vsote prvih n členov aritmetičnega zaporedja. Vsoto bomo zapisali dvakrat: prvič od prvega do zadnjega člena, drugič pa od zadnjega proti prvemu. V prvem primeru bomo vse člene izrazili s prvim členom, v drugem primeru pa vse člene z zadnjim členom in na koncu obe enakosti sešteli ter delili z 2.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \text{ oz.}$$

$$S_n = \frac{\boldsymbol{(a_1 + a_n)n}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{n(2a_1 + (n-1)d)}}{\mathbf{2}}$$

Vsoti prvih n členov zaporedja rečemo **končna vrsta**. Označimo jo lahko tudi:

$$\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i},$$

pri čemer je Σ velika grška črka sigma in i indeks člena zaporedja.

ZGLEDI

1. Izračunajmo $\sum_{i=1}^{12}(3i-1)$.

Zapišimo vsoto $\sum_{i=1}^{12}(3i-1)=2+5+8+\ldots+35$, ki je končna aritmetična vrsta 12 členov s prvim členom $a_1=2$ in zadnjim $a_{12}=35$.

Njena vsota je $S_{12}=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{12}{2}(2+35)=222$

2. Izračunajmo vsoto vseh večkratnikov števila 74, ki so večji od 300 in manjši od 1500.

Z oceno kvocienta $\frac{300}{74}$ ugotovimo, da je v iskani vsoti najmanjši večkratnik $74\cdot 5=370$, največji pa $74\cdot 20=1480$. Iskana aritmetična vrsta $74\cdot 5+74\cdot 6+\ldots+74\cdot 20$ ima prvi člen $a_1=370$, zadnji člen $a_n=1480$, število členov pa je $n=16$. Iskana vsota je $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{16}{2}(370+1480)=14\,800$.

3. Vsota prvih n členov zaporedja je n^2+3n. Izračunajmo splošni člen zaporedja in pokažimo, da je aritmetično.

Splošni člen je

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=\\&=n^2+3n-(n-1)^2-3(n-1)=\\&=n^2+3n-n^2+2n-1-3n+3=\\&=2n+2\end{aligned}$$

Ker je razlika dveh zaporednih členov stalna:
$a_{n+1}-a_n=2(n+1)+2-2n-2=2$,
je zaporedje aritmetično z diferenco 2.

4. Koliko členov aritmetičnega zaporedja z diferenco 7 in prvim členom 11 moramo sešteti, da je vsota enaka 425?

Dani so podatki: $d=7$, $a_1=11$, $S_n=\frac{n(22+(n-1)7)}{2}=\frac{n(7n+15)}{2}=425$.

Iz kvadratne enačbe dobimo število seštetih členov.

$\frac{7n^2+15n}{2}=425$, $7n^2+15n-850=0$;

$n=\frac{-15\pm\sqrt{15^2-4\cdot 7\cdot 850}}{14}=\frac{-15\pm 155}{14}$; $n_1=10$, $n_2=-\frac{85}{7}$

Ker lahko upoštevamo le pozitivno celo rešitev kvadratne enačbe, je treba sešteti 10 členov.

NALOGE

21. Zapišite prvih šest členov aritmetičnega zaporedja.
a) $a_1=4,\ d=2$
b) $a_1=7,\ d=-4$
c) $a_1=-5,\ d=\frac{2}{3}$

22. V aritmetičnem zaporedju je četrti člen 4, diferenca pa $-\frac{3}{2}$. Poiščite trinajsti člen zaporedja.

23. Poiščite osmi, enajsti in splošni člen aritmetičnega zaporedja 1, 5, 9 …

24. Poiščite peti, deveti in splošni člen aritmetičnega zaporedja $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$ … Ali sta števili $-\frac{15}{8}$ in -5 člena danega zaporedja?

25. Pri danih podatkih za aritmetična zaporedja poiščite neznane količine.
a) $a_n=3n-2,\ a_1,\ a_2,\ a_5,\ a_{2n+1}$
b) $a_1=-7,\ d=5,\ a_n,\ a_{10},\ a_{2n-1}$
c) $a_3=6,\ d=-2.5,\ a_4,\ a_{20},\ a_1,\ a_n,\ a_{2n}$
č) $a_6=4,\ a_{10}=6,\ d,\ a_1,\ a_n,\ a_{3n-1}$

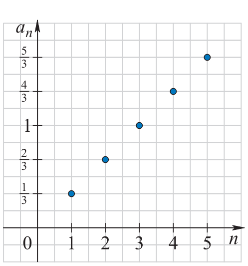
26. Poiščite četrti, osmi in splošni člen aritmetičnega zaporedja $a-b,\ a+b,\ a+3b$ …

27. Izračunajte aritmetično sredino števil:
a) 7 in -3,
b) $8-\sqrt{12}$ in $\frac{6-\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$.

28. Poiščite splošni člen aritmetičnega zaporedja 16, 11, 6, 1, -4 … in zapišite njegove lastnosti.

29. Poiščite splošni člen aritmetičnega zaporedja $-11, -8, -5, -2, 1$ … in zapišite njegove lastnosti.

30. Na sliki je narisan graf aritmetičnega zaporedja. Zapišite splošni člen zaporedja. Koliko členov zaporedja je manjših od 30?



31. Pokažite, da so $16^{\frac{3}{4}}$, $0.\overline{2}\cdot\sqrt[3]{27^2}$ in $\sqrt[3]{-8}\cdot 0.25^{-\frac{1}{2}}$ prvi trije členi padajočega aritmetičnega zaporedja. Zapišite diferenco zaporedja in izračunajte peti člen.

32. Pokažite, da so za $x=\log_3 10-1$ vrednosti izrazov $2\cdot 3^{x-1},\ 3^{2x},\ 2\cdot 3^{x+1}$ zaporedni členi aritmetičnega zaporedja. Zapišite diferenco zaporedja.

33. Izračunajte, za katera realna števila x so vrednosti danih izrazov zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.
a) $3x,\ x-4,\ 2-6x$
b) $x^2+1,\ 4x+1,\ 2x^2-2$
c) $2+\sqrt{x},\ 3+\sqrt{4x},\ 5+2\sqrt{x}$
č) $2+\sqrt{x-4},\ 1,\ 2-\sqrt{2x}$
d) $1-2^{x-2},\ 3^0\cdot\frac{2^x}{4},\ 2^x-3$
e) $\log_2(x+2),\ 3,\ \log_2(x+14)$
f) $1,\ \sin x,\ \sin^2 x$
g) $2\cos^2 x,\ 1,\ \sin x$

34. Rešitve enačbe $x^3-3x^2+3=x$ so prvi trije členi padajočega aritmetičnega zaporedja. Rešite enačbo in zapišite splošni člen zaporedja.

35. Zapišite splošna člena aritmetičnih zaporedij, podanih z:
a) $a_4=17,\ a_5+a_7=50$
b) $a_2+a_4=16,\ a_1\cdot a_3=-16$

36. Od katerega člena naprej so členi zaporedja $5, \frac{21}{2}, 16$ … večji od 100?

37. Zapišite aritmetično zaporedje, katerega vsota prvih treh členov je 3, vsota kvadratov istih členov pa 21.

38. Med števili 119 in 155 vrinite osem števil tako, da sestavljajo aritmetično zaporedje. Zapišite diferenco zaporedja in vrinjena števila.

39. Med števili 147 in -9 vrinite 11 števil tako, da nastane trinajstčlensko končno aritmetično zaporedje. Zapišite diferenco zaporedja.

40. Koliko je vseh naravnih števil, manjših od 500, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek 4? Zapišite splošni člen zaporedja.

41. Koliko je vseh trimestnih naravnih števil, ki dajo pri deljenju s 23 ostanek 5?

42. Notranji koti trikotnika sestavljajo naraščajoče aritmetično zaporedje s prvim členom 44°. Koliko merita druga dva notranja kota trikotnika?

43. Koliko merijo stranice pravokotnega trikotnika s ploščino 96, če njihove dolžine sestavljajo aritmetično zaporedje?

44. V trikotniku oblikujejo dolžine stranic aritmetično zaporedje. Največji kot meri 120°, po dolžini srednja stranica pa 10 cm. Poiščite dolžini še drugih dveh stranic trikotnika.

45. Izračunajte.

a) $\sum_{n=1}^{15}(3n+2)$

b) $\sum_{n=1}^{10}(1-2n)$

c) $\sum_{n=8}^{20}(5n-3)$

46. V aritmetičnem zaporedju je prvi člen 4, peti pa 24. Koliko je S_{20}?

47. Koliko členov aritmetičnega zaporedja z vsoto -16 moramo sešteti, če je $a_3=10$ in $a_7=2$?

48. Prvi člen aritmetičnega zaporedja je 43, členov je 25 in vsota 175. Izračunajte diferenco in zadnji člen zaporedja.

49. Koliko je prvi in koliko zadnji člen 31-členskega aritmetičnega zaporedja z vsoto 2542 in diferenco 5?

50. Zadnji člen končnega aritmetičnega zaporedja z vsoto 167 500 in diferenco $\frac{1}{3}$ je 334. Poiščite prvi člen in število členov.

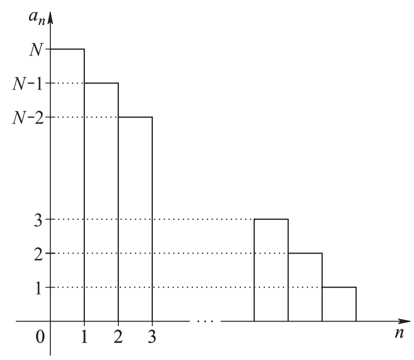
51. Koliko členov aritmetičnega zaporedja 2, 10, 18, 26, 34 … moramo sešteti, da bo njihova vsota večja od 380?

52. Izračunajte vsoto prvih 50 naravnih števil, ki dajo pri deljenju s 5 ostanek 2.

53. Koliko števil med 100 in 1000 je deljivih s 17? Izračunajte njihovo vsoto.

54. Rešite enačbo $5+9+13+\ldots+x=5355$.

55. Na sliki sestavljajo ordinate stolpcev končno padajoče aritmetično zaporedje. Zapišite splošni člen zaporedja. Koliko členov ima zaporedje? Kolikšna je ploščina lika?



56. Med števili 5 in 44 vrinemo števila tako, da nastane končno aritmetično zaporedje. Kolikšna je diferenca zaporedja in koliko členov smo vrinili, če je vsota vrinjenih členov 294?

57. Med števili 13 in 97 vrinemo n števil, da nastane končno aritmetično zaporedje. Izračunajte diferenco aritmetičnega zaporedja, če je vsota vrinjenih števil enaka 1100.

58. Lojze je začel varčevati in je danes shranil en evro, jutri bo shranil dva evra, pojutrišnjem tri evre … Koliko bo privarčeval v enem neprestopnem letu?

59. Rešitve enačbe $x^3-15=9x^2-23x$ so prvi trije členi naraščajočega aritmetičnega zaporedja. Rešite enačbo in zapišite splošni člen zaporedja. Kolikšna je vsota prvih 10 členov zaporedja?

60. Rešitvi enačbe $\frac{3-\log x}{5-\log x}+\frac{\log x}{1+\log x}=1$ sta prvi in četrti člen padajočega aritmetičnega zaporedja. Rešite enačbo in zapišite splošni člen. Kolikšna je vsota prvih 20 členov zaporedja?

61. Pokažite, da je zaporedje z vsoto $S_n=n^2-4n$ aritmetično. Zapišite prvi člen in diferenco.

62. V aritmetičnem zaporedju z diferenco 4 je vsota petega in osmega člena 58. Poiščite prvi člen in vsoto prvih osmih členov zaporedja.

63. Izračunajte, za katere x so dana števila zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.
a) $x^2-3,\ 5x,\ x^2+15$
b) $x^2-3,\ x-1,\ 1-2x$

64. V aritmetičnem zaporedju je četrti člen za 21 večji od prvega, vsota drugega in šestega člena pa je 108. Izračunajte vsoto prvih 8 členov zaporedja.

65. Dano je aritmetično zaporedje z diferenco $d=\frac{1}{2}$ in sedmim členom $a_7=-5$.
a) Zapišite prve štiri člene tega zaporedja.
b) Koliko začetnih členov moramo sešteti, da dobimo vsoto -68?

66. Dano je aritmetično zaporedje 25, 21, 17 … Izračunajte a_{20}, poiščite število pozitivnih členov in njihovo vsoto.

67. Za aritmetično zaporedje velja $a_2+a_4=24$ in $\frac{a_3}{a_7}=\frac{3}{8}$. Zapišite prvih pet členov zaporedja in izračunajte vsoto prvih desetih členov.

68. Ugotovite, ali je zaporedje s splošnim členom $a_n=\frac{n^2-n-6}{n+2}$ aritmetično.

69. Zapišite prvih šest členov aritmetičnega zaporedja, če za njegove člene velja: $a_1+a_4+a_6=71$ in $a_5-a_3-a_2=2$.

70. Končno aritmetično zaporedje ima osem členov. Vsota srednjih dveh je 41, produkt prvega in zadnjega pa 114. Zapišite prvi člen in diferenco zaporedja.

71. Med rešitvi enačbe $x^2-16x+39=0$ vrinite štiri števila tako, da bo vseh šest števil tvorilo aritmetično zaporedje.

72. Dolžine stranic pravokotnega trikotnika tvorijo aritmetično zaporedje. Večja kateta meri 24 cm. Izračunajte obseg trikotnika.

73. Cevi za plinovod enakega polmera so zložene v osem vrst. V spodnji je 13 cevi, v vsaki naslednji je ena cev manj. Izračunajte, koliko je vseh cevi.

74. Velikosti kotov v trikotniku *ABC* tvorijo aritmetično zaporedje. Najmanjši kot meri 20°. Izračunajte vrednosti ostalih dveh kotov.

75. Dolžine robov kvadra tvorijo aritmetično zaporedje. Vsota dolžin robov je 24 cm, prostornina pa 312 cm^3. Izračunajte površino kvadra.

76. Koliko časa bo padal kamen v 2500 m globok rudniški jašek, če prvo sekundo pade 4˙904 m in nato vsako naslednjo sekundo 9˙808 m več kot prejšnjo?

77. Koliko členov vrste $5+8+11+14+\ldots$ moramo sešteti, da dobimo vsoto 670?

78. Izračunajte vrednost ulomka $\frac{1+2+3+\ldots+2014}{1+2+3+\ldots+2015}$.

Geometrijsko zaporedje

ZGLED

Analitik v Uradu za varstvo potrošnikov spremlja gibanje cen in ugotovi, da se je cena določenega artikla, ki je pred tremi leti stal 15 evrov, vsako leto povečala za 8 %. Cena:

po enem letu:

$15 + 15 \cdot 0{,}08 = 15 \cdot (1 + 0{,}08) = 15 \cdot 1{,}08 = 16{,}2$ €

po dveh letih:

$16{,}2 + 16{,}2 \cdot 0{,}08 = 16{,}2 \cdot (1 + 0{,}08) = 16{,}2 \cdot 1{,}08 = 15 \cdot 1{,}08^2 = 17{,}5$ €

po treh letih:

$17{,}5 + 17{,}5 \cdot 0{,}08 = 17{,}5 \cdot (1 + 0{,}08) = 17{,}5 \cdot 1{,}08 = 15 \cdot 1{,}08^3 = 18{,}9$ €

Zaradi znanja procentnega računa vemo, da 8 % višjo ceno dobimo tako, da osnovno ceno pomnožimo z $1{,}08$. Cene v zaporednih letih torej oblikujejo končno zaporedje, pri katerem je vsak naslednji člen z $1{,}08$ pomnožen prejšnji člen.

$15,\ 15 \cdot 1{,}08,\ 15 \cdot 1{,}08^2,\ 15 \cdot 1{,}08^3$

Zaporedje je geometrijsko, če je količnik med poljubnim ($n > 1$) in pred stoječim členom konstanten: $\boldsymbol{\frac{a_{n+1}}{a_n} = k}$. Število k se imenuje **kvocient** ali **količnik geometrijskega zaporedja**.

Člene geometrijskega zaporedja lahko zapišemo le s prvim členom in kvocientom zaporedja:

$$a_1,\ a_1k,\ a_1k^2,\ a_1k^3,\ \dots,\ a_1k^{n-1}$$

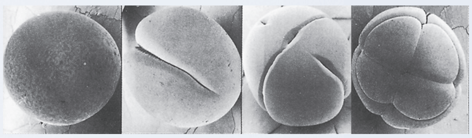
Splošni člen geometrijskega zaporedja je $\boldsymbol{a_n = a_1k^{n-1}}$. Lahko ga zapišemo tudi s kasnejšim, npr. m-tim členom in kvocientom k: $\boldsymbol{a_n = a_mk^{n-m};\ m < n}$.

Geometrijsko zaporedje je:

	$a_1 > 0$	$a_1 < 0$
$k > 1$	naraščajoče	padajoče
$k = 1$	konstantno	konstantno
$0 < k < 1$	padajoče	naraščajoče
$k < 0$	alternirajoče	alternirajoče

ZGLEDI

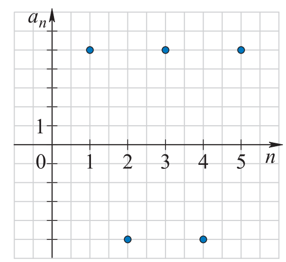
1. Zaporedje 1, 2, 4, 8, 16, 32 … je geometrijsko zaporedje s prvim členom $a_1 = 1$ in količnikom $k = 2$. V naravi je primer takega zaporedja delitev celice.



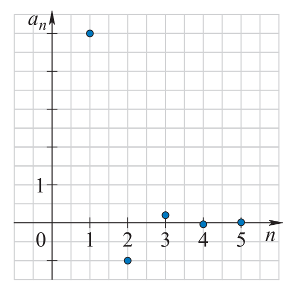
…

2. Zaporedje $-3, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}$ … je geometrijsko zaporedje s prvim členom $a_1 = -3$ in količnikom $k = \frac{1}{3}$.

3. Zaporedje 5, –5, 5, –5, 5 … je geometrijsko zaporedje s prvim členom $a_1 = 5$ in količnikom $k = -1$. Zaporedje je alternirajoče.



4. Tudi členi geometrijskega zaporedja $5, -1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}$ … alternirajo.



5. Poiščimo deveti člen geometrijskega zaporedja 6, 18, 54, 162, 486 …

Prvi člen je $a_1 = 6$, količnik pa 3. Splošni člen geometrijskega zaporedja je $a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 6 \cdot 3^{n-1}$, deveti člen pa $a_9 = a_1 \cdot k^8 = 6 \cdot 3^8 = 39\,366$.

6. Četrti člen geometrijskega zaporedja je 2187, osmi pa 27. Izračunajmo deseti člen.

Izrazimo četrti in osmi člen zaporedja s prvim členom a_1 in količnikom k.

$a_4 = a_1 \cdot k^3$

$a_8 = a_1 \cdot k^7$

Če delimo osmi člen s četrtim, dobimo:

$\frac{a_8}{a_4} = \frac{a_1 \cdot k^7}{a_1 \cdot k^3} = k^4$

$k^4 = \frac{a_8}{a_4} = \frac{27}{2187} = \frac{1}{81}$

$k = \pm\frac{1}{3}$

Deveti kot naslednji člen od osmega je množen s k, deseti pa s k^2:

$a_{10} = a_8 \cdot k^2 = 27 \cdot (\pm\frac{1}{3})^2 = 3$

7. Če v tričlenem aritmetičnem zaporedju z diferenco 4 drugi člen povečamo za 1, tretjega pa za 7, dobimo geometrijsko zaporedje. Poiščimo obe zaporedji.

Najprej zapišimo aritmetično zaporedje z diferenco 4: a_1, a_1+4, a_1+8, členi geometrijskega zaporedja pa so: a_1, a_1+5, a_1+15. Pri geometrijskem zaporedju je količnik dveh zaporednih členov stalen, zato je:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{a_1+5}{a_1}=\frac{a_1+15}{a_1+5}$$

$$(a_1+5)^2=a_1(a_1+15)$$

$$a_1{}^2+10a_1+25=a_1{}^2+15a_1$$

$$a_1=5$$

Iskano aritmetično zaporedje je 5, 9, 13, iskano geometrijsko pa 5, 10, 20.

Geometrijska sredina dveh pozitivnih realnih števil a in b je $\sqrt{\boldsymbol{a\cdot b}}$.

Vsak člen a_n geometrijskega zaporedja ($n>1$) s pozitivnimi členi je geometrijska sredina simetrično ležečih členov a_{n-r} in a_{n+r}; $n>r$; torej $a_n=\sqrt{a_{n-r}\cdot a_{n+r}}$, sicer pa velja $a_n^2=a_{n-r}\cdot a_{n+r}$.

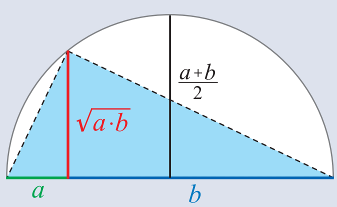
$$\boldsymbol{\frac{a_n}{a_{n-r}}=k^r,\ \frac{a_{n+r}}{a_n}=k^r}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-r}}=\frac{a_{n+r}}{a_n};\ a_n^2=a_{n-r}\cdot a_{n+r}$$

$$\boldsymbol{a_n=\pm\sqrt{a_{n-r}\cdot a_{n+r}}}$$

Iz Talesovega izreka v pravokotnem trikotniku lepo vidimo, da je geometrijska sredina dveh pozitivnih števil manjša ali enaka od aritmetične sredine istih dveh števil:

$$\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}$$



ZGLED

Iz poznanih dveh členov naraščajočega geometrijskega zaporedja, $a_3=2$ in $a_{11}=32$, izračunajmo sedmi člen.

Ker je sedmi člen ravno na sredini med 3. in 11. členom, lahko uporabimo pravilo za geometrijsko sredino:

$$a_7=\sqrt{a_3\cdot a_{11}}=\sqrt{2\cdot 32}=\sqrt{64}=\pm 8$$

Zaporedje je naraščajoče, zato je $a_7=8$.

$$a_7=a_3\cdot k^4,\ k^4=\frac{a_7}{a_3}=\frac{8}{2}=4$$

Realni rešitvi enačbe $k^4-4=0$ oz. $(k^2-2)(k^2+2)=0$ sta dve, vendar uporabimo le $k=\sqrt{2}$, saj je geometrijsko zaporedje s kvocientom $k=-\sqrt{2}$ alternirajoče.

Med poljubni dve števili a in b lahko **vrinemo (interpoliramo)** r števil tako, da vseh $r+2$ števil tvori geometrijsko zaporedje:

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{r-1},\ a_r,\ b$$

$$a,\ ak,\ ak^2,\ ak^3,\ \ldots,\ ak^{r-1},\ ak^r,\ b=ak^{r+1};\ k^{r+1}=\frac{b}{a}$$

Koeficient **geometrijske interpolacije** je $\boldsymbol{k=\sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}}$.

ZGLED

Med števili $\frac{1}{3}$ in 243 vrinimo pet števil tako, da bomo dobili geometrijsko zaporedje sedmih členov.

V našem primeru je $r=5$, prvi in zadnji člen zaporedja poznamo, torej lahko uporabimo formulo:

$$k=\sqrt[6]{\frac{243}{\frac{1}{3}}}=\sqrt[6]{243\cdot 3}=\sqrt[6]{3^5\cdot 3}=\sqrt[6]{3^6}=3$$

Dobimo zaporedje $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27, 81, 243.

Končna geometrijska vrsta

Če seštejemo prvih n členov geometrijskega zaporedja, dobimo končno geometrijsko vrsto.

$$\boldsymbol{S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Njena vsota je $\boldsymbol{S_n=\frac{a_1(k^n-1)}{k-1}}$**;** $\boldsymbol{k\neq 1}$ in jo je enostavno izpeljati.

$$\begin{aligned} S_n&=a_1+a_1k+a_1k^2+\ldots+a_1k^{n-2}+a_1k^{n-1}\\ kS_n&=a_1k+a_1k^2+a_1k^3+\ldots+a_1k^{n-1}+a_1k^n\\ \hline kS_n-S_n&=a_1-a_1k^n\\ S_n(k-1)&=a_1(k^n-1)\\ \boldsymbol{S_n}&=\boldsymbol{\frac{a_1(k^n-1)}{k-1}} \end{aligned}$$

Formulo na levi in desni pomnožimo s k.

Prvo enakost odštejemo od druge in izrazimo S_n.

ZGLEDI

1. Izračunajmo $\sum_{i=1}^{7} 3\cdot 2^{i+1}$.

Vsota

$$\sum_{i=1}^{7} 3\cdot 2^{i+1}=3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\ldots+3\cdot 2^8$$

je končna geometrijska vrsta sedmih členov s prvim členom $a_1=3\cdot 2^2=12$ in količnikom 2. Njena vsota je

$$S_n=\frac{a_1(k^n-1)}{(k-1)}=\frac{12(2^7-1)}{(2-1)}=1524.$$

2. V geometrijskem zaporedju s količnikom 3 je četrti člen 108. Koliko členov je treba sešteti, da dobimo vsoto 1456?

Najprej izračunajmo prvi člen a_1.

$a_4 = a_1 \cdot k^3$

$108 = a_1 \cdot 3^3;\ a_1 = \frac{108}{27} = 4$

Zdaj izračunajmo še število členov zaporedja.

$S_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$

$1456 = \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1}$

$3^n - 1 = 728;\ 3^n = 729$

Logaritmiramo levo in desno stran enačbe.

$\log 3^n = \log 729$

$n \log 3 = \log 729$

$n = \frac{\log 729}{\log 3};\ n = 6$

3. V geometrijskem zaporedju poznamo $a_1 = 2$, $a_n = 1458$ in $S_n = 2186$. Izračunajmo, koliko členov je treba sešteti, da dobimo S_n, in kolikšen je kvocient tega zaporedja.

Najprej se spomnimo zveze $a_n = a_1 k^{n-1}$, iz katere dobimo

$k^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} = \frac{1458}{2} = 729.$

Ko zapišemo še formulo za vsoto prvih n členov $S_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$, vidimo, da potrebujemo še k^n. Tega dobimo, če $k^{n-1} = 729$ pomnožimo na levi in desni s k: $k^n = 729k$.

Tako dobimo preprosto enačbo z neznanko k: $2186 = \frac{2(729k - 1)}{k - 1}$.

Njena rešitev je $k = 3$. Iz eksponentne enačbe $3^{n-1} = 729$ dobimo še število členov, ki smo jih sešteli:

$(n - 1)\log 3 = \log 729;\ n = \frac{\log 729}{\log 3} + 1 = 7$

4. Televizor za 370 evrov bomo plačali v desetih obrokih namesto v enkratnem znesku. Prvi obrok je desetina cene, vsak naslednji pa za 2 % večji od prejšnjega. Kolikšna bo dejanska cena televizorja? Koliko odstotkov dražji je televizor, če ga kupimo na obroke?

prvi obrok $a_1 = 37$

drugi obrok $a_2 = a_1 + 0{,}02a_1 = 1{,}02a_1 = 37{,}74$

tretji obrok $a_3 = a_2 + 0{,}02a_2 = 1{,}02a_2 = 1{,}02^2 a_1 = 38{,}49$

…

deseti obrok: $a_{10} = 1{,}02^9 a_1 = 44{,}22$

Končna cena televizorja je vsota prvih 10 členov geometrijskega zaporedja s prvim členom $a_1 = 37$ in kvocientom $1{\cdot}02$.

$$S_{10} = \frac{37(1{\cdot}02^{10} - 1)}{0{\cdot}02} = 405{\cdot}14$$

$$x = \frac{405{\cdot}14}{370} = 1{\cdot}09407$$

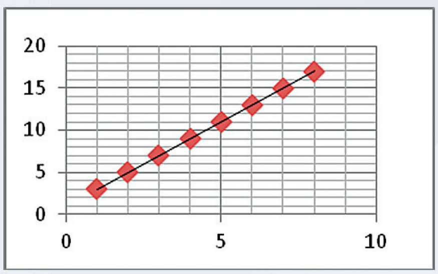
Televizor se podraži za $9{\cdot}4\,\%$.

Uporaba tehnologije

ZGLEDI

1. Člene aritmetičnega zaporedja z znanim (prvim) členom $a_1 = 3$ in diferenco $d = 2$ ter njegov graf zelo enostavno dobimo s programom *Excel*.

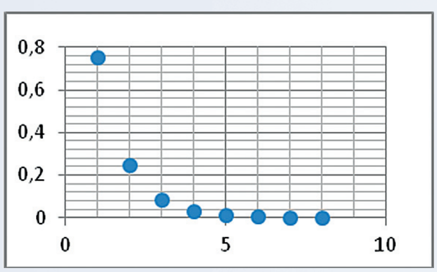
	A	B
1	prvi člen	3
2	diferenca	5
3	2	7
4		9
5		11
6		13
7		15
8		17
9		19
10		21
11		23



	A	B
1	Prvi člen	3
2	diferenca	= B1 + A\$3
3	2	= B2 + A\$3
4		= B3 + A\$3
5		…

2. Podobno dobimo tudi člene geometrijskega zaporedja s prvim členom $a_1 = 0{\cdot}75$ in kvocientom $k = 0{\cdot}33$.

	A	B
1	prvi člen	0,75
2	kvocient	0,2475
3	0,33	0,081675
4		0,026953
5		0,008894
6		0,002935
7		0,000969
8		0,00032



	A	B
1	Prvi člen	0˙75
2	kvocient	= B1 ∗ A\$3
3	0˙33	= B2 ∗ A\$3
4		= B3 ∗ A\$3
5		…

3. V banki smo najeli 4000 evrov kredita, ki ga bomo odplačevali v enakih mesečnih obrokih po 300 evrov pri mesečni obrestni meri $1'5\,\%$. Koliko mesecev bomo odplačevali posojilo?

Pri odplačevanju se bo po eni strani posojilo manjšalo zaradi mesečnih odplačil, po drugi strani pa se bo dolg relativno povečeval zaradi obresti, ki jih moramo plačati banki. Gibanje denarja lahko zapišemo z rekurzivno formulo:

$a_1 = 4000,\ a_n = 1'015 \cdot a_{n-1} - 300$

Uporabimo *Excelovo* preglednico.

	A	B
1	dolg	obrok odplačila
2	= 1.015 * A1 – B$1	
3	= 1.015 * A2 – B$1	
4	…	

	A	B
1	4.000,00 €	300,00 €
2	3.760,00 €	
3	3.516,40 €	
4	3.269,15 €	
5	3.018,18 €	
6	2.763,46 €	
7	2.504,91 €	
8	2.242,48 €	
9	1.976,12 €	
10	1.705,76 €	
11	1.431,35 €	
12	1.152,82 €	
13	870,11 €	
14	583,16 €	
15	291,91 €	

Preglednica nam pokaže, da bo odplačil 14, zadnje pa bo malenkost nižje od 300 evrov.

NALOGE

79. Zapišite prvih pet členov geometrijskega zaporedja, če je:

a) $a_1 = 1,\ k = 3$

b) $a_1 = 2,\ k = -2$

c) $a_1 = -8,\ k = \frac{3}{2}$

č) $a_1 = -25,\ k = -0'2$

80. Zapišite količnik in splošni člen geometrijskega zaporedja ter zapišite njegove lastnosti.

a) $2, 6, 18, 54, 162 \ldots$

b) $18, 6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9} \ldots$

c) $-27, -18, -12, -8, -\frac{16}{3} \ldots$

č) $3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27} \ldots$

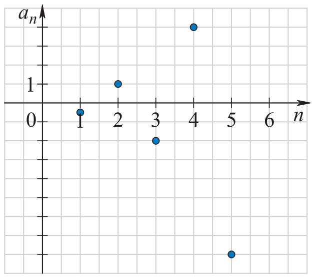
d) $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -4 \ldots$

81. V geometrijskem zaporedju je šesti člen 54, količnik pa $\frac{4}{3}$. Koliko je deveti člen zaporedja?

82. Poiščite peti, deseti in splošni člen geometrijskega zaporedja $4, 8, 16 \ldots$

83. Poiščite četrti, osmi in splošni člen geometrijskega zaporedja $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{8} \ldots$ Ali sta števili $\frac{27}{128}$ in $\frac{81}{512}$ člena danega zaporedja?

84. Na sliki je narisan graf geometrijskega zaporedja. Zapišite splošni člen zaporedja. Koliko členov zaporedja je večjih od 50?



85. Pri danih podatkih za geometrijska zaporedja poiščite neznane količine.

a) $a_n=3^n$, a_1, a_2, a_5

b) $a_1=4$, $k=\frac{1}{2}$, a_n, a_{10}

c) $a_3=6$, $k=-2\text{˙}5$, a_4, a_6, a_1, a_n

č) $a_6=16$, $a_{10}=256$, k, a_1, a_n

86. Poiščite četrti, osmi in splošni člen geometrijskega zaporedja ab, $\frac{a^2}{a+b}$, $\frac{a^3}{b(a+b)^2}$ …

87. Vrednosti izrazov $\tan\frac{9\pi}{4}$, $\cos\frac{7\pi}{6}$ in $(\sin\frac{2\pi}{3})^2$ so zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Zapišite člene zaporedja in izračunajte četrti člen.

88. Ugotovite, ali so vrednosti spodnjih izrazov števila zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Zapišite količnik zaporedja.

a) $\cos 5\pi$, $\sin\frac{7\pi}{6}$, $\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}$

b) $\log\frac{1}{100}$, $\ln e\cdot\log_4 2$, $\log_3\sqrt[4]{3}\cdot\log_5\frac{1}{\sqrt{5}}$

89. Izračunajte, za katera realna števila x so vrednosti danih izrazov zaporedni členi geometrijskega zaporedja.

a) $x+5$, $x+2$, x

b) $x+1$, $2x+2$, $6x-2$

c) $\sqrt{x}-1$, $\sqrt{x}-2$, $\sqrt{x}+1$

č) 4^x, $0\text{˙}25$, 8^{x+2}

d) $\log_3(2x-1)$, $\log_3 9$, $\log_3 162-\log_3 2$

90. Ničle polinoma $p(x)=x^3+7x^2-21x-27$ so prvi trije členi geometrijskih zaporedij. Zapišite ničle polinoma in splošna člena zaporedij.

91. Zapišite splošni člen geometrijskega zaporedja, danega z:

a) $a_2=3$, $a_3\cdot a_4=243$

b) $a_3=8$, $a_4+a_5=48$

c) $a_1\cdot a_3=144$, $a_4-a_2=15$

92. Pokažite, da števila $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ oblikujejo geometrijsko zaporedje.

93. Izračunajte geometrijsko sredino števil:

a) 12 in 27 b) $9-\sqrt{54}$ in $\sqrt{6}+3$.

94. Izračunajte, do katerega člena so členi zaporedja 54, 18, 6 … večji od $\frac{1}{100}$.

95. Med števili 48 in 243 vrinite tri števila tako, da sestavljajo vsa števila skupaj geometrijsko zaporedje. Zapišite količnik zaporedja in vrinjena števila.

96. Med števili 128 in $-\frac{1}{128}$ vrinite šest števil tako, da nastane osemčleno končno geometrijsko zaporedje. Zapišite količnik zaporedja.

97. Koliko je vseh naravnih števil, večjih od 1 in manjših od 1 000 000, ki so potence števila 3? Zapišite splošni člen zaporedja.

98. Zapišite celoštevilska geometrijska zaporedja, za katera je vsota prvih treh členov 28, produkt prvega in zadnjega člena pa 64.

99. Rešitev enačbe $4^{2x}\cdot(2^{-3}\sqrt{2})^x=64$ je prvi člen, rešitev enačbe $\log_9\sqrt{27+2\cdot 3^x}=1$ pa drugi člen geometrijskega zaporedja. Zapišite količnik zaporedja.

100. V aritmetičnem zaporedju je tretji člen za 8 večji od prvega. Drugi, peti in štirinajsti člen pa sestavljajo zaporedne člene geometrijskega zaporedja. Zapišite splošna člena obeh zaporedij.

101. Število 18 zapišemo kot vsoto prvih treh členov aritmetičnega zaporedja. Če tretji člen tega zaporedja povečamo za 3, dobimo tri zaporedne člene geometrijskega zaporedja. Zapišite člene aritmetičnega zaporedja in člene geometrijskega zaporedja.

102. Tri števila tvorijo geometrijsko zaporedje z vsoto 168. Če drugi člen zaporedja povečamo za 24, tretjega pa zmanjšamo za 24, dobimo zaporedne člene aritmetičnega zaporedja. Zapišite člene geometrijskega zaporedja.

103. Koliko merijo stranice trikotnika z obsegom 103 cm, pri katerem dolžine stranic s prvim členom 4 cm oblikujejo geometrijsko zaporedje?

104. V kvadrat s stranico a včrtamo kvadrat z oglišči v razpoloviščih stranic prejšnjega kvadrata, temu kvadratu včrtamo kvadrat z oglišči v razpoloviščih stranic prejšnjega kvadrata itd. Izračunajte dolžine stranic prvih treh kvadratov in dolžine stranic kvadratov opišite z zaporedjem.

105. Krogu s polmerom $r = 2$ m včrtamo enakostranični trikotnik, temu trikotniku včrtamo krožnico, krožnici včrtamo enakostranični trikotnik … Velikost ploščin dobljenih trikotnikov opišite z zaporedjem.

106. Žoga odskoči od vodoravnih tal po prvem odboju 1 m, po drugem 80 cm … Višine, do katerih odskoči žoga, sestavljajo geometrijsko zaporedje. Koliko odskoči žoga po tretjem odboju in koliko po petem? Višino odskoka žoge opišite s splošnim členom zaporedja. Po katerem odboju odskoči žoga manj kot 20 cm?

107. Zapišite štiri naravna števila, za katera velja, da prva tri oblikujejo aritmetično zaporedje, prvo, drugo in četrto število pa geometrijsko zaporedje. Vsota prvega in tretjega števila je 16, vsota drugega in četrtega pa 24.

108. Izračunajte.

a) $\sum_{n=1}^{8} 3^n$ b) $\sum_{n=1}^{4} 2 \cdot (-2)^{1-n}$ c) $\sum_{n=5}^{10} \frac{5^n}{4^n}$

109. Izračunajte $1 + 2 + 4 + \ldots + 4096$.

110. V naraščajočem geometrijskem zaporedju je prvi člen 5, peti pa 405. Koliko je S_{10}?

111. Koliko členov geometrijskega zaporedja z vsoto -255 moramo sešteti, če je $a_3 = -4$ in $a_7 = -64$?

112. Rešite enačbo $-2 + 8 - 32 + \ldots + x = 26\,214$.

113. Prvi člen končnega geometrijskega zaporedja je 1. Zapišite količnik in zadnji člen zaporedja, če je vsota prvih štirih členov tega zaporedja 40.

114. Tri števila sestavljajo geometrijsko zaporedje z vsoto 26, njihov produkt pa je 216. Zapišite ta števila.

115. Koliko je prvi in koliko zadnji člen sedemčlenskega geometrijskega zaporedja z vsoto 20 078 in količnikom $-\frac{5}{3}$?

116. Vsota prvih petih členov geometrijskega zaporedja je -61, vsota drugega in tretjega člena pa -6. Zapišite prvih pet členov zaporedja.

117. Med števili 16 in 81 vrinite toliko števil, da nastane končno geometrijsko zaporedje z vsoto vseh števil 211. Zapišite splošni člen zaporedja. Zapišite dobljeno končno zaporedje.

118. Vsota končne geometrijske vrste s prvim členom 2 in zadnjim členom 162 je 242. Poiščite količnik zaporedja in število členov vrste.

119. Koliko členov geometrijskega zaporedja 12, 18, 27 … moramo sešteti, da bo vsota večja od 1000?

120. Tri števila sestavljajo končno geometrijsko zaporedje z vsoto 117. Če drugi člen povečamo za 12, tretjega pa zmanjšamo za 12, dobimo aritmetično zaporedje. Izračunajte člene geometrijskega zaporedja in diferenco aritmetičnega zaporedja.

121. Aritmetično zaporedje devetih različnih členov ima vsoto 135. Prvi, tretji in deveti člen sestavljajo geometrijsko zaporedje. Izračunajte prvi člen in diferenco aritmetičnega zaporedja.

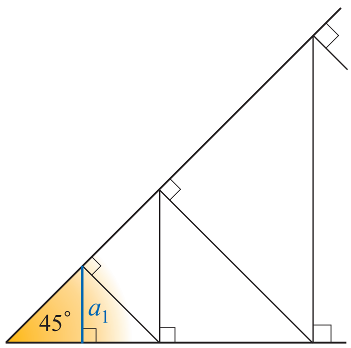
122. Rešitvi enačbe $\log(x^2 + 1000) = \log 110 + \log x$ sta prva dva člena padajočega aritmetičnega zaporedja in padajočega geometrijskega zaporedja.

a) Rešite enačbo in zapišite splošna člena zaporedij.

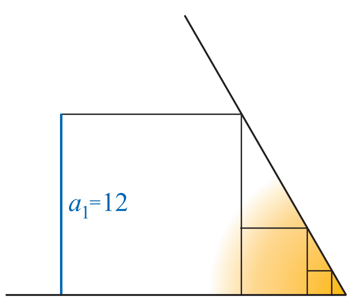
b) Kolikšni sta vsoti prvih petih členov in kolikšni vsoti prvih desetih členov obeh zaporedij?

c) Ali sta zaporedji delnih vsot v obeh primerih naraščajoči?

123. V kot $45°$ vrišemo lomljeno krivuljo, kot kaže slika. Zapišite dolžine prvih petih daljic in splošni člen zaporedja dolžin daljic, če je $a_1 = 1$. Koliko meri lomljena krivulja, ki vsebuje n daljic?



124. V kot $60°$ so vrisani kvadrati, kot kaže slika. Zaporedja ploščin kvadratov sestavljajo padajoče geometrijsko zaporedje. Izračunajte kvocient zaporedja, če meri stranica največjega kvadrata $a_1 = 12$. Koliko meri vsota ploščin prvih 3 kvadratov?



125. Izračunajte vsoto desetih členov geometrijskega zaporedja s podatki $a_3 - a_1 = 12$, $a_1 \cdot a_3 = 64$.

126. Izračunajte vsoto neskončne geometrijske vrste $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots$

127. Določite x tako, da bodo $-8x$, x^2 in 1 zaporedni členi geometrijskega zaporedja.

128. Prvi člen geometrijskega zaporedja je 5, peti pa 80. Izračunajte vsoto prvih 11 členov zaporedja.

129. Izračunajte vsoto neskončne geometrijske vrste $20 + 8 + 3{\cdot}2 + 1{\cdot}28 + \ldots$

130. Zapišite geometrijsko zaporedje, če je razlika tretjega in prvega člena 12, njun produkt pa 64.

131. Dana je končna vrsta $x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} = \frac{3}{8}$. Izračunajte x.

132. Poznamo tri člene nekega zaporedja: $a_1 = 12$, $a_5 = \frac{16}{3}$, $a_8 = \frac{128}{81}$.

a) Z računom pokažite, da je zaporedje geometrijsko.

b) Izračunajte deseti člen zaporedja.

c) Ali število $\frac{32}{27}$ pripada temu zaporedju? Odgovor utemeljite z računom.

133. Geometrijsko zaporedje vsebuje člena $a_3 = 8$ in $a_7 = 128$. Zapišite prvi člen in kvocient ter izračunajte vsoto $a_{10} + \ldots + a_{20}$.

134. Če vsakemu od števil 2, 6 in 58 prištejemo isto število, dobimo prve tri člene geometrijskega zaporedja. Izračunajte vsoto prvih 12 členov tega zaporedja.

135. Med rešitvi kvadratne enačbe $x^2 - 66x + 128 = 0$ vrinite štiri števila tako, da boste dobili geometrijsko zaporedje šestih členov. Izračunajte in zapišite ta štiri števila.

136. Za člene geometrijskega zaporedja velja $a_1 - a_2 + a_3 = 9$ in $a_4 - a_5 + a_6 = 72$. Izračunajte prvih šest členov zaporedja.

137. Površina kvadra meri 78 cm^2. Robovi kvadra tvorijo geometrijsko zaporedje, skupna dolžina robov pa meri 13 cm. Izračunajte prostornino kvadra.

138. Konjski mešetar kupuje konja, ki stane 10 000 evrov. S prodajalcem se dogovori, da bo kupnino plačal glede na število žebljev na konjevih podkvah. Za prvi žebelj bo plačal 1 cent, za drugi žebelj 2 centa, za tretji žebelj 4 cente … Ali je sklenil dobro kupčijo, če je vsaka podkev zabita s petimi žeblji?

Matematična ali popolna indukcija

Pierre de Fermat
(1607–1665)

Francoski matematik Fermat je bil po poklicu advokat in dolgoletni kraljevi svetovalec v parlamentu v Toulousu. Večino prostega časa pa je posvetil matematiki, posebej teoriji števil, kjer je prišel do številnih zanimivih odkritij – leta 1636 je našel šesti par prijateljskih števil (17 296, 18 416). Svojih odkritij ni nikoli javno objavil, o njih je govoril le v pismih prijateljem, opremljenih s skopimi dokazi ali celo brez njih. Mnogo rezultatov, do katerih se je dokopal, se je ohranilo kot opazke na robu latinskega prevoda Diofantove knjige *Aritmetika*, ki jo je rad prebiral.

Fermat je leta 1640 postavil trditev, da so števila oblike $F(n) = 2^{2^n} + 1$ praštevila za vsako nenegativno celo število n. Pa poglejmo, ali je imel prav.

Takoj vidimo, da zaporedje števil izredno hitro narašča.

$F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65\,537$, $F(5) = 4\,294\,967\,297$

Euler je šele leta 1732 pokazal, da šesto število v zaporedju ni praštevilo, ampak produkt dveh velikih števil: $641 \cdot 6\,700\,417$. To lahko danes enostavno ugotovimo z računalom, ki pozna tudi simbolično računanje, ali z ukazom *Factorize* računalniških programov (npr. *Microsoft Math*, *Wolfram Alpha*), v tistih časih pa ni bilo tako.

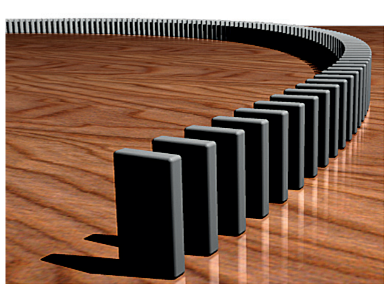
Iz tega primera vidimo, da Fermatov način (induktivnega) sklepanja iz posameznih primerov na splošno pravilo v tem primeru ni bil ustrezen.

Danes izreke, formule, trditve …, v katerih nastopajo naravna števila, dokazujemo z matematično ali popolno indukcijo.

Izrek o popolni (matematični) indukciji

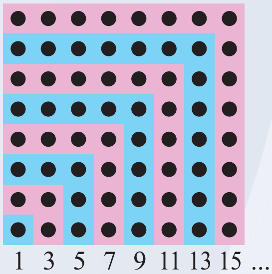
Izrek, formula, trditev … velja za vsa naravna števila, če:

- velja za $n = 1$,
- lahko iz veljavnosti za naravno število n dokažemo, da velja tudi za naslednje naravno število, torej $n + 1$ (po prvi točki velja za 1, zato po drugi točki velja za 2, ker velja za 2, velja tudi za 3, ker velja za 3, velja tudi za 4 …).



ZGLEDI

1. V uvodu poglavja smo na grafični način pokazali, kako izračunamo vsoto prvih n lihih števil. Eni piki dodamo tri in vse štiri tvorijo kvadrat oz. kvadratno število 4, potem dodamo 5 pik in dobimo kvadratno število 9 …



$1+3=4$

$1+3+5=9$

$1+3+5+7=16$

…

Postopek lahko nadaljujemo v nedogled, vendar s tem formule
$F(n)=1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$
še ne dokažemo. Za korekten dokaz potrebujemo matematično indukcijo.

Najprej napišemo indukcijsko predpostavko.
Formula $F(n)=1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$
naj velja za vsa naravna števila.

Za $n=1$ enakost velja, saj je $1=1^2$.

Pri predpostavki, da prejšnja formula velja za n, poglejmo še veljavnost za $n+1$:

$F(n+1)=F(n)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$

S tem je formula pravilno dokazana.

2. Dokažimo, da velja deljivost $9\,|\,(13^n-4^n)$.

Indukcijska predpostavka je $13^n-4^n=9k$ oz. $13^n=9k+4^n$.

Za $n=1$ je deljivost očitna: $13^1-4^1=9$.

Poglejmo še veljavnosti za $n+1$:

$$13^{n+1}-4^{n+1}=13\cdot(9k+4^n)-4^{n+1}=13\cdot 9k+4^n\cdot(13-4)=$$
$$=9(13k+4^n)=9k_1$$

3. Deljivost $7\,|\,(3^{2n+1}+2^{n-1})$ bomo dokazali na drugačen način.

Za $n=1$ deljivost velja: $3^3+2^0=28=4\cdot 7$.

Indukcijsko predpostavko $3^{2n+1}+2^{n-1}=7k$ malo predelamo:
$3^{2n+1}=7k-2^{n-1}$.

$$3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)-1}=3^{2n+3}+2^n=9\cdot 3^{2n+1}+2^n=9\cdot(7k-2^{n-1})+2^n=$$
$$=9\cdot 7k-9\cdot 2^{n-1}+2^n=7k\cdot 9-2^{n-1}\cdot(9-2)=7\cdot(9k-2^{n-1})$$

Deljivost je dokazana.

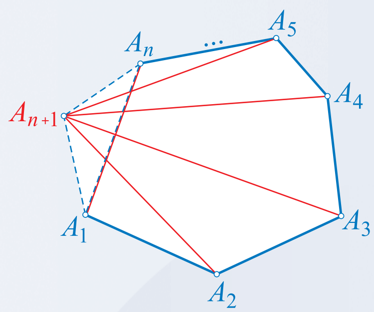
4. Z matematično indukcijo dokazujemo tudi nekatere izreke iz elementarne geometrije. Naš primer bo formula za število diagonal konveksnega n-kotnika $D(n)=\frac{n(n-3)}{2}$, ki smo jo v 2. letniku dobili z logičnim sklepanjem, zdaj pa jo bomo še formalno dokazali.

Začnimo s številom diagonal 4-kotnika (očitno ne moremo začeti z $n=1$).

$D(4)=\frac{4\cdot(4-3)}{2}=2$ (4-kotnik ima res dve diagonali.)

Če n ogliščem dodamo še eno oglišče in dobimo $(n+1)$-kotnik, potem vse diagonale od prej ostanejo, iz novega oglišča gre $(n+1-3)$ novih diagonal, ena stranica pa se prelevi v diagonalo:

$$D(n+1)=\frac{n(n-3)}{2}+n-2+1=\frac{n^2-3n+2n-2}{2}=\frac{n^2-n-2}{2}=\frac{(n+1)(n-2)}{2}=$$
$$=\frac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$$



5. Dokažimo dve neenakosti, pri katerih je dokazovanje med seboj povezano:

(1) $2n+1\le 2^n$; $\forall n\ge 3$

(2) $n^2+3\le 2^n$; $\forall n\ge 5$

Prvi indukcijski korak velja za $n=3$; $2\cdot 3+1\le 2^3$.

V drugem delu upoštevamo indukcijsko predpostavko:
$2(n+1)+1=(2n+1)+2\le 2^n+2\le 2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$,
in prva neenakost je dokazana.

Veljavnost neenakosti (zaradi omejitve $\forall n\ge 5$) preverimo za $n=5$, $5^2+3\le 2^5$.

$$\begin{aligned}(n+1)^2+3&=n^2+2n+1+3=\\&=(n^2+3)+(2n+1)\le 2^n+(2n+1)\le 2^n+2^n=\\&=2\cdot 2^n=2^{n+1}\end{aligned}$$

Če po prejšnjem dokazu velja $2n+1\le 2^n$; $\forall n\ge 3$, velja tudi za $\forall n\ge 5$.

NALOGE

139. Izračunajte.

a) $\sum_{k=101}^{199} k$ b) $\sum_{k=10}^{25} k^2$

c) $1001+1003+1005+\ldots+1099$

140. S popolno indukcijo pokažite, da velja:

a) $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

b) $1+4+9+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1+8+27+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

141. S popolno indukcijo dokažite, da je vsota prvih n členov:

a) geometrijskega zaporedja enaka $S_n=\frac{a_1(k^n-1)}{k-1}$; $k\neq 1$,

b) aritmetičnega zaporedja enaka $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$.

142. Za spodnje vrste izračunajte S_1, S_2, S_3, S_4, poiščite predpis za vsoto dane končne vrste in dokažite pravilnost predpisa s popolno indukcijo:

a) $1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}$

b) $1+3+3\cdot 4+3\cdot 4^2+\ldots+3\cdot 4^{n-2}$

c) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

č) $2\cdot 1-2\cdot 4+2\cdot 9-\ldots+2\cdot(-1)^{n-1}\cdot n^2$

d) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{3}{3\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{n(2n+2)}$

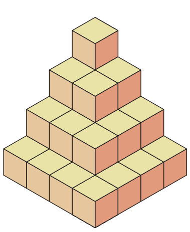
143. S popolno indukcijo dokažite:

a) $64\,|\,(3^{2n+3}+40n-27)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

b) $120\,|\,(n^5-5n^3+4n)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

144. Izračunajte vsoto vrste $S_n=1-2+3-4+5-6+\ldots+(2n-1)-2n$.

145. Dano je telo iz kock, postavljenih v štirih plasteh, kot kaže risba. Izračunajte prostornino tega telesa in telesa, pri katerem smo postavljanje kock nadaljevali po istem pravilu in je na koncu telo sestavljeno iz enajstih plasti kock.



146. Dokažite z matematično indukcijo:

a) 4 deli 5^n-1

b) 4 deli 9^n+3

c) 11 deli 23^n-1

č) 6 deli $5^{2n-1}+1$

d) $n(n^2+5)$ je večkratnik števila 6

e) 7 deli $5\cdot 3^{4n+1}-2^{2n}$

f) $(1+x)^n\geq 1+xn$; $x>0$

g) $3+5+7+\ldots+(2n+1)=n(n+2)$

h) $2+6+10+\ldots+(4n-2)=2n^2$

i) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$

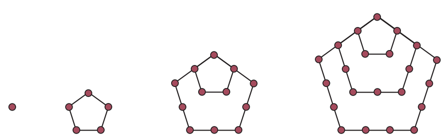
j) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

k) $7+5+3+\ldots+(9-2n)=-n^2+8n$

l) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

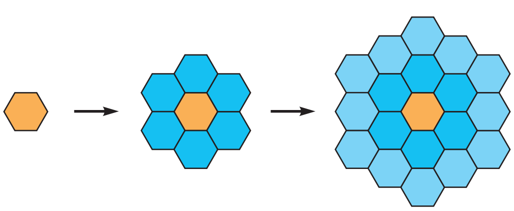
m) $1+5+5^2+5^3+\ldots+5^{n-1}=\frac{5^n-1}{4}$

147. Dokažite formulo $P(n)=\frac{n(3n-1)}{2}$, s katero lahko poiščemo vsa pentagonalna števila.



148. Dokažite formulo $S_n=180°(n-2)$, s katero izračunamo vsoto notranjih kotov konveksnega n-kotnika.

149. Zapišite pravilo, s katerim dobimo število šestkotnikov v posamezni rožici. Pravilo dokažite z matematično indukcijo.

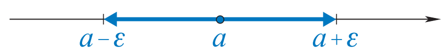


Limita zaporedja

Spomnimo se zaporedja $a_n = \frac{2n-2}{n+1}$ na str. 14. Z uporabo racionalne funkcije $f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$ smo ugotovili, da je zaporedje omejeno, videli smo tudi, da je naraščajoče in se njegovi členi približujejo vrednosti $M = 2$. Zdaj bi radi ugotovili še, od katerega indeksa naprej se vsi členi zaporedja od števila 2 razlikujejo za manj kot 0·001.

Če hočemo priti do odgovora, najprej definiramo nov pojem.

Odprt interval širine 2ε s središčem v točki a je **ε-okolica točke** a.



$$\mathcal{O}_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x}; |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}| < \varepsilon\} = (\boldsymbol{a} - \varepsilon, \boldsymbol{a} + \varepsilon)$$

Za rešitev naloge moramo rešiti neenačbo $|2 - a_n| < \frac{1}{1000}$.

$|2 - \frac{2n-2}{n+1}| < \frac{1}{1000}$; $|\frac{2n+2-2n+2}{n+1}| < \frac{1}{1000}$; $|\frac{4}{n+1}| < \frac{1}{1000}$

Ker je $n \in \mathbb{N}$, velja $\frac{4}{n+1} < \frac{1}{1000}$; $4 \cdot 1000 < n + 1$; $n > 3999$.

Prišli smo do odgovora. Vsi členi zaporedja od vključno 4000. dalje ležijo znotraj okolice (1·999, 2·001) števila 2. S tem pa smo ugotovili še nekaj: zunaj izbrane okolice leži končno mnogo členov zaporedja, znotraj okolice pa neskončno mnogo. Zaradi tega ima število 2 za to zaporedje poseben pomen, imenujemo ga **limita zaporedja**. Zaporedje, ki ima limito, je **konvergentno**, sicer je **divergentno**.

Limita zaporedja je realno število, v katerega poljubni ε-okolici je neskončno mnogo členov zaporedja, zunaj te okolice pa le končno mnogo.

Definicijo lahko povemo še drugače:
Realno število a je limita neskončnega zaporedja $\{a_n\}$, če za vsako, še tako majhno pozitivno število ε obstaja tako naravno število N, da za vsak indeks $n > N$ velja $|a - a_n| < \varepsilon$.

Razlika med limito in dovolj poznim členom zaporedja je poljubno majhna.

Nekonstantno aritmetično zaporedje je vedno divergentno, geometrijsko zaporedje je konvergentno za $|k| < 1$.

Stekališče zaporedja je realno število, v katerega poljubni ε-okolici je neskončno mnogo členov zaporedja.

Izkaže se, da lahko za nekatera zaporedja zelo enostavno preverimo, če so konvergentna. Tako so npr. konvergentna naraščajoča zaporedja, ki so navzgor omejena, ali padajoča zaporedja, ki so navzdol omejena. Drugače je z zaporedji, ki niso niti naraščajoča niti padajoča.

Oglejmo si nekaj primerov.

ZGLEDA

1. Ugotovimo, ali je zaporedje $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32} \ldots$ konvergentno.

Zaporedje je alternirajoče; njegove člene z lihimi indeksi lahko zapišemo kot zaporedje s splošnim členom $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-2}}$, člene s sodimi indeksi pa kot zaporedje s splošnim členom $a_{2n} = \frac{-1}{2^{2n-1}}$. Obe zaporedji imata limito 0. Osnovno zaporedje je razlika dveh konvergentnih zaporedij z limito 0, zato je konvergentno.

2. Ugotovimo, ali je zaporedje $a_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{n+1}$ konvergentno ali divergentno.

Najprej zapišimo nekaj zaporednih členov: $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \frac{7}{8}, -\frac{8}{9} \ldots$ Takoj opazimo, da se členi z lihimi indeksi bližajo številu 1, členi s sodimi indeksi pa številu -1, zato bo neskončno mnogo členov (vsi z lihim indeksom) v poljubni ε-okolici števila 1 in neskončno mnogo členov (vsi s sodim indeksom) v poljubni ε-okolici števila -1. Zaporedje ni konvergentno, ima pa dve stekališči: 1 in -1.

Poglejmo, kako je s konvergenco naslednjih zaporedij:

$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, 1 \ldots$

$b_n = 3^n$

$a_n = \cos \frac{2n\pi}{3}$

V prvem zaporedju so vsi členi z lihim indeksom enaki 1, vsi členi s sodim indeksom pa se bližajo številu 0. Zaporedje ima dve stekališči: 1 in 0, in je divergentno.

Drugo zaporedje je geometrijsko s kvocientom, večjim od 1, zato je divergentno.

Funkcija kosinus je periodična, in ko n teče od 1 naprej, dobivamo člene $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \ldots$ (prvi trije členi se ciklično ponavljajo). Zaporedje ima dve stekališči in je divergentno.

Lastnosti limite in računanje

Pri opravkih z neskončnimi zaporedji pridemo tudi do računanja s »številom« neskončno. Če je zaporedje naraščajoče, je sicer divergentno, vendar zaradi uporabnosti včasih rečemo, da je njegova limita enaka ∞.

Naslednji trije zgledi ne potrebujejo posebne razlage.

ZGLEDI

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\sqrt{n}) = -\infty$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$

Včasih imajo zaporedja obliko razlike ali kvocienta dveh izrazov, od katerih gresta pri limitiranju oba proti neskončno. Dobimo $\infty-\infty$ in $\frac{\infty}{\infty}$. Lahko pa gresta v limiti oba izraza proti nič: $\frac{0}{0}$. Take so na primer limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n+5}{n^3+n^2-1} \qquad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{n^{-2}}$$

Izrazi, ki jim ne moremo določiti vrednosti: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, $0\cdot\infty$, ∞^0, 0^0.

To so le tri možnosti od t. i. nedoločenih izrazov. V takih primerih moramo izraze preoblikovati tako, da se »nedoločenosti« znebimo, če je le mogoče.

Pri računanju bomo uporabljali dve lastnosti, ki ju ni treba dokazovati, ker sta očitni:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} k = k}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

Privzemimo, da sta neskončni zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni. Potem so konvergentni tudi njuni vsota $\{a_n+b_n\}$, razlika $\{a_n-b_n\}$, produkt $\{a_n\cdot b_n\}$, kvocient $\{\frac{a_n}{b_n}\}$, če je zaporedje $\{b_n\}$ neničelno, in produkt z realnim številom k: $\{k\cdot a_n\}$.

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n};\ \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} (k\cdot a_n) = k\cdot \lim_{n\to\infty} a_n}$$

ZGLEDI

1. Izračunajmo vrednost limite, ki jo poznamo iz uvoda v podpoglavje: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-n+5}{n^3+n^2-1}$.

Izraz pod limitnim znakom je diskretna racionalna funkcija in z vstavljanjem »števila« ∞ bi dobili nedoločen izraz $\frac{\infty}{\infty}$. Spomnimo se, kako smo v tretjem letniku iskali vodoravno asimptoto. Števec in imenovalec delimo s potenco z najvišjim eksponentom – v našem primeru z n^3, uporabimo prej omenjene lastnosti in dobimo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-n+5}{n^3+n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3}-\frac{n}{n^3}+\frac{5}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{n^2}{n^3}-\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}=\frac{2-0+0}{1+0-0}=2$$

2. Izračunajmo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

To limito izračunamo tako, da najprej števec in imenovalec delimo s 3^n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^{n+1}}{2^n+3^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\lim\limits_{n\to\infty}3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\lim\limits_{n\to\infty}1}=$$

$$=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

3. Izračunajmo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}-n}{2}$.

Izraz najprej preoblikujemo tako, da števec in imenovalec množimo s $\sqrt{n^2-n}+n$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}-n}{2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{2(\sqrt{n^2-n}+n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n-n^2}{2(\sqrt{n^2-n}+n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(\sqrt{n^2-n}+n)}$$

Zdaj še števec in imenovalec delimo z n in nato izvedemo limitni postopek.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1)}=\frac{-1}{2(\sqrt{1-0}+1)}=-\frac{1}{4}$$

4. Izračunajmo limito $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n})$, ki smo jo že omenili v uvodu.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt{\frac{2n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n}}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\infty=\infty$$

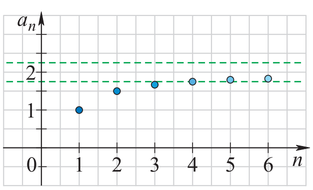
5. Izračunajmo limito zaporedja s splošnim členom $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}$ in ugotovimo, kateri členi ležijo zunaj ε-okolice limite pri $\varepsilon=0{,}25$.

Za člene zaporedja, ki ležijo v ε-okolici limite, velja neenačba $|a-a_n|<\varepsilon$. Izračunamo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=2$, vstavimo podatke in izračunamo n:

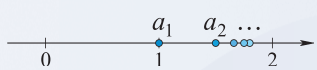
$$\left|2-\frac{2n-1}{n}\right|<0{,}25$$

$$\left|\frac{1}{n}\right|<0{,}25$$

$$n>4$$



Četrti člen je še zadnji člen, ki leži zunaj ε-okolice števila 2, torej je $N=4$. Zunaj ε-okolice limite ležijo členi a_1, a_2, a_3 in a_4.



6. Izračunajmo, od katerega indeksa naprej vsi členi zaporedja s splošnim členom $a_n=2^{-n}$ ležijo v $\varepsilon=0{,}001$ okolici limite zaporedja.

Najprej izračunamo limito: $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

Za člene, ki ležijo v ε-okolici limite 0, je:

$$|a-a_n|<\varepsilon$$

$$|2^{-n}|<0{,}001$$

$$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1000}$$

$$2^n>1000$$

Logaritmirajmo levo in desno stran neenačbe.

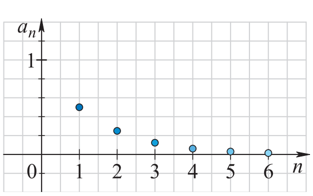
$$\log 2^n>\log 1000$$

$$n\log 2>3$$

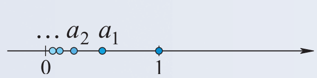
$$n>\frac{3}{\log 2}$$

$$n>9{,}97$$

$$N=9$$



V dani ε-okolici limite so členi zaporedja od vključno desetega naprej.



7. Dokažimo lastnost limite $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Če sta zaporedji $a_1, a_2, a_3 \dots$ in $b_1, b_2, b_3 \dots$ konvergentni, potem za vsako pozitivno število $\frac{\varepsilon}{2}$ obstajata taki naravni števili N_1 in N_2, da je za vsak $n>N_1$: $|a-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ in za vsak $n>N_2$: $|b-b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. Če z N označimo večje od števil N_1 in N_2, potem za vsak $n>\mathrm{N}$ velja, da je

$$|(a+b)-(a_n+b_n)|=|a-a_n+b-b_n|<|a-a_n|+|b-b_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

8. Izračunajmo limito rekurzivno danega zaporedja $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$; $a_1=2$.

Iz prvega člena in pravila za tvorjenje naslednjih členov vidimo, da je zaporedje omejeno in ima vse člene pozitivne.

Iz kvocientnega pravila sledi, da je zaporedje padajoče:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{(2a_n+1)a_n}=\frac{1}{2a_n+1}$$

Ker je zaporedje padajoče in omejeno, ima limito, ki jo je treba le še izračunati.

Če označimo $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$, dobimo

$$a=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+1)}=\frac{a}{2a+1}\quad \text{oz.}\quad 1=\frac{1}{2a+1},$$

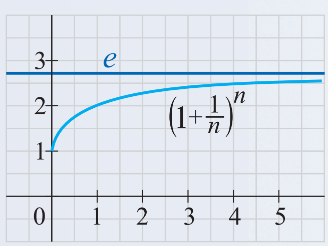
iz česar sledi, da je $a=0$.

9. Za konec poglejmo še konvergentno zaporedje $1+\frac{1}{1}$, $(1+\frac{1}{2})^2$, $(1+\frac{1}{3})^3$, …, $(1+\frac{1}{n})^n$ z limito e.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n=e$$

Z računalnikom lahko izračunamo nekaj približkov.

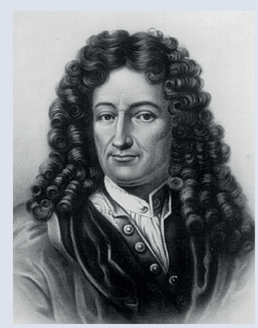
n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2·00000
2	2·25000
5	2·48832
10	2·59374
100	2·70481
1000	2·71692
10 000	2·71815
100 000	2·71827



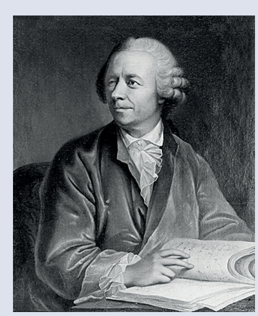
Graf se približuje asimptoti $y=e$.

Iracionalno število e, ki smo ga kot naravno konstanto spoznali v 2. letniku, je prvi v svojih spisih omenil angleški matematik William Oughtred leta 1618. Leta 1690 (17 let pred Eulerjevim rojstvom) ga je nemški matematik Gottfried Leibniz označil s črko b. Končno oznako je število dobilo, ko se je tako (sebi v čast) odločil Leonhard Euler, nesporna matematična avtoriteta svoje dobe.

William Oughtred (1574–1622)



Gottfried Leibniz (1640–1756)



Leonhard Euler (1707–1783)

10. Izračunajmo vrednosti limit $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$ in $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=$$

Uvedemo novo spremenljivko $m=n+1$. Če gre $n\to\infty$, gre tudi $m\to\infty$.

$$=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m-1}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-1}=e\cdot 1=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+2}{n-2}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-2}\right)^{-n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{2}}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{2}}\right)^n\right)^{-1}$$

Spet uporabimo novo spremenljivko $m=\frac{n-2}{2}$ za notranji del limite, in če gre $n\to\infty$, gre tudi $m\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{2}}\right)^n=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m+2}=\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2\cdot\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^2=$$

$$=e^2\cdot 1=e^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{2}}\right)^n\right)^{-1}=\lim_{n\to\infty}\left(e^2\right)^{-1}=e^{-2}$$

NALOGE

150. Zapišite z intervali in izračunajte.

a) $\mathcal{O}_{0{\cdot}5}(1)\cup\mathcal{O}_1(2)$

b) $\mathcal{O}_{0{\cdot}5}(2)\cap\mathcal{O}_{0{\cdot}5}(3)$

c) $\mathcal{O}_{0{\cdot}1}(5)\cap\mathcal{O}_2(5{\cdot}1)$

151. Ugotovite, ali so dana zaporedja konvergentna.

a) $a_n=\frac{2}{n+1}$

b) $a_n=3^{-n}$

c) $a_n=\sqrt{n}$

č) $a_n=\frac{2n}{3n-1}$

d) $a_n=\frac{(-1)^n n}{n+1}$

e) $a_n=\frac{(-1)^n}{3n}$

f) $a_n=3\cdot 9^{3-n}$

g) $a_n=100-3n$

152. Za dana zaporedja ugotovite lastnosti (naraščanje, padanje, omejenost, konvergentnost).

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$

b) $10, 8, 6, 4, 2 \ldots$

c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11} \ldots$

č) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6} \ldots$

153. Izračunajte, kateri členi zaporedja $a_n=\frac{1}{2n-1}$ z limito 0 ležijo v okolici $\mathcal{O}_{0,1}(0)$.

154. Izračunajte, kateri členi zaporedja $a_n=\frac{n}{n+3}$ z limito 1 ležijo v okolici $\mathcal{O}_{0,25}(1)$.

155. Izračunajte, kateri členi zaporedja $a_n=\frac{2n}{n+1}$ z limito 2 ležijo zunaj okolice $\mathcal{O}_{0,4}(2)$.

156. Ugotovite, koliko je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}$. Kateri členi zaporedja se od limite razlikujejo za manj kot $\frac{1}{100}$?

157. Za dana zaporedja zapišite splošni člen. Od katerega člena a_n dalje se v danem zaporedju vsi nadaljnji členi od limite razlikujejo za manj kot $\frac{1}{100}$?

a) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \ldots$

b) $-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2} \ldots$

c) $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{15}, \frac{1}{4}, \frac{6}{25} \ldots$

č) $16, -4, 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16} \ldots$

158. Izračunajte limite zaporedij s splošnim členom:

a) $a_n=\frac{3n}{5n-1}$ č) $a_n=2-5^{-n}$

b) $a_n=\frac{1-n}{2n}$ d) $a_n=\frac{5^n}{5^{n+1}+2^n}$

c) $a_n=\frac{4(n+1)}{6n-5}$ e) $a_n=\frac{10^{n+2}+5^n}{5^{n+1}-10^n}$

159. Izračunajte limite zaporedij.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(5\cdot(\frac{3}{8})^n)$ č) $\lim\limits_{n\to\infty}(3-2n)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^{-1})^n$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{n^2-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+(\frac{2}{5})^n)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+2}{(n-3)^2}$

160. Izračunajte limite zaporedij.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n-1}+\sqrt{n})$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+n})$

161. Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n=\frac{2-n}{n}$.

a) Izračunajte limito zaporedja.
b) Kateri členi zaporedja se od limite razlikujejo za manj kot $\frac{1}{100}$?

162. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n=\frac{3n-1}{n+1}$.

a) Ugotovite, ali je zaporedje naraščajoče ali padajoče, in to tudi dokažite.
b) Izračunajte limito zaporedja.
c) Koliko členov zaporedja ni v okolici $\mathcal{O}_{0\text{˙}5}(3)$?

163. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n=\frac{2n^2}{1-n^2}$.

a) Izračunajte limito zaporedja.
b) Kateri členi zaporedja so v okolici $\mathcal{O}_{0\text{˙}001}(-2)$?

164. Za katere člene zaporedja, danega s splošnim členom $a_n=\frac{1}{3^n}$ z limito 0, velja $a_n\in\mathcal{O}_{0\text{˙}0005}(0)$?

165. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

a) Na štiri decimalna mesta natančno zapišite prve štiri člene zaporedja.
b) Izračunajte limito zaporedja.
c) Koliko členov zaporedja se od limite razlikuje za več kot $\frac{1}{5}$?

166. Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n=\frac{5}{4n-1}$.

a) Pokažite, katere lastnosti ima zaporedje (naraščanje, padanje, omejenost).
b) Izračunajte limito zaporedja.
c) Od katerega indeksa naprej se vsi členi razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon=0\text{˙}001$?

167. Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n=\frac{3n-1}{n^2}$.

a) Pokažite, da je zaporedje padajoče.
b) Izračunajte limito zaporedja.
c) Izračunajte, od katerega člena naprej se vsi nadaljnji členi razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon=0\text{˙}01$.

168. Izračunajte limite, če obstajajo.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln 2n-\ln n)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+4^n)^{-\frac{1}{n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{1+2e^n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2^n+4^n}{5^n+6^n})^{\frac{1}{n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n^3}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 2n}{\sqrt{2n}}$

č) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{2})^n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^7}{n^2}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}$

169. Izračunajte limite zaporedij.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n$ č) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+3}{n+2})^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{\pi}{n})^{\pi n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n})^{2n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+3})^n$

170. Pokažite, da je rekurzivno dano zaporedje $a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+4)$; $a_1=0$ navzgor omejeno z $M=4$ in konvergentno, ter izračunajte limito.

171. Pokažite, da je rekurzivno dano zaporedje konvergentno, in izračunajte limito.

a) $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$; $a_1=2$

b) $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+5)$; $a_1=4$

172. Izračunajte limite zaporedij.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3})$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{1+\sqrt{n^2+2n+1}}$

Neskončne vrste

Če naredimo formalno vsoto vseh členov neskončnega zaporedja, dobimo neskončno vrsto:

$$\boldsymbol{S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

Po »zdravi pameti« bi lahko sklepali, da je zaradi neskončno mnogo členov njena vsota neskončna, vendar ni vedno tako. Včasih je ta vsota končna in je zato neskončna vrsta **konvergentna**, če pa vsota vrste ni končna, je vrsta **divergentna**.

Do ugotovitve, ali je vrsta konvergentna ali ne, pridemo preko zaporedja njenih delnih vsot.

$S_1 = a_1$	prva delna vsota
$S_2 = a_1 + a_2$	druga delna vsota
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$	tretja delna vsota
…	
$\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$	***n*-ta delna vsota**

Neskončno zaporedje delnih vsot $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n \ldots$ je lahko konvergentno ali divergentno.

Definicija:

Če je zaporedje delnih vsot s splošnim členom S_n konvergentno in ima limito S, neskončna vrsta konvergira, njena limita S pa je vsota vrste.

$$\textbf{Če je } \lim_{n\to\infty} S_n = S, \textbf{ potem } a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = S < \infty.$$

ZGLEDI

1. Vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + \ldots$ divergira, saj vrednosti delnih vsot očitno naraščajo prek vsake meje.

2. Vrsta $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ s splošnim členom $a_n = -(-1)^n$ je divergentna.

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 - 1 = 0$

$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$

$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

…

Delne vsote so za lihe indekse enake 1, za sode indekse pa 0. Ker zaporedje delnih vsot ni konvergentno, neskončna vrsta $1-1+1-1+1-1+\ldots$ divergira.

3. Izračunajmo vsoto neskončne vrste
$$S=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots$$

Najprej zapišemo n-to delno vsoto:
$$S_n=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

V poglavju o racionalnih funkcijah v učbeniku *Spatium novum* smo se naučili zapisati racionalni izraz s parcialnimi ulomki:
$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+2}=\frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{(A+B)n+(2A+B)}{(n+1)(n+2)}$$

Ko primerjamo prvi in zadnji števec, dobimo $(A+B)n+(2A+B)=1$ in zaradi enakosti polinomov zelo preprost sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama: $A+B=0$, $2A+B=1$, z rešitvijo $A=1$, $B=-1$.

Ulomek torej lahko zapišemo kot $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$.

Na isti način zapišemo vse ulomke v končni vrsti:
$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}\end{aligned}$$

Zaporedje s splošnim členom S_n je konvergentno, saj obstaja limita
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{2n+4}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{4}{n}}=\frac{1}{2}$ in je enaka vsoti vrste.

Izmed neskončnih vrst je za nas posebej pomembna **neskončna geometrijska vrsta** – vsota vseh členov neskončnega geometrijskega zaporedja. Tudi v tem primeru že poznamo splošni člen zaporedja njenih delnih vsot:

$$\boldsymbol{S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{a_1(k^n-1)}{k-1}}$$

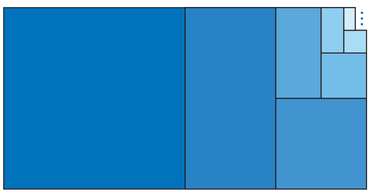
Ugotoviti moramo le še, ali je zaporedje njenih delnih vsot s splošnim členom $S_n=\frac{a_1(k^n-1)}{k-1}$ lahko konvergentno in kdaj.

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(k^n-1)}{k-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1k^n}{k-1}+\lim_{n\to\infty}\frac{(-a_1)}{k-1}=\frac{a_1}{k-1}\lim_{n\to\infty}k^n+\frac{(-a_1)}{k-1}$$

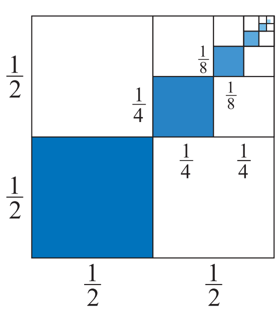
Zgornja limita je odvisna le od kvocienta k geometrijskega zaporedja. Vrsta je zato konvergentna tedaj in samo tedaj, ko je $|k|<1$.

$$S=\frac{a_1}{k-1}\cdot 0+\frac{(-a_1)}{k-1}=\frac{(-a_1)}{k-1}$$

Vsota neskončne vrste s $|k|<1$ je $\boldsymbol{S=\frac{a_1}{1-k}}$.



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=2$$



$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots=\frac{1}{3}$$

Število $x=0{\cdot}\overline{65}$ lahko seveda izračunamo po že znani poti:

$$\begin{aligned} x&=\ 0{\cdot}\overline{65}\\ 100x&=65{\cdot}\overline{65}\\ \hline 99x&=65 \end{aligned}$$

Iskano število je $x=\frac{65}{99}$ in zato $2{\cdot}\overline{65}=2\frac{65}{99}$.

ZGLEDI

1. Neskončna vrsta $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ s splošnim členom $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ ima delno vsoto $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$, ki je končna geometrijska vrsta z začetnim členom $a_1=1$ in količnikom $k=\frac{1}{2}$. Delna vsota je enaka

$$S_n=\frac{a_1(k^n-1)}{k-1}=\frac{1\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-\frac{1}{2}}.$$

Limita delnih vsot obstaja in je

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{0-1}{-\frac{1}{2}}=2.$$

Neskončna vrsta $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ je konvergentna z vsoto 2.

2. Izračunajmo vsoto neskončne geometrijske vrste, pri kateri je drugi člen -6, tretji pa 3.

Količnik iskane geometrijske vrste je $k=\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{-6}=-0{\cdot}5$, prvi člen pa $a_1=\frac{a_2}{k}=\frac{-6}{-0{\cdot}5}=12$. Ker je $-1<-0{\cdot}5<1$, je vrsta $12-6+3-1{\cdot}5+\ldots$ konvergentna. Njena vsota je $S=\frac{a_1}{1-k}=\frac{12}{1+0{\cdot}5}=8$.

3. Vsota neskončne geometrijske vrste je 10, vsota njenih lihih členov pa 8. Izračunajmo količnik in prvi člen.

Vsota lihih členov geometrijske vrste $a_1+a_1k+a_1k^2+a_1k^3+\ldots$ je prav tako neskončna geometrijska vrsta $a_1+a_1k^2+a_1k^4+a_1k^6\ldots$, ki ima prvi člen a_1, količnik pa k^2. Po obrazcu za vsoto neskončne geometrijske vrste $S=\frac{a_1}{1-k}$ dobimo enačbi $10=\frac{a_1}{1-k}$ in $8=\frac{a_1}{1-k^2}$ z neznankama a_1 in k. Če delimo levi in desni strani enačb, dobimo $\frac{10}{8}=1+k$ oziroma $k=\frac{1}{4}$.

Izračunani količnik vstavimo v prvo enačbo $10=\frac{a_1}{1-k}$ in izračunamo, da je prvi člen $a_1=7{\cdot}5$.

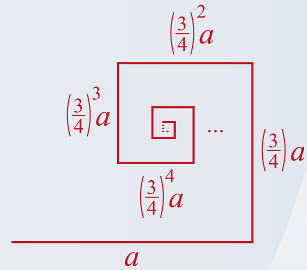
4. Zapišimo periodično decimalno število $2{\cdot}\overline{65}$ v obliki vrste in izračunajmo njeno vsoto.

Periodično decimalno število $2{\cdot}\overline{65}$ je enako vsoti

$2{\cdot}\overline{65}=2+\frac{65}{100}+\frac{65}{10\,000}+\frac{65}{1\,000\,000}+\ldots$, katere del $\frac{65}{100}+\frac{65}{10\,000}+\frac{65}{1\,000\,000}+\ldots$ je neskončna geometrijska vrsta s prvim členom $a_1=\frac{65}{100}$ in količnikom $k=\frac{1}{100}$. Periodično decimalno število $2{\cdot}\overline{65}$ je tako

$$2+\frac{a_1}{1-k}=2+\frac{\frac{65}{100}}{1-\frac{1}{100}}=2\frac{65}{99}.$$

5. Izračunajmo dolžino lomljene črte na sliki.



Dolžina lomljene črte je
$a+\frac{3}{4}a+(\frac{3}{4})^2a+(\frac{3}{4})^3a+(\frac{3}{4})^4a+\dots$ in jo izračunamo po obrazcu $S=\frac{a_1}{1-k}=\frac{a}{1-\frac{3}{4}}=4a$.

6. Zenonova aporija Ahil in želva

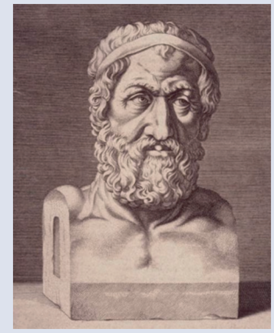
Ahil teče za želvo, ki ji je dal 10 m prednosti. Razmerje Ahilove in želvine hitrosti je 10 : 1. Ko Ahil doseže startno točko želve, je ta že 1 m pred njim, ko doseže drugo točko, je želva 0˙1 m pred njim in tako naprej. Tako se Ahil želvi vedno bolj približuje, nikoli pa je ne ujame.
Zenon se pri tej aporiji opira na obstoj neskončne deljivosti prostora in časa.

Poglejmo, kje je napaka v razmišljanju.

Na začetku ima želva 10 m prednosti. Čas, ki je potreben, da pride Ahil na mesto, kjer je želva, je ena sekunda (Ahil je dober tekač in teče s hitrostjo 36 km/h). Vendar se želva v tem času že premakne za 1 m naprej. Da Ahil pride do tega mesta, potrebuje 0˙1 s. V tem času se želva premakne za 0˙1 m naprej. Da Ahil pride na to mesto, potrebuje 0˙01 s. In tako dalje.

Čas t, v katerem Ahil ujame želvo, je enak vsoti neskončne vrste $1+0˙1+0˙01+0˙001+0˙0001+\dots$ ali drugače:
$t=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{10}{9}$, kjer je kvocient neskončnega geometrijskega zaporedja enak 0˙1.

Ahil ujame želvo po $\frac{10}{9}$ sekunde.



Starogrški filozof in matematik Zenon (495–430 pr. Kr.) iz Eleje je bil Parmenidov učenec. Poudarjal je prvenstvo uma pred čutili, saj nas ta velikokrat varajo, kar je pokazal na duhovitih paradoksih; eden od njih je Ahil in želva. Njegovi paradoksi temeljijo na domnevi, da sta prostor in čas neskončno deljiva. Prvi je uporabil metodo posrednega dokaza in postavil problem kontinuuma, ki je dobil poseben pomen v Cantorjevi teoriji množic in v kvantni fiziki.

Aporija: po SSKJ nerešljivo nasprotje pri logični sodbi v eleatski filozofski šoli.

NALOGE

173. Izračunajte vsote geometrijskih vrst.

a) $18+12+8+\dots$
b) $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\dots$
c) $\sum_{i=1}^{\infty} 3\cdot(-3)^{1-i}$
č) $8+4\sqrt{2}+4+\dots$
d) $\frac{3}{2}-\frac{9}{8}+\frac{27}{32}-\dots$
e) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a}{4^i}$
f) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\dots$

174. Zapišite geometrijsko vrsto, za katero velja:

a) $a_1=3,\ S=8$
b) $k=-\frac{1}{8},\ S=16$
c) $S=-\frac{25}{3},\ k=\frac{2}{5}$

175. Zapišite neskončno geometrijsko vrsto z vsoto 64, če je vsota prvih dveh členov 28.

176. Rešite enačbi, če sta na levi strani neskončni geometrijski vrsti.

a) $x+x^2+x^3+\ldots=2$

b) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots=x$

177. Poiščite realno število x tako, da bo vsota neskončne geometrijske vrste $1+2x+4x^2+8x^3+\ldots$ enaka 3.

178. Števila $3{\cdot}\overline{2}$, $2{\cdot}\overline{18}$ in $4{\cdot}0\overline{144}$ zapišite z ulomki.

179. Za kateri x bo vsota vrste $4+2x+x^2+\ldots$ enaka 3?

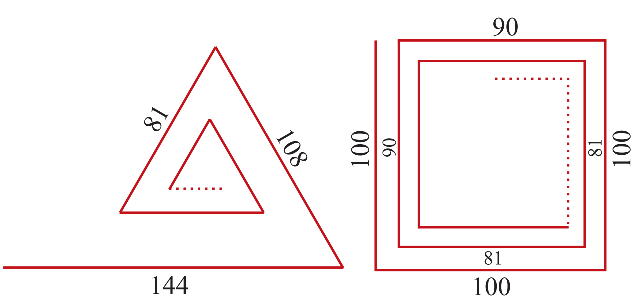
180. Za kateri x bo geometrijska vrsta $2+4x+8x^2+\ldots$ konvergirala in kolikšna je njena vsota?

181. a) Za kateri x bo geometrijska vrsta $3+\frac{2}{x}+\frac{4}{3x^2}+\ldots$ konvergirala?

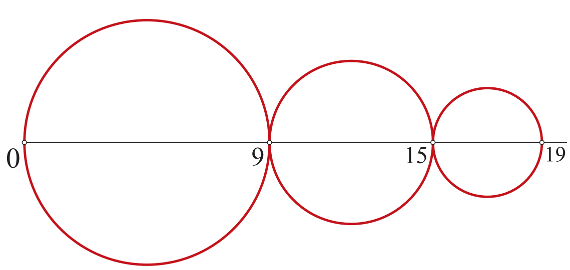
b) Izračunajte njeno vsoto.

c) Za kateri x bo vsota vrste 9?

182. Izračunajte dolžini lomljenih črt na sliki.



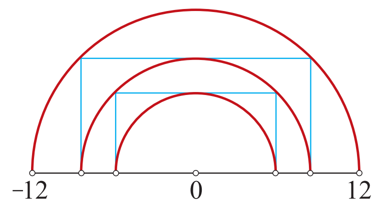
183. Za kroge na sliki velja, da zaporedji ploščin in obsegov krogov tvorita neskončni geometrijski zaporedji. Izračunajte vsoto obsegov in vsoto ploščin vseh krogov.



184. V polkrog včrtamo tak pravokotnik, da temu pravokotniku lahko zopet včrtamo polkrog. Postopek nadaljujemo.

a) Kolikšna je vsota ploščin vseh pravokotnikov?

b) Kolikšna je vsota ploščin vseh polkrogov?



185. Rombu s stranico $a=9$ cm in kotom $\alpha=60°$ včrtamo pravokotnik, katerega oglišča ležijo v razpoloviščih stranic romba. V dobljeni pravokotnik včrtamo romb, katerega oglišča so v razpoloviščih stranic pravokotnika. Postopek nadaljujemo. Izračunajte vsoto obsegov vseh rombov in vsoto ploščin vseh rombov.

186. Pokažite, da je neskončna vrsta konvergentna, in izračunajte njeno vsoto.

a) $S=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots$

b) $S=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots$

c) $S=\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots$

187. Kvadratu s stranico a včrtamo kvadrat, ki ima oglišča v razpoloviščih stranic osnovnega kvadrata. Postopek nadaljujemo. Izračunajte vsoto vseh obsegov in vsoto vseh ploščin.

Navadno in obrestno obrestovanje

Hočemo ali ne, je naše življenje močno povezano z denarjem. Največ poslovanja z denarjem opravijo banke. V banki lahko denar hranimo in nam banka zato nekaj denarja dá, lahko pa si ga izposodimo in mi nekaj denarja damo banki. Vse to dogajanje pa ne bi bilo mogoče brez ustrezne računalniške opreme in matematike.

Da se bomo lahko strokovno pogovarjali, moramo na začetku spoznati ustrezno terminologijo.

- **Glavnica (kapital)**: denarna vrednost, ki jo damo banki v hrambo v obliki vloge, ali dolg, če si denar izposodimo.
- **Obrestna mera (v %)**: število odstotkov, ki vplivajo na povečevanja ali zmanjševanja glavnice.
- **Čas obrestovanja**: število let (mesecev, dni …), za katera denar zaupamo banki.
- **Kapitalizacijska** ali **obrestovalna doba**: časovno obdobje, po katerem se obresti pripišejo glavnici.

Glavnico bomo označevali z G, obrestno mero s p in čas obrestovanja z n. Če ne bomo posebej navedli, bo obrestovalna doba eno leto, kar pomeni, da se obresti glavnici pripišejo konec vsakega leta. V zgledih bomo pogosteje uporabljali mesečno obrestovalno dobo, saj je bolj realistična.

Pri **navadnem obrestovanju** se pripisane obresti ne obrestujejo naprej – obrestuje se le glavnica, zato glavnice pri tem obrestovanju v zaporednih letih tvorijo aritmetično zaporedje:

$$G_1 = G + G \cdot \frac{p}{100},$$
$$G_2 = G + 2G \cdot \frac{p}{100},$$
$$\ldots$$
$$G_n = G + nG \cdot \frac{p}{100}$$

z **diferenco** $\mathbf{\frac{Gp}{100}}$.

Če se obrestujejo tudi pripisane obresti, pa gre za **obrestno obrestovanje** in glavnice v zaporednih letih tvorijo geometrijsko zaporedje:

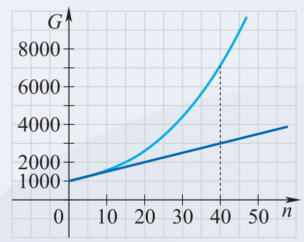
$$G_1 = G + G \cdot \frac{p}{100} = G(1 + \frac{p}{100}) = Gr$$
$$G_2 = G(1 + \frac{p}{100})^2 = Gr^2$$
$$\ldots$$
$$G_n = G(1 + \frac{p}{100})^n = Gr^n$$

s **kvocientom** $\boldsymbol{r = 1 + \frac{p}{100}}$, ki se imenuje tudi **obrestovalni faktor**.

Razlike med obema obrestovanjema pri majhnem številu let niso velike, z leti pa se zelo poznajo.

ZGLED

Poglejmo, kaj se dogaja z glavnico 1000 evrov pri 5-odstotni obrestni meri v 40 letih pri navadnem in obrestnem obrestovanju. Obnašanje glavnic v zaporednih letih nam najlepše pokažeta grafa funkcij in izračun.

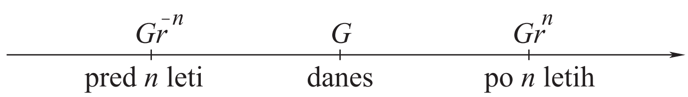


Obrestno: $G_{40} = 1000 \cdot (1{\cdot}05)^{40} = 7040$

Navadno: $G_{40} = 1000 + 40 \cdot 0{\cdot}05 \cdot 1000 = 3000$

Načelo ekvivalence glavnic

V bančništvu lahko primerjamo dva zneska, le če ju gledamo ob istem času – to pomeni, da ju moramo preračunati na isti čas oz. na isti termin. Osnova je današnja vrednost glavnice G. Če hočemo poznati vrednost glavnice G čez n let, ji moramo prišteti obresti za ta čas. V primeru obrestnega obrestovanja moramo današnjo vrednost glavnice pomnožiti z r^n in dobimo vrednost Gr^n. Če pa bi radi vedeli vrednost glavnice pred n leti, jo moramo deliti z r^n oz. jo pomnožiti z r^{-n} in dobimo vrednost Gr^{-n}.



ZGLED

1. Matic lahko za darilo izbira med dvema možnostma: lahko dobi 100 evrov takoj in čez dve leti še 50 evrov ali pa dobi takoj 50 evrov in čez eno leto še 110 evrov. Katera opcija je zanj dolgoročno ugodnejša, če banka obrestuje vloge po obrestni meri 5 % in je pripis obresti konec leta?

Vlogi lahko primerjamo, če gledamo, koliko bi bili vredni danes.

$G_1 = 100 + 50 \cdot r^{-2} = 145{\cdot}35$

$G_2 = 50 + 110 \cdot r^{-1} = 154{\cdot}76$

Ugodnejša je druga možnost, čeprav razlika ni velika.

2. Po kolikšni letni obrestni meri in letni kapitalizaciji nam je banka obračunala obresti, če se je vloga v 12 letih podvojila?

$$2G = Gr^{12}$$
$$2 = r^{12}$$
$$r = 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[12]{2}$$
$$p = 100 \cdot (\sqrt[12]{2} - 1) = 5{,}95\,\%$$

Za podvojitev kapitala v 12 letih potrebujemo skoraj 6-odstotne obresti.

Zavedati se moramo, da v bančništvu eno leto ni najbolj običajna obrestovalna doba. Po navadi je to en dan kot 365. del navadnega ali 366. del prestopnega leta, obresti pa lahko banka pripiše tudi enkrat mesečno, enkrat v pol leta ali kako drugače.

Do leta 2002 so se slovenske banke pri kratkih obrestovalnih obdobjih držale ekonomskega načela, *da morajo iz dane začetne glavnice z novo obrestno mero pri pogostejši kapitalizaciji dobiti enako vrednost glavnice kot pri celoletni kapitalizaciji*, in so zato uporabljale **konformno obrestno mero**.

Denimo, da imamo v enem letu m kapitalizacijskih obdobij. Konformno obrestno mero $p_{(k)}$ izrazimo iz okrajšane enakosti $Gr = Gr^{m}_{(k)}$.

$$r = r_{(k)}^{m};\quad r_{(k)} = \sqrt[m]{r} = 1 + \frac{p_{(k)}}{100}$$
$$1 + \frac{p_{(k)}}{100} = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}}$$
$$\boldsymbol{p_{(k)} = 100\left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right)}$$

Od julija 2002 se mora v bančništvu Slovenije (kot v vseh državah Evropske unije) uporabljati **relativni (ali proporcionalni) način obračunavanja** obresti.

V primeru polletnega pripisa obresti eno leto pomeni dve kapitalizacijski obdobji, zato je relativni obrestovalni faktor:

$$\boldsymbol{r_{(2)} = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{100} = 1 + \frac{p}{200}}\,.$$

Če gre za mesečni pripis obresti, je relativni obrestovalni faktor:

$$\boldsymbol{r_{(12)} = 1 + \frac{\frac{p}{12}}{100} = 1 + \frac{p}{1200}}\,.$$

Pri dnevnem pripisu obresti dobimo relativni obrestovalni faktor:

$$\boldsymbol{r_{(365)} = 1 + \frac{\frac{p}{365}}{100} = 1 + \frac{p}{36500}}\,.$$

Pri m kapitalizacijskih obdobjih v letu dobimo formulo:

$$\boldsymbol{r_{(m)} = 1 + \frac{p}{100 \cdot m}}\,.$$

ZGLEDI

1. Izračunajmo konformno obrestno mero pri letni obrestni meri 5 %, če je kapitalizacija mesečna in polletna, in jo primerjajmo z relativnima obrestnima merama za enaki obrestovalni obdobji. Odstotke zaokrožimo na tisočinko natančno.

Pri mesečni kapitalizaciji je v formuli za izračun konformne obrestne mere treba upoštevati, da se obresti pripišejo dvanajstkrat, pri polletni je $m = 2$, ker imamo le dva pripisa obresti.

$$p_{(k,\,12)} = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{1 + \frac{5}{100}} - 1\right) = 0{,}407\,\% \qquad p_{(r,\,12)} = \frac{p}{12} \cdot 1 = 0{,}417\,\%$$

$$p_{(k,\,2)} = 100 \cdot \left(\sqrt[2]{1 + \frac{5}{100}} - 1\right) = 2{,}470\,\% \qquad p_{(r,\,6)} = \frac{p}{12} \cdot 6 = 2{,}5\,\%$$

2. Primerjajmo vlogo 1000 evrov po enem letu pri letni, polletni, mesečni in dnevni kapitalizaciji, če je obrestovanje relativno in obrestna mera 5 %.

$$A_{(1)} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1050$$

$$A_{(2)} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{200}\right)^{2} = 1050{,}625$$

$$A_{(12)} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{12} = 1051{,}162$$

$$A_{(365)} = 1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{36500}\right)^{365} = 1051{,}267$$

Račun pokaže, kar smo pričakovali – najbolj ugodna je dnevna kapitalizacija.

3. Podjetnik je konec februarja pri banki najel kratkoročni kredit v višini 120 000 evrov po 7,8-odstotni relativni letni obrestni meri in ga misli odplačati konec maja. Kolikšne bodo obresti? Banka bo upoštevala mesečno kapitalizacijo. Ali bi bile obresti pri konformni obrestni meri nižje? Zneske zaokrožimo na evre.

Podjetnik bo odplačal znesek

$$D_{(r,\,3)} = 120\,000 \cdot \left(1 + \frac{7{,}8}{12 \cdot 100}\right)^{3} = 122\,355,$$

kar pomeni, da bodo obresti znašale 2355 evrov.

Pri konformno izračunani obrestni meri bi podjetniku banka izračunala mesečno obrestno mero:

$$p_{(k,\,12)} = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{1 + \frac{7{,}8}{100}} - 1\right) = 0{,}628\,\%$$

in po treh mesecih bi odplačal skupno

$$D_{(k,\,3)} = 120\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}628}{100}\right)^{3} = 122\,275 \text{ evrov}$$

oz. 2275 evrov obresti, kar je 80 evrov manj kot pri realno obračunani relativni obrestni meri.

4. Računanje obresti po konformni metodi je bolj zamotano, zato si lahko pomagamo s programom *Excel*. Funkcijo *NOMINAL* uporabljamo za preračun letne obrestne mere na obrestno mero za krajše kapitalizacijsko obdobje po konformni metodi.

Recimo, da najamemo v banki kredit po 6-odstotni obrestni meri. S funkcijo *NOMINAL* bomo izračunali konformno obrestno mero pri mesečni, četrtletni, polletni in letni kapitalizaciji (konformna OM1) in vrednosti primerjali z izračunom, ki ga že znamo narediti od prej (konformna OM2): $p_{(k)} = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1$, in še z relativno obrestno mero.

Funkcija *NOMINAL* ima dve spremenljivki: letno obrestno mero in število kapitalizacij v enem letu:

`NOMINAL(obrestna mera za obdobje; št. obdobij na leto)`

	A	B	C	D	E
1					
2	letna OM	6%	$B$2/B6		
3					
4		število kapitaliz.	Relativna	Konformna	Konformna
5	kapitalizacija	dob na keto	OM	OM (1)	OM (2)
6	mesečna	12	0,50%	0,49%	0,49%
7	četrtletna	4	1,50%	1,47%	1,47%
8	polletna	2	3,00%	2,96%	2,96%
9	letna	1	6,00%	6,00%	6,00%
10					
11	=NOMINAL($B$2;B6)/B6		=(1+$B$2)^(1/B6)-1		
12					

Za nizke obrestne mere sta relativno in konformno izračunani obrestni meri zelo primerljivi oz. skoraj enaki, pri čemer je izračun relativne obrestne mere bolj enostaven. Pri 2-odstotni letni obrestni meri razlike na stotinki odstotka sploh ni, pri 3-odstotni pa je le stotinka odstotka.

	A	B	C	D	E
1					
2	letna OM	3%			
3					
4		število kapitaliz.	Relativna	Konformna	Konformna
5	kapitalizacija	dob na keto	OM	OM (1)	OM (2)
6	mesečna	12	0,25%	0,25%	0,25%
7	četrtletna	4	0,75%	0,74%	0,74%
8	polletna	2	1,50%	1,49%	1,49%
9	letna	1	3,00%	3,00%	3,00%
10					
11					
12	letna OM	2%			
13					
14		število kapitaliz.	Relativna	Konformna	Konformna
15	kapitalizacija	dob na keto	OM	OM (1)	OM (2)
16	mesečna	12	0,25%	0,25%	0,25%
17	četrtletna	4	0,75%	0,74%	0,74%
18	polletna	2	1,50%	1,49%	1,49%
19	letna	1	3,00%	3,00%	3,00%
20					

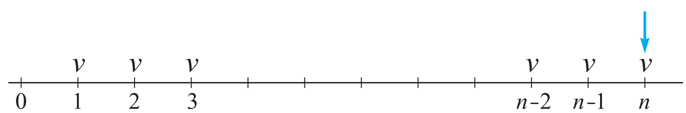
Obročna vplačila in izplačila

Pomemben del ravnanja z denarjem je **varčevanje**. Varčujemo lahko tako, da denar, ki ga trenutno ne potrebujemo, zaupamo banki kot dolgoročno vlogo, lahko pa varčujemo z enakimi rednimi (mesečnimi ali letnimi) pologi. Podobno lahko v banki izposojeni denar vračamo v enakih obrokih. Obrok dolga se imenuje **anuiteta**, načrt odplačila pa **amortizacijski načrt**. Če bi radi glavnico izčrpali v enakih obrokih (npr. enkrat mesečno ali enkrat letno), nam bo banka izplačevala **rento**.

Hrbtenico računanja anuitet in vsakega drugega računanja vrednosti obrokov plačil tvori geometrijsko zaporedje. Ko obročno vlagamo, se zneski različno dolgo obrestujejo, zato jih lahko primerjamo le ob določenem času (najlažje na začetku ali na koncu vlaganja). Zaradi večje preglednosti bomo dogajanje pokazali s časovnim trakom.

Vlagamo lahko na začetku ali na koncu posameznega obdobja. Pogledali si bomo primere za vlaganje in odplačevanje na koncu obdobja.

Pri obročnem vlaganju v n enakih zaporednih obrokih vse vloge v preračunamo na konec n-tega obdobja, ko je njihova skupna vrednost enaka G. Vsako od vlog zato pomnožimo z ustrezno potenco z osnovo r in eksponentom, ki pomeni število obdobij do konca varčevalnega obdobja.



Vse te na konec n-tega leta preračunane vloge sestavljajo geometrijsko zaporedje z obrestovalnim faktorjem r, končni znesek pa je vsota geometrijskega zaporedja:

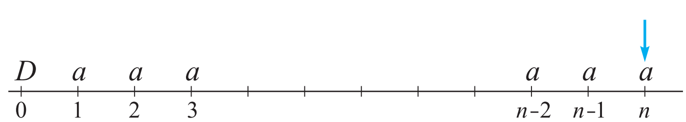
$$vr^{n-1}+vr^{n-2}+\ldots+vr^2+vr+v=v(1+r+r^2+\ldots r^{n-1})=\frac{v(r^n-1)}{r-1}$$

Privarčevani znesek pomeni vsoto členov končnega geometrijskega zaporedja s kvocientom zaporedja, ki je enak obrestovalnemu faktorju kapitalizacijskega obdobja.

$$\boldsymbol{G=S_n=\frac{v(r^n-1)}{r-1}}$$

Odplačevanje dolga in renta

Dolg D, ki ga moramo odplačati, moramo preračunati na čas zadnje anuitete, zato vedno odplačamo več denarja, kot si ga izposodimo.



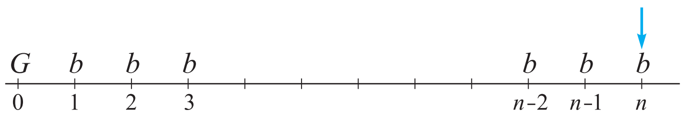
$$D\cdot r^n=a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-2}+ar^{n-1}=S_n$$

$$D\cdot r^n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

Anuiteta oz. obrok odplačila dolga znaša

$$\boldsymbol{a=\frac{D\cdot r^{n}\cdot(r-1)}{r^{n}-1}}.$$

Popolnoma enak princip kot odplačevanje dolga je prejemanje rente v znesku b, le da zneskov ne »izgubljamo«, ampak jih dobivamo iz kapitala G, ki smo ga zaupali banki v varstvo.



$$G\cdot r^{n}=\frac{b(r^{n}-1)}{r-1}$$

Znesek rente znaša

$$\boldsymbol{b=\frac{G\cdot r^{n}\cdot(r-1)}{r^{n}-1}}.$$

ZGLEDI

1. Mlada družina začne ob rojstvu prvorojenega otroka varčevati z mesečnim depozitom (ob koncu meseca) 100 € po obrestni meri $5{\cdot}8\,\%$ (in z mesečno kapitalizacijo). Ali bo potomec ob polnoletnosti lahko kupil garsonjero za 40 000 evrov? Pri tem ne upoštevamo zunanjih dejavnikov, kot je inflacija. Rezultat zaokrožimo na stotice.

$G=S_{12\cdot 18}$; $r=1+\frac{5{\cdot}8}{1200}$ (vsota 216 členov geometrijskega zaporedja s kvocientom r)

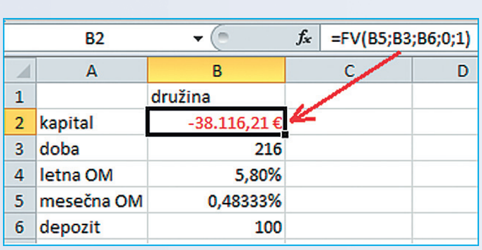
$$G=\frac{100\left(\left(1+\frac{5{\cdot}8}{1200}\right)^{216}-1\right)}{\frac{5{\cdot}8}{1200}}\doteq 38\,000\ €$$

Za stanovanje bo zmanjkalo 2000 evrov.

Za računanje zneska, ki ga privarčujemo z obročnim vlaganjem, lahko uporabimo *Excelovo* funkcijo:

```
FV (obrestna mera za obdobje; število obdobij na leto;
vloga; 0; x)
```

V formuli na koncu namesto x pišemo 1, ker začnemo z vlaganjem na začetku obrestovalnega obdobja (za vloge ob koncu obdobja bi pisali 0).


B2 =FV(B5;B3;B6;0;1)

	A	B	C	D
1		družina		
2	kapital	-38.116,21 €		
3	doba	216		
4	letna OM	5,80%		
5	mesečna OM	0,48333%		
6	depozit	100		

2. Obrtnik je za nakup novega stroja najel kratkoročni kredit 20 000 evrov. Odplačal ga bo v dveh letih v enakih mesečnih obrokih ob koncu meseca. Kolikšna je anuiteta, če je letna obrestna mera 7˙5 % in banka obračunava obresti po realni obrestni meri?

Kredit D se bo v dveh letih povečal na $D\cdot(1+\frac{7˙5}{100\cdot 12})^{24}$ in ta znesek mora biti enak vsoti 24-člene geometrijske vrste:

$$S_{24}=\frac{a(r^{24}-1)}{r-1}\,;\ r=1+\frac{7˙5}{12\cdot 100}$$

$$Dr^{24}=\frac{a(r^{24}-1)}{r-1}$$

$$a=\frac{Dr^{24}(r-1)}{r^{24}-1}=900\ €$$

Nalogo lahko rešimo tudi z *Excelovo* funkcijo *PMT*, ki ima strukturo:

`PMT (obrestna mera za obdobje; število obdobij na leto; dolg; 0; x).`

$x=1$ pomeni začetek obdobja; $x=0$ pomeni konec obdobja

	A	B	C
1			
2		obrtnik	
3	glavnica	20000	
4	število obdobij	24	
5	letna OM	7,50%	
6	mesečna OM	0,625%	
7	anuiteta	-899,99 €	
8			
9		=PMT(B6;B4;B3;0;0)	
10			

3. Teta Amalija je ob odhodu v pokoj dobila odpravnino 2500 evrov, v nogavici pa je imela že prihranjenih 6400 evrov. Ker bo njena pokojnina bistveno nižja od plače, želi naslednjih 10 let ob koncu vsakega meseca dobivati rento 100 evrov. Ali ima dovolj prihranjenega denarja, če ji banka za vlogo ponudi 5˙8-odstotne obresti? Če ne, koliko denarja ji zmanjka?

Tetin kapital znaša $A=2500+6400=8900$ evrov. Ta kapital moramo »pogledati« čez 10 let ob koncu leta; takrat bi imela pri priznani obrestni meri v banki $8900\cdot 1˙058^{10}=15\,640$ evrov. Ugotoviti moramo, ali ta kapital zadošča za 120 enakih mesečnih rent po $a=100$ evrov.

$Ar^m=\frac{a(r^m-1)}{r-1}$ Iz enakosti izrazimo mesečno rento a.

	A	B	C
1			
2		Amalija 1	Amalija 2
3	glavnica	8900	9091
4	število obdobij	120	120
5	letna OM	5,80%	5,80%
6	mesečna OM	0,483%	0,483%
7	anuiteta	-97,90 €	-100,00 €
8			
9		=PMT(B6;B4;B3;0;0)	

$$a=\frac{8900(1+\frac{5{,}8}{12\cdot 100})^{120}\cdot\frac{5{,}8}{12\cdot 100}}{(1+\frac{5{,}8}{12\cdot 100})^{120}-1}=97{,}916\ €$$

Ugotovili smo, da bi teti zmanjkala dobra 2 evra na mesec oz. 191 evrov. Za 10-letno rento stotih evrov bi teta potrebovala začetni kapital 9091 evrov.

Do istega rezultata zelo preprosto pridemo s funkcijo ***PMT***.

4. Koliko mesečnih obrokov po 200 evrov bi morali plačevati ob koncu meseca za kredit 7800 evrov pri 5,5-odstotni realtivni obrestni meri? Kredit dobimo takoj.

Zdaj je naloga obrnjena, vendar začnemo na isti način kot prej.

Kredit D, ki ga mesečno odplačujemo, se ne zmanjšuje za odplačane obroke, ampak za manj, ker se njegov ostanek hkrati tudi obrestuje in s tem povečuje. Zato moramo D pomnožiti z r^m, da dobimo njegovo vrednost po preteku m mesecev. To vrednost izenačimo s številom obrokov in iz enačbe izrazimo neznano število obdobij m.

$$D\cdot r^m=S_m;\ r=1+\frac{5{,}5}{12\cdot 100}$$

Iz enakosti $Dr^m=\frac{b(r^m-1)}{r-1}$ moramo izraziti m.

$$m=\frac{\log\frac{b}{D+b-Dr}}{\log r}=43$$

Plačati bi morali 43 mesečnih obrokov.

5. Gaj je na loteriji zadel 100 000 evrov. Po plačilu 20-odstotnega davka je četrtino vsote namenil za Karitas, ostalo pa vložil v banko, da bi po preteku 10 let dobival večno rento. Banka mu prizna 6,2-odstotno relativno letno obrestno mero. Izračunajmo višino mesečne rente.

Po 10 letih bo Gaj v banki imel

$$G_{10}=G(1+\frac{p}{100\cdot 12})^{10\cdot 12}=60\,000\cdot 1{,}00517^{120}=111\,402{,}12\ €.$$

Mesečne obresti tega zneska pomenijo znesek večne rente, saj mora glavnica ostati nedotaknjena, zato je $b=G_{10}\cdot\frac{6{,}2}{1200}\doteq 575$ evrov.

6. Sosedu Janezu se je iztrošila centralna kurjava na kurilno olje, zato bo prešel na kurjenje z zemeljskim plinom. Peč in predelava kurilnice ga bosta stali 8000 evrov, zato je v banki vzel kredit, ki ga bo odplačal v šestih letnih obrokih na koncu leta po relativni obrestni meri 4·9 %. Izračunajmo anuiteto in naredimo amortizacijski načrt, po katerem se vidi, kako se z leti nižajo glavnica in obresti, anuiteta pa je ves čas enaka.

Ko vračamo kredit, vračamo glavnico in obresti. Z vsako anuiteto vrnemo nekaj glavnice in plačamo vse obresti na preostali dolg. Delež plačila glavnice in obresti se z anuitetami spreminja. Na začetku odplačevanja kredita odplačamo manj glavnice in več obresti, proti koncu pa več glavnice in manj obresti.

Amortizacijski načrt

število obrokov	6		anuiteta	1571		
obrestna mera	4,90%					
dolg	8000	obstoječi dolg	obresti	anuiteta	razdolžnina	novo stanje dolga
	1. obrok	8000	392	1571	1179	6821
	2. obrok	6821	334	1571	1237	5584
	3. obrok	5584	274	1571	1297	4287
	4. obrok	4287	210	1571	1361	2926
	5. obrok	2926	143	1571	1428	1498
	6. obrok	1498	73	1571	1498	0

- obresti + anuiteta = razdolžnina

Delež glavnice, ki jo plačamo s posameznim obrokom, oz. razlika med anuiteto in letnimi obrestmi glavnice se imenuje **razdolžnina**. Ime izhaja iz pomena, saj se dolg zmanjša za plačani del glavnice.

7. Urša se je s kreditno kartico zadolžila pri Hula-Hup banki za 1300 evrov. Banka računa 2·6-odstotne mesečne obresti in vsak mesec s kartice vzame 150 evrov. Zapišimo rekurzivno formulo za Uršin račun po n-tem mesecu. V koliko mesecih Urša odplača kredit?

Če ni posebej omenjeno, računamo z relativno obrestno mero.

Prvi mesec je njen dolg enak $a_1 = 1300$, to je prvi člen zaporedja. Vsak nadaljnji člen dobimo s formulo $a_n = 1{\cdot}026 \cdot a_{n-1} - 150$. Za izračun uporabimo program *Excel*.

	A	B	C
1	dolg	1300	1300,0
2	obrestna mera	2,6%	1183,8
3			1064,6
4			942,3
5			816,8
6			688,0
7			555,9
8			420,3
9			281,3
10			138,6
11			-7,8

=1,026*C1-150

Urša bo dolg odplačala v 10 obrokih.

NALOGE

188. Banka daje za vezana sredstva naslednje letne obresti: za čas do 3 mesecev 4·1-odstotne, za čas od 3 do 6 mesecev 5·3-odstotne, za čas od 6 do 9 mesecev 6·6-odstotne in za čas od 9 do 12 mesecev 7·5-odstotne. Janez ima 12 000 evrov.
a) Koliko obresti dobi v 5 mesecih?
b) Koliko obresti dobi v 8 mesecih?

189. Leta 2003 je Jožica zamudila plačilo položnice v vrednosti 250 evrov za 45 dni. Koliko je morala doplačati, če so bile 18-odstotne zamudne obresti?

190. Leta 2004 je Andraž vezal v banki 500 evrov za 90 dni. Na koliko mu je narasla glavnica, če je banka obrestovala depozit po 9-odstotni letni obresti meri?

191. Koliko obresti prinese glavnica 1500 evrov v 3 letih pri 7-odstotni obrestni meri pri
a) navadnem obrestovanju,
b) obrestnem obrestovanju in letnem pripisu obresti?
c) Kolikšna je razlika?

192. Na kolikšen znesek naraste glavnica 7000 evrov v 15 letih pri 6-odstotni obrestni meri pri
a) navadnem obrestovanju,
b) obrestnem obrestovanju in letnim pripisom obresti,
c) konformnem izračunu,
č) proporcialnem izračunu?

193. Kolikšna je vrednost glavnice v znesku 120 000 evrov pri 5-odstotni letni obrestni meri in letnem pripisu obresti po
a) petih letih,
b) desetih letih,
c) petnajstih letih?

194. Koliko obresti do evra natančno prinese kapital 20 000 evrov v 3 letih, če je
a) letni pripis obresti in 6-odstotna obrestna mera,
b) polletni pripis obresti in 3-odstotna polletna obrestna mera?
c) Katerih obresti je več?

195. Kolikšna je vrednost glavnice 1800 CHF (švicarskih frankov) po 5 letih in 9 mesecih, če sta 4-odstotna obrestna mera in letni pripis obresti?

196. Kolikšen znesek je treba vložiti, da bo v 7 letih pri 7-odstotni letni obrestni meri in letni kapitalizaciji prinesel 4846,25 evra obresti?

197. Kolikšen znesek moramo vložiti v hranilnico, da bomo imeli čez 3 leta 15 000 evrov, če je polletni pripis obresti in je 2·5-odstotna polletna obrestna mera?

198. Koliko let bi moral biti vložen kapital, da bi se podvojil pri polletni kapitalizaciji in 3·5-odstotni polletni obrestni meri?

199. Za koliko let mora ata Franc vložiti 250 dolarjev, da se bo znesek povečal za 200 dolarjev pri letnem 5-odstotnem pripisu obresti?

200. Izračunajte obrestno mero, pri kateri glavnica 700 evrov v 6 letih naraste na 1110,81 evra. Pripis obresti je leten.

201. Po kolikšni obrestni meri bi morali vložiti 450 evrov, da bi v 7 letih pri letnem pripisu imeli 142,17 evra obresti?

202. Janez je vložil 6700 evrov v banko, ki obrestuje letno po 6·5-odstotni obrestni meri, 7200 evrov pa v drugo banko, ki letno obrestuje po 5-odstotni obrestni meri. Čez koliko let bosta vlogi enaki?

203. Jožica je na koncu leta 2010 vložila 1000 dolarjev, na koncu leta 2012 pa še 2000 dolarjev. Koliko je bila skupna vrednost obeh vlog (do dolarja natančno) na koncu leta 2014, če sta celoletna kapitalizacija in obrestna mera 4 %?

204. Aljaž je na začetku leta 2010 vložil 1500 evrov, na začetku leta 2013 pa še 2500 evrov. Koliko je bila skupna vrednost obeh vlog (do evra natančno) na začetku leta 2019, če sta celoletna kapitalizacija in obrestna mera 6 %?

205. Jakob ima 800 evrov, ki se prva 4 leta obrestujejo po 6-odstotni, naslednja 3 leta pa po višji, 8-odstotni obrestni meri. Kolikšne obresti dobi Jakob v 7 letih, če je letni pripis obresti?

206. Mama Marija najprej vloži za 3 leta 1000 evrov, ki se jim letno pripisujejo 4-odstotne obresti, nato pa privarčevanemu znesku doda še 1000 evrov, ki se 4 leta obrestujejo po 5-odstotni letni obrestni meri. Kolikšen znesek bo privarčevala v 7 letih?

207. V 10 letih bi radi imeli 10 000 evrov kapitala. Koliko moramo položiti danes, če sta 5-odstotna letna obrestna mera in letni pripis obresti? Koliko moramo položiti, če je kapitalizacijska doba en mesec, en dan?

208. V banki imamo 7000 evrov. Koliko časa bo trajalo, da se bo kapital povečal na 10 000 evrov, če je letna obrestna mera 4˙5-odstotna in pripis obresti mesečen?

209. Luka je za štiri leta v banko položil znesek 4000 evrov. Ob dvigu je dobil 4350 evrov. Po kolikšni obrestni meri mu je banka mesečno obračunavala obresti?

210. Pokojninski sklad mora za poplačilo pokojnin dvigniti vsoto z 1˙4 milijona evrov na 1˙7 milijona v 4 letih. Kolikšne letne obresti potrebuje za to?

211. Katera naložba je boljša: 9-odstotna z mesečnim pripisom obresti ali 9˙1-odstotna, če obresti pripišejo na četrt leta?

212. Ko je Matic obnavljal stanovanje, si je od prijatelja izposodil 5200 evrov. Dolg je odplačal v desetih mesečnih obrokih z letno obrestno mero 7 % in mesečno kapitalizacijo. Prijatelj je vrnjeni denar vložil v investicijski sklad, ki obrestuje vloge s 6˙3-odstotno obrestno mero in letno kapitalizacijo. Kolikšna je bila anuiteta in na kolikšno vsoto bo prijatelju naraslo premoženje v 5 letih?

213. V Novi zavezi v Lukovem evangeliju (Lk 21,2) beremo, da je uboga vdova v tempeljsko zakladnico vrgla dve *mini*, kar je bilo približno 2 centa v današnjem denarju.

a) Koliko bi bil ta denar vreden danes, po 2000 letih, če bi ga naložila v banko po 4-odstotni obrestni meri?
b) Koliko bi bil vreden, če bi ji vlogo obrestovali z navadnim obrestovanjem z isto obrestno mero?

214. Investicijska družba obrestuje naložbe po 6-odstotnem polletnem pripisu obresti. Koliko moramo vložiti, da bomo dobili 10 000 evrov v 5 letih (v 10 letih) od danes?

215. Investicijski sklad nam vlogo 6000 evrov poveča na 10 000 evrov v 10 letih. Kolikšna je letna obrestna mera, če je pripis obresti konec meseca?

216. Za delnico, ki je na začetku leta vredna 20 evrov in konec leta vredna 24 evrov, dobimo en evro dividend. Po kolikšni obrestni meri se je obrestovala delnica, če upoštevamo dnevni pripis obresti?

217. Kolikšno vsoto je treba položiti v banko, ki obrestuje po 5˙6-odstotni obrestni meri in pripisuje obresti na koncu meseca, da bomo po polovici leta lahko dvignili 5000 evrov?

218. Kolikšna je višina glavnice, če je v dveh letih pri mesečni kapitalizaciji in letni obrestni meri 5˙2 % dala 257 evrov obresti? Kolikšna bi bila glavnica, če bi obresti izračunali na konformni način? Zneske zaokrožite na evro natančno.

219. Franci vlaga v banko 10 let zaporedoma po 1300 evrov. Koliko bo skupaj privarčeval ob zadnjem pologu, če je letni pripis obresti in 8-odstotna obrestna mera?

220. Po koliko mora Mirjana vplačevati šestkrat na koncu vsakega leta, da bo imela ob zadnjem vplačilu 5000 evrov? Kapitalizacija je celoletna, obrestna mera pa 4˙5-odstotna.

221. Koliko let mora Viki na koncu vsakega meseca plačevati mesečne obroke po 100 evrov, da bo pri letni obrestni meri 4˙8 % privarčeval 6000 evrov?

222. Janja 6 let, ob koncu vsakega meseca, varčuje po 50 evrov. Koliko znašajo njeni prihranki po treh letih od zadnjega vplačila, če je proporcionalna obrestna mera 5˙7-odstotna in mesečni pripis obresti?

223. Iztok ima pri nakupu avtomobila dve možnosti:
a) takojšnje plačilo v znesku 32 000 evrov in
b) obročno odplačilo po 600 evrov v 6 obrokih ob koncu meseca po 5-odstotni letni obrestni meri.

224. Koliko mora vložiti Sašo v pokojninski sklad, da bo dobil 60 izplačil mesečne rente po 200 evrov, prvič 5 let po zadnjem vplačilu? Obrestna mera znaša 6 %.

225. Tina je 5 let varčevala z enakimi mesečnimi pologi na koncu meseca. Kolikšni so bili pologi, če je ob zadnjem pologu dobila končni znesek 8500 evrov in ji je banka obračunala 5-odstotno obrestno mero?

226. Blaž bi lahko 10 let dobival mesečno rento 100 evrov ob koncu meseca. Namesto tega se odloči, da bo rento za 5 let zamrznil. Izračunajte, za koliko večjo rento bo dobival zaradi tega, če je letna obrestna mera $p = 6\,\%$.

227. Peter za novi avto takoj odšteje 5000 evrov, ostanek kupnine bo plačal s 60 enakimi mesečnimi obroki po 180 evrov ob koncu meseca ($p = 4˙8\,\%$). Koliko ga stane avto danes?

228. Trgovska potnica prodaja visokotlačne parne čistilce. Cena pri takojšnjem plačilu znaša 2490 evrov, lahko pa ga kupimo:
a) na 24 mesečnih obrokov po 101 evro ob koncu meseca in takoj plačamo še 200 evrov pologa,
b) na 12 mesečnih obrokov po 189 evrov s pologom 300 evrov.
Za koliko evrov smo preplačali napravo, če je mesečna obrestna mera v obeh primerih »samo« 0˙5-odstotna?

229. Teta Meta je že v času službovanja vplačevala v banko mesečni znesek 150 evrov na koncu meseca, da bi kasneje »plemenitila« pokojnino. Koliko let bo lahko prejemala mesečno rento 100 evrov na koncu meseca, če je zneske vlagala 7 let pri letni obrestni meri 5˙6 %?

230. Ali si stric Ferdo lahko privošči mesečno anuiteto za nakup 7000 evrov vrednega avta, če je letna obrestna mera 5˙4-odstotna in bi dolg odplačeval 5 let ob koncu meseca? V službi so mu glede na višino plače izračunali, da anuiteta ne sme preseči 150 evrov.

231. Napišite amortizacijski načrt za nakup novega kolesa, ki stane 700 evrov in ga bomo odplačali v sedmih enakih mesečnih obrokih ob koncu meseca, če je mesečna obrestna mera 0˙74-odstotna.

NE POZABI

Končno zaporedje je preslikava iz množice $\mathbb{N}_m$ v množico realnih števil, **neskončno zaporedje** pa preslikava iz množice naravnih števil v množico realnih števil.

Zaporedje je **naraščajoče**, če je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje je **padajoče**, če je $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje je **monotono**, če je bodisi naraščajoče bodisi padajoče.

Zaporedje je **navzgor omejeno**, če obstaja tako realno število M, da je $a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število M je zgornja meja zaporedja.

Zaporedje je **navzdol omejeno**, če obstaja tako realno število m, da je $m \leq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število m je spodnja meja zaporedja.

Zaporedje je **omejeno**, če je navzgor in navzdol omejeno.

Zaporedje je **aritmetično**, če je razlika dveh zaporednih členov konstantna. Diferenco aritmetičnega zaporedja označimo z d in je $d = a_{n+1} - a_n$.

Splošni člen aritmetičnega zaporedja je:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Aritmetična vrsta je vsota členov aritmetičnega zaporedja in je enaka:

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

Aritmetična sredina števil a in b je število $\frac{a+b}{2}$.

Postopek, pri katerem med dani števili vrinemo števila tako, da nastane aritmetično zaporedje, imenujemo **linearna interpolacija**.

Zaporedje je **geometrijsko**, če je količnik dveh zaporednih členov konstanten. Količnik geometrijskega zaporedja označimo s k in je $k = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Splošni člen geometrijskega zaporedja je:

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

Geometrijska vrsta je vsota členov geometrijskega zaporedja in je enaka:

$S_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k-1}$; $k \neq 1$

Vsota neskončne geometrijske vrste: $S = \frac{a_1}{1-k}$; $|k| < 1$

Geometrijska sredina pozitivnih števil a in b je število $\sqrt{a \cdot b}$.

NE POZABI

Popolna indukcija

Izjava velja za vsa naravna števila, če velja za 1 in če iz predpostavke, da velja za naravno število n, sledi, da velja tudi za naravno število $n+1$.

ε-okolica števila a je odprt interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Limita zaporedja

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ kadar za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da za vsak $n > N$ velja: $|a - a_n| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Pravila za računanje limit zaporedij, če sta zaporedji $a_1, a_2, a_3 \ldots$ in $b_1, b_2, b_3 \ldots$ konvergentni:

- Limita vsote je enaka vsoti limit.
  $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- Limita razlike je enaka razliki limit.
  $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- Limita produkta je enaka produktu limit.
  $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- Če je limita delitelja različna od nič in je $b_n \neq 0$ za vsako naravno število n, je limita količnika enaka količniku limit.
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ $(b_n \neq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0)$

Neskončna geometrijska vrsta je konvergentna za $|k| < 1$ in je enaka: $S = \frac{a_1}{1-k}$

Obresti pri navadnem obrestovanju so:

$o = G \cdot p\,\% \cdot n = \frac{G \cdot p \cdot n}{100}$

Pri obrestnem obrestovanju glavnica G z obrestovalnim faktorjem $r = 1 + \frac{p}{100}$ v n letih naraste na:

$G_n = Gr^n$

Konformna obrestna mera $p_{(k,\,m)} = 100\left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right)$.

Relativni obrestovalni faktor $r_{(m)} = 1 + \frac{p}{m \cdot 100}$ (m je število obrestovalnih obdobij na leto).

KOMBINATORIKA

- Osnovni izrek kombinatorike
- Permutacije
- Variacije
- Kombinacije
- Binomski izrek
- Kombinatorika in preslikave

Mistične trigrame pa-kua še danes najdemo kot okrasje na uporabnih predmetih in na talismanih v državah Daljnega vzhoda.

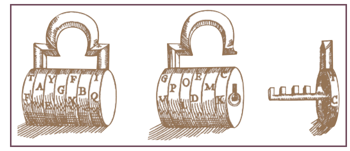
Kombinatorika je veja matematike, ki se ukvarja s preštevanjem razporeditev elementov dane končne množice. Na začetek zgodovine kombinatoričnih pojmov bi lahko postavili znamenito kitajsko delo *I-King* (*Knjigo sprememb*), ki sega daleč nazaj v 8. st. pr. Kr. Delo povezuje staro kitajsko filozofijo s psihologijo, prerokovanjem in koledarjem, prek mističnih diagramov (*pa-kua*) pa tudi s kombinatoriko. V knjigi so navedeni vsi možni trojni znaki ali trigrami, ki jih lahko sestavimo iz znakov ⚊ in ⚋.

☰	CH´IEN	NEBO MRAZ	MOČ ODLOČNOST SVETLOBA	OČE	GLAVA	KONJ
☷	K´UN	ZEMLJA TOPLOTA	ŠIBKOST POPUSTLJIVOST TEMA	MATI	TREBUH	VOL
☳	CHÊN	GROM POMLAD	RANLJIVOST GIBLJIVOST BUDNOST	PRVI SIN	NOGA	ZMAJ
☵	K´AN	VODA LUNA ZIMA	NEVARNOST TEŽAVA ZVITOST	DRUGI SIN	UHO	PRAŠIČ
☶	KÊN	GORE	MIRNOST TRMA TRDNOST	NAJMLAJŠI SIN	ROKA	PES
☴	SUN	VETER GOZD	NEŽNOST BISTROST UBOGLJIVOST	PRVA HČI	STEGNO	PTICA
☲	LI	OGENJ SONCE BLISK	LEPOTA ZANESLJIVOST ZVESTOBA	DRUGA HČI	OKO	FAZAN
☱	TUI	JEZERO MOČVIRJE DEŽ JESEN	SREČA ZADOVOLJSTVO SAMOZADO- VOLJNOST	NAJMLAJŠA HČI	USTA	OVCA

Pomen znakov *pa-kua*

Tibetanski talisman z nebesnimi znamenji, znaki pa-kua in magičnim kvadratom v sredini

Kar resno (vendar ne na teoretični ravni) so se s kombinatoriko ukvarjali rimski patricij Boetius v 5. st., indijski matematik Bhaskara v 12. st. in židovski učenjak iz Avignona Levi ben Gerson v 14. st. Za zadnjega je znano, da je znal izračunati permutacije, kombinacije in variacije brez ponavljanja, čeprav pri tem ni uporabljal nobene simbolike.



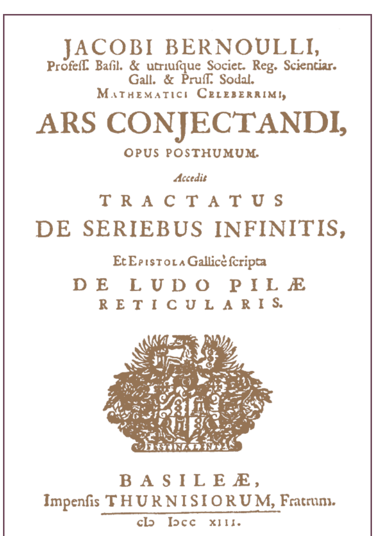
Leta 1559 je francoski menih in učenjak Joannes Buteo v Lyonu izdal knjigo Logistica, v kateri je opisal kombinatorično ključavnico z več vrtečimi se cilindri.
Take ključavnice so naprodaj še danes. So zelo priročne, ker ne moremo izgubiti ključa, nerodno pa je, če izgubimo spomin.

Leta 1494 je Luca Pacioli v knjigi *Suma de aritmeticae* opisal, kako izračunati, na koliko načinov se lahko določeno število ljudi usede za ravno mizo. Pomembna prelomnica za kombinatoriko pa je 16. st. s Cardanom, Tartaglio, Leibnizem, Buteom, še posebej pa 17. st. s Pascalom, Fermatom in Jakobom Bernoullijem.

Za konec povejmo, kako je Jakob Bernoulli v svoji knjigi *Ars Conjectandi*, ki je po njegovi smrti izšla v Baslu leta 1713, »definiral« kombinatoriko:

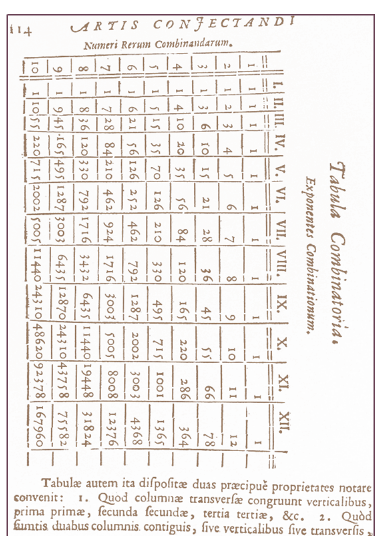
Jakob Bernoulli (1654–1705)

Neskončna raznolikost, ki se kaže tako v delih narave kot v človekovi ustvarjalnosti, ki dela svet in vesolje posebno lepa, ima svoj edini vzrok v različnosti spajanja, mešanja in grupiranja posameznih delov. Ker je število stvari, ki vplivajo na stvaritev kakega pojava ali dogodka, po navadi tako veliko in raznovrstno, da spoznavanje vseh načinov, po katerih se lahko, ali pa se ne more, uresničiti to povezovanje, privede do velikih težav, ni čudno, da tudi najmodrejši ljudje delajo napako, ki se ji v logiki pravi »nedovoljeno naštevanje delov«. Zato si ne pomišljam trditi, da je ta napaka gotovo edini izvor mnogih velikih zablod, ki jih delamo pri raziskavah pojavov, ki jih želimo spoznati in se z njimi okoristiti. Zato moramo po pravici meniti, da je veščina, ki ji pravimo kombinatorika, zelo koristna in nam lahko precej pomaga pri pomanjkanju ostrine naših čutnih opazovanj. Ta veščina nas uči, kako se uporabljajo načini in postopki, s katerimi je mogoče več predmetov med seboj pomešati, jih združevati in potem preštéti vse možnosti, da z gotovostjo vemo, da niti ene od njih nismo izpustili.



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc XIII.

Faksimile Ars Conjectandi



114 ARTIS CONJECTANDI

Tabula Combinatoria.
Exponentes Combinationum.

Numeri Rerum Combinandarum.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
II.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
III.	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
IV.	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
V.	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
VI.	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
VII.	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
VIII.	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
IX.	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
X.	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620
XI.	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378
XII.	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960

Tabulæ autem ita dispositæ duas præcipuè proprietates notare convenit: 1. Quod columnæ transversæ congruunt verticalibus, prima primæ, secunda secundæ, tertia tertiæ, &c. 2. Quòd sumtis duabus columnis contiguis, sive verticalibus sive transversis, termi-

Stran iz knjige Ars Conjectandi

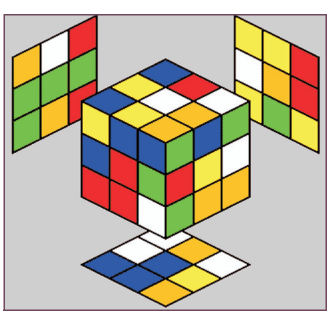
Najstarejšo cerkev San Salvador v španskem mestu Oviedo je dal zgraditi knez Silo. Na to dejanje je bil tako ponosen, da si je dal na nagrobnik vklesati skrivnosten napis:

t i c e f s p e c n c e p s f e c i t
i c e f s p e c n i n c e p s f e c i
c e f s p e c n i r i n c e p s f e c
e f s p e c n i r p r i n c e p s f e
f s p e c n i r p o p r i n c e p s f
s p e c n i r p o l o p r i n c e p s
p e c n i r p o l i l o p r i n c e p
e c n i r p o l i **S** i l o p r i n c e
p e c n i r p o l i l o p r i n c e p
s p e c n i r p o l o p r i n c e p s
f s p e c n i r p o p r i n c e p s f
e f s p e c n i r p r i n c e p s f e
c e f s p e c n i r i n c e p s f e c
i c e f s p e c n i n c e p s f e c i
t i c e f s p e c n c e p s f e c i t

Razvozljamo ga tako, da začnemo brati pri velikem S v sredini in se pomikamo navpično in (ali) vodoravno do ene od črk t na vogalih. V vseh primerih, in teh je kar 45 760, preberemo latinski stavek *Silo princeps fecit* ali po naše *Zgradil knez Silo*.

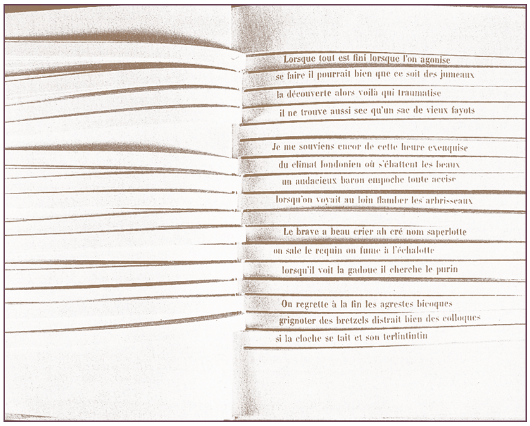
V srednjem veku je imel izraz ABRACADABRA po besedah ranocelnikov čudežno moč, posebej pri zdravljenju tridnevne mrzlice. Po receptu Serenusa Saunonicusa je bilo treba besedo napisati v obliki trikotnika in jo potem prebrati na vse mogoče načine, od vsakega A na levi do zadnjega A na desni v prvi vrsti. Tako je bilo mogoče besedo prebrati natanko 2^{10} oz. 1024-krat. Če bolnik po treh dneh, ob vmesnem branju čudežne besede, ni ozdravel, je imel ranocelnik pri roki izgovor, da je bolnik pri branju najbrž izpustil katero od možnosti.

A B R A C A D A B R A
A B R A C A D A B R
A B R A C A D A B
A B R A C A D A
A B R A C A D
A B R A C A
A B R A C
A B R A
A B R
A B
A



S pomočjo kombinatorike je arhitekt Erno Rubik (1944–) postal eden najbogatejših Madžarov. Od 43 triljonov možnosti premestitev je le ena pravilna.

Francoski pesnik in pisatelj Raymond Queneau (1903–1976) je avtor knjige *Cent mille milliards de poemes (Sto tisoč milijonov pesmi)*. Knjiga vsebuje 14-vrstične sonete, ki so natiskani le na desni strani, vsaka stran pa je razrezana na 14 trakov (tako je na vsakem traku ena vrstica soneta). Trakove lahko listamo neodvisno, pa ima kljub temu vsak sonet pravo zgradbo in pomen.



Kombinatorika je v tesni zvezi z igrami na srečo. Pri nas se s to dejavnostjo pooblaščeno ukvarja Loterija Slovenije. Najbolj znane igre so loto, Euro Jackpot, Astro, 3 × 3 plus 6, deteljica.

Iz pravilnika o igrah na srečo:

Loto je klasična igra na srečo. Udeleženec igre na posebnem vplačilnem listku napove, katerih 7 števil od 1 do 39 bo izžrebanih. Hkrati vsakokrat izžrebajo tudi serijsko številko iz 10 števk, če je lastnik listka vplačal udeležbo tudi za ta del igre. Zadnjih 6 števk serijske številke je številka za žrebanje v lotku.

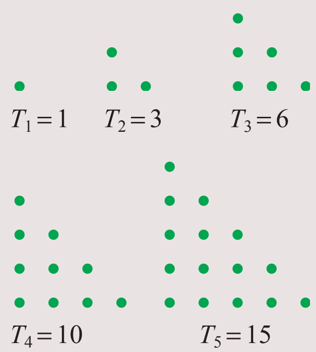
3 × 3 plus 6 je tudi klasična igra na srečo. Na kartici je natisnjenih 9 zaporednih števil od 1 do 99, in sicer v treh vrsticah in treh stolpcih. Na kartici je tudi 6-mestna številka. Javno žrebanje poteka vsak dan tako, da iz treh bobnov z oznakami A, B in C izžrebajo po tri številke. Vrste dobitkov so:

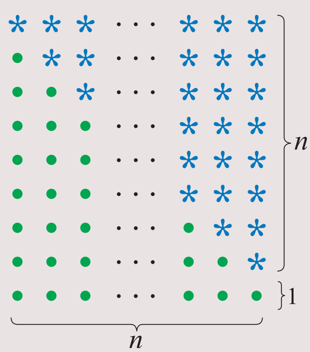
- *dobitek* 3 × 3 ima kartica, na kateri je vseh 9 izžrebanih številk,
- *dobitek* 2 × 3 ima kartica, na kateri je 6 izžrebanih številk v dveh vrsticah AB, BC ali AC,
- *dobitek* 1 × 3 ima kartica, na kateri so izžrebane številke v eni od vrstic A, B ali C,
- *dobitek* 0 × 9 ima kartica, na kateri ni nobene izžrebane številke.
- Iz četrtega bobna izžrebajo še zadnjih šest števk serijske številke kartice (plus 6).

Osnovni izrek kombinatorike

Jakob Bernoulli je za svoj čas povedal kar dobro definicijo kombinatorike: *Kombinatorika je preštevanje*. Ker ne gre za enostavno preštevanje elementov neke končne množice, te postopke poglejmo na nekaj zgledih.

Zaporedna trikotniška števila





$2(1 + 2 + \ldots + n) = n(n + 1)$

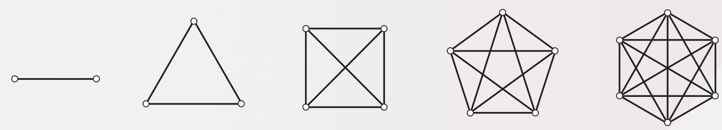
$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ZGLEDI

1. Na sprejem pri predsedniku republike je povabljenih pet Prešernovih nagrajencev. Koliko je vseh medsebojnih predstavitev na sprejemu?

Do rezultata bomo prišli postopoma in pri tem skušali poiskati zakonitost oz. formulo.

Če bi prišel na obisk le eden, bi bila predstavitev le ena, pri dveh povabljenih tri $(1 + 2 = 3)$, pri treh bi se medsebojno predstavili 4 ljudje in bi bilo 6 predstavitev $(1 + 2 + 3 = 6)$, pri štirih nagrajencih bi se rokovalo 5 ljudi in bi bilo $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ rokovanj, če pa bi se na vabilo odzvali vsi, bi bilo rokovanj $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.



Splošna formula za število rokovanj med n ljudmi se glasi $N = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, saj so vrednosti pri zaporednih n; $n = 1, 2, 3, \ldots$, ravno trikotniška števila, n-to trikotniško število pa je vsota vseh naravnih števil od 1 do n.

Pozneje bomo rešitev izračunali drugače, bolj »kombinatorično«.

2. Z razvojem računalnikov se je pojavilo tudi vprašanje zapisovanja znakov. Leta 1968 so v ZDA vpeljali zapis ASCII (**A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange), ki je predhodnik vseh današnjih načinov zapisovanja znakov (npr. ISO 8859). Vsak znak v kodi ASCII je zapisan kot 7-mestno dvojiško število. Torej lahko tako zapišemo

$1111111_{(2)} + 1 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 1 = 128$ znakov

oz. števila od 0 do 127 (če jih zapišemo v desetiškem sestavu). Ker je bilo možnosti za zapisovanje preveč, so uporabili le števila od 33 do 127 (danes nepogrešljiva *afna* @ je imela kodo 064).

20	21 !	22 "	23 #	24 $	25 %	26 &	27 '	28 (	29)	2A *	2B +	2C ,	2D -	2E .	2F /
30 0	31 1	32 2	33 3	34 4	35 5	36 6	37 7	38 8	39 9	3A :	3B ;	3C <	3D =	3E >	3F ?
40 @	41 A	42 B	43 C	44 D	45 E	46 F	47 G	48 H	49 I	4A J	4B K	4C L	4D M	4E N	4F O
50 P	51 Q	52 R	53 S	54 T	55 U	56 V	57 W	58 X	59 Y	5A Z	5B [	5C \	5D]	5E ^	5F _
60 `	61 a	62 b	63 c	64 d	65 e	66 f	67 g	68 h	69 i	6A j	6B k	6C l	6D m	6E n	6F o
70 p	71 q	72 r	73 s	74 t	75 u	76 v	77 w	78 x	79 y	7A z	7B {	7C |	7D }	7E ~	7F

3. Pred 250 leti sta si matematika L. Euler in N. Bernoulli dopisovala o »problemu zamenjave pisem« in ga tudi rešila.

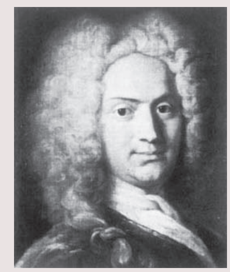
Pisar je napisal n pisem in n ovojnic. Pri vstavljanju pisem v ovojnice ni bil pozoren. Koliko je vseh možnosti, da vsaj eno pismo ne prispe na pravi naslov?

Problem lahko poenostavimo tako, da izberemo npr. $n=4$ in preštejemo vse možnosti razvrščanja pisem v ovojnice. Ovojnice zložimo drugo poleg druge in ugotovimo, da imamo za prvo ovojnico na voljo eno od štirih pisem, za drugo eno od treh pisem, za tretjo eno od dveh pisem in za četrto ovojnico še zadnje pismo.

$N=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$

Vseh napačnih možnosti je 23, kajti samo ena je prava. Splošni problem za n pisem in n ovojnic bomo rešili pozneje.

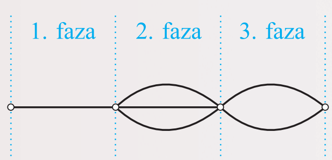
Leonhard Euler (1707–1783)



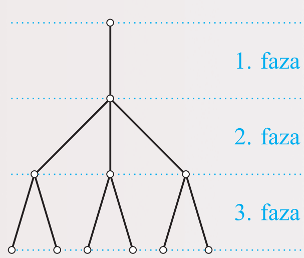
Nicolaus Bernoulli (1695–1726)

4. Če hočemo v našem šolskem sistemu doseči visoko izobrazbo, moramo iti skozi tri stopnje: osnovno šolo, srednjo šolo (gimnazijo, tehniško gimnazijo ali srednjo tehniško šolo z maturitetnim tečajem), fakulteto ali visoko šolo. Izračunajmo, na koliko načinov lahko študent konča izobraževanje.

Za lažje reševanje si bomo narisali diagram. Začetek in konec stopnje šolanja bo označen s točko, različne možnosti znotraj stopnje pa s povezavami med točkami. Ker je osnovna šola enotna, med prvima dvema točkama narišemo le eno povezavo, med drugo in tretjo točko so tri povezave, med tretjo in četrto točko pa dve povezavi.



Z enostavnim preštevanjem vseh možnosti dobimo število 6. Rešitev se najbolje vidi, če je predstavljena s kombinatoričnim drevesom.



Zadnja dva zgleda sta enostavna primera posebnega pravila oz. strategije, ki je osnova za vse računanje v kombinatoriki. Imenuje se osnovni izrek kombinatorike ali pravilo produkta.

Osnovni izrek kombinatorike ali pravilo produkta

Če je proces odločanja sestavljen iz k zaporednih faz in je v prvi fazi možnih n_1 odločitev, v drugi fazi n_2 odločitev …, v k-ti fazi n_k odločitev, število izborov v posamezni fazi pa je neodvisno od tega, katere možnosti so bile izbrane v prejšnjih fazah, potem je število vseh sestavljenih odločitev produkt vseh odločitev v posameznih fazah:

$$\boldsymbol{N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$$

ZGLEDI

1. Med enotno urejene stvari v Evropi spada tudi označevanje izdelkov EAN (**E**uropean **A**rticle **N**umbering), v svetovnem merilu pa velja enotno označevanje publikacij oz. knjig ISBN (**I**nternational **S**tandard for **B**ooks **N**umbering). V obeh primerih gre za označevanje s črtno kodo, ki jo zlahka prepoznajo optični čitalci.

Koda EAN je 13-mestno naravno število: prve tri števke pomenijo državo (Slovenija ima številko 383), z naslednjimi šestimi označimo podjetje in z zadnjimi tremi izdelek. Zadnja števka je kontrolna. Podobno je sestavljena koda ISBN: prve tri števke so šifra države ali jezikovnega območja (Slovenija ima oznako 961), potem so tri mesta rezervirana za založbo, naslednjih pet za naslov knjige, zadnja števka je spet kontrolna.

Izračunajmo, koliko podjetij v državi in koliko izdelkov na podjetje lahko zapišemo v sistemu EAN ter koliko založb in koliko knjig vsake založbe lahko zapišemo s črtno kodo ISBN.

a) V sistemu EAN je za zapis podjetja namenjenih 6 mest. Na vsako mesto lahko postavimo eno od desetih števk, torej imamo po osnovnem izreku kombinatorike za oznako podjetij na razpolago 10^6 ali milijon možnosti. Podoben razmislek nam pove, da lahko vsako podjetje s to kodo označi 1000 svojih izdelkov.

b) Vsaka država lahko s kodo ISBN opremi 1000 založb, vsaka založba pa 100 000 knjig. Poglejmo še na platnice te knjige in preberimo njeno številko ISBN.

ISBN 961-6465-80-5

9 789616 465809

2. V trgovinah z igračami prodajajo igro s kartami. Po tri od njih predstavljajo posamezno vrsto vozila (gasilski, policijski, poštarski, cirkuški avto). Z zamenjavo posameznih kart nastanejo komične situacije, ko je npr. prvi del vozila poštarski, srednji del cirkuški, zadnji del pa avtobusni. Koliko takih vozil lahko sestavimo iz 60 kart?

Sestavljanje »vozil« je proces, ki ima tri faze. Prva faza (sprednji del vozila) je izvedljiva na 20 načinov, na prav toliko načinov sta izvedljivi tudi druga faza (postavljanje srednjega dela vozila) in tretja faza (zadnji del vozila). Zato lahko iz 60 kart sestavimo $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$ različnih »vozil«.

3. Gospod Levi Right ima v omari dva para čevljev, pet srajc, šest kravat, troje hlač in dva suknjiča. Na koliko načinov se lahko obleče, če ne upošteva ustreznosti barv in vzorcev?

Na izbor oblačil gospoda Levija lahko gledamo kot na proces petih zaporednih faz: pri obutvi ima dve možnosti, pri izboru srajce pet, pri kravatah šest, pri izboru hlač tri in pri suknjiču dve. Število izborov v posamezni fazi ni odvisno od izborov v drugih fazah, zato lahko uporabimo osnovni izrek kombinatorike:

$N = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 360$

Gospod Levi ima v omari tudi tri klobuke in dve čepici. Na koliko načinov se lahko pokrije, ko zapusti stanovanje?
Izbira lahko med tremi klobuki in dvema čepicama, torej ima pet možnosti, saj nima na glavi hkrati klobuka in čepice.

Drugi del zgleda ne moremo rešiti enako kot prvega, saj izbiramo med dvema množicama, izbori pa so nezdružljivi. Zato smo v tem primeru uporabili pravilo vsote.

Pravilo vsote

Če izbiramo med n_1 možnostmi iz prve množice izborov ali n_2 možnostmi iz druge množice izborov … ali n_k možnostmi iz k-te množice izborov in so izbori iz vsake množice nezdružljivi z izbori iz drugih množic, potem je vseh izborov:

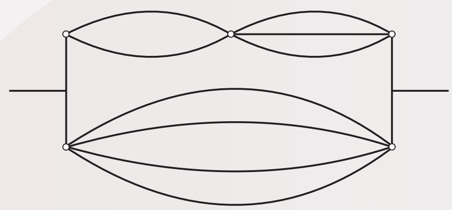
$$\boldsymbol{M = n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

ZGLED

Stara mama gre enkrat na teden z Viča na obisk k prijateljici v Moste. Včasih gre na mestni avtobus št. 1 ali 6 do Centra in z eno od 3 prog naprej, včasih pa pokliče taksi enega od 4 podjetij. Izračunajmo, na koliko različnih načinov se lahko babica pripelje do prijateljice.

Njeno »potovanje« je ob uporabi mestnega prometa sestavljeno iz dveh faz: Vič–Center (2 izbiri) in Center–Moste (3 izbire), ob uporabi taksija pa so 4 možnosti.

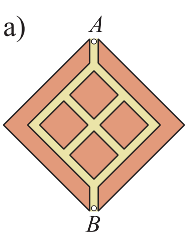
Obe vrsti vožnje se očitno ne moreta zgoditi hkrati, zato uporabimo pravilo vsote, in vseh možnosti je $N = 2 \cdot 3 + 4 = 10$.



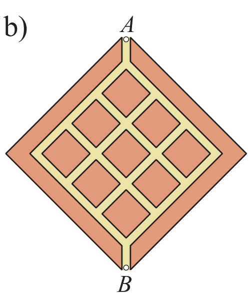
NALOGE

232. Na koliko načinov lahko kroglica pade iz točke A v točko B?

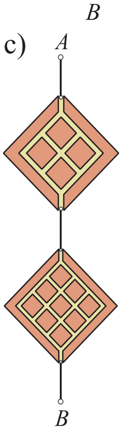
a)



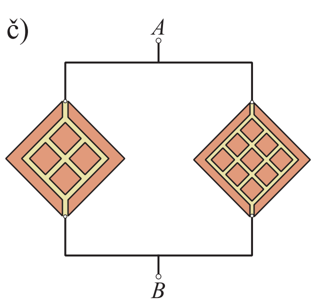
b)



c)

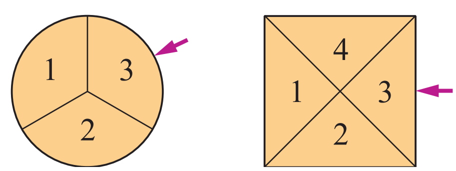


č)



233. V lokalni teniški klub je včlanjenih 8 moških in 6 žensk. Koliko mešanih dvojic lahko prijavijo za tekmovanje?

234. Tinca in Manca imata vsaka svojo vrtavko; glej sliko. Na koliko različnih načinov se vrtavki ustavita, če jo Tinca zavrti prva, Manca pa druga?



235. Tekma v namiznem tenisu je končana, če igralec zmaga v 3 setih. Tako so za dokončanje igre potrebni najmanj 3 in največ 5 setov. Zapišite vse možnosti za zmago.

236. Na jedilniku v samopostrežni restavraciji so dve juhi (goveja in zelenjavna), tri glavne jedi, tri solate in dve sladici (sladoled in tortica).

a) Koliko je vseh možnih jedilnikov?

b) Koliko je jedilnikov, če izberemo govejo juho in sladoled?

237. V cvetličarni imajo na voljo rdeče in rumene vrtnice, rdeče gerbere, modre irise in dve vrsti zelenja. Koliko različnih šopkov dobimo, če se odločimo za sedem rož enake vrste in enake barve in za eno zelenje?

238. Na šoli so razpisali dve delovni mesti: za profesorja latinščine in za profesorja francoščine. V prijavnem roku so dobili 7 popolnih prijav za latinščino in 15 za francoščino. Na koliko načinov lahko zapolnijo delovni mesti?

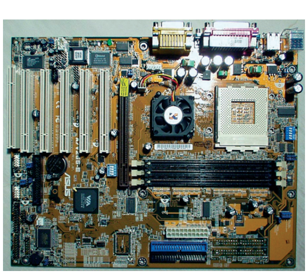
239. Manca ima v denarnici 20 kovancev za 1 in 2 evra, 5 bankovcev za 5 evrov in en bankovec za 10 evrov. Na koliko načinov lahko plača izdelek, ki stane 17 evrov?

240. Mojca štirikrat zapored vrže kovanec. Koliko je vseh različnih metov? Rešitev predstavite s kombinatoričnim drevesom.

241. Vržemo igralni tetraeder, običajno igralno kocko in igralni oktaeder. Koliko trimestnih števil dobimo, če je stotica iz oktaedra, desetica iz običajne kocke, enica pa iz tetraedra? Koliko od teh števil je deljivih s 4 in koliko s 5?

242. Elektronsko vezje je sestavljeno iz 4 stikal **ON-OFF** (to so stikala, ki so ali vključena ali izključena). Koliko je vseh stanj, če

a) ni omejitev,
b) mora biti prvo stikalo vedno prižgano,
c) sta ugasnjeni le 2 zaporedni stikali,
č) nobeni dve zaporedni stikali nista v enakem položaju,
d) sta prižgani vsaj dve stikali,
e) če sta prvo in zadnje stikalo v položaju OFF?



243. Oznake avtomobilskih registrskih tablic v Sloveniji so sestavljene iz števk in črk slovenske abecede ter X in Y (med njimi niso šumniki in črka O) in so treh vrst:

a) tablica je lahko sestavljena iz črke, za njo pa stojijo števka, različna od nič, in za pomišljajem še tri števke;
b) na začetku sta dvakrat po dve števki, ki jim sledi črka;
c) na začetku je črka, sledi števka, za njo dve števki in na koncu spet črka.

S katerim tipom tablice lahko v eni upravni enoti opremijo največ avtomobilov?

244. Koliko diagramov s petimi vrsticami lahko sestavimo iz znakov —— in – –? Npr.:

245. Praznovanja se je udeležilo pet povabljenih. Na koliko načinov se lahko skupaj z gostiteljema razporedijo za ravno mizo, če morata gostitelja sedeti na obeh koncih mize?

246. Na koliko načinov lahko naredimo petkov urnik, če mora biti prvi dve ali zadnji dve uri športna vzgoja, preostale štiri ure pa izbiramo med 11 predmeti in ni »blok ur«?

247. Igro na igralnem avtomatu začnemo z dvema žetonoma in stavimo največ trikrat zapored. Avtomat v igri lahko vrne vloženi žeton in še enega za nagrado ali žeton »požre«. S kombinatoričnim drevesom igre preštejte, na koliko načinov se lahko konča ta igra.

248. Na razpolago imamo pet ploščic s črkami G, A, L, E in B.

a) Koliko besed lahko sestavimo?
b) Koliko od teh besed se začne s črko B?

249. Morsejeve črke sestavljamo iz pik in črtic posamič, po dva znaka, po tri znake in po štiri znake. Največ koliko črk lahko sestavimo na ta način?

MORSEJEVA ABECEDA

a	·–	l	·–··	w	·––	8	–––··
b	–···	m	––	x	–··–	9	––––·
c	–·–·	n	–·	y	–·––	0	–––––
d	–··	o	–––	z	––··	pika	·–·–·–
e	·	p	·––·	1	·––––	vezaj	–····–
f	··–·	q	––·–	2	··–––	vprašaj	··––··
g	––·	r	·–·	3	···––	vejica	––··––
h	····	s	···	4	····–	opuščaj	·––––·
i	··	t	–	5	·····	narekovaj	·–··–·
j	·–––	u	··–	6	–·····	dvopičje	–––···
k	–·–	v	···–	7	––···	oklepaj	–·––·–

250. Na vaškem plesu se je zbralo 9 deklet in 12 fantov. Koliko skladb morajo zaigrati muzikantje, da bo lahko vsak fant plesal z vsakim dekletom?

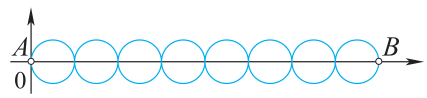
251. Vržemo tri igralne kocke različnih barv. Koliko je vseh metov?
a) Koliko je vseh metov, pri katerih natanko ena od kock pokaže šestico?
b) Koliko je vseh metov, pri katerih vsaj ena od kock pokaže šestico?

252. Na petih ploščicah so zapisane črke M, U, Z, E in J. Z njimi sestavljamo besede.
a) Koliko vseh besed lahko sestavimo iz vseh črk?
b) Koliko od teh besed se začne na soglasnik?
c) Koliko besed se konča na samoglasnik?

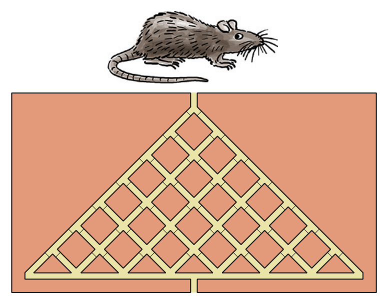
253. Urša in Vid igrata tenis. Dvoboj je končan, ko eden od njiju dobi tri od petih nizov. Narišite kombinatorično drevo in preštejte vse možnosti konca dvoboja.

254. V mlečni restavraciji imajo na voljo bistre sokove in mlečne napitke v treh velikostih (mala, srednja in velika) in štirih okusih (jagoda, borovnica, jabolko in breskev). Na koliko načinov lahko naročimo pijačo?

255. Osem enakih krogov s premerom 1 cm postavimo v vrsto, da se dotikajo drug drugega. Izračunajte, koliko je vseh poti po krožnicah dolžine 4π od točke $A(0,0)$ do $B(8,0)$, če pot ne sme spremeniti smeri.



256. Raziskovalci inteligence podgan živali testirajo v t. i. T-labirintu. Na vseh navpičnih prehodih v labirintu so vratca, ki se odpirajo le proti izhodu, nazaj pa ni mogoče. Izračunajte, na koliko načinov lahko podgana prehodi labirint od vhoda do izhoda.

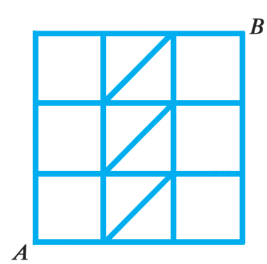


257. Kocko pobarvamo tako, da uporabimo za vsako od ploskev samo rdečo ali modro barvo. Koliko je vseh različno pobarvanih kock (do rotacije natančno)?

258. Vsak rob kocke pobarvamo z rdečo ali črno barvo. Kolikšno je najmanjše število črnih robov, če ima vsaka mejna ploskev vsaj en črn rob?

259. Koliko znakov bi lahko zapisali z največ šestimi pikami ali/in črticami iz naloge 249?

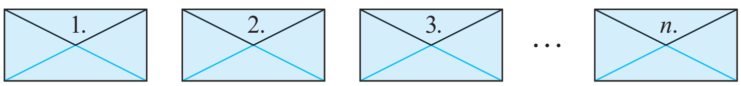
260. Koliko poti iz A v B na narisani mreži je sestavljenih iz natanko 6 prehodov oz. odsekov?



Permutacije

Z osnovnim izrekom kombinatorike lahko rešujemo različne probleme. *Problem zamenjave pisem*, ki smo ga rešili le za poseben primer $n=4$, bomo zdaj rešili splošno. Ugotoviti moramo število razporeditev n različnih pisem v n ovojnic z naslovi.

Postopek lahko poenostavimo tako, da pisma postavimo v vrsto in jih oštevilčimo od 1 do n. Zdaj gre le še za razporejanje n pisem na n (označenih) mest (vrstni red je pomemben).



Če sledimo osnovnemu izreku kombinatorike, je razporejanje pisem proces, razporeditev vsakega pisma pa njegova posamezna faza. Faze očitno niso odvisne druga od druge, zato je prva faza (vlaganje pisem v prvo ovojnico) izvedljiva na n načinov, druga na $n-1$ načinov, tretja na $n-2$ načinov in tako naprej, predzadnja na $n-(n-2)=2$ načina in zadnja na en sam način. Vseh načinov je:

$$\boldsymbol{N=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

Število N, ki je produkt vseh zaporednih naravnih števil od 1 do n, lahko krajše zapišemo kot:

$$\boldsymbol{n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

in preberemo *n fakulteta* ali tudi *n faktorsko*.

Premetanka ali **anagram** je beseda, ki jo dobimo iz neke druge besede tako, da tej premešamo črke in jih sestavimo v drugačnem vrstnem redu. Npr. VRANA → VARAN (tropski kuščar) → RAVAN (ravna pokrajina) → NARVA (pristanišče v Estoniji) → ANVAR (ime egiptovskega predsednika el Sadata).

Za prvega sestavljavca anagramov velja grški pesnik Likofron iz 3. st. pr. Kr., ki je iz črk vladarja PTOLEMAIOS sestavil anagram APO MELITOS (meden), iz imena njegove žene ARSINOE pa anagram ION ERAS (Herina ljubljenka).

Anagrame so zelo cenili pesniki v 16. in 17. st., cenijo pa jih še danes:

Kar si posejal,
tega ne boš žel,
če poseješ KLAS,
boš požel plevel.
(J. Stabej ml.)
(SLAK)

ZGLEDI

1. $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

2. $\dfrac{n!}{(n-1)!}=\dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n$

3. $6!-4!=6\cdot 5\cdot 4!-4!=(30-1)\cdot 4!=29\cdot 24=696$

4. $\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}=(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$

Definicijo *n fakulteta* lahko zapišemo tudi rekurzivno:
$n!=n\cdot(n-1)!$
$0!=1$

Razporeditve n različnih elementov na n mestih (vrstni red elementov je zelo pomemben) imenujemo **permutacije *n* elementov**. Pokazali smo že, da je teh razporeditev $n!$.

$$\mathbf{P}_n=\boldsymbol{n!}$$

ZGLEDA

1. Na igrišču v parku Tivoli se po toboganu spušča 6 otrok. Ali se lahko na vse različne načine zvrstijo v enem dnevu, če za vsako »vožnjo« potrebujejo 1 minuto? Kaj pa, če eden od njih zgodaj odide domov? V kolikšnem času se zvrstijo, če je najstarejši Martin vedno prvi na vrsti, Jure in Vid pa nikoli drug za drugim?

Vseh razporedov 6 otrok je $N_1 = P_6 = 6! = 720$. Ko to število delimo s 60, vidimo, da bi za vse različne vožnje potrebovali kar 12 ur.

Če bi eden zgodaj odšel domov, bi se dričalo le še 5 otrok. Potem bi bilo $N_2 = P_5 = 5! = 120$ vseh voženj, ki bi jih lahko opravili v 2 urah.

V zadnjem primeru je vseh otrok 6, ker pa je Martin vedno prvi, ne vpliva na število razporedov. Tako je vseh različnih razporedov spet $5! = 120$, odšteti pa moramo še tiste, ko se Jure in Vid peljeta drug za drugim. Fantiča si predstavljamo povezana in nam pomenita eno »osebo«. Vseh razporedov s tem pogojem je $4! \cdot 2$ (Jure in Vid se v »omotu« lahko še zamenjata). Odgovor na zadnje vprašanje je $N_3 = 5! - 4! \cdot 2 = 4!\,(5-2) = 72$.

2. Šestčlanska družina gre v kino. Na koliko načinov se lahko usede v vrsto, če sedita starša skupaj in otroci skupaj ali če starša sedita na obeh koncih, otroci pa med njima?

Starša se lahko usedeta skupaj na dva načina, otroci pa na $4! = 24$ načinov. Vendar otroci in starši sestavljajo nov niz dveh skupin, ki ju tudi lahko zamenjamo, zato je rezultat prvega dela naloge $N_1 = 2! \cdot 4! \cdot 2! = 2 \cdot 24 \cdot 2 = 96$.

Če otroci sedijo med staršema, pomeni, da moramo $4!$ pomnožiti z 2, saj lahko starša na koncih zamenjata mesti. Dobimo torej $N_2 = 48$ razporeditev.

Kako je s številom razporeditev štirih otrok, če sta med njimi dvojčka, in to tako podobna, da ju v šoli težko ločijo? Otroke označimo s črkami A, B, C_1 in C_2 in napišimo vse njihove razporeditve pri predpostavki, da dvojčka ločimo med seboj (ker sta različno oblečena).

A B C_1 C_2	B A C_1 C_2	C_1 A B C_2	C_2 A B C_1
A B C_2 C_1	B A C_2 C_1	C_1 A C_2 B	C_2 A C_1 B
A C_1 B C_2	B C_1 A C_2	C_1 B A C_2	C_2 B A C_1
A C_1 C_2 B	B C_1 C_2 A	C_1 B C_2 A	C_2 B C_1 A
A C_2 B C_1	B C_2 A C_1	C_1 C_2 A B	C_2 C_1 A B
A C_2 C_1 B	B C_2 C_1 A	C_1 C_2 B A	C_2 C_1 B A

Ker pa sta si dvojčka tako podobna, da ju ne moremo ločiti, moramo izbrisati vse enke in dvojke pri črki C, kar pomeni, da sta po dve razporeditvi v preglednici enaki (tisti dve, ki imata črki C na istem mestu) oz. da je vseh razporeditev le polovica prejšnjih.

V tem primeru razporejamo štiri elemente, od katerih se eden pojavlja dvakrat, kar označimo s $P_4^2 = 12$. Take razporeditve imenujemo **permutacije s ponavljanjem**.

Permutacije, pri katerih razporejamo same različne elemente, imenujemo tudi **permutacije brez ponavljanja**.

ZGLED

Preštejmo vse permutacije črk besede ANANAS.

Podobno kot prej lahko črke A označimo z indeksi, prav tako tudi črki N. Nekaj začetnih razporeditev se glasi:

A_1 N_1 A_2 N_2 A_3 S
A_1 N_1 A_2 A_3 N_2 S
A_1 N_1 N_2 A_2 A_3 S
A_1 N_1 N_2 A_3 A_2 S
A_1 N_1 A_3 A_2 N_2 S
A_1 N_1 A_3 N_2 A_2 S
…

Ko zbrišemo indekse pri črkah A in N, vseh razporeditev ni 6!, ampak $\frac{6!}{3!\cdot 2!}$, saj moramo 6! zaradi permutacij treh A-jev deliti s $3! = 6$, pa še z 2 zaradi permutacij dveh N-jev.

Permutacij n elementov s ponavljanjem, od katerih se eden od elementov ponavlja k_1-krat, drugi k_2-krat, tretji k_3-krat in tako naprej; $k_1+k_2+k_3+\ldots+k_r=n$, je

$$\mathbf{P}_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!}.$$

ZGLEDI

1. Urša si vsak dan na koledarju označi, kakšne volje je bila. Za dobro voljo nariše ☺, za bolj kisel dan pa 😐. Na koliko načinov je lahko dobre volje 5 dni v tednu?

Število načinov, ko je petkrat dobre volje, dvakrat pa slabše, dobi tako, da dela razporede dveh oznak, od katerih se ena ponavlja 5-krat, druga pa 2-krat: denimo ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ 😐 😐.
To pa so permutcije s ponavljanjem, vseh je

$$P_7^{2,5} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{2\cdot 5!} = 21.$$

2. Permutacije števk 1, 4 in 8 so: 148, 184, 418, 481, 814 in 841.
Povprečje vseh šestih števil je

$$\frac{148+184+418+481+814+841}{6} = \frac{2886}{6} = 481 = 37(1+4+8).$$

Pokažite, da ta lastnost velja za vse vrednosti katerihkoli števk v trimestnem številu.

Dokaz:

$N = \overline{abc}$

$$100a+10b+c+100a+10c+b+100b+10a+c+100b+10c+a+$$
$$+100c+10b+a+100c+10a+b = 222a+222b+222c = 222(a+b+c)$$

$222 = 6\cdot 37$

$$\frac{222(a+b+c)}{6} = 37(a+b+c)$$

3. Štirim otrokom bi radi razdelili deset igrač, tako da starejša otroka dobita po dve igrači, mlajša dva pa po tri igrače. Izračunajmo, koliko je vseh možnosti razdeljevanja.

Denimo, da smo igrače že razdelili in so jim otroci dali imena po sebi: dvema igračama je ime Matic, dvema Urša, trem Katarina in trem Mojca. Lahko rečemo, da se od 10 imen prvo ponavlja dvakrat, drugo tudi dvakrat, tretje in četrto pa po trikrat. Očitno imamo opravka s permutacijami s ponavljanjem (čeprav sprva ni bilo videti), zato lahko zapišemo:

$$N = P_{10}^{2,2,3,3} = \frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 3!} = 25\,200$$

Vseh načinov razdelitve igrač je kar 25 200.

NALOGE

261. Sedem otrok stoji v vrsti. Na koliko načinov jih lahko prestavimo, če mora Mitja stati na koncu vrste? Na koliko načinov pa jih lahko prestavimo, če trije najbolj živahni otroci ne smejo stati skupaj?

262. Koncertni pianist je za koncert pripravil sedem skladb, štiri klasične in tri moderne. Koliko je vseh vrstnih redov izvajanja:
a) če ni omejitev,
b) če mora najprej zaigrati klasične skladbe,
c) če se morajo klasične skladbe izmenjevati z modernimi?

263. Na knjižno polico mora Urša razporediti tri slovarje, pet leposlovnih knjig in štiri učbenike. Na koliko načinov gre, če
a) ni posebnih pogojev,
b) morajo knjige iste vrste stati skupaj,
c) naj slovarji stojijo skupaj na levi strani police?

264. Šestčlanska družina se napoti v gore. Koliko navez lahko naredijo, če mora biti na prvem mestu eden od staršev? Koliko je navez, če otroci hodijo med staršema?

265. V vojaški spalnici stoji ob steni vzporedno sedem postelj. Na koliko načinov lahko novinci zasedejo postelje, če mora najstarejši spati pri vratih?

266. Za proslavo ob obletnici osamosvojitve Slovenije načrtujejo pet pesmi in med vsako po enega govornika. Na koliko načinov lahko naredijo program, če naj bo himna na začetku?

267. Zlato Cankarjevo bralno značko je dobilo sedem učencev šole. Vsak od njih dobi za nagrado eno od sedmih pripravljenih knjig. Na koliko načinov lahko učenci izberejo po eno knjigo?

268. Na koliko načinov je mogoče narediti torkov urnik iz sedmih predmetov (ŠPO, SLO, MAT, FIZ, LAT, BIO, ZGO)?
a) Matematika in fizika ne smeta biti druga za drugo.
b) Športna vzgoja ne sme biti pred matematiko.

269. Maturanti klavirskega oddelka glasbene gimnazije imajo zaključni koncert. Na koliko načinov se lahko razporedi 8 deklet in 7 fantov, če
a) ni nobenih posebnih zahtev,
b) če dekleta nastopijo skupaj,
c) nastopajo izmenično,
č) prvi nastopi Martin in nato Monika?

270. Koliko različnih kupov knjig lahko naredimo iz 6 knjig Tempus in 4 knjig Spatium?

271. Vnuki so stari mami kupili mobilni telefon. Da bi si laže zapomnila PIN-kodo, so se domenili, da si izbere 4 števke iz svojega rojstnega datuma 22. 12. 1941. Koliko PIN-kod z različnimi števkami si lahko izbere?

272. Pri družini Novak praznujejo. Na koliko načinov se lahko postavijo v vrsto za fotografiranje, če morata oče in mama stati skupaj, za tri otroke pa je vseeno?

273. V galeriji postavljajo razstavo 9 olj in 6 akvarelov.
a) Na koliko načinov gre?
b) Koliko je postavitev, če morajo stati olja skupaj in akvareli skupaj?
c) Koliko je možnosti, če morajo skupaj stati samo akvareli?

274. Na parkirišče Ljubljanskega mestnega prometa pripelje sedem členkastih in osem navadnih avtobusov. Na koliko načinov lahko parkirajo vzporedno na parkirnem prostoru?
a) Avtobusi iste vrste morajo stati skupaj.
b) Ni posebnega pogoja.

275. Koliko premetank (pomen besed tu ni pomemben) lahko sestavimo iz besed
a) KRONA,
b) RANDI,
c) KRAMA?
Poiščite vsaj 4 premetanke, ki imajo pomen.

276. Koliko je vseh permutacij črk v besedi ČIRAČARA?

277. Koliko besed iz črk B, O, M, B, A, Ž se ne začne s črko Ž in ne konča s črko A?

278. V dvorani je sedem belih in devet rjavih stolov. Na koliko načinov lahko postavimo stole v vrsto, če so
a) stoli oštevilčeni,
b) oštevilčeni in morajo stoli iste barve stati skupaj?

279. Črtna koda na steklenici je sestavljena iz 6 debelih in 5 tankih črt. Koliko različnih vrst steklenic je mogoče označiti?

280. V družbi je osem oseb. Na koliko načinov jih lahko razporedimo za ravno mizo, če sta med njimi dva zaljubljenca, ki morata sedeti skupaj?

281. Na predstavitvi predsedniških kandidatov moramo posesti v vrsto pet moških in dve ženski ter dva voditelja. Na koliko načinov to lahko storimo?
a) Vrstni red ni pomemben.
b) Moški sedijo skupaj, ženske skupaj in voditelja skupaj.
c) Voditelja sedita vsak na enem koncu.

282. Na koliko načinov lahko otrok zloži v vrsto 8 belih in 15 rdečih kroglic
a) enake velikosti,
b) različne velikosti?

283. Nastopajoči na proslavi so oblečeni v bele, zelene in oranžne drese. Na koliko načinov lahko postavimo v vrsto štiri bele, sedem zelenih in tri oranžne nastopajoče?
a) Stojijo lahko poljubno.
b) Enakobarvni morajo stati skupaj.
c) Enakobarvni morajo stati skupaj, beli na desni strani.

284. V vojašnici poveljnik straže na štiri stražarska mesta razporeja osem vojakov, po dva na vsako. Ali je eno leto dovolj časa, da izkoristi vse možnosti, če vojaki stražijo enkrat na dan?

285. Na maturantskem izletu se mora 24 maturantov namestiti v šestposteljne kabine na ladji. Na koliko načinov se da?

286. Urša je kupila šest čebulic rumenih tulipanov in po pet čebulic rdečih in belih tulipanov. V vrečki so se čebulice premešale. Koliko barvnih vzorcev nastane, če čebulice posadi v vrsto?

287. Trener ima na voljo 18 igralcev, sestaviti pa mora tri moštva s po šestimi igralci. Na koliko načinov se da?

288. Osem prijateljev se odpravlja na potovanje z dvema štirisedežnima avtomobiloma. Na koliko načinov se lahko razporedijo v avtomobila, če imajo vsi vozniški izpit? Na koliko načinov pa, če dva od njih nimata vozniškega izpita in najprej izberemo oba voznika?

289. Na glavni avtobusni postaji na 6 voznikov in 6 kontrolorjev čaka 6 avtobusov. Na koliko načinov se lahko vozniki in kontrolorji porazdelijo po avtobusih, če sta v vsakem avtobusu po en voznik in en kontrolor?

290. Na koliko načinov lahko za okroglo sejno mizo sedi 7 ljudi, če je pred enim od sedežev pritrjen mikrofon?

291. Na koliko načinov lahko med sestre Katarino, Uršo in Mojco razdelimo zapored pet knjig, če dobi vsaka vsaj eno knjigo?

292. Kovanec vržemo 9-krat zapored. Koliko različnih zaporedij iz 5 mož in 4 cifer dobimo?

293. Na koliko načinov lahko nanizamo na vrvico 2 beli in 5 raznobarvnih kroglic, od katerih nobena ni bela?

Variacije

Pri permutacijah brez ponavljanja smo razporejali vse elemente neke končne množice z močjo n oz. smo delali nize vseh n elementov. Če pa elemente neke končne množice z močjo n razporejamo na r mest in je $r < n$, elementi pa se ne smejo ponavljati, delamo razporeditve po r elementov iz množice, ki ima n elementov. To so **variacije *n* elementov reda *r* brez ponavljanja**.

Preden izpeljemo formulo za izračun števila variacij, poglejmo enostavna zgleda.

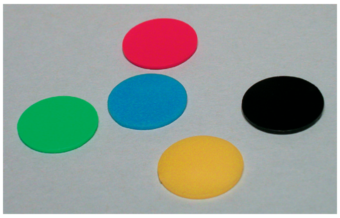
ZGLEDA

1. V vrečki je 5 ploščic različnih barv. Trikrat zapored izvlečemo po eno ploščico in jih postavimo v vrsto. Koliko barvnih vzorcev lahko dobimo?

Sestavljanje barvnih vzorcev je proces, sestavljen iz treh faz. Za prvo fazo imamo na voljo 5 ploščic, za drugo 4 (eno ploščico smo že porabili) in za tretjo fazo 3 ploščice.

$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Sestavimo lahko 60 barvnih vzorcev. Toliko je torej vseh variacij brez ponavljanja 5 elementov reda 3.



2. V trgovskem centru lahko kupci plačujejo pri 10 blagajnah. Na koliko načinov lahko vodja centra razporedi 10 od 14 blagajničark? Koliko let bi morale biti gospe zaposlene, da bi se razvrstile na vse različne načine, če delajo 250 dni v letu?

Vodja centra mora izmed 14 delavk narediti vse razporede po 10 delavk (vrstni red je pomemben). Proces razporejanja ima 10 faz, od katerih je prva izvedljiva na 14 načinov, druga na 13 načinov, …, zadnja, 10. faza, pa na 5 načinov. Po osnovnem izreku kombinatorike je število vseh teh razporedov

$14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 3\,632\,428\,800.$

Blagajničarke bi morale delati nedosegljivih 14 milijonov let!

Poiščimo še splošno formulo za izračun števila variacij n elementov reda r brez ponavljanja. Red r pove število faz, torej imamo v prvi fazi n izborov, v drugi fazi $n-1$ izborov, v tretji fazi $n-2$ izborov in v zadnji, r-ti fazi $n-(r-1) = n-r+1$ izborov. Po osnovnem izreku kombinatorike sklepamo, da je število **variacij brez ponavljanja *n* elementov reda *r*** enako:

$$\mathbf{V}_n^r = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Variacije brez ponavljanja n elementov reda r so kar permutacije n elementov brez ponavljanja.

ZGLEDA

1. V pritličju sedemnadstropne trgovine vstopijo v dvigalo tri gospe. Na koliko načinov lahko izstopijo v posameznih nadstropjih, če vedno izstopi samo ena? Koliko pa je vseh izstopov brez posebnega pogoja?

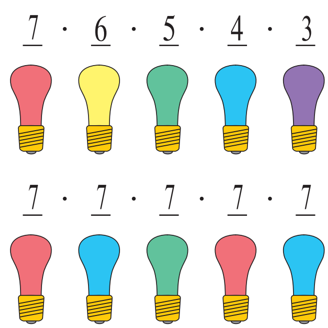
Nalogo bomo rešili tako, da ne bomo šteli, kako gospe izstopajo v nadstropjih, ampak obratno: nadstropja bomo prirejali posameznim gospem. Tako lahko prva gospa izstopi v enem od 7 nadstropij, druga v enem od 6 nadstropij (saj je eno nadstropje že »porabljeno«) in končno lahko tretja izstopi v enem od 5 nadstropij. Če se spomnimo računanja v prejšnjem primeru, je vseh izstopov pri danem pogoju

$N = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$

Pri izstopanju brez pogoja pa vsaka gospa lahko izstopi v enem od 7 nadstropij, zato je vseh možnosti

$N = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 = 343.$

2. Za božično okrasitev vhodnih vrat imamo na voljo sedem raznobarvnih žarnic, električna napeljava pa dopušča le pet zapored nanizanih žarnic. Koliko je vseh različnih možnosti za okrasitev?



Ker so žarnice nanizane, gre za razporeditev petih žarnic, ki jih izberemo med sedmimi. To so variacije 7 elementov reda 5 brez ponavljanja.

$V_7^5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

Vseh razporeditev po pet žarnic je 2520.

Po navadi pa se pri praznični okrasitvi žarnice enake barve ponavljajo. Kot prej imamo na voljo pet mest ter zadostno število žarnic sedmih različnih barv. Koliko je vseh razporeditev, če se žarnice posameznih barv v nizu lahko ponavljajo?

Znova si pomagamo z osnovnim izrekom kombinatorike in si okrasitev zamislimo kot proces. Proces ima spet pet faz; vsaka pomeni namestitev ene od žarnic. Prva je izvedljiva na sedem načinov (toliko različnih barv žarnic imamo), druga faza je spet izvedljiva na sedem načinov, saj se barve lahko ponavljajo (pa tudi žarnic imamo dovolj), enako velja za tretjo, četrto in peto fazo, vsaka je izvedljiva na sedem načinov.

Vseh možnosti je $N = 7^5 = 16\,807$, kar označimo takole: ${}^{(p)}V_7^5$.

Variacije *n* elementov reda *r* s ponavljanjem so vse razporeditve po *r* elementov iz množice z *n* elementi, pri čemer se elementi v razporeditvi lahko ponavljajo.

Splošne formule zdaj ne bo težko zapisati. Število variacij s **ponavljanjem** ***n*** **elementov reda** ***r*** je:

$${}^{(p)}\mathbf{V}_n^r = n^r$$

ZGLED

Igralni avtomat je sestavljen iz treh vrtljivih cilindrov, na vsakem je naključno razporejenih 20 slik (nekatere se ponavljajo večkrat, nekatere nastopajo le enkrat). Razpored je razviden iz preglednice:

	CILINDER		
PREDMET	1	2	3
češnja	2	5	4
pomaranča	5	4	5
sliva	5	3	3
zvonec	2	4	4
melona	2	1	2
bar	3	2	1
7	1	1	1
SKUPAJ	20	20	20

Najvišji dobitek *jackpot* je izplačan za 3 *sedmice* (500 žetonov) ali za tri *bare* (200 žetonov) ali za tri melone (100 žetonov), potem so dobitki občutno nižji: za tri zvonce 18 žetonov, za 3 slive 14 žetonov, za tri pomaranče ali češnje 10 žetonov; za češnje na prvih dveh cilindrih 5 žetonov in za češnjo na prvem cilindru 3 žetone. V preostalih primerih ne dobimo nič.

Na koliko različnih načinov se lahko ustavijo cilindri? Na koliko načinov lahko dobimo *jackpot*? Koliko je načinov, ko cilindri pokažejo isto sliko, in koliko, ko samo prva dva cilindra pokažeta češnjo? Kolikokrat lahko dobimo 3 žetone?

a) Vseh različnih načinov je $N_1 = {}^{(p)}\mathrm{V}_{20}^3 = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$.

b) *Jackpot* dobimo le za tri sedmice, tri bare ali tri melone. Ker je na vsakem cilindru le po ena sedmica, dobimo lahko le en tak *jackpot*, pri barih imamo $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možnosti in pri melonah 4 možnosti; vseh skupaj torej $N_2 = 11$.

c) Poleg *jackpota* v 11 primerih isto sliko pokažejo še češnje 40-krat, pomaranče 100-krat, slive 45-krat in zvonci 32-krat. Zato je vseh teh načinov $N_3 = 228$.

č) Če je na prvih dveh cilindrih češnja, na tretjem cilindru pa ne, je vseh teh možnosti $N_4 = 2 \cdot 5 \cdot 16 = 160$.

d) Tri žetone dobimo za češnjo na prvem cilindru (na drugem ne sme biti, na tretjem cilindru je karkoli), zato je teh možnosti $N_5 = 2 \cdot 15 \cdot 20 = 600$.

Prvi igralni avtomat *Mills Liberty Bell* so naredili v San Franciscu leta 1911 v družbi *Fey Manufacturing Company*.

NALOGE

294. Zakonca Jug kupujeta novo kuhinjo. Na voljo imata 6 barvnih odtenkov. Koliko dvobarvnih kuhinj lahko sestavita, če so omarice pod pultom ene barve, viseče omarice nad pultom pa druge barve?

295. Republiška maturitetna komisija za matematiko je v maturitetnem katalogu objavila 266 vprašanj: 65 iz prvega letnika, 68 iz drugega, 62 iz tretjega in 71 iz četrtega. Komisija vsako leto pripravi listke s po 3 vprašanji, vsako iz svojega letnika. Koliko različnih listkov bi lahko pripravili vsako leto?

296. Koliko različnih nizov dolžine 3 lahko tvorimo iz znakov ♣, ♦, ♥ in ♠?

297. Bomboni so v 6 barvah (vsake barve je vsaj po 5 bombonov). Iz škatlice stresemo 4 bombone in jih postavimo v vrsto. Koliko različnih vzorcev dobimo, če

a) so vsi bomboni različne barve,

b) se barve lahko ponavljajo?

298. Zapišimo vsa trimestna števila iz števk 0, 2, 4, 6 in 8, ki so deljiva s 4.

299. Koliko različnih besed (njihov pomen ni pomemben) lahko sestavimo iz 5 različnih črk slovenske abecede, če se

a) črke ne ponavljajo,

b) črke ponavljajo?

300. Atletsko tekmovanje poteka na stezi, razdeljeni na osem oštevilčenih prog. Na koliko načinov lahko na njej tekmuje:

a) osem tekačev,

b) pet tekačev,

c) dve moštvi s po štirimi tekači, vendar tekmovalci iz istega moštva ne smejo teči v sosednjih pasovih?

č) Na koliko načinov si lahko osem tekačev razdeli zlato, srebrno in bronasto medaljo (v cilj ne pritečejo hkrati)?

301. Koliko naravnih števil med 2000 in 3000 ($2000 < n < 3000$) lahko sestavimo, če so sestavljena samo iz števk 1, 2, 3, 4, 5 in 6?

302. Koliko zastav »trikolor« lahko sestavimo iz 7 barv?

303. Koliko je števil, večjih od 1000 in manjših od 7000, ki so sestavljena le iz lihih števk, če

a) so vse števke različne,

b) se števke lahko ponavljajo?

304. Koliko besed s tremi črkami lahko sestavimo iz črk {a, b, e, g, m, z}?

a) Črke se lahko ponavljajo.

b) Črke se ne smejo ponavljati. Koliko od teh se jih začne s samoglasnikom?

305. Na koliko načinov lahko podelimo dve različni nagradi v skupini 7 ljudi?

a) Obeh nagrad ne moremo podeliti istemu človeku.

b) Obe nagradi lahko dobi tudi en sam človek.

306. Štirikrat zapored vržemo kocko in iz dobljenih števk sestavimo število. Koliko je vseh štirimestnih števil, ki jih lahko pokaže kocka?

307. Koliko vzorcev lahko spletemo iz 15 pentelj, od katerih je 8 levih in 7 desnih?

308. Na jambor obešamo drugo pod drugo štiri zastavice za signalizacijo. Koliko signalov lahko sestavimo s šestimi različnimi zastavicami?

309. Na steni je pritrjenih pet kljuk. Na koliko načinov lahko nanje obesimo štiri plašče po
a) enega na kljuko,
b) več na isto kljuko?

310. Igralni avtomat je sestavljen iz treh vrtljivih cilindrov, na vsakem je naključno razporejenih 20 slik (nekatere se ponavljajo večkrat, nekatere nastopajo le enkrat, razpored je napisan v preglednici). Pri stavi se cilindri najprej zavrtijo, potem ustavijo in na zaslonu se pokaže razpored treh od sedmih predmetov.

	CILINDER		
PREDMET	1	2	3
češnja	2	5	4
pomaranča	5	4	5
sliva	5	3	3
zvonec	2	4	4
melona	2	1	2
bar	3	2	1
7	1	1	1
SKUPAJ	20	20	20

Koliko je vseh možnosti, da
a) je na prvem in na tretjem mestu melona,
b) je natanko na dveh mestih isti predmet,
c) je na sredini zvonec,
č) je na tretjem mestu bar ali »7«,
d) sta na prvih dveh mestih češnja ali sliva?

311. V izvršnem odboru kluba je 10 funkcionarjev. Na koliko načinov lahko izberejo predsednika, podpredsednika in tajnika, če se funkcije ne smejo podvajati?

312. Na koliko načinov lahko pošljemo pet tiskovin, če imamo na voljo tri ovojnice?

313. Izračunajte n, ki reši enačbo:
a) $V_n^2 = 42$
b) $7 \cdot V_n^3 = 6 \cdot V_{n+1}^3$
c) $3 \cdot V_{2n+4}^3 = 2 \cdot V_{n+4}^4$
č) ${}^{(p)}V_{n-2}^3 = 512$

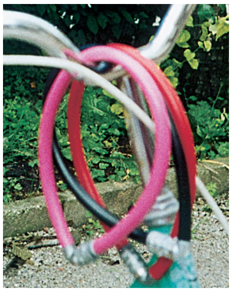
314. Število variacij s ponavljanjem n elementov reda 7 je 1 801 088 541. Izračunajte n.

315. Število variacij s ponavljanjem n elementov reda 3 je za 408 večje od števila variacij brez ponavljanja istega števila elementov reda 3. Izračunajte, katero število je to.

316. Razmerje števila elementov in števila variacij brez ponavljanja teh elementov reda 3 je 1 : 20. Kolikšno je število n?

317. Na koliko načinov lahko šest oseb razporedimo na osem stolov?

318. Kolesarski ključavnici imata tri oz. štiri obročke s števkami od 0 do 9. Koliko različnih števil moramo preveriti, da ju zagotovo odpremo?



319. Na šahovskem tekmovanju sodeluje 25 dijakov. Objavili bodo le seznam prvih 10. Koliko seznamov je mogočih, če posamezno mesto zaseda le en tekmovalec?

320. Zaradi zamujanja se je trener odločil, da bo pet fantov, ki bodo na trening prispeli prvi, po njem peljal na sladoled. Na koliko načinov se to lahko zgodi, če je v moštvu dvanajst igralcev?

321. Na koliko načinov lahko iz števk 0, 1, 2, 3, 5 in 7 sestavimo:
a) trimestno sodo število,
b) štirimestno število, deljivo s 5?

322. V trgovini imajo štiri pulte z oštevilčenimi blagajnami. Na koliko načinov lahko razporedijo na delo šest blagajničark, če sta dve v rezervi?

323. Izračunajte, koliko je vseh 6-mestnih palindromnih števil. Palindromna števila so števila, ki jih beremo iz leve in desne strani enako.

324. Petmestnemu številu rečemo *gorato število*, če je druga cifra večja od prve, tretja večja od druge, četrta manjša od tretje in peta manjša od četrte. Koliko 5-mestnih števil, ki so večja od 70 000, je goratih?

325. V vrečki so 4 raznobarvne kroglice. Dve zapored vzamemo iz vrečke in ju postavimo v vrsto. Koliko je vseh različnih parov kroglic? Koliko je vseh parov, če damo prvo kroglico pred drugim izbiranjem nazaj v vrečko?

326. Koliko 7-mestnih števil vsebuje števko 7
a) vsaj enkrat,
b) natanko enkrat?

Kombinacije

Pri permutacijah in variacijah smo sestavljali nize oz. razporeditve elementov, zato je bil odločilen vrstni red elementov. Včasih pa nas zanima le število podmnožic dane končne množice, pri tem pa vrstni red ni pomemben.

ZGLED

Na policijski postaji je zaposlenih sedem policistov, od katerih je eden komandir in eden pomočnik komandirja. Vsako noč mora biti v pripravljenosti skupina treh policistov, vendar komandir in pomočnik ne opravljata teh dežurstev. Izračunajmo, koliko je vseh dežurnih skupin.

Iz množice 5 policistov moramo sestaviti podmnožice s po 3 policisti. Če bi izračunali variacije brez ponavljanja 5 elementov reda 3 (policistom damo imena A, B, C, D in E), ko je pomemben vrstni red, bi dobili 60 skupin.

A B C	**A B D**	**A B E**	**B C D**	**B C E**	**C D E**
A C B	A D B	A E B	B D C	B E C	C E D
B C A	B A D	B A E	C B D	C B E	D C E
B A C	B D A	B E A	C D B	C E B	D E C
C A B	D A B	E A B	D B C	E B C	E C D
C B A	D B A	E B A	D C B	E C B	E D C

A C D	**A C E**	**A D E**	**B D E**
A D C	A E C	A E D	B E D
C A D	C A E	D A E	D B E
C D A	C E A	D E A	D E B
D A C	E A C	E A D	E B D
D C A	E C A	E D A	E D B

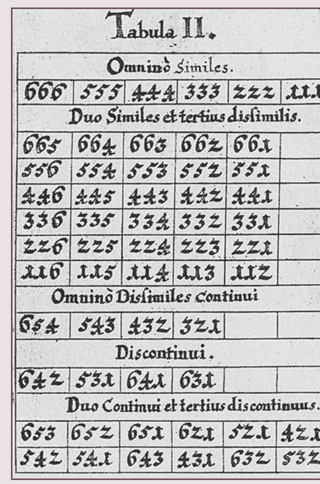
Vidimo, da je to število za faktor $6=3!$ preveliko. Iz vsake trojice v prvi vrsti (v krepkem tisku) smo namreč s preurejanjem (permutiranjem) dobili še pet drugih razporeditev.

Vseh možnih dežurnih skupin je 10.

Ta rezultat bi radi izračunali tudi brez »ročnega« preštevanja. Spomnimo se, da smo najprej izračunali število variacij brez ponavljanja 5 elementov reda 3 in potem to število delili s 3!.

$$C_5^3=\frac{V_5^3}{3!}=\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$$

Vseh podmnožic je 10.


Tabula II.
Omninò similes.
666 555 444 333 222 111
Duo Similes et tertius dissimilis.
665 664 663 662 661
556 554 553 552 551
446 445 443 442 441
336 335 334 332 331
226 225 224 223 221
116 115 114 113 112
Omninò Dissimiles Continui
654 543 432 321
Discontinui.
642 531 641 631
Duo Continui et tertius discontinuus.
653 652 651 621 521 421
542 541 643 431 632 532

Faksimile rokopisa *De vetula* iz 13. st., ki kaže, na koliko različnih načinov lahko padejo tri različne kocke. Vseh možnosti je 56, kar je število vseh kombinacij n elementov reda r s ponavljanjem. Formula za izračun kombinacij n elementov reda r, kjer se elementi lahko ponavljajo, je:

$$^{(p)}C_n^r=C_{n+r-1}^r$$

$$^{(p)}C_6^3=C_{6+3-1}^3=C_8^3=\binom{8}{3}=56$$

Zapišimo splošno pravilo za računanje števila kombinacij.

Kombinacije n elementov reda r (brez ponavljanja) so vse podmnožice z močjo r neke končne množice z močjo n. Njihovo število je:

$$\mathbf{C}_n^r = \frac{\mathbf{V}_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

Število kombinacij n elementov reda r po navadi označimo z **binomskim simbolom**:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

ZGLEDI

1. $\binom{8}{2} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{2!\cdot \cancel{6!}} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$

Iz zgleda se vidi, da vrednost binomskega simbola najlaže izračunamo tako, da zmnožimo toliko faktorjev od n navzdol po 1, kolikor je r, in to število delimo z $r!$.

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot r}$$

2. $\binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$

3. $\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-(n-2))!\cdot (n-2)!} = \frac{n!}{2!\cdot (n-2)!} = \frac{n\cdot (n-1)\cdot (n-2)!}{2!\cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

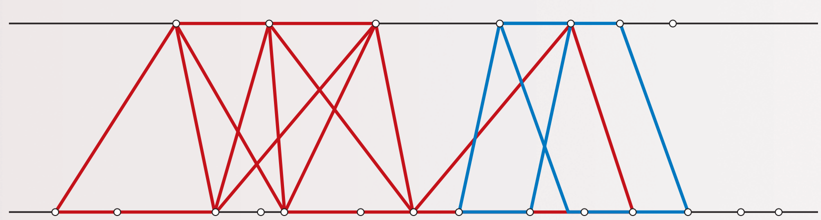
4. V trgovini z igračami sestavljajo za podjetje darilne pakete s po 5 igračami. Ali lahko dobi vsak od 250 otrok zaposlenih drugačen paket, če imajo v trgovini na voljo 10 različnih igrač?

Iz množice z 10 elementi sestavljajo podmnožice s po 5 elementi, torej moramo izračunati število kombinacij 10 elementov reda 5.

$$\mathrm{C}_{10}^5 = \binom{10}{5} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 252$$

Sestavijo lahko 252 različnih darilnih paketov, torej lahko vsak otrok dobi drugačen paket.

5. V ravnini narišemo vzporednici; na prvi je 7 točk in na drugi 14. Izračunajmo, koliko trikotnikov in koliko štirikotnikov določajo te točke.



Trikotnik je določen s tremi nekolinearnimi točkami; tako lahko iz prve premice izbiramo po dve točki za osnovnico in tretjo točko iz druge premice ali obratno. V prvem primeru osnovnico določimo na C_7^2 in vrh trikotnika na 14 načinov, v drugem primeru pa osnovnico na C_{14}^2 in vrh na 7 načinov. Vseh trikotnikov je zato

$$N_1 = C_7^2 \cdot 14 + C_{14}^2 \cdot 7 = \binom{7}{2} \cdot 14 + \binom{14}{2} \cdot 7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 14 + 14 \cdot 13 \cdot 7}{2} = 931$$

Za štirikotnike moramo izbirati po dve točki iz prve in po dve točki iz druge premice:

$$N_2 = C_7^2 \cdot C_{14}^2 = \binom{7}{2}\binom{14}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} = 1911$$

6. Na izpitu iz matematike lahko dijaki izmed 5 strukturiranih nalog izberejo 3 naloge. Koliko različnih kompletov nalog imajo dijaki na voljo?

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

Dijaki imajo na voljo 10 kompletov nalog.

7. Med 25 starši (15 mam in 10 očetov) na roditeljskem sestanku mora razrednik za svet staršev izbrati po dva predstavnika vsakega spola.

a) Na koliko načinov lahko naredi izbor?

b) Kaj pa če ena od mam ne more biti izbrana?

a) $\binom{15}{2}\binom{10}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 4725$

b) Iz množice 14 mam (ena od 15 mam ne more biti izbrana) lahko razrednik naredi $\binom{14}{2}$ podmnožic s po dvema mamama in $\binom{10}{2}$ podmnožic s po dvema očetoma. Vseh izborov je po osnovnem izreku kombinatorike zato

$$n = \binom{14}{2}\binom{10}{2} = 91 \cdot 45 = 4095.$$

8. Martin bo počitnice preživel pri teti. Ker ima rad glasbo, s seboj vzame zgoščenke. V posebnem etuiju je prostora za 10 zgoščenk. Na koliko načinov lahko napolni etui, če izmed 15 zgoščenk s klasično glasbo izbere 7 zgoščenk, med katerimi bodo tudi Bachovi Brandenburški koncerti, izmed 10 zgoščenk z džezovsko glasbo 2 in izmed 5 zgoščenk s popularno glasbo eno zgoščenko?

Martin mora izmed 30 zgoščenk izbrati podmnožice z 10 zgoščenkami z dodatnimi pogoji. Tako iz množice s 14 elementi sestavlja podmnožice s 6 elementi (ker je ena zgoščenka s klasično glasbo že določena), iz množice z 10 elementi podmnožice z 2 elementoma in končno mora izbrati še en element iz množice s 5 elementi.

$$n = \binom{14}{6} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5}{1}$$

Martin se bo težko odločil, saj ima kar 675 675 možnosti.

9. Fizikalni kabinet je opremljen s 3 računalniki. Na koliko načinov lahko naenkrat dela 6 dijakov, če sta pri vsakem računalniku dva dijaka?

Dijake moramo po dva in dva porazdeliti na tri računalniška mesta.

Najprej izmed 6 dijakov delamo podmnožice po 2, potem izmed štirih podmnožice po 2, v tretjem koraku že dobimo dva dijaka za tretje mesto.

$$N=\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 1}{2}=90$$

Lastnosti binomskih simbolov

Računanje števila kombinacij bo močno vezano na uporabo binomskih simbolov.

Poglejmo in dokažimo nekaj njihovih lastnosti.

- Iz množice z n elementi lahko na en sam način izberemo 0 elementov (vsaka množica ima le eno prazno podmnožico), zato velja:

  $$\binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{0}}=1$$

  Dokaz:

  $$\binom{n}{0}=\frac{n!}{(n-0)!\cdot 0!}=\frac{n!}{n!\cdot 1}=1$$

- Iz množice z n elementi lahko na n načinov izberemo po 1 element (vsaka množica ima n podmnožic z močjo 1):

  $$\binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{1}}=n$$

  Dokaz:

  $$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{1\cdot(n-1)!}=\frac{n}{1}=n$$

- **Simetričnost:** $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}}=\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n-r}}$

  Dokaz:

  $$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}=\frac{n!}{(n-(n-r))!\cdot(n-r)!}=\binom{n}{n-r}$$

  Posledica: $\binom{n}{n}=\binom{n}{n-n}=\binom{n}{0}=1$

  Množica z n elementi ima le eno podmnožico moči n.

- **Aditivnost:** $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

Dokaz:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} + \frac{n!}{(n-(r+1))!\cdot(r+1)!} = \frac{n!}{(n-r-1)!r!}\cdot\left(\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r+1}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(n-r-1)!r!}\cdot\frac{r+1+n-r}{(n-r)(r+1)} = \frac{n!}{(n-r-1)!r!}\cdot\frac{n+1}{(n-r)(r+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-r)!(r+1)!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!((n+1)-(r+1))!} = \binom{n+1}{r+1}$$

ZGLEDI

1. $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot2\cdot1} = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = \binom{5}{2}$

2. $\binom{9}{6} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} = \binom{9}{3}$

3. $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

4. $\binom{200}{199} = \binom{200}{1} = 200$

5. $\binom{200}{197} + \binom{200}{198} = \binom{201}{198} = \binom{201}{3} = \frac{201\cdot200\cdot199}{1\cdot2\cdot3} = 1\,333\,300$

NALOGE

327. Tajnica je napisala 12 pisem, potem pa je ugotovila, da ima samo še štiri znamke. Na koliko načinov lahko odpošlje štiri pisma?

328. V galeriji so naprodaj 4 kipci in 5 platen. Na koliko načinov lahko kupimo dva eksponata?

329. V ravnini je 7 vzporednic in 3 pravokotnice na te vzporednice. Koliko pravokotnikov določajo te premice?

330. Jure ima 7 prijateljev. Na koliko načinov lahko 5 od njih povabi na večerjo?

331. Na koliko načinov lahko 5 od 8 kvadratkov pobarvamo s 5 različnimi barvami?

332. Okolica Ljubljane ponuja 6 izjemnih turističnih točk, vrednih ogleda. Turist se v Ljubljani mudi 4 dni. Na koliko načinov si lahko organizira enodnevne izlete, če si za to vzame 3 dneve?

333. Koliko različnih sadnih solat s 6 vrstami sadja lahko pripravimo, če imamo na razpolago 10 vrst sadja?

334. Sodniška porota je sestavljena iz 8 porotnikov. Izračunajte, koliko različnih porot lahko sestavijo iz 12 porotnikov. Ali se sestava porote lahko ponovi, če ima sodišče na leto 250 obravnav?

335. Izmed 5 odličnih študentk in 4 odličnih študentov morajo izbrati 6-člansko ekipo, v kateri bosta vsaj dva študenta in vsaj dve študentki. Na koliko načinov se da?

336. Koliko podmnožic množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ vsebuje 6 kot največje število?

337. Na turnirju je prijavljenih 15 šahistov. Koliko bo vseh partij, če vsak igra z vsakim le po eno partijo?

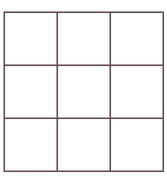
338. Babica ima v vrečki še sedem različnih bonbonov. Na koliko načinov si lahko Mojca izbere pet bonbonov?

339. Koliko daljic določa sedem točk v ravnini, če so vsake tri točke nekolinearne?

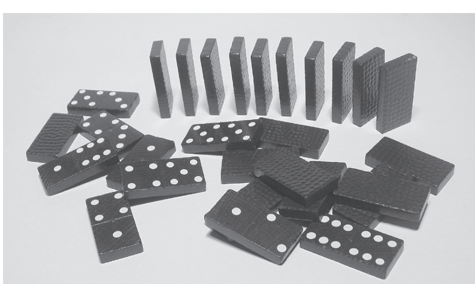
340. Koliko trikotnikov določajo oglišča konveksnega devetkotnika?

341. Na krožnici izberemo 7 točk. Koliko tetivnih 4-kotnikov lahko narišemo?

342. Na koliko načinov lahko s črno prebarvamo 3 od 9 belih kvadratkov?



343. Koliko ploščic za igro domino potrebujemo, če je na domini lahko najmanj nič in največ šest pik?



344. Trgovina z živili *Mravljica* ima šest zaposlenih, vendar morajo biti hkrati v službi le trije. Lastnika trgovine zanima, ali je mogoče, da delajo tri tedne zapored različne trojke zaposlenih (trgovina je odprta šest dni v tednu).

345. Štiričlanska družina Sever in šestčlanska družina Jug sta odšli na gledališko predstavo. Dobili so dve loži za 3 osebe in eno ložo za 4 osebe. Na koliko načinov se lahko razporedijo na sedeže, če stoli v posamezni loži niso oštevilčeni in
a) naj člani iste družine sedijo skupaj,
b) ni posebnih zahtev, kako naj sedijo,
c) naj starši sedijo v loži za 4 osebe?

346. Izračunajte.
a) $\binom{8}{6}$
b) $\binom{200}{197}$
c) $\binom{14}{4}+\binom{14}{5}$
č) $\binom{49}{9}+\binom{49}{10}$

347. Poenostavite.
a) $\binom{n+2}{n-1}$
b) $\binom{n+1}{n}$
c) $\binom{n+1}{k+1}:\binom{n}{k}$
č) $\binom{n}{4}-\binom{n-1}{n-4}$

348. Rešite enačbe.
a) $C_{n+1}^{n}=21$
b) $C_{n+2}^{3}=n\cdot C_{n+1}^{1}$
c) $\binom{n+1}{2}=\binom{n+1}{6}$

349. Ugotovite, koliko je C_{n+1}^{r+1}, če je $C_n^r=495$ in $C_n^{r+1}=220$.

350. Na koliko načinov lahko med 52 igralnimi kartami igralcu razdelimo osem kart?
a) Brez posebnih pogojev.
b) Igralec dobi vsaj en pik.
c) Igralec dobi natanko enega kralja.
č) Igralec dobi tri desetke.
d) Igralec dobi pol rdečih in pol črnih kart.
e) Igralec dobi samo »polne« karte, to so asi, kralji, dame, fanti in desetke.
f) Igralec dobi samo kare.
g) Igralec dobi vse karte iste barve (ali samo pike ali samo križe ali samo srca ali sam kare).

351. V posodi je 5 belih, 4 rdeče in 3 modre kroglice. Na koliko načinov lahko iz posode vzamemo hkrati
a) tri raznobarvne kroglice,
b) tri kroglice enake barve,
c) tri kroglice, od katerih sta dve enake barve?

352. Politične stranke ABC, BTC in SPC se potegujejo za mesta v parlamentarni komisiji. Stranka ABC ima 5 kandidatov, stranka BTC 3 in stranka SPC 6 kandidatov. Na koliko načinov lahko v parlamentarno komisijo izvolijo po dva predstavnika iz vsake stranke?

353. Študent se je od 25 vprašanj naučil odgovore na 20 vprašanj. Na koliko načinov lahko naredi izpit, če mora od treh naključno izbranih vprašanj odgovoriti na vsaj dve vprašanji?

354. Od desetih deklet v razredu imajo štiri modre oči. Koliko trojic deklet lahko izberemo iz razreda, če imata med izbranimi
a) natanko dve modre oči,
b) vsaj dve modre oči,
c) največ dve modre oči?

355. Teta Klavdija je strastna igralka lota in med izbrane številke vedno vključi tudi število let svojih dveh otrok. Na koliko načinov lahko izpolni listek, če vsakič izžrebajo 7 številk izmed števil od 1 do 39?

356. Na koliko načinov se lahko za mizo usede 5 zakonskih parov, če naj
a) zakonci sedijo skupaj,
b) zakonci ne sedijo skupaj,
c) moški in ženske sedijo izmenično,
č) sedijo ženske skupaj in moški skupaj?

357. Po večerji, na kateri je bilo 6 zakonskih parov, je bilo treba pospraviti mizo in pomiti posodo. Koliko možnosti je, če delo opravijo 4 ljudje, in to
a) sami moški,
b) 2 zakonska para,
c) 2 moška in 2 ženski,
č) vsaj ena ženska med njimi,
d) natanko 1 moški med njimi,
e) vsi razen zakoncev Novak?

358. *Light show* v plesni dvorani sestavlja 7 reflektorjev različnih barv. Na koliko načinov je osvetljeno plesišče, če se prižigajo po 3 ali 4 reflektorji naenkrat?

359. Kabel za prenos podatkov je sestavljen iz 45 žic, ki so kodirane tako, da je vsaka žica obarvana z dvema različnima barvama. Najmanj koliko barv potrebujemo za kodiranje žic?

360. Koliko paralelogramov nastane, če tri vzporednice sekamo s sedmimi vzporednicami?

361. Na tomboli so pripravili 30 nagrad, od tega 12 denarnih. Prodali so vseh 100 srečk. Na koliko načinov lahko kupimo 3 srečke, da
a) bomo zadeli 3 denarne nagrade,
b) ne bomo zadeli denarne nagrade, ampak le eno blagovno,
c) sploh ne bomo zadeli,
č) bomo zadeli vsaj eno blagovno (ne denarno) nagrado,
d) bomo zadeli eno denarno in eno blagovno nagrado?

362. Na koliko načinov lahko s 5 svetilkami osvetlimo sobo?

363. Na koliko načinov lahko za neko delo izberemo vsaj dva od šestih ljudi?

364. Na daljici s krajiščema A in B narišemo še pet točk. Koliko daljic je določenih z vsemi točkami?

365. Med desetimi funkcionarji so štiri ženske in šest moških. Koliko je vseh tričlanskih delegacij, v katerih
a) sta dve ženski,
b) sta vsaj dva moška,
c) je vsaj ena ženska?

366. V razredu je 21 dijakinj in 11 dijakov. Profesor po navadi vpraša tri na šolsko uro. Na koliko načinov lahko to stori?
a) Med vprašanimi mora biti tudi Gašper.
b) Vprašan mora biti vsaj en dijak.
c) Med vprašanimi morata biti dve dijakinji.
č) Med vprašanimi morata biti dijak in dijakinja.

367. Koliko zlitin lahko naredimo iz štirih različnih kovin (lahko sestavljamo enake količine po 2, 3 ali 4 kovine)?

368. Koliko barvnih mešanic nastane iz treh osnovnih barv, če mešamo enake količine dveh ali treh barv?

369. Iz skupine 12 študentov moramo izbrati tri tako, da bo med njimi vsaj en fant in vsaj eno dekle. Izračunajte, kolikšna je absolutna razlika med številom fantov in deklet, če je vseh možnosti 160.

370. Koliko pravokotnikov lahko narišemo na običajni šahovski deski? Stranice pravokotnikov potekajo po črtah šahovnice.

371. Študent mora odgovoriti vsaj na 8 od 10 vprašanj, da naredi izpit. Koliko je vseh možnosti? Koliko je možnosti, če mora odgovoriti na prva tri vprašanja?

372. Na koliko načinov lahko med petimi fanti in tremi dekleti izberemo štiri in jih posedemo na označene stole?

373. V 4. a-razredu imajo razredne volitve, na katerih izbirajo 6 predstavnikov. Na koliko načinov lahko izberejo razredno upravo, če
a) je v razredu 11 deklet in 23 fantov,
b) mora biti v njej tretjina deklet?

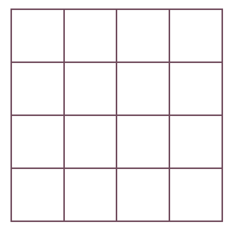
374. V 4. b-razredu je 12 fantov in 20 deklet. Na koliko načinov lahko izberejo tričlansko delegacijo, v kateri bosta vsaj dve dekleti?

375. V 4. c-razredu je 33 dijakov. Profesor naključno pokliče tri dijake. Koliko je vseh izborov, če mora biti med njimi tudi Luka?

376. Na koliko načinov lahko za neko delo izberemo vsaj štiri od šestih ljudi?

377. Posvetovalno telo univerze je sestavljeno iz treh profesorjev in dveh študentov. Na koliko načinov so lahko izvoljeni, če je na univerzi zaposlenih 25 profesorjev, študente pa volijo med 20 kandidati?

378. Naključno izberemo dva kvadratka iz narisane mreže. Na koliko načinov se da, če kvadratka ne smeta imeti skupne stranice?



379. Iz kupa 32 igralnih kart naključno potegnemo 3 karte. Koliko je vseh izborov, da bodo izbrane
a) vse rdeče,
b) iste barve (ali križ, ali pik, ali kara, ali srce),
c) iste vrednosti,
č) vsaj en as,
d) dva kralja,
e) tri desetke,
f) polne karte,
g) piki ali dame?

Binomski izrek

Binomski simboli so tesno povezani z naravnimi potencami binoma (od tod njihovo ime). Za $n=2$ in $n=3$ smo jih spoznali v knjigi *Linea nova*, str. 26.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= 1a^2+2ab+1b^2\\
(a+b)^3 &= 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3
\end{aligned}
$$

Koeficiente v razvoju potenc binoma lahko zapišemo v trikotno shemo, ki ji rečemo Pascalov trikotnik:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Števila iz Pascalovega trikotnika so izračunani binomski simboli, zato Pascalov trikotnik lahko gradimo naprej z upoštevanjem lastnosti binomskih simbolov:

$$\binom{1}{0}=1,\ \binom{1}{1}=1$$

$$\binom{2}{0}=1,\ \binom{2}{1}=2,\ \binom{2}{2}=1$$

$$\binom{3}{0}=1,\ \binom{3}{1}=3,\ \binom{3}{2}=3,\ \binom{3}{3}=1$$

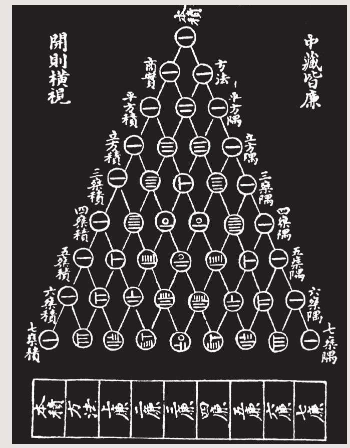
$$\binom{4}{0}=1,\ \binom{4}{1}=4,\ \binom{4}{2}=6,\ \binom{4}{3}=4,\ \binom{4}{4}=1$$

$$\binom{5}{0}=1,\ \binom{5}{1}=5,\ \binom{5}{2}=10,\ \binom{5}{3}=10,\ \binom{5}{4}=5,\ \binom{5}{5}=1$$

$$\binom{6}{0}=1,\ \binom{6}{1}=6,\ \binom{6}{2}=15,\ \binom{6}{3}=20,\ \binom{6}{4}=15,\ \binom{6}{5}=6,\ \binom{6}{6}=1$$

Vsa števila na robu Pascalovega trikotnika so enaka 1 (prva od lastnosti), vsako drugo število v Pascalovem trikotniku pa je vsota dveh nad njim (aditivnost). Trikotnik ima tudi simetrijsko os, ki gre skozi njegov vrh, kar je posledica simetričnosti binomskih simbolov.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$



Številski trikotnik se po Pascalu imenuje zato, ker je Pascal o njem napisal razpravo *Traite de Triangle Arithmetique* (*Razprava o aritmetičnem trikotniku*), ki je izšla leta 1665, že po njegovi smrti. Bolj pošteno bi to številsko shemo imenovali kitajski trikotnik, saj ga je do 7. vrstice poznal že Jang Hui v 13. st., do 9. vrstice pa Ču Ših Čih, ki je razpravo o njem napisal leta 1303. Pascalov trikotnik v sebi skriva še druge zanimive lastnosti: naravna, trikotniška in tetraederska števila, Fibonaccijevo zaporedje idr.

$$\binom{6}{1}+\binom{6}{2}=\binom{7}{2}$$

$$\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}$$

S poznavanjem koeficientov iz Pascalovega trikotnika lahko nadaljujemo računanje zaporednih potenc binoma

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$
$$\dots$$

in na splošno

$$\boldsymbol{(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n}$$

in bolj na kratko

$$\boldsymbol{(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r}.$$

Zadnjima identitetama rečemo tudi **binomski izrek**.

Dokažemo ga z matematično indukcijo.

1. Za $n=1$ se o veljavnosti izreka ni težko prepričati:

$$(a+b)^1=\binom{1}{0}a^1b^0+\binom{1}{1}a^0b^1=a+b$$

2. V drugem koraku moramo iz privzetka, da izrek velja za naravno število n, pokazati, da velja tudi za naravno število $n+1$, s čimer bo malo več dela.

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)^n(a+b)=$$

$$=\left(\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n\right)(a+b)=$$

$$=\binom{n}{0}a^{n+1}b^0+\binom{n}{1}a^nb^1+\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\dots+\binom{n}{n-1}a^2b^{n-1}+\binom{n}{n}a^1b^n+$$

$$+\binom{n}{0}a^nb^1+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2+\binom{n}{2}a^{n-2}b^3+\dots+\binom{n}{n-1}a^1b^n+\binom{n}{n}a^0b^{n+1}=$$

$$=\binom{n}{0}a^{n+1}b^0+\left(\binom{n}{1}a^nb^1+\binom{n}{0}a^nb^1\right)+\left(\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2\right)+\dots$$

$$+\left(\binom{n}{n}a^1b^n+\binom{n}{n-1}a^1b^n\right)+\binom{n}{n}a^0b^{n+1}=$$

Ko upoštevamo aditivnost binomskih simbolov in upoštevamo enakosti

$$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}\ \text{in}\ \binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1},$$

sledi

$$=\binom{n+1}{0}a^{n+1}b^0+\binom{n+1}{1}a^nb^1+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2+\dots+\binom{n+1}{n}a^1b^n+\binom{n+1}{n+1}a^0b^{n+1}$$

in izrek je dokazan.

ZGLEDI

1. Zapišimo razvoj potence binoma $(x-\sqrt{y})^6$.

Ko sledimo izreku, dobimo:

$$\begin{aligned}(x-\sqrt{y})^6 &= \binom{6}{0}x^6(-\sqrt{y})^0+\binom{6}{1}x^5(-\sqrt{y})^1+\binom{6}{2}x^4(-\sqrt{y})^2+\\ &\quad+\binom{6}{3}x^3(-\sqrt{y})^3+\binom{6}{4}x^2(-\sqrt{y})^4+\binom{6}{5}x^1(-\sqrt{y})^6+\\ &\quad+\binom{6}{6}x^0(-\sqrt{y})^6=\\ &= x^6-6x^5\sqrt{y}+15x^4y-20x^3\sqrt{y^3}+15\,x^2y^2-6x\sqrt{y^5}+y^3\end{aligned}$$

2. Poiščimo 7. člen v razvoju potence binoma $(a+2b)^{11}$.

Splošni člen razvoja binoma je $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$. Prvi člen ima $r=0$, zato je v našem primeru treba vzeti $r=6$.

$$k_6=\binom{11}{6}a^5(2b)^6=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}a^5 2^6 b^6=29\,568\;a^5b^6$$

3. Binomski izrek nam pomaga pri izračunu števila vseh podmnožic dane množice. Denimo, da ima množica 15 elementov. Koliko podmnožic ima?

Že iz poglavja o kombinacijah vemo, da ima množica z n elementi $\binom{n}{r}$ podmnožic z močjo r. Vseh podmnožic množice s 15 elementi je torej $\binom{15}{0}+\binom{15}{1}+\binom{15}{2}+\ldots+\binom{15}{15}$. Ko se spomnimo binomskega izreka, vidimo, da je treba vzeti $a=b=1$. Sledi rezultat

$$\binom{15}{0}+\binom{15}{1}+\binom{15}{2}+\ldots+\binom{15}{15}=(1+1)^{15}=2^{15}.$$

Nalogo lahko posplošimo v trditev: Množica z n elementi ima 2^n podmnožic; ali še drugače: če je $m(\mathcal{A})=n$, je $m(\mathcal{P}\mathcal{A})=2^n$.

4. Izračunajmo vrednost koeficienta pri x^4 v izračunani potenci $(2x-3)^{12}$.

$$(2x-3)^{12}=\sum_{r=0}^{12}\binom{12}{r}(2x)^{12-r}(-3)^r$$

$12-r=4;\ r=8$

$$a_9=\binom{12}{8}(2x)^4(-3)^8=\binom{12}{4}2^4 3^8 x^4=51\,963\,120\;x^4$$

Iskani koeficient je 51 963 120.

NALOGE

380. Izračunajte z uporabo Pascalovega trikotnika ali z binomskim izrekom.

a) $(b+\sqrt{2})^4$
b) $(a+2)^5$
c) $(x+3y)^6$
č) $(u-3v)^7$
d) $(2+\sqrt{2})^4$
e) $(1-\mathrm{i})^5$
f) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i)^6$
g) $(2x-3y)^5$

381. Zapišite.

a) 7. člen v razvoju binoma $(x+2y)^{10}$
b) 6. člen v razvoju binoma $(2x+\sqrt{y})^9$
c) 11. člen v razvoju binoma $(\frac{2}{3}-a^2)^{15}$
č) 13. člen v razvoju binoma $(\sqrt[3]{3b}+\sqrt[6]{c})^{18}$
d) 10. člen v razvoju binoma $(\sqrt[5]{9a^2}+\sqrt[3]{3a})^{14}$
e) 11. člen v razvoju binoma $(\sqrt[3]{2d}-\sqrt{3e})^{13}$

382. Izračunajte koeficient potence:

a) x^3 v potenci $(x+3)^5$
b) y^4 v $(5-y^2)^3$
c) x^5 v $(x-3)^7$
č) x^4 v $(x+2)^8$
d) x^6 v $(x^2+4)^{10}$

383. Izračunajte.

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$
b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots-\binom{n}{n}$; $n=2k-1,\ k\in\mathbb{N}$
c) $\binom{100}{0}+\binom{100}{1}+\binom{100}{2}+\ldots+\binom{100}{100}$
č) $\binom{200}{0}-\binom{200}{1}+\binom{200}{2}-\ldots+\binom{200}{200}$

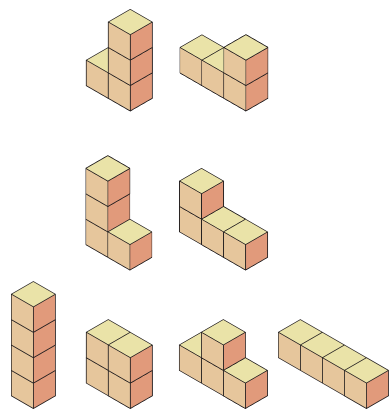
384. Izračunajte vrednost števila r in n, da bo veljalo $\binom{13}{5}+2\binom{13}{6}+\binom{13}{7}=\binom{n}{r}$.

385. Dokažite enakost: $\binom{n}{1}+6\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}=n^3$.

386. Na koliko načinov lahko šef izmene izmed 10 delavcev izbere vsaj 2 delavca?

387. S Pascalovim trikotnikom ugotovite, katero število n reši enačbo $C_n^5=1287$.

388. Štiri kocke na vse različne načine postavljamo v stolpce in ugotovimo, da lahko to naredimo na 8 načinov. Izračunajte število stolpcev, če imamo na razpolago 5, 6 ali 7 kockic. Ali lahko najdete splošno pravilo za n kockic?



Kombinatorika in preslikave

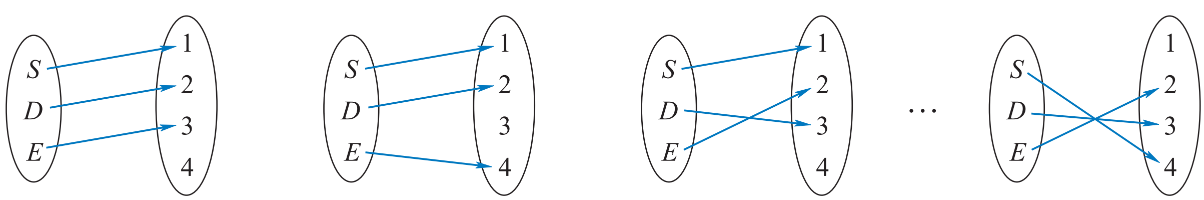
Na kombinatorične pojme lahko gledamo tudi z vidika preslikav.

Za začetek izberimo *variacije brez ponavljanja* in si zamislimo zgled, v katerem iz prvih štirih naravnih števil sestavljamo trimestna števila, pri katerih se števke ne smejo ponavljati. Za vsako od trimestnih števil moramo izbrati stotico (S), desetico (D) in enico (E), števke pa se ne smejo ponavljati.

S	D	E
1	2	3
1	2	4
1	3	2
1	3	4
…	…	…
4	3	2

Lahko pa rečemo tudi drugače: vsako od razporeditev treh od štirih števk lahko zapišemo kot preslikavo množice $\mathcal{A}=\{S, D, E\}$ v množico $\mathcal{B}=\{1, 2, 3, 4\}$, pri čemer je vsak element iz množice $\mathcal{B}$ slika kvečjemu enega elementa iz množice $\mathcal{A}$.

Preslikava iz $\mathcal{A}$ v $\mathcal{B}$ je injektivna, če se različna originala preslikata v različni sliki oz. če je vsak element iz množice $\mathcal{B}$ slika kvečjemu enega elementa iz množice $\mathcal{A}$.

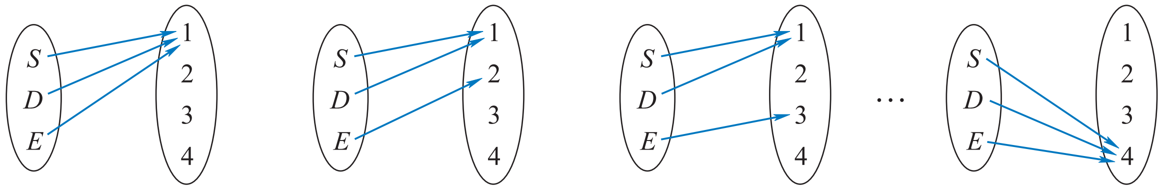


Variacije brez ponavljanja so očitno injektivne preslikave, zato lahko sklepamo, da je med množico $\mathcal{A}$ **z močjo *r*** in množico $\mathcal{B}$ **z močjo *n***, pri čemer je $r<n$, mogočih natančno

$N = V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ **injektivnih preslikav**.

Pri *variacijah s ponavljanjem* vzemimo za zgled kar isti množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ in iz prvih štirih naravnih števil sestavimo vsa možna trimestna števila.

S	D	E
1	1	1
1	1	2
1	2	1
2	1	1
…	…	…
4	4	3
4	4	4



Vseh variacij s ponavljanjem 4 elementov reda 3 je $4^3 = 64$.

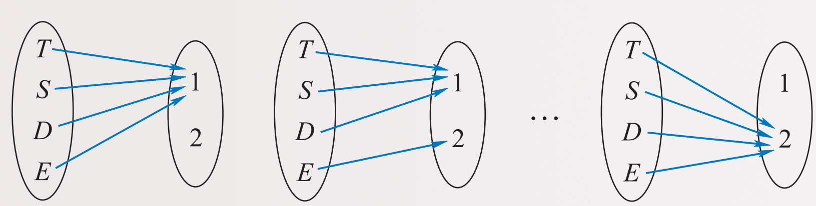
Na splošno je **vseh preslikav** iz končne množice $\mathcal{A}$ **z močjo *r*** v končno množico $\mathcal{B}$ **z močjo *n*** ravno $\boldsymbol{n^r}$.

Pri variacijah s ponavljanjem r ni vedno manjši od n.

ZGLED

Za zgled poglejmo vse preslikave iz $\mathcal{A} = \{T, S, D, E\}$ (T pomeni tisočico) v $\mathcal{B} = \{1, 2\}$. Kombinatorično: koliko je vseh štirimestnih števil iz števk 1 in 2?

T	S	D	E
1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	2	1
1	2	1	1
2	1	1	1
1	1	2	2
1	2	2	1
2	2	1	1
1	2	1	2
2	1	2	1
2	1	1	2
2	2	2	1
2	2	1	2
2	1	2	2
1	2	2	2
2	2	2	2



Od vseh 16 možnih preslikav med množicama $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ so vse, razen prve in zadnje v preglednici, surjektivne preslikave.

Preslikava iz množice $\mathcal{A}$ v množico $\mathcal{B}$ je surjektivna, če je množica $\mathcal{B}$ zaloga vrednosti preslikave oz. če je vsak element iz $\mathcal{B}$ slika vsaj enega elementa iz množice $\mathcal{A}$. Pogoj za surjektivno preslikavo je: $m(\mathcal{A}) \geq m(\mathcal{B})$.

Poglejmo še permutacije n elementov brez ponavljanja oz. vse možne razporeditve po n elementov dane množice $\mathcal{A}$.

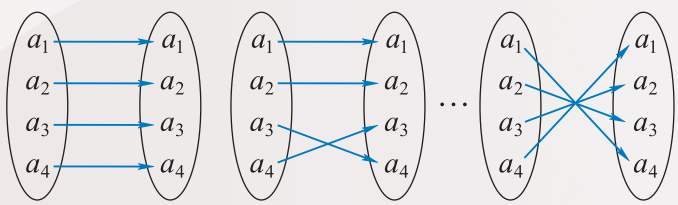
V tem primeru gre za **bijektivne preslikave** končne množice $\mathcal{A}$ nase: vseh teh preslikav pa je $n!$.

ZGLED

Naj bo množica $\mathcal{A}=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

I	II	III	IV
a_1	a_2	a_4	a_3
a_1	a_2	a_3	a_4
…	…	…	…
a_4	a_3	a_2	a_1

Vseh bijektivnih preslikav $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je $4! = 24$.



Preslikava $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je bijektivna, če je injektivna in surjektivna hkrati oz. če je vsak element iz množice $\mathcal{B}$ slika natanko enega elementa iz množice $\mathcal{A}$.

NALOGE

389. Napišite število vseh injektivnih preslikav iz množice {M, O, R, A, K} v množico štiričrkovnih besed $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Vsaj 10 besed, ki imajo pomen, tudi napišite.

390. Koliko variacij s ponavljanjem elementov množice {B, O, J} reda 4 je surjektivnih preslikav?

391. Koliko je vseh različnih preslikav iz množice $\mathcal{A}=\{1, 2, 3\}$ v množico $\mathcal{B}=\{a, b, c, č\}$?

392. Koliko je vseh različnih preslikav iz množice z dvema elementoma v množico s tremi elementi?

NE POZABI

Osnovni izrek kombinatorike ali pravilo produkta

Če sestavlja proces odločanja k zaporednih faz in je v prvi fazi možnih n_1 odločitev, v drugi fazi n_2 odločitev, …, v k-ti fazi n_k odločitev in je število izborov v posamezni fazi neodvisno od tega, katere možnosti so bile izbrane v prejšnjih fazah, potem je število vseh sestavljenih odločitev:

$$N = n_1 \,.\, n_2 \,.\, \ldots \,.\, n_k$$

Pravilo vsote

Če izbiramo med n_1 možnostmi iz prve množice izborov ali n_2 možnostmi iz druge množice izborov ali … ali n_k možnostmi iz k-te množice izborov in so izbori iz vsake množice nezdružljivi z izbori iz drugih množic, potem je vseh izborov:

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

Permutacije (brez ponavljanja) n (različnih) elementov so vsi razporedi teh n elementov (vrstni red elementov je torej odločilnega pomena) in teh razporedov je:

$$\mathrm{P}_n = n!$$

Permutacije n elementov brez ponavljanja množice $\mathcal{A}$ oz. vsi možni razporedi po n elementov dane množice $\mathcal{A}$ so bijektivne preslikave končne množice $\mathcal{A}$ nase: vseh teh preslikav je $n!$.

Permutacije s ponavljanjem n elementov, od katerih se eden ponavlja k_1-krat, drugi k_2-krat, tretji k_3-krat in tako naprej, $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = n$, so vsi razporedi n elementov, pri čemer se našteti elementi v razporedu lahko pojavijo večkrat. Vseh takih razporedov je:

$$\mathrm{P}_n^{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$$

Variacije brez ponavljanja n elementov reda r so razporedi po r elementov iz množice, ki ima n (različnih) elementov. Vseh je:

$$\mathrm{V}_n^r = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Variacije brez ponavljanja n elementov reda r so injektivne preslikave iz množice $\mathcal{A}$ z močjo r v množico $\mathcal{B}$ z močjo n in je $r < n$, zato je med tema množicama $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ mogočih natančno

$N = \mathrm{V}_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ injektivnih preslikav.

NE POZABI

Variacije s ponavljanjem *n* elementov reda *r* so vsi razporedi po r elementov iz množice z n elementi, pri čemer se elementi v razporedu lahko ponavljajo. Vseh je:

$$^{(p)}\mathbf{V}_n^r = n^r$$

Variacije s ponavljanjem n elementov reda r so vse preslikave iz končne množice $\mathcal{A}$ z močjo r v končno množico $\mathcal{B}$ z močjo n. Vseh teh preslikav je n^r.

Kombinacije brez ponavljanja *n* elementov reda *r* so vse podmnožice z močjo r neke končne množice z močjo n, kjer se elementi v podmnožicah ne ponavljajo. Njihovo število je:

$$\mathbf{C}_n^r = \frac{\mathbf{V}_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \binom{n}{r}$$

Binomski simbol:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot r}$$

Binomski izrek:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n =$$
$$= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

Lastnosti binomskih simbolov:

1. $\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{n} = 1$

2. **Simetričnost:** $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

3. **Aditivnost:** $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

VERJETNOSTNI RAČUN

- Osnove verjetnostnega računa
- Verjetnost dogodka
- Računanje verjetnosti
- Verjetnost produkta dogodkov
- Popolna verjetnost
- Normalna porazdelitev

Pravilno geometrijsko telo heksaeder z rahlo obrušenimi ogli in poslikano s pikami je v zgodovini ljudem prineslo veliko užitkov, a tudi veliko gorja. Marsikdo je v igralni vročici stavil vse in – dobil ali izgubil. Igralna kocka je v 16. st. postala tudi predmet proučevanja matematikov in rodila novo matematično disciplino – verjetnostni račun.

Kipci iz časa dinastije Han (260 pr. Kr. do leta 220) prikazujejo igralce pri neki igri na srečo.

Iznajdba igralne kocke je zavita v skrivnost, kar ni čudno, saj naj bi jo poznali in se zabavali z njo že pred več kot 5000 leti. Res še ni imela natančno take oblike kot danes, imela pa je isto funkcijo. Najstarejše predhodnice današnjih igralnih kock so *astragaliji*: drobne kosti gležnja dvoprstega kopitarja. Te kosti imajo 6 stranskih ploskev, od katerih so štiri ravne in so jih po vsej verjetnosti uporabljali za igro. Astragalije so uporabljali Stari Egipčani že 3500 let pr. Kr. Najpogosteje so uporabljali ovčje kosti, najbolj cenjene pa so bile kosti antilope.

Po Platonu naj bi kocko iznašli bogovi, bolj natančno egipčansko božanstvo Tevta. Po drugi razlagi naj bi jo iznašel Palamed, grški junak pred Trojo, ki je bil znan po izredni bistroumnosti. Nje-govi vojaki naj bi si med obleganjem Troje krajšali čas z »metanjem kosti«. Grški zgodovinar Herodot pripisuje iznajdbo praktičnim Lidijcem, ki so z igro blažili hudo lakoto: vsak drugi dan so jedli, vmes pa so kockali.

Na starogrški vazi upodobljena vojaka pri igri

Igre na srečo so poznali tudi stari Rimljani. Igralne kocke so namreč našli med izkopavanji v tragično zasutih Pompejih in Herkulaneumu.

Rimski cesarji Avgust, Komod, Kaligula in Neron so bili obsedeni s kockanjem. Klavdij, strasten hazarder, je o tej igri celo napisal razpravo, vendar se ni ohranila. Bil je tako zasvojen, da je imel na svojem potovalnem vozu vgrajeno posebno mizo, ki je omogočala igranje tudi na najbolj slabih poteh, v eni sami igri pa je bil sposoben staviti tudi bajnih 400 000 sestercev.

Na meji med Anglijo in Škotsko so pri ostankih rimske utrdbe Vindolanda izkopali slonokoščeno igralno kocko, ki je vojakom krajšala čas.

Stenska slika prikazuje Rimljanki pri kockanju z astragalijem.

Iz vseh zgodovinskih poročil je vidno, da so kocko poleg preprostih ljudi z veseljem metali tudi vladarji. Norveški kralj Olaf Haraldsson je v 11. st. na kocko postavil kar celo kraljestvo, v času francoskega kralja Henrika IV. pa je dvor dobesedno norel zaradi te zabave.

Sčasoma so se pri igri pojavile tudi goljufije oz. obtežene kocke, zato je bilo kockanje v 16. st. kar sinonim za goljufanje. Leta 1545 je izšla razprava *Toxophilus*, v kateri je avtor Roger Ascham naštel in opisal vse mogoče metode goljufanja pri kockanju.

Na sliki so nekatere od 24 igralnih kock, ki so jih leta 1984 izkopali na bregu Temze in so bile last profesionalnega goljufa s konca 15. st. Od vseh kock je bilo 18 navrtanih in obteženih – 11 kock je imelo vdelane tri tanke žile živega srebra in so največkrat pokazale 5 ali 6 pik, sedem kock je bilo obdelanih tako, da so najpogosteje pokazale 1 ali 2 piki, od drugih šestih kock pa so bile tri kocke dvojno označene s 4, 5 in 6 pikami (tako kocko so imenovali high man), preostale tri pa so bile dvojno označene z 1, 2 in 3 pikami (low man).

Najbolj razvpito razpravo o kockanju je leta 1654 spodbudil francoski vitez in strastni hazarder Antoine Gombauld de Méré. Njegova posebnost je bila stava, da bo v štirih zaporednih metih kocke šestica padla vsaj enkrat. De Méré je pri tej stavi vztrajno dobival in kopičil bogastvo, dokler se stave ni naveličal in je spremenil pogoje igre. Odtlej je stavil, da bosta dve kocki v 24 zaporednih metih obe vsaj enkrat pokazali 6 pik. Po spremembi so se stvari začele obračati na slabše in kazalo je, da ga je sreča povsem zapustila. V obupu je pisal tedaj najbolj znanemu francoskemu matematiku Blaisu Pascalu, ta pa je s problemom seznanil tudi kolega Pierra de Fermata. Izračunala sta, da je bila verjetnost zmage v prvi stavi približno 0˙52 oz. 52-odstotna, v drugi stavi pa malo manj od polovice, zato je vitez dolgoročno oz. v številnih igrah izgubljal. Pascal se je v pismu Fermatu čez viteza

Blaise Pascal (1623–1662)

Pierre de Fermat (1601–1665)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

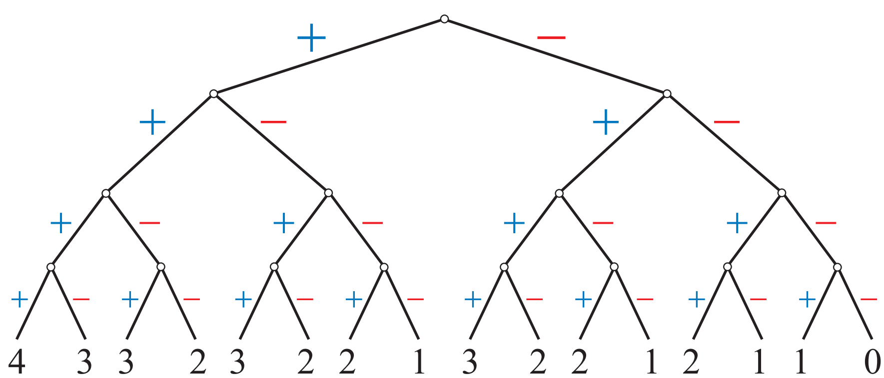
Pascalov trikotnik

obregnil z besedami: »Je zelo inteligenten, vendar je slab matematik; to pa je, kot veste sami, velika pomanjkljivost.«

Pascal in Fermat se nista ukvarjala le z računanjem verjetnosti zmage pri določenih stavah, ampak tudi s problemom delitve stave, če se igra iz kakršnegakoli razloga ni končala. S to nalogo so se že prej spopadali številni italijanski matematiki iz obdobja renesanse, vključno s Paciolijem, Cardanom in Tartaglio, vendar zadovoljive rešitve niso imeli. Fermat se je do rešitve skušal dokopati tako, da je preštel vse možne primere konca igre in potem ugotovil, kateri bi bili ugodni za posameznega igralca. Toda preračunavanje je postalo z naraščajočim številom iger zelo zamudno. Pascal je ubral drugo pot. V *Razpravi o aritmetičnem trikotniku* (*Traité du triangle arithmétique*) je pojasnil povezavo med števili aritmetičnega (Pascalovega) trikotnika in rešitvijo zastavljenega problema.

Recimo, da igralec A potrebuje za končno zmago dve igri, igralec B pa tri igre; potem eden od obeh igralcev zagotovo zmaga v najmanj 4 igrah. Pogledamo 4. vrstico Pascalovega trikotnika: 1, 4, 6, 4, 1 in izračunamo razmerje $(1+4+6):(4+1)=11:5$, v katerem morata igralca deliti nagrado. Razlaga je zelo preprosta, spada pa na področje kombinatorike.

Vseh mogočih izidov obeh igralcev pri štirih zaporednih igrah je 16. Iz kombinatoričnega drevesa je razvidno, da je od vseh možnosti le ena, pri kateri A zmaga v 4 igrah, v 4 primerih zmaga trikrat, v 6 primerih dvakrat, v 4 primerih enkrat in v 1 primeru vse 4 igre izgubi. Situacija za igralca B je ravno obrnjena: torej je od 16 možnih koncev 11 ugodnih za igralca A in 5 za igralca B, zato morata dobitek razdeliti v razmerju 11 : 5.



Kombinatorično drevo zadnjih štirih iger stave

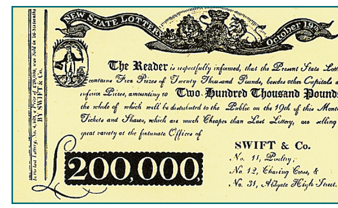
V času Pascala in Fermata so v zvezi s srečo oz. dobitki govorili le v razmerjih števil in še niso uporabljali besede *verjetnost*. Prvi, ki je verjetnost dogodka umestil med števili 0 in 1, je bil Jacob Bernoulli z razpravo o možnostih v igrah na srečo *Ars Conjectandi*, ki je izšla leta 1713, že po njegovi smrti. Posebno pomembna je bila njegova ugotovitev, da verjetnost dogodka lahko napovemo na podlagi njegove pogostosti v velikem številu ponovitev poskusa.

Bernoullijevo razpravo je za potrebe življenjskega zavarovanja prvi priredil protestantski begunec Abraham de Moivre, ki se je v Londonu preživljal z uradniškim delom.

Abraham de Moivre
(1667–1754)

Naslednja matematika, ki sta povzela de Moivrejevo delo, sta bila britanska duhovnika in velika nasprotnika iger na srečo Thomas Bayes in Richard Price. Slednji je bil svetovalec za življenjsko zavarovanje pri družbi Equitable, ki je tedaj uspešno poslovala.

Žrebanje v Angleški državni loteriji ob koncu 18. st.



Reklama za državno loterijo v Angliji

Na prelomu stoletja je verjetnostni račun prodrl tudi v fiziko in astronomijo, in to prek *teorije napak*, ki so jo razvili Adrien Marie Legendre (1752–1833), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) in Pierre Simone de Laplace (1749–1827). Laplace je leta 1812 postavil prvo definicijo verjetnostnega računa, zato ga nekateri imenujejo tudi *oče verjetnostnega računa*.

Poseben pospešek je razvoju nove teorije dal angleški botanik Robert Brown, ki je leta 1828 opazil nepravilno gibanje cvetnega prahu, pomešanega v vodi. To, kar se danes imenuje *Brownovo gibanje*, so znanstveniki razumeli šele leta 1905, ko je Albert Einstein s svojimi raziskavami pojasnil molekularno gibanje kot naključni pojav.

Za nadaljnji razvoj verjetnostne teorije se moramo zahvaliti predvsem ruski matematični šoli, katere glavni predstavniki so Pafnutij Lvovič Čebišev (1821–1894), njegov študent Andrej Andrejevič Markov (1856–1922) in Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987), ki je v razpravi *Temelji verjetnostne teorije* leta 1933 postavil aksiome verjetnostnega računa.

Osnove verjetnostnega računa

Vsako opazovanje, izvajanje ali merjenje slučajnega pojava imenujemo **poskus**. Poskus je torej zaporedje določenih dejavnosti, ki se vedno zgodijo v istem zaporedju.

Streljanje v tarčo opravimo vedno enako oz. si postopki sledijo v istem zaporedju: vzamemo lok, k tetivi prislonimo puščico, tetivo napnemo, pomerimo, zadržimo dih in sprožimo. Vsem tem postopkom lahko sledi še nekaj: tarčo lahko ali zadenemo v črno ali ne. Ta zadnji pojav je sicer močno odvisen od veščine strelca in nekaterih drugih zunanjih okoliščin, vendar bomo predvideli, da je zadetek tarče odvisen le od slučaja, zato ga imenujemo **slučajni dogodek.**

Nekateri dogodki (v glavnem gre za naravne pojave, dogovore in igre) se zgodijo ob vsaki ponovitvi poskusa: za nočjo pride dan, za ponedeljkom torek, pri igri poštene igralne kocke pade natanko eno število od 1 do 6, pri metu kovanca pade cifra ali mož … To so primeri t. i. **gotovih dogodkov**: ker so se (doslej) zgodili pri vsaki ponovitvi poskusa, predvidevamo, da se bodo zgodili vedno, tudi če bi poskus ponavljali v nedogled. Druga skrajnost so **nemogoči dogodki**: to so dogodki, ki se ne zgodijo, čeprav gre število ponovitev poskusa prek vseh meja.

Slučajne dogodke bomo označevali z velikimi črkami z začetka abecede: $A, B, C, D, E, \ldots$, gotov dogodek bo imel oznako G, nemogoč dogodek pa N. Poskus bomo vsakič označili s črko X.

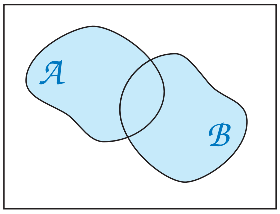
ZGLED

Pri metu poštene kocke se vedno zgodi eden od šestih možnih dogodkov E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 in E_6, kjer E_i pomeni, da je padlo i pik. Iz teh dogodkov lahko sestavljamo nove dogodke:

- dogodek A, da pri metu kocke pade liho število pik, je očitno zgrajen iz dogodkov E_1, E_3 in E_5,
- dogodek B, da je število pik manjše od 6, pa iz E_1, E_2, E_3, E_4, E_5,
- dogodek C, da je število pik deljivo s 3, je sestavljen iz dogodkov E_3 in E_6,
- dogodek D, da pade 7 pik, je nemogoč dogodek.

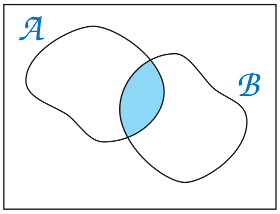
V naslednjih vrstah bomo spoznali, da lahko z dogodki računamo podobno kot z množicami in da so nam oznake operatorjev že znane. Tudi grafično bomo dogodke upodabljali z že znanimi Vennovimi diagrami.

1. **Vsoto dogodkov** A in B označimo z $A \cup B$: ta dogodek se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B; to pomeni: ali dogodek A ali dogodek B ali oba hkrati.



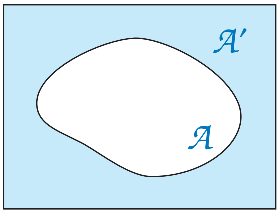
$A \cup B = B \cup A$
$A \cup A = A$
$A \cup G = G$
$A \cup N = A$

2. **Produkt dogodkov** $A \cap B$ se zgodi, če se zgodita dogodka A in B hkrati. Če se A in B ne moreta zgoditi hkrati, je njun produkt nemogoč dogodek – imenujemo ju **nezdružljiva dogodka**. Če produkt dogodkov A in B ni nemogoč dogodek, sta A in B **združljiva dogodka** (lahko se zgodita hkrati).



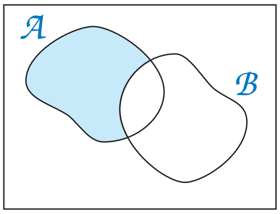
$A \cap B = B \cap A$
$A \cap A = A$
$A \cap G = A$
$A \cap N = N$

3. **Nasprotni dogodek** A' dogodka A se zgodi, če se A ne zgodi. Očitno veljata naslednji lastnosti: $A \cup A' = G$, $A \cap A' = N$.



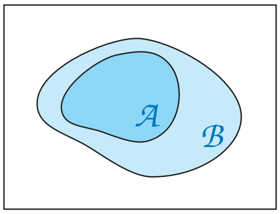
$(A')' = A$
$G' = N$
$N' = G$

4. **Razlika dogodkov** A in B (oznaka $A - B$) se zgodi, če se zgodi dogodek A in se hkrati ne zgodi dogodek B.



$A - B \neq B - A$
$A - B = A \cap B'$

5. Dogodek A je **način dogodka** B (oznaka $A \subset B$), če se vsakokrat, ko se zgodi A, zgodi tudi B.



$A = B$, če in samo če velja $A \subset B$ in hkrati $B \subset A$.

Operacije, ki smo jih definirali, si oglejmo na nekaj zgledih, kjer je poskus met poštene igralne kocke.

ZGLEDI

1. Dogodek A, da na kocki pade sodo število pik, ki je deljivo s 3, je produkt dogodkov

$A = A_1 \cap A_2$.

A_1: kocka pokaže sodo število pik

A_2: število pik na kocki je deljivo s 3

$A_1 \cap A_2 = E_6$; kocka pokaže 6 pik

2. Dogodek B, da kocka pokaže vsaj 4 pike, je vsota že znanih dogodkov $E_4 \cup E_5 \cup E_6$.

3. Dogodek A, da kocka pokaže praštevilo pik, in dogodek B, da kocka pokaže 4 ali 6 pik, sta nezdružljiva, kar se lepo vidi iz zapisa obeh dogodkov: $A = E_2 \cup E_3 \cup E_5$, $B = E_4 \cup E_6$; $A \cap B = N$.

4. Če ne pade sodo število pik, pade liho število pik, matematično zapisano: $A' = (E_2 \cup E_4 \cup E_6)' = E_1 \cup E_3 \cup E_5$.

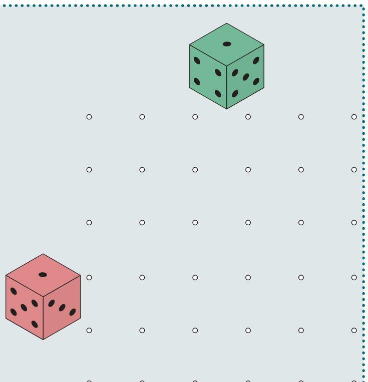
5. Dogodek A, da pade 5 pik, je način dogodka B, da pade liho število pik.

6. Dogodek A, da pade liho praštevilo pik, je produkt dogodkov A_1 in A_2.

A_1: pade liho število

A_2: pade praštevilo pik: $A = A_1 \cap A_2 = E_3 \cup E_5$

Vsi dogodki E_i; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, pri metu kocke so taki, da jih ne moremo zapisati kot vsote kakšnih drugih (ne nemogočih) dogodkov: so **osnovni** ali **elementarni dogodki**. Iz elementarnih dogodkov z operatorji tvorimo **sestavljene dogodke**.



Vzorčni prostor meta dveh kock

Vsi elementarni dogodki nekega poskusa tvorijo množico, ki jo imenujemo **vzorčni prostor** poskusa $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. Vzorčni prostor ponazorimo s pravokotnikom, elementarne dogodke pa s točkami v tem pravokotniku.

Pri našem delu se bomo omejili le na poskuse, katerih vzorčni prostor šteje končno mnogo elementarnih dogodkov. Vsota vseh teh elementarnih dogodkov je gotov dogodek, po dva elementarna dogodka vzorčnega prostora sta nezdružljiva:

$G = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$; $n \in \mathbb{N}$

$E_i \cap E_j = N$ za $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, n$

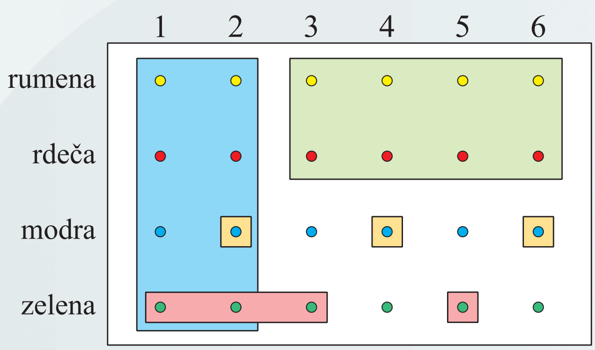
ZGLED

Narišimo vzorčni prostor poskusa, v katerem pošteno igralno kocko vržemo na krog, ki je enakomerno pobarvan s štirimi barvami (vsaka četrtina s svojo barvo), in predstavimo v njem nekaj dogodkov.

Vsakič, ko vržemo kocko, ta pokaže določeno število pik in se hkrati ustavi na nekem barvnem polju; torej je po osnovnem izreku kombinatorike vseh elementarnih dogodkov 24.

Na vzorčnem prostoru označimo naslednje sestavljene dogodke

- A: kocka je pokazala sodo število pik na modri barvi
- B: kocka je pokazala več kot 2 na rumeni ali rdeči barvi
- C: kocka je pokazala praštevilo ali liho število pik na zeleni barvi
- D: kocka je pokazala manj kot 3 pike



Iz teorije množic vemo, da ima množica z n elementi 2^n podmnožic.
Po analogiji sledi, da je iz vzorčnega prostora z n elementarnimi dogodki mogoče sestaviti 2^n različnih vsot dogodkov (med njimi so tudi nemogoč in gotov dogodek ter vsi elementarni dogodki). Izmed teh dogodkov lahko na več načinov izberemo tiste, katerih vsota je gotov dogodek in so paroma nezdružljivi – ti dogodki sestavljajo **popoln sistem dogodkov** poskusa X.

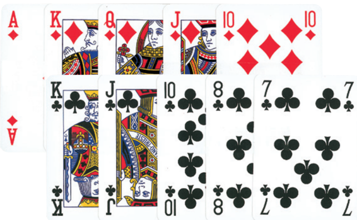
Najenostavnejša primera popolnega sistema dogodkov sta

- dogodek in njegov nasprotni dogodek: $A \cup A' = G$, $A \cap A' = N$,
- vsi elementarni dogodki poskusa: $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = G$, $n \in \mathbb{N}$
  $E_i \cap E_j = N$ za $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, n$.

ZGLEDI

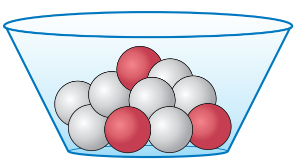
1. Naj bo poskus X met poštene igralne kocke. Napišimo nekaj popolnih sistemov dogodkov tega poskusa.

- A: pade liho število pik, B: pade sodo število pik
- A: pade 1, B: pade praštevilo pik, C: pade 4 ali 6 pik
- A: padejo vsaj 3 pike, B: padejo manj kot 3 pike



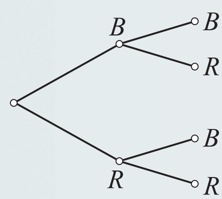
2. Komplet igralnih kart je sestavljen iz 32 kart; posamezne so as, kralj, dama, fant, 10, 9, 8 in 7 v križu ali piku (črne karte) ter v kari ali srcu (rdeče karte). Poskus X pomeni naključni izbor karte iz kupa vseh 32 kart. Primeri popolnih sistemov dogodkov so:

- A: izberemo črno karto, B: izberemo rdečo karto
- A: karta je polna, B: karta je as, C: na karti je eno od števil od 7 do 10
- A: karta je srce, B: karta je križ, C: karta je pik, D: karta je kara
- A: karta je dama, B: karta je kralj ali as, C: karta je fant ali število, manjše ali enako 10



3. V posodi so bele in rdeče kroglice. Narišimo drevo poskusa, ko iz posode zapored potegnemo dve kroglici in prve ne vrnemo.

Poskus je sestavljen iz dveh delov. V prvem delu lahko potegnemo belo (B) ali rdečo (R) kroglico; ne glede na to, kaj se je zgodilo v prvem delu, v drugem delu spet lahko potegnemo belo ali rdečo kroglico.



Vsi mogoči elementarni dogodki tega poskusa so {BB, BR, RB, RR}.

NALOGE

393. Kaj od naštetega je poskus?
a) met kovanca
b) met kocke
c) naključna izbira kroglice iz posode

394. Kaj od naštetega je dogodek?
a) met dveh kock
b) puščica na kolesu sreče pokaže številko 13
c) strel z lokom

395. Kateri od odgovorov je vzorčni prostor meta dveh kovancev?
a) {C, M, C, M}
b) {C, M}
c) {CC, CM, MC, MM}

396. Vržemo pošteno igralno kocko in kovanec. Napišite preglednico vseh elementarnih dogodkov.

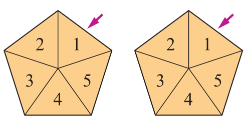
397. Vržemo oštevilčena pravilna dodekaeder in ikozaeder. Koliko je vseh elementarnih dogodkov?

398. Na mizi zavrtimo hkrati dve vrtavki (glej sliko).

a) Koliko je vseh elementarnih dogodkov?

b) Če seštejemo obe števili, na koliko načinov dobimo vsoto

- 10,
- 6,
- več kot 3,
- manj od 3,
- več od 6 in manj od 9,
- liho število,
- sodo število,
- praštevilo,
- večkratnik števila 5?



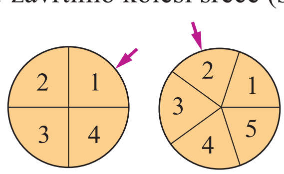
399. Trikrat zapored vržemo kovanec. Narišite drevo poskusa in napišite vse njegove elementarne dogodke.

400. V škatli je 5 kroglic: črna, rdeča, modra, zelena in bela. Iz škatle naključno potegnemo tri kroglice hkrati. Napišite vse elementarne dogodke tega poskusa.

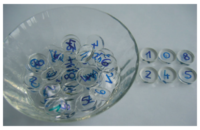
401. Zapišite elementarne dogodke poskusov.

a) X: vržemo dve tetraedrski »kocki« različnih barv.

b) X: zavrtimo kolesi sreče (slika).



c) X: iz posode z oštevilčenimi ploščicami od 0 do 9 zapored potegnemo 3 ploščice in jih postavimo v vrsto (ploščic ne vračamo). Vsaka števka je v posodi vsaj na treh ploščicah.



Verjetnost dogodka

Slovar slovenskega knjižnega jezika geslo **verjetnost** opisuje kot *prepričanost o možnosti obstajanja ali nastopa nečesa, kar se glede na kaj more predvideti ali pričakovati*. Preden se spopademo z matematično definicijo, lahko rečemo, da je računanje verjetnosti dejansko metoda, s katero opišemo možne konce nekega naključnega procesa, in da to vsak dan nezavedno tudi počnemo. Sprašujemo se in hkrati že ocenjujemo, koliko odstotna je možnost, da bomo zaradi močnega sneženja zamudili v službo, da bomo znali, če bomo vprašani, da bo inflacija še naprej rasla, da bo zmagalo moštvo, za katero navijamo … Včasih celo rečemo, da smo stoodstotno prepričani o nečem. Računanje take »verjetnosti« je torej nekaj povsem vsakdanjega.

ZGLED

Naj bo poskus X met risalnega žebljička. Poskus izvedemo trikrat zapored po tisočkrat.

Dogodek A pomeni, da se je žebljiček postavil s konico navzgor, dogodek B pa, da se je obrnil postrani. A in B sta elementarna dogodka tega poskusa in tvorita popoln sistem.
Isti žebljiček trikrat po tisočkrat vržemo v zrak in štejemo, kolikokrat se zgodi dogodek A. Rezultati so razvidni iz preglednice.

Število metov		
1000	508	492
1000	462	538
1000	481	519

Kaj lahko sklepamo iz rezultatov? Najbrž lahko sklepamo, da elementarna dogodka tega poskusa nista enakovredna, kaj več pa je težko reči glede na nizko število metov.

Dogodku A glede na število njegovih realizacij n_A v vseh ponovitvah poskusa n priredimo realno število $f_A = \frac{n_A}{n}$, ki ga imenujemo **relativna frekvenca dogodka A**; če število ponovitev poskusa narašča prek vseh mej, jo imenujemo **empirična verjetnost dogodka A**.

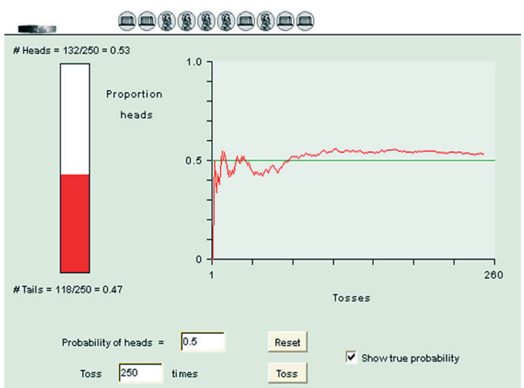
Tako je relativna frekvenca dogodka A (navzgor obrnjen risalni žebljiček) v treh zaporednih merjenjih: 0˙508, 0˙462 in 0˙481; skupen rezultat pa je 0˙484. Relativne frekvence dogodka B so zapored 0˙492, 0˙538 in 0˙519 s skupnim rezultatom 0˙516.

Te vrednosti smo dobili eksperimentalno. Če bi žebljiček vrgli 10 000-krat ali celo 100 000-krat, bi bila relativna frekvenca dogodkov A in B gotovo drugačna.

Podobno je avstralski matematik in domoljub John Kerrick med drugo svetovno vojno v zaporu, ko je imel časa na pretek, 10 000-krat vrgel kovanec in naštel 4933 cifer.

Danes, ko lahko z računalniki zelo enostavno generiramo naključna števila, nam ni treba več metati kovanca ali kocke, da bi določili empirično verjetnost, ampak lahko mete simuliramo.

Spodnji graf prikazuje, kako se verjetnost cifre oziroma moža pri metu poštenega kovanca z večanjem števila metov približuje vrednosti 0˙5.



Graf z leve slike lahko narišete tudi sami s programom na internetnem naslovu *http://bcs.whfreeman.com/ /ips4e/cat_010/applets/ /Probability.html*.

Če poznamo empirično verjetnost nekega dogodka, lahko sklepamo na njegovo **teoretično verjetnost**. Večje je število ponovitev poskusa, bolj natančno je predvidevanje te vrednosti.

Empirična verjetnost je limita relativne frekvence dogodka, ko gre število ponovitev poskusa prek vseh mej.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Podobno lahko sklepamo tudi v obrnjeni smeri. Če poznamo teoretično verjetnost dogodka, lahko predvidimo, kolikokrat se bo dogodek zgodil v n ponovitvah poskusa. Predvideno število je tem bolj natančno, čim večje je število ponovitev poskusa.

Veliko je situacij, ko ni treba zbirati podatkov, da bi določili verjetnost dogodka: v glavnem so to vse igre – met poštenega kovanca, izbiranje »neoznačenih« kart iz kompleta igralnih kart, met poštene kocke, loterija itd., a tudi primeri iz narave. Zdrava pamet nam pove, da imata pri metu poštenega kovanca cifra in mož enako možnost, da sta enako verjetna. Podoben razmislek naredimo pri metu poštene kocke.

Pierre Simone de Laplace (1749–1827)

Francoski matematik Laplace je na podlagi opazovanj in raziskovanj leta 1812 določil *teoretično formulo* za računanje verjetnostnega računa dogodkov, ki jo danes imenujemo klasična definicija verjetnosti.

Klasična definicija verjetnosti

Če so vsi elementarni dogodki nekega poskusa enakovredni in je A dogodek iz vzorčnega prostora tega poskusa, je verjetnost dogodka A kvocient med številom m za dogodek A ugodnih elementarnih dogodkov in številom n vseh elementarnih dogodkov poskusa.

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{m}{n}}$$

Klasična definicija verjetnosti se podreja trem trditvam, ki jih lahko izluščimo kar iz definicije same in jih imenujemo **aksiomi verjetnosti**.

1. $P(A) \geq 0$; verjetnost slučajnega dogodka je nenegativno število.
2. $P(G)=1$; verjetnost gotovega dogodka je 1.
3. Če sta dogodka A in B nezdružljiva: $A \cap B = N$, velja $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ oz. verjetnost vsote nezdružljivih dogodkov je enaka vsoti verjetnosti posameznih dogodkov.

Klasična definicija verjetnosti velja samo za dogodke poskusov, katerih vzorčni prostor je **simetričen** – to pomeni, da so vsi elementarni dogodki poskusa enakovredni in s tem enako verjetni.

Če so $E_1, E_2, \ldots, E_n$ elementarni dogodki poskusa X, potem je njihova vsota gotov dogodek $G = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$. Elementarni dogodki so paroma nezdružljivi $E_i \cap E_j = N$ za $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, n$, in zato lahko uporabimo aksiome verjetnosti:

$$P(G) = P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) = 1$$

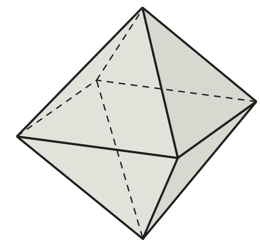
Ker je $P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_n)$, iz zgornje enačbe dobimo verjetnost poljubnega elementarnega dogodka

$$P(E_i) = \frac{1}{n}.$$

Če je torej za dogodek A ugodnih m elementarnih dogodkov, je njegova verjetnost

$$P(A) = m \cdot P(E_i) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

ZGLEDI



1. Na mejnih ploskvah igralnega pravilnega poliedra je lahko narisanih 1, 2, 3 ali 5 pik. Teoretične verjetnosti, da bo polieder pokazal določeno število pik, so $P(1)=0{\cdot}125$, $P(2)=P(3)=0{\cdot}25$, $P(5)=0{\cdot}375$.
Premislimo, kateri pravilni polieder je to in kolikokrat so na njegovih mejnih ploskvah zapisana posamezna števila.

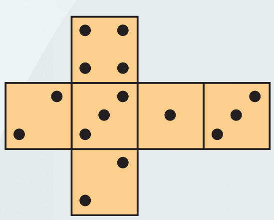
Posamezni dogodki so nezdružljivi in vsota njihovih verjetnosti je enaka 1. Iz enakosti $P(5)=3\cdot P(1)$, $P(3)=2\cdot P(1)$ in $P(2)=2\cdot P(1)$ sklepamo, da ima pravilni polieder 8 stranskih ploskev, da je torej oktaeder.

Števila na tem igralnem oktaedru so: 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5.

2. Običajno kocko (heksaeder) s praznimi mejnimi ploskvami moramo opremiti s pikami tako, da bo hkrati veljalo:
– ne more pasti 5 pik,
– padec 3 pik je bolj verjeten od padca 4 pik,
– 2 piki sta enako verjetni kot 3 pike in
– verjetnost, da pade 1 pika, je večja od 0.

Ker ima običajna kocka 6 mejnih ploskev, moramo izbrati 6 števil, ki se bodo podrejala vsem naštetim zahtevam: očitno ne bomo potrebovali števila 5, po zahtevi c sta lahko 2 dvojki in 2 trojki ali 1 dvojka in 1 trojka, a moramo zaradi zahteve b upoštevati prvo možnost. Kot zadnjo določimo frekvenco števila 1, ki je lahko le 1.

Na mejnih ploskvah te kocke so števila 1, 2, 2, 3, 3 in 4.



3. V posodi je 20 listkov, oštevilčenih od 1 do 20. Iz posode na slepo izvlečemo en listek. Izračunajmo verjetnost naslednjih dogodkov:
A: izvlečeno število je sodo,
B: izvlečeno število je deljivo s 3 ali 5,
C: izvlečeno število ni večkratnik števila 3.

Vzorčni prostor poskusa šteje 20 elementarnih dogodkov $\{E_1, E_2, \ldots, E_{20}\}$ in je simetričen, saj ima vsak od 20 listkov enako možnost, da ga potegnemo iz posode. Zato je verjetnost, da izvlečemo listek s številom i, enaka $P(E_i)=\frac{1}{20}$.

a) Za dogodek A so ugodni vsi elementarni dogodki s sodim indeksom, in teh je 10:
$m = 10$, $n = 20$, zato je $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

b) Dogodek B je vsota dogodkov B_1 in B_2:
B_1: izvlečeno število je deljivo s 3,
B_2: izvlečeno število je deljivo s 5.
Med prvimi 20 števili je šest števil deljivih s 3, štiri števila pa so deljiva s 5, zato je $m_1 = 6$ in $m_2 = 4$. Dogodek E_{15} (število 15 je deljivo s 3 in hkrati s 5) nastopa v obeh dogodkih, zato je $m = m_1 + m_2 - 1 = 9$ in $P(B) = \frac{9}{20}$.

c) Med prvimi 20 naravnimi števili je šest večkratnikov števila 3, torej je 14 števil, ki niso večkratniki števila 3: $m = 14$.
$P(C) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

4. Naenkrat vržemo kovance za 10, 20 in 50 centov. Zapišimo vzorčni prostor tega poskusa in izračunajmo verjetnost dogodka A, da vsaj dva kovanca pokažeta cifro.

Opazujmo še, kolikokrat pri metu teh treh kovancev pade cifra, in se prepričajmo, da ustrezni dogodki sestavljajo popoln sistem.

Če hočemo rešiti nalogo, moramo na pomoč poklicati kombinatoriko. Na koliko različnih načinov padejo trije kovanci? Po osnovnem izreku kombinatorike je proces sestavljen iz treh faz, vsaka od njih pa je izvedljiva na dva načina – torej je vseh možnosti osem:

10 centov	C	C	C	M	C	M	M	M
20 centov	C	C	M	C	M	C	M	M
50 centov	C	M	C	C	M	M	C	M

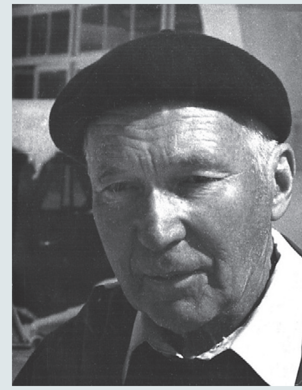
Ker kovanci niso posebej prirejeni ali obteženi, je vzorčni prostor elementarnih dogodkov simetričen; sestavlja ga 8 elementarnih dogodkov $\{E_1, E_2, \ldots, E_8\}$, za dogodek A pa so ugodni prvi štirje elementarni dogodki, zato je njegova verjetnost $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

C – cifra M – mož

Za odgovor na drugo vprašanje sestavimo štiri dogodke in izračunajmo njihove verjetnosti.
C_0: noben kovanec ne pokaže cifre; $P(C_0) = \frac{1}{8}$
C_1: cifro pokaže eden od treh kovancev; $P(C_1) = \frac{3}{8}$
C_2: cifro pokažeta dva od treh kovancev; $P(C_2) = \frac{3}{8}$
C_3: cifro pokažejo vsi trije kovanci; $P(C_3) = \frac{1}{8}$

Dogodki res tvorijo popolni sistem, saj je vsota njihovih verjetnosti enaka 1.

Zahteva, da mora biti vzorčni prostor poskusa simetričen, je za računanje verjetnosti zelo huda omejitev. Tako lahko obravnavamo le zelo idealne dogodke, saj nam nerešljivo težavo pomeni že računanje verjetnosti, če mečemo obteženo oziroma goljufivo igralno kocko.



Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987)

Da bi lahko računali tudi verjetnosti dogodkov iz nesimetričnih vzorčnih prostorov, kjer so verjetnosti elementarnih dogodkov lahko različne, je ruski matematik Kolmogorov v 20. st. postavil **aksiomatično definicijo verjetnosti** dogodka kot funkcijo na vzorčnem prostoru, ki vsakemu elementarnemu dogodku priredi realno število in hkrati zadošča trem aksiomom, ki jih že poznamo iz klasične definicije.

1. $P(A) \geq 0$; funkcija je nenegativna

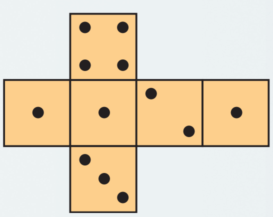
2. $P(G) = 1$; funkcija je normirana

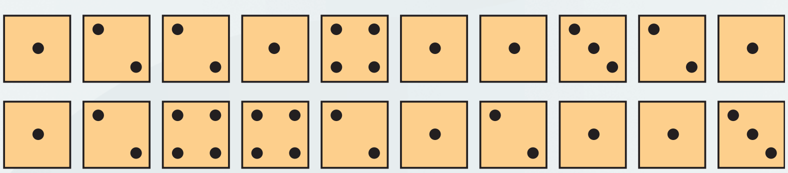
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ za $A \cap B = N$

Za izračun verjetnosti dogodka iz vzorčnega prostora poskusa X moramo torej poznati posamezne verjetnosti $P(E_i) = p_i$ popolnega sistema elementarnih dogodkov $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ tega poskusa, za katere pa mora veljati $\boldsymbol{p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1}$.

ZGLEDI

1. Katarina je svojo igralno kocko vrgla 20-krat zapored in si pisala število pik pri vsakem metu (glej sliko). Kolikšna je eksperimentalna in kolikšna teoretična verjetnost dogodka, da pade 1 pika?





Poskus je sestavljen iz 4 elementarnih dogodkov, ki pa niso enako verjetni.

$P(1) = \frac{3}{6}$, $P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{6}$

Eksperimentalna verjetnost znaša $f_A = \frac{9}{20}$, teoretična pa $P(A) = P(1) = \frac{1}{2}$.

2. Kovanec poklicnega goljufa je prirejen tako, da sta padca cifre in moža v razmerju 2 : 1. Izračunajmo verjetnost, da kovanec pokaže cifro.

Iz enačb $P(C) = 2 \cdot P(M)$ in $P(C) + P(M) = 1$ dobimo $P(M) = \frac{1}{3}$ in $P(C) = \frac{2}{3}$.

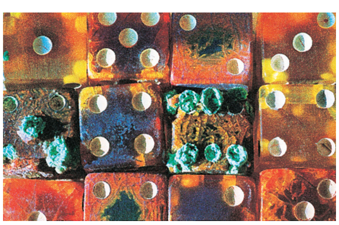
3. Katarina ima štiri kartice, označene od 1 do 4, in pošteno kocko. Na slepo vzame eno kartico in vrže kocko ter si reče: »Največja možna vsota je 10, zato je verjetnost vsote, večje od 5, enaka $\frac{1}{2}$.« Ali ima prav? Če ne, izračunajte verjetnost, da bo vsota števil na kartici in na kocki večja od 5.

Najprej narišimo vzorčni prostor poskusa.

		kocka					
		1	2	3	4	5	6
karta	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10

Vidimo, da je število elementarnih dogodkov 24, za vsoto, večjo od 5, je ugodnih 14 elementarnih dogodkov, to pa je več kot polovica vseh. Verjetnost, da bo vsota večja od 5, je $P(5) = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$, kar je več od 0·5.

4. Igralna kocka je obtežena tako, da so verjetnosti števil 1, 2 ali 3 enake: $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{60}$, verjetnost, da padejo štiri pike, je $P(E_4) = \frac{1}{30}$, verjetnosti za 5 in 6 pik pa sta sorazmerni številu pik.



Izračunajmo verjetnosti dogodkov.

A: padejo vsaj tri pike

B: pade sodo število pik

C: pade liho praštevilo pik

Vsota verjetnosti vseh elementarnih dogodkov mora biti 1.
Tako dobimo enačbo
$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 3 \cdot \frac{1}{60} + \frac{1}{30} + 5p + 6p = 1$
z rešitvijo $p = \frac{1}{12}$.

Neznani verjetnosti elementarnih dogodkov sta $P(E_5) = \frac{5}{12}$ in $P(E_6) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

$A = E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$, $P(A) = P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = \frac{29}{30}$

$B = E_2 \cup E_4 \cup E_6$, $P(B) = P(E_2) + P(E_4) + P(E_6) = \frac{11}{20}$

$C = E_3 \cup E_5$, $P(C) = P(E_3) + P(E_5) = \frac{13}{30}$

5. Na dirki tekmujejo konji A, B in C. Možnost zmage konja A je polovica možnosti zmage konja B, konj B pa ima trikrat večjo možnost za zmago kot konj C. Izračunajmo, kolikšne so verjetnosti za zmago posameznega konja.

$P(A)=\frac{1}{2}b,\ P(B)=b,\ P(C)=\frac{1}{3}b$

$\frac{b}{2}+b+\frac{b}{3}=1;\ b=\frac{6}{11}$

$P(A)=\frac{3}{11},\ P(B)=\frac{6}{11},\ P(C)=\frac{2}{11}$

6. Na kvadratno ploščo, ki ima v vsakem oglišču pobarvan kot, katerega lok ima polmer $r=20$ cm, mečemo kovanec s premerom 2 cm. S kolikšno verjetnostjo pade kovanec na nepobarvani del, če plošča meri 1 m^2?

Verjetnost dogodka A je v tem primeru kvocient med ploščino nepobarvanega dela plošče in ploščino cele plošče, saj je ploščina kovanca zanemarljivo majhna.

$P(A)=\frac{a^2-\pi r^2}{a^2}=\frac{1-0{\cdot}2^2\pi}{1}=0{\cdot}874$

Verjetnost, da kovanec pade na nepobarvani del plošče, je približno 87 %.

NALOGE

402. Kolikšno število »mož« lahko pričakujemo, če kovanec vržemo 700-krat?

403. Kocko vržemo 240-krat. Kolikšno je pričakovano število

a) šestic,
b) sodih števil pik,
c) lihih števil pik,
č) večkratnikov 3 pik?

404. Mojca je 200-krat vrgla kovanec in dobila rezultat 108 »mož«. Izračunajte relativno frekvenco tega dogodka in za koliko odstotkov se razlikuje od teoretične verjetnosti dogodka.

405. Na listkih so napisana števila 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23. Kolikšna je verjetnost, da število na slučajno izbranem listku ne bo praštevilo?

406. Lokalni »golgeter« je v zadnjih 30 tekmah dosegel naslednje število golov:

0 2 1 0 1 3 2 1 1 1
4 1 1 2 1 2 0 0 0 1
1 1 0 2 0 0 2 1 1 3

Iz teh podatkov napovejte verjetnost, da igralec na posamezni tekmi

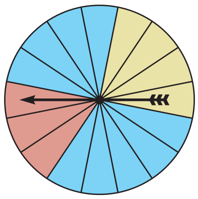
a) A: ne da gola,
b) B: da en gol ali več,
c) C: da tri gole ali več.

407. Vse dni aprila je Rok zapisoval vreme: D, če je deževalo, in N, če ni deževalo. Dobil je naslednje podatke:

D D D N D D D N N N
N D N D D N N N N D
D D D N N N N N N D

Iz podatkov izračunajte verjetnost, da je na izbrani aprilski dan deževalo.

408. Lovro 100-krat zavrti kolo sreče na sliki in podatke zapiše v preglednico.



Barva	modra	rdeča	rumena
Frekvenca	53	21	26

a) Kolikšna je empirična verjetnost, da se kazalec ustavi na posamezni barvi?
b) Kolikšna je teoretična verjetnost, da se kazalec ustavi na posamezni barvi?
c) Ali je kolo sreče »pošteno«?

409. Vidov kalkulator ima tovarniško napako in se včasih zmoti v računanju. Vid je ugotovil, da je verjetnost pravilnega rezultata $0{\cdot}9$. Koliko napačnih odgovorov lahko pričakuje v 40 računih?

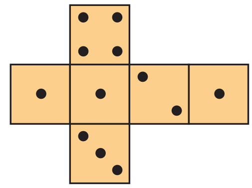
410. Učitelj matematike je k pouku prinesel posebno kocko, za katero veljajo hkrati naslednje zahteve:
– nemogoče je vreči sodo število pik,
– mogoče je vreči 5 pik, ne pa 1 pike,
– nemogoče je vreči več kot 5 pik,
– padec 3 pik ima večjo verjetnost kot padec 5 pik.
Narišite mrežo te igralne kocke.

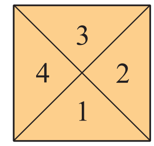
411. Vzorčni prostor dogodka je sestavljen iz elementarnih dogodkov $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$. Katera od spodnjih funkcij P je verjetnost?

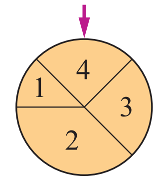
a) $P(E_1)=\frac{1}{6}, P(E_2)=\frac{1}{6}, P(E_3)=\frac{1}{6}, P(E_4)=\frac{1}{6}$
b) $P(E_1)=\frac{1}{3}, P(E_2)=-\frac{1}{2}, P(E_3)=\frac{1}{4}, P(E_4)=\frac{1}{6}$
c) $P(E_1)=\frac{1}{8}, P(E_2)=\frac{1}{8}, P(E_3)=\frac{1}{2}, P(E_4)=\frac{1}{4}$
č) $P(E_1)=\frac{1}{2}, P(E_2)=\frac{1}{4}, P(E_3)=\frac{1}{12}, P(E_4)=\frac{1}{3}$

412. P je verjetnostna funkcija poskusa X z vzorčnim prostorom $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$. Izračunajte $P(E_2)$, če je $P(E_1)=0{\cdot}1$, $P(E_3)=\frac{2}{7}$ in $P(E_4)=\frac{1}{2}$.

413. Tine je s svojo kocko v 24 metih vrgel 3 pike 12-krat, Manci se je vrtavka v 24 metih 10-krat ustavila na številu 4, Urša pa je 24-krat zavrtela kazalec na kolesu sreče in sedemkrat dobila število 2. Čigava empirična verjetnost je najbližja teoretični verjetnosti?

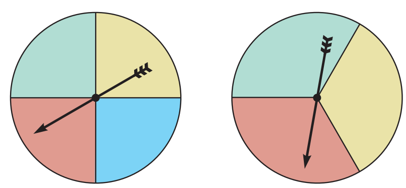






414. Konstruirajte vsakokrat kolo sreče tako, da bo dalo pri vrtenju iste rezultate kot
a) običajna igralna kocka,
b) igralni tetraeder,
c) števila, ki jih dobimo z vsoto pik pri metu dveh igralnih tetraedrov,
č) število *mož* pri metu 3 kovancev.

415. Nadja zavrti dve kolesi sreče. Izračunajte verjetnost, da se kazalca ustavita na isti barvi.



416. Vržemo pošteno igralno kocko. Kolikšna je verjetnost, da pokaže več kot 7 pik?

417. Blaž zavrti dve vrtavki in sešteje števili, ki ju pokažeta. Ena vrtavka ima tri dele od 1 do 3, druga pa je označena s števili od 1 do 7. Izračunajte verjetnosti dogodkov.
A: Vsota je 6.
B: Vsota je soda.
C: Vsota je manj kot 8.

418. Matej zavrti pošteno vrtavko, ki ima na svojih krakih napisana števila od 1 do 5, in vrže tetraeder, ki ima na stranskih ploskvah napisana števila od 1 do 4, potem pa zmnoži obe števili.
a) Izračunajte verjetnosti dogodkov:
A: Produkt je 1.
B: Produkt je 8.
C: Produkt je 7.
D: Produkt je večji od 6.
b) Izračunajte, kateri produkt je najbolj verjeten in kolikšna je ta verjetnost.

419. Kateri od naštetih poskusov nima vzorčnega prostora, sestavljenega iz enakovrednih elementarnih dogodkov?
a) naključna izbira števila od 1 do 7
b) met kovanca
c) naključna izbira ene črke iz besede BANANA

420. Izračunajte, kateri od dogodkov je bolj verjeten.
A: Pri metu kocka pokaže 3 pike.
B: Pri metu 4 kovancev trije pokažejo cifro.

421. V vrečki je 8 modro, 7 rdeče in 5 zeleno ovitih bombonov. Naključno izberemo bombon. Kolikšna je verjetnost, da je
a) moder,
b) rdeč,
c) zelen,
č) rumen,
d) rdeč ali zelen,
e) moder ali rdeč?

422. Običajno kocko (heksaeder) s praznimi mejnimi ploskvami moramo opremiti s pikami tako, da bo hkrati veljalo:
– ne morejo pasti 3 pike,
– padec 1 pike je manj verjeten od padca 6 pik,
– 2 piki sta enako verjetni kot 4 pike,
– verjetnost, da pade 5 pik, je večja od 0,
– na mejnih ploskvah je 5 različnih vrednosti.

423. V besedi FIBONACCI na slepo prečrtamo eno črko. Kolikšna je verjetnost, da je prečrtana črka
a) A,
b) C,
c) I,
č) samoglasnik?

424. V razredu je 14 fantov in 16 deklet. Razrednik naključno izbere enega izmed njih. Kolikšna je verjetnost, da izbere dekle?

425. V posodi je 20 listkov, oštevilčenih od 1 do 20. Iz posode na slepo izvlečemo en listek. Izračunajmo verjetnost naslednjih dogodkov:
a) A: izvlečeno število je praštevilo,
b) B: izvlečeno število je deljivo z 2 in s 3,
c) C: izvlečeno število je večkratnik števila 4,
č) $Č$: izvlečeno število je praštevilo, ki da pri deljenju s 4 ostanek 1,
d) D: izvlečeno število je bodisi manjše od 5 bodisi večje ali enako 12.

426. V košari so tri pomaranče, dve grenivki in pet mandarin. Če naključno izberemo sadež, kolikšna je verjetnost, da bomo izbrali mandarino ali pomarančo?

427. Andrej še ne zna brati, a se rad igra s črkami abecede. Kolikšna je verjetnost, da pravilno sestavi svoje ime, če mu očka iz 25 črk slovenske abecede izbere črke A, D, E, J, N, R?

428. Izračunajte verjetnost, da za slučajno izbran kot iz intervala $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ velja $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

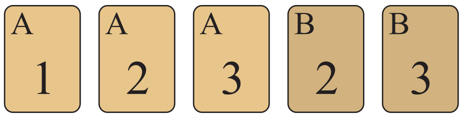
429. Trije prijatelji imajo v garderobi vsak po eno rdečo, belo, zeleno, rumeno in modro srajco. Kolikšna je verjetnost, da bodo na izbrani dan oblekli srajce različnih barv, ne da bi se za to prej dogovorili?

430. Izmed listkov s števili od 1 do 100 naključno izberemo en listek. Kolikšna je verjetnost, da je število na listku deljivo s 3 in ni deljivo s 5?

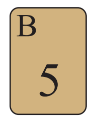
431. V razredu s 30 dijaki je 17 deklet in 13 fantov. Pet jih dela maturo na višji ravni in 3 od teh so dekleta. Naključno izberemo dijaka. Kolikšna je verjetnost, da je dekle ali pa oseba, ki dela maturo na višji ravni?

432. V hranilniku so tri vrste kovancev: 53 po 5 centov, 19 po 10 centov, ostali so po 20 centov. Hranilnik obrnemo in iz njega z verjetnostjo $\frac{1}{4}$ pade kovanec za 20 centov. Izračunajte število teh kovancev.

433. Gaj ima dve skupini kart: A1, A2, A3 in B2, B3. Naključno izbere po eno karto iz vsake skupine in sešteje števili.



a) Napišite vse elementarne dogodke tega poskusa.
b) Izračunajte verjetnosti dogodkov.
A: Vsota obeh števil je 5.
B: Vsota je sodo število.
c) Gaj drugi skupini kart doda B5 in spet iz vsake skupine naključno izbere po eno karto. Koliko je zdaj vseh elementarnih dogodkov?



č) Zakaj dodana karta ne poveča števila vseh elementarnih dogodkov, ki dajo vsoto 5?
d) Zakaj dodana karta spremeni verjetnost dogodka, ko je vsota števil na kartah enaka 5?
e) Kolikšna je verjetnost dogodka C, da je vsota 5, ko smo dodali karto?

434. Mama, oče in sin se naključno postavijo v vrsto za družinsko fotografijo. Izračunajte verjetnosti dogodkov.
A: Sin stoji na koncu vrste.
B: Oče je v sredini.

435. Pet naključno izbranih ljudi vprašamo, kdaj imajo rojstni dan. Kolikšna je verjetnost, da ga imajo na različne dneve tedna?

436. Po statističnih raziskavah ima 0˙8 % moških barvno slepoto, eden od petih pa je levoročen. Privzemimo, da sta ti dve lastnosti enakomerno porazdeljeni. Izračunajte verjetnost, da bo naključno izbrani moški:
A: barvno slep in levoročen,
B: barvno slep in desnoročen,
C: barvno slep ali levoročen,
D: niti barvno slep niti levoročen.

437. Na štiri listke napišemo številke 2, 6, 6, 6 in potem naključno izberemo dva listka. Kolikšna je verjetnost dogodka, da je vsota števil na izbranih listkih deljiva s 3?

438. Prevarantova kocka z verjetnostjo $\frac{1}{4}$ pokaže šestko in z verjetnostjo $\frac{1}{4}$ enko, preostala števila pa pokaže z verjetnostjo $\frac{1}{8}$. Kolikšna je verjetnost, da z metom ene goljufive in ene poštene kocke vržemo vsoto 7 pik?

439. Kolikšna je verjetnost, da štiri naključno izbrane točke od 15 točk tvorijo oglišča kvadrata?

440. Množica $\mathcal{M}$ je sestavljena iz točk $T(x, y)$ v prvem kvadrantu, za katere velja $1 < x < 5$ in $3 < y \leq 6$; $x, y \in \mathbb{N}$.
a) Na slepo izberemo točko iz množice $\mathcal{M}$. Kolikšna je verjetnost, da je produkt njenih koordinat deljiv s 3?
b) Naključno izberemo dve točki iz $\mathcal{M}$. Kolikšna je verjetnost, da je njuna razdalja večja od 1?
c) Na slepo izberemo tri točke iz $\mathcal{M}$. Kolikšna je verjetnost, da ležijo točke na isti premici?

441. V kvadratni plošči, katere stranica meri en meter, je na sredini izvrtana luknja s polmerom 20 cm. Iz velike oddaljenosti skušamo s kamenčkom zadeti luknjo v plošči. Kolikšna je verjetnost, da nam uspe v prvem poskusu?

Računanje verjetnosti

Ob pomoči treh aksiomov verjetnostnega računa bomo v nadaljevanju dokazali še nekaj pomembnih trditev, ki nam bodo pomagale pri računanju verjetnosti dogodkov.

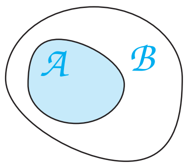
1. $P(N)=0$; verjetnost nemogočega dogodka je nič.

Dokaz:
$A \cup N = A$, A in N sta nezdružljiva, zato velja
$P(A)=P(A \cup N)=P(A)+P(N)$,
od koder že lahko preberemo $P(N)=0$.

2. $P(A')=1-P(A)$; verjetnost nasprotnega dogodka dobimo tako, da od 1 odštejemo verjetnost prvotnega dogodka.

Dokaz:
Dogodka A in A' sta nezdružljiva: $A \cup A' = G$, $A \cap A' = N$, zato po aksiomih velja:
$1=P(G)=P(A \cup A')=P(A)+P(A')$.
Iz prejšnje vrstice takoj dobimo zgornjo trditev.

3. Če je dogodek A način dogodka B; $A \subset B$, potem velja $P(A) \leq P(B)$.

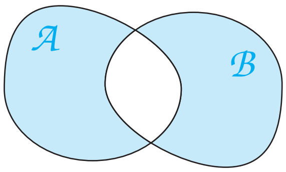


Dokaz:
Če je $A \subset B$, potem dogodek B lahko zapišemo kot vsoto dveh nezdružljivih dogodkov:
$B = A \cup (B-A)$ in izračunamo njegovo verjetnost:
$P(B)=P(A)+P(B-A)$.
Verjetnost poljubnega dogodka je nenegativna: $P(B-A) \geq 0$, zato velja neenakost:
$P(A) \leq P(B)$.

4. Verjetnost razlike poljubnih dogodkov A in B: $P(A-B)=P(A)-P(A \cap B)$.

Dokaz:
Dogodek A zapišemo kot vsoto dveh nezdružljivih dogodkov:
$A=(A-B) \cup (A \cap B)$ in uporabimo aksiom za računanje verjetnosti vsote nezdružljivih dogodkov:
$P(A)=P(A-B)+P(A \cap B)$. Iz te enakosti že sledi zgornja trditev.

5. Verjetnost vsote poljubnih dogodkov A in B:
$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.



Dokaz:
Pomagali si bomo s prejšnjo trditvijo:
$P(A \cup B)=P(A-B)+P(B)=P(A)-P(A \cap B)+P(B)$, od koder že sledi trditev, ki jo dokazujemo.

ZGLEDI

1. Na listkih so napisana števila od 1 do 20. Na slepo potegnemo enega od njih. Kolikšna je verjetnost, da je število

A: liho ali kvadrat naravnega števila,

B: nekvadrat,

C: sodo ali praštevilo,

D: deljivo z 2 ali s 3?

- Dogodki A, C in D so vsote elementarnih združljivih dogodkov.

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \\ = \frac{10}{20} + \frac{4}{20} - \frac{2}{20} = \\ = \frac{12}{20} = 0{\cdot}6$$

- Ugodni elementarni dogodek za B so izbori vseh števil, ki niso kvadrati. Hitreje preštejemo tiste, ki so kvadrati, in računamo z nasprotno verjetnostjo.

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{4}{20} = \frac{16}{20} = 0{\cdot}8$$

- Od vsote sodih števil in praštevil od 1 do vključno 20 moramo odšteti edino sodo praštevilo in dobimo vse ugodne elementarne dogodke; vseh elementarnih dogodkov je spet 20.

$$P(C) = P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) = \\ = \frac{10}{20} + \frac{8}{20} - \frac{1}{20} = \\ = \frac{17}{20}$$

- Od vseh izbranih števil je 10 sodih in 6 deljivih s 3, odšteti pa moramo 3 števila, ki so deljiva s 6.

$$P(D) = P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = \\ = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \\ = \frac{13}{20}$$

2. V razredu je 12 fantov in 20 deklet. Kolikšna je verjetnost dogodka A, da je v naključno izbrani 3-članski delegaciji vsaj eno dekle?

Vsi elementarni dogodki tega poskusa so vse mogoče trojice sošolcev oziroma sošolk iz razreda ali drugače: vse podmnožice s tremi elementi iz množice z 32 elementi. Ugodni pa so tisti elementarni dogodki, pri katerih je v trojici vsaj eno dekle – to pomeni: eno ali dve ali tri dekleta. Dogodek A je vsota treh nezdružljivih dogodkov.

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$

$$= \frac{\binom{20}{1}\binom{12}{2} + \binom{20}{2}\binom{12}{1} + \binom{20}{3}}{\binom{32}{3}} = 0{\cdot}96$$

Nalogo lahko zelo preprosto rešimo tudi z nasprotnim dogodkom: nasprotje tega, da je v trojici vsaj eno dekle, je, da v trojici ni nobenega dekleta. Ugodni elementarni dogodki za nasprotni dogodek A' so vse trojice s samimi fanti.

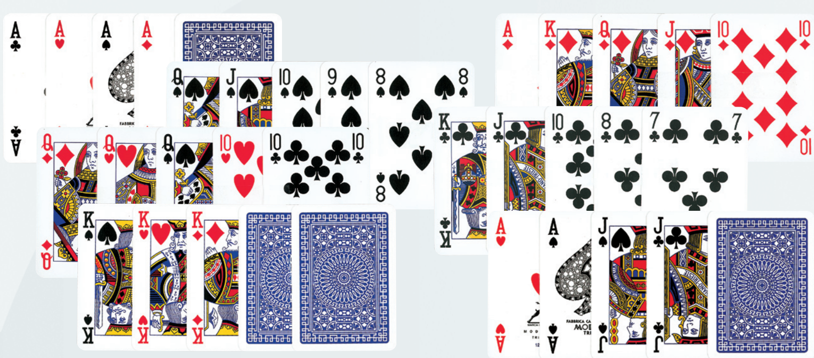
$$n = C_{32}^3 = \binom{32}{3}, \ m = C_{12}^3 = \binom{12}{3}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{32 \cdot 31 \cdot 30} = 1 - \frac{11}{248} = \frac{237}{248} = 0{\cdot}96$$

Verjetnost dogodka A je zelo velika, kar pa ni čudno, saj sta v razredu skoraj $\frac{2}{3}$ deklet.

3. Štirje prijatelji zelo radi igrajo poker s kompletom 32 kart. Za tiste, ki ne poznajo igre, povejmo, da vsak igralec dobi 5 kart in da jih zaradi enostavnosti ne morejo menjati. Če je igralcem sreča naklonjena, dobijo enega od naslednjih kompletov kart:

a) *kraljeva lestvica*: as, kralj, dama, fant in »10« v isti barvi,
b) *barvna lestvica*: pet zaporednih kart v isti barvi (lestvica se ne začne z asom),
c) *poker*: štiri karte iste vrednosti in različnih barv in še ena karta,
č) *full*: tri karte iste vrednosti (tris) in dve karti iste vrednosti (par),
d) *barva*: pet kart iste barve, vendar ne v zaporedju,
e) *tris*: tri karte iste vrednosti in še dve karti,
f) *dvojni par*: dvakrat po dve karti iste vrednosti in še ena karta.



Izračunajmo verjetnosti naslednjih dogodkov pri prvi delitvi kart:

A: poker v asih
B: barva v piku
C: kraljeva lestvica
$Č$: full
D: barvna lestvica v črni barvi
E: tris (dve karti pri trisu sta rdeči) ali full
F: dvojni par

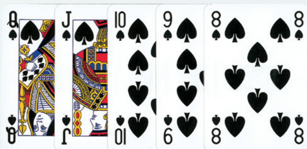
V vseh primerih je število vseh elementarnih dogodkov enako.

$$n = C_{32}^5 = \binom{32}{5}, \ m = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{120} = 201\,376$$

Če bi ljudje bolje poznali gospo Srečo, bi bil Las Vegas še vedno le majhno postajališče v puščavi.
(Stephen Jay Gould)

- Za dogodek A so ugodni elementarni dogodki, ki združujejo 4 ase, peta karta pa je katerakoli iz ostanka kart: $m = 1 \cdot 28 = 28$.

  $P(A) = \frac{28}{201\,376} = 0{,}00014$



- Elementarni dogodki za *barvo v piku* so vse podmnožice po 5 kart iz množice 8 kart brez *barvnih lestvic* in *kraljeve lestvice*: to je $m = C_8^5 - 4 = \binom{8}{3} - 4 = 52$.

  $P(B) = \frac{52}{201\,376} = 0{,}00026$

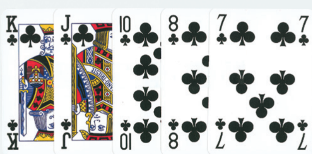
- *Kraljeve lestvice* so le 4, zato je $m = 4$.

  $P(C) = \frac{4}{201\,376} = 0{,}00002$

- Za *tris* je treba imeti tri karte iste vrednosti, kar gre na $8 \cdot C_4^3$ načine, za dodaten par pa imamo še pogoj, da se vrednosti kart razlikujeta od vrednosti kart v *trisu*; torej je vseh ustreznih parov za vsak *tris* $7 \cdot C_4^2$. Vseh ugodnih dogodkov je zato

  $m = 8 \cdot C_4^3 \cdot 7 \cdot C_4^2 = 1344$.

  $P(Č) = \frac{1344}{201\,376} = 0{,}0067$



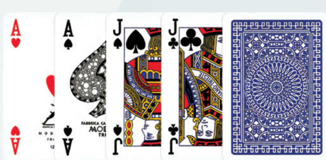
- Ugodnih dogodkov za *barvno lestvico* v črni barvi je $m = 6$.

  $P(D) = \frac{6}{201\,376} = 0{,}00003$

- *Tris* z dvema rdečima kartama pomeni, da pri vseh različnih osmih vrednostih vzamemo dve rdeči karti, tretja pa je ena od obeh črnih. Drugi dve karti izberemo izmed preostalih 28 kart.

  $m = 8 \cdot 2 \cdot C_{28}^2 = 6048$

  $P(E) = \frac{6048}{201\,376} = 0{,}03$



- Ugodni dogodki za *dvojni par* so

  $m = 8 \cdot C_4^2 \cdot 7 \cdot C_4^2 \cdot 24 = 48\,384$.

  $P(F) = 0{,}24$

4. Dani so naslednji podatki: $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, $P(A') = \frac{2}{3}$ in $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Izračunajmo verjetnosti dogodkov A, B in $A \cap B'$.

Iz verjetnosti nasprotnega dogodka dobimo
$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,

iz verjetnosti vsote $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dobimo
$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = \frac{13}{24}$,

iz 4. trditve pa sledi
$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{12}$.

5. Na gimnaziji je 680 dijakinj in dijakov: 256 jih poje v zborih, 341 se jih ukvarja s športom, 278 pa z naravoslovjem, pri naravoslovju in v zborih hkrati jih sodeluje 86, pri športu in naravoslovju hkrati 93, s petjem in športom hkrati se jih ukvarja 88, vse tri dejavnosti hkrati pa uspe obiskovati 37 dijakinjam in dijakom. Izračunajmo, kolikšna je verjetnost, da je slučajno izbrana oseba

a) aktivna v športu, pa se ne ukvarja s petjem in naravoslovjem hkrati,

b) navdušena nad petjem in naravoslovjem, za šport pa ji ni,

c) vključena v vse tri dejavnosti,

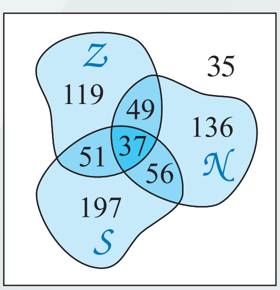
č) vključena v šport ali zbore, ne pa v naravoslovje,

d) se ne ukvarja z nobeno od naštetih dejavnosti.

Pri delu si bomo pomagali s teorijo množic iz prvega razreda. Narisali bomo Vennov diagram, kjer imata po dve in dve množici neprazen presek, pa tudi presek vseh treh množic ni prazen.

V diagram najprej napišemo vse osebe, ki se ukvarjajo z vsemi tremi dejavnostmi. Potem to število odštejemo od števila oseb iz presekov po dveh dejavnosti. Končno dobljena števila odštejemo od skupnega števila dijakinj in dijakov pri posamezni dejavnosti. Tako dobimo paroma disjunktne množice in lahko preštejemo šolarje po posameznih dejavnostih.

Samo k zboru jih hodi 119, samo s športom se jih ukvarja 197 in samo z naravoslovjem 136. 35 oseb se ne ukvarja z nobeno dejavnostjo, s po dvema hkrati pa: 88 s športom in petjem, 93 s športom in naravoslovjem ter 86 s petjem in naravoslovjem.



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - $$
$$- P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + $$
$$+ P(A \cap B \cap C)$$

Zdaj ni težko dobiti zahtevanih verjetnosti.

a) $P(A) = 197 + 51 + 56 = \frac{304}{680} = 0{\cdot}447$

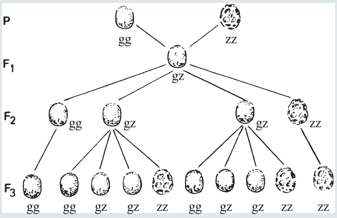
b) $P(B) = \frac{49}{680} = 0{\cdot}072$

c) $P(C) = \frac{37}{680} = 0{\cdot}054$

č) $P(\check{C}) = \frac{197+119+51}{680} = 0{\cdot}539$

d) $P(D) = \frac{35}{680} = 0{\cdot}051$

Johann Gregor Mendel
(1822–1884)



Mendlov zakon dedovanja

6. Verjetnost je pomembno vlogo odigrala tudi pri nastanku genetike, danes tako pomembne znanosti. Njen začetnik Johann Gregor Mendel (1822–1884) je bil redovnik avguštinec, po rodu iz Brna, sicer pa gimnazijski profesor v tedanji Avstro-Ogrski. Pri eksperimentiranju s križanjem semen graha je leta 1860 postavil trditve, ki jih lahko štejemo za začetek nove znanosti. Mendel je opazoval in križal dve sorti graha: prva je imela gladka zrna, druga pa nagrbančena. Pri tem je včasih dobil samo nagrbančena zrna, včasih pa gladka in nagrbančena. Po tej ugotovitvi je križal zrna, ki so bila nagrbančena, in je dobil samo nagrbančene plodove, pri križanju gladkih pa vedno le gladke. Potem je križal dobljene gladke in zgrbančene in v drugi generaciji dobil sama gladka zrna. Ko pa je med seboj križal zrna druge generacije, je bila četrtina zgrbančena, tri četrtine pa je bilo gladkih. Po vsem tem je Mendel sklepal, da mora druga generacija vsebovati določen del genske zasnove zgrbančenega graha, čeprav so vsa zrna gladka. Po mnogo opazovanjih je postavil hipotezo, da je genska zasnova gladkosti zrn graha *dominantna*, kar pomeni, da bo v naslednji generaciji zrno gladko, ne glede na preostale gene, če je le prisoten gen gladkosti (drugi gen, ki določa zgrbančenost, se imenuje *recesivni* ali *prikriti* gen). Če sta »starša« druge generacije eno gladko in eno nagrbančeno seme in naključno izberemo dve gladki semeni in ju križamo, se potrdi Mendlova hipoteza: za prvo starševsko seme lahko vzamemo gladko ali zgrbančeno seme, vsako od obeh možnosti pa lahko kombiniramo z gladkim ali zgrbančenim semenom drugega starša. Tako imamo 4 možnosti:

gladko-gladko,

gladko-zgrbančeno,

zgrbančeno-gladko in

zgrbančeno-zgrbančeno.

	g	z
g	gg	gz
z	zg	zz

Iz prvih treh možnosti dobimo gladko seme, iz zadnje, četrte, pa zgrbančeno. Zato je verjetnost, da bomo pri križanju grahovih semen dobili gladka semena, $\frac{3}{4}$, verjetnost za zgrbančena semena pa je $\frac{1}{4}$. Mendel je svoje ugotovitve objavil v razpravi *Poskusi z rastlinskimi hibridi* leta 1865, vendar med sodobniki ni vzbudil zanimanja. Šele leta 1900 so trije znanstveniki neodvisno potrdili Mendlovo odkritje.

NALOGE

442. Izmed 16 dijakinj in 14 dijakov izberemo eno osebo. Kolikšna je verjetnost, da oseba ni dijak?

443. Iz posode s 5 rdečimi, 3 modrimi in 2 zelenima kroglicama naključno potegnemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da ni modra?

444. Verjetnost, da šolsko nogometno moštvo dá na tekmi vsaj en gol, je 0˙6. Kolikšna je verjetnost, da ne dá nobenega gola?

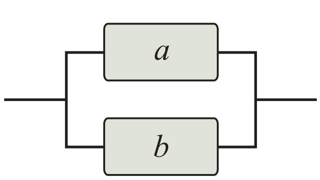
445. Štiri kovance za 1 evro in štiri kovance za 2 evra naključno postavimo v vrsto. Kolikšna je verjetnost, da bo kovanec za 1 evro na začetku in na koncu vrste?

446. Na karticah so zapisana vsa naravna števila od 1 do 200. Kolikšna je verjetnost, da bo naključno izvlečeno število deljivo z 2 ali s 5?

447. Igralci A, B in C za igro uporabljajo neobičajno označene kocke. Kocka igralca A ima dve enici, dve šestici in dve osmici, kocka igralca B ima dve trojki, dve petki in dve sedmici, kocka igralca C pa dve dvojki, dve štirici in dve devetki. Vsak vrže kocko. Zmaga tisti z višjo številko. Kolikšna je verjetnost, da v dvoboju med A in B zmaga A, da v dvoboju med A in C zmaga C in da v dvoboju med B in C zmaga B?

448. Vlak zamuja z verjetnostjo 0˙02. V koliko odstotkih je vlak točen?

449. Na sliki je preprosto vezje iz komponent a in b, ki sta vezani vzporedno. Vezje deluje, če deluje vsaj ena od komponent. Naj dogodek A pomeni, da deluje komponenta a, in dogodek B, da deluje komponenta b. Izračunajte verjetnost, da vezje deluje, če je $P(A) = 0˙99$, $P(B) = 0˙98$ in $P(A \cap B) = 0˙9702$.



450. V vrečki je 200 belih in modrih kroglic. Verjetnost, da iz vrečke potegnemo modro kroglico, je 0˙2. Izračunajte verjetnost, da iz vrečke, ki smo ji dodali 100 belih kroglic, izvlečemo belo kroglico.

451. V zavojčku je 20 čokoladnih bombonov treh okusov, 6 od njih je mentolovih. Verjetnost, da iz zavoja potegnemo bombon z okusom kave, je 0˙25. Kolikšna je verjetnost, da ima naključno izbrani bombon okus po kavi ali mentolu?

452. Katarina naključno izbere dve različni števili izmed števil 8, 9 in 10 in ju sešteje, Mojca pa naključno izbere dve števili izmed 3, 5 in 6 in ju zmnoži. Kolikšna je verjetnost, da bo Katarina dobila večje število od Mojce?

453. Verjetnost, da goljufiv kovanec pokaže »moža«, je 0˙85. Kolikšna je verjetnost, da pokaže cifro?

454. Otroci iz štirih listkov s števkami 1, 2, 3 in 4 naključno sestavljajo štirimestna števila. Kolikšna je verjetnost, da bo sestavljeno število večje od 4200?

455. Vržemo tri poštene igralne kocke različnih barv. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
a) A: vse kocke pokažejo 6 pik,
b) B: vse kocke pokažejo različno število pik,
c) C: na nobeni kocki ne pade 6 pik,
č) $Č$: vsaj na eni kocki pade 1 pika,
d) D: na dveh kockah pade isto število pik,
e) E: natanko na eni kocki pade 5 pik.

456. V posodi je 10 kroglic enake velikosti: 2 beli, 3 črne in 5 rdečih. Iz posode hkrati vzamemo 2 kroglici. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
a) A: obe kroglici sta iste barve,
b) B: vsaj ena kroglica je bela,
c) C: natanko ena kroglica je rdeča,
č) $Č$: nobena kroglica ni rdeča ali črna,
d) D: ena kroglica je bela, ena pa črna,
e) E: ena od kroglic je zelena,
f) F: kroglici sta različnih barv.

457. Izračunajte $P(A \cap B)$, če je $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ in $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$.

458. Izračunajte $P(A \cup B)$, če je $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ in $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

459. Izračunajte $P(A' \cap B)$ in $P(A \cup B)$, če poznate $P(A') = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

460. Šestčlanska družina Jug in štiričlanska družina Sever se odpravita v kino. Otroci kupijo vstopnice in jih naključno razdelijo. Kolikšne so verjetnosti dogodkov, da:

a) A: člani iste družine sedijo skupaj,
b) B: starši sedijo skupaj in otroci skupaj,
c) C: starši sedijo skupaj,
č) $Č$: otroci sedijo skupaj med starši (ob strani je vsaj en od staršev),
d) D: otroci iste družine sedijo med staršema?

461. Od 10 deklet na tečaju je 6 črnolask. Naključno izberemo dve dekleti. Natančno izračunajte verjetnost, da bo izbrana vsaj ena črnolaska.

462. Štiri učbenike *Tempus* in šest učbenikov *Spatium* naključno zložimo na kup. Kolikšna je verjetnost, da bodo učbeniki *Spatium* spodaj, učbeniki *Tempus* pa zgoraj?

463. Ruleta je ena najbolj priljubljenih iger na srečo. Obstajata dve različici: francoska in ameriška. Glavni element francoske rulete je vrteči se cilinder s 37 predalčki, na katerih so napisana števila od 0 do 36; ničla je zelene barve, pol drugih števil je rdečih in pol črnih in niso razporejene po velikosti. Smisel igre je, da igralec predvidi, v katerem predalčku se bo ustavila kroglica, ki jo vodja igre ali krupje vrže na vrteči se cilinder z oštevilčenimi predalčki. Svoje predvidevanje oziroma *stavo* pokaže tako, da položi enega ali več žetonov na ustrezno polje na igralni mizi ob cilindru.

Poglejmo nekaj ***enostavnih stav*** oziroma zaključkov igre:

rdeče:
zmagovalna številka bo rdeča,

črno:
zmagovalna številka bo črna,

par:
številka bo soda,

impar:
številka bo liha,

manque:
številka bo med 1 in vključno 18,

passe:
številka bo med 19 in vključno 36,

premiére douzanine:
številka bo med 1 in vključno 12,

deuxieme douzanine:
številka bo med 13 in vključno 24,

derniére douzanine:
številka bo med 25 in vključno 36,

kolona:
zmagovalna številka bo v enem od navpičnih stolpcev 12 številk;

preostale stave:

šestina:
zmagovalna številka bo ena od šestih izbranih številk,

križ:
številka bo ena od štirih izbranih številk,

prečnica:
številka bo ena od treh izbranih,

konj:
številka bo ena od dveh izbranih,

polno:
izbrana številka bo zmagala.

Če se kroglica ustavi na *ničli*, igralci z enostavnimi stavami izgubijo pol stave, lahko nadaljujejo naslednjo igro ali pa jim pol stave izplačajo.

Izračunajte verjetnosti dogodkov:

a) A: zmagovalna številka bo *rdeča* ali *par*,
b) B: zmagal bo igralec, ki je stavil na *premiére douzaine*,
c) C: zmagal bo igralec, ki je stavil na *passe* in *impaire*,
č) $Č$: kroglica se bo ustavila na ničli,
d) D: kroglica ne bo pristala na *koloni* s številko 35,
e) E: zmagal bo igralec, ki je stavil *šestino*,
f) F: zmagal bo igralec s stavo na srednjo *kolono* ali eno od *prečnic*.

464. Četrti razred je izdelalo 30 dijakov: 17 deklet in 13 fantov. Pet (od tega tri dekleta) je bilo pohvaljenih na maturi. Na slepo izberemo dijaka. Kolikšna je verjetnost, da bo izbrano dekle ali eden od pohvaljenih?

465. V bombonjeri je 15 na pogled enakih bombonov, vendar ima 7 bombonov sadni nadev, 8 bombonov pa karamelnega. Iz bombonjere hkrati vzamemo dva bombona. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
a) A: oba bombona imata enak okus,
b) B: vsaj en bombon je sadni,
c) C: bombona sta različnih okusov,
č) $\check{C}$: oba bombona sta karamelna.

466. Iz slovenske abecede naključno izberemo eno črko. Kolikšne so verjetnosti dogodkov, da:
a) A: izberemo šumnik,
b) B: izberemo soglasnik,
c) C: izberemo sičnik ali samoglasnik,
č) $\check{C}$: izberemo samoglasnik,
d) D: izberemo šumnik ali soglasnik?

467. Na mizi leži 28 ploščic igre domino (od 0 do 6 pik) in vse so obrnjene tako, da pike niso vidne. Izberemo eno od domin. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
a) A: domina je »toplar« – na obeh straneh ima enako število pik,
b) B: vsota pik na domini je deljiva s 3,
c) C: obe števili na domini sta lihi,
č) $\check{C}$: eno število na domini je liho, drugo pa sodo (0 štejemo kot sodo število).

468. Na delovnem taboru sodeluje 5 deklet in 7 fantov. V vrsto se postavijo povsem naključno. Kolikšna je verjetnost, da stojijo fantje skupaj in dekleta skupaj?

469. Štirimestna števila so sestavljena iz različnih števk: 1, 2, 3 in 4. Kolikšna je verjetnost, da izmed vseh teh števil izberemo število, ki je deljivo s 4?

470. Martin je s šestimi prijatelji odigral teniški turnir, tako da je vsak enkrat igral z vsakim. Dobil je 4 tekme, dve pa izgubil. Kolikšna je verjetnost, da izmed vseh zapisnikov po koncu turnirja na slepo izberemo zapisnik tekme, v kateri Martin ni izgubil?

471. Štiri še neopredeljene volivce vprašamo, kako bi glasovali na volitvah za župana. Kolikšna je verjetnost dogodkov:
a) A: dva bosta glasovala za in dva proti ter
b) B: župan bo izvoljen z vsaj polovico od teh štirih glasov?

472. Vržemo tri kovance in vsaj eden pokaže cifro. Kolikšna je verjetnost, da je na vsaj enem kovancu mož?

473. Bomboni smarties so v sedmih barvah. V kupljenem zavojčku je 7 rdečih, 2 modra, 4 rumeni, 4 zeleni, 5 rjavih, 5 oranžnih in 3 roza. Iz zavojčka naključno stresemo tri bombone. Izračunajte verjetnosti:
a) A: vsi so različnih barv od rdeče, rumene, rjave ali oranžne,
b) B: vsi so enake barve,
c) C: vsi so rdeči,
č) $\check{C}$: eden je zelen, eden rdeč in eden rjav,
d) D: vsaj eden je zelen,
e) E: dva sta modra, eden oranžen,
f) F: vsi so modri,
g) H: dva sta iste barve, tretji je roza.

474. V škatli so listki, na katerih so napisana števila od 1 do 30. Kolikšna je verjetnost, da število na naključno izvlečenem listku:
a) A: ni deljivo s 3,
b) B: je praštevilo,
c) C: je sodo in deljivo s 5,
č) $\check{C}$: je deljivo s 3 ali 5,
d) D: je mnogokratnik števila 7,
e) E: je večje od 4 in kvečjemu enako 17?

475. Na plesu se zabava 6 poročenih parov. Naključno izberemo dve osebi izmed njih. Kolikšne so verjetnosti dogodkov:
a) A: osebi sta poročen par,
b) B: osebi sta različnega spola in nista zakonca,
c) C: osebi sta istega spola?
č) Kaj sestavljajo dogodki A, B in C?

Verjetnost produkta dogodkov

Preden se lotimo računanja verjetnosti produkta dogodkov, naredimo zgled.

ZGLED

V posodi imamo oštevilčene listke od 1 do 10. Na slepo izberemo en listek. Izračunajmo verjetnost, da je na izbranem listku liho število, deljivo s 3.

Dogodek A, ki smo ga opisali, očitno ni elementaren, ampak je produkt dveh elementarnih dogodkov: $A = A_1 \cap A_2$.

A_1: izbrano število je liho

A_2: izbrano število je deljivo s 3

Ko pomislimo, katera števila od 1 do 10 pridejo v poštev, dobimo 3 in 9.

Torej sta za izbrani dogodek dva ugodna elementarna dogodka, vseh elementarnih dogodkov poskusa pa je 10. Izračunana verjetnost dogodka A je

$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Če bi poskušali verjetnost produkta dogodkov računati enako kot verjetnost vsote nezdružljivih dogodkov, bi naredili grdo napako:

$$P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}\text{, torej } P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1) \cdot P(A_2)$$

Očitno moramo pri računanju produkta dogodkov paziti podobno, kot smo pri računanju verjetnosti vsote pazili, ali sta dogodka združljiva ali nezdružljiva.

Definicija:
Dogodka ***A* in *B* sta neodvisna**, če in samo če je verjetnost produkta dogodkov enaka produktu verjetnosti posameznih dogodkov.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

V tem primeru verjetnost enega dogodka ne vpliva na izračun verjetnosti drugega dogodka.

Definicija:
Dogodek ***B* je odvisen od dogodka *A*** oziroma dogodka ***A* in *B* sta odvisna**, če je verjetnost dogodka B odvisna od tega, ali se je dogodek A zgodil ali ne.

Računanje verjetnosti produkta dogodkov ter s tem neodvisnost in odvisnost dogodkov bomo pokazali na nekaj zgledih.

ZGLEDI

1. Dvakrat zapored vržemo igralno kocko. Število pik v prvem metu naj bo dogodek E, število pik v drugem metu pa dogodek F. Izračunajmo verjetnosti sestavljenih dogodkov:

A: prvič pade sodo število pik, drugič pa število pik, deljivo s 3,

B: obakrat pade praštevilo pik,

C: padeta šestica in enka,

D: prvič pade število pik, ki je deljivo s tri, drugič pa število pik, manjše od 4.

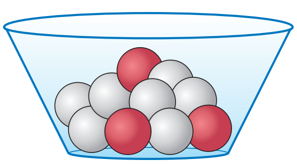
a) Dogodek A je produkt dogodkov E in F, ki sta očitno neodvisna.
$P(E)=\frac{3}{6}$, $P(F)=\frac{2}{6}$, $P(A)=P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

b) Tudi tokrat sta dogodka »pade praštevilo pik« neodvisna.
$P(B)=P(E)\cdot P(F)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$

c) Ker ni posebej rečeno, v katerem metu je padla šestica in v katerem enka, je dogodek B vsota dogodka, ko najprej pade šestica in potem enka, in dogodka, ko najprej pade enka in potem šestica. Obakrat pa sta elementarna dogodka, ki sestavljata produkt, neodvisna.
$P(C)=P(E_1)\cdot P(F_1)+P(E_2)\cdot P(F_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{18}$

d) Spet sta dogodka, ki sestavljata produkt, neodvisna.
$P(D)=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$

2. V posodi je 7 belih in 3 rdeče kroglice. Iz posode naključno potegnemo tri kroglice zapored in jih ne vrnemo vanjo. Kolikšna je verjetnost dogodka A, da bodo kroglice iste barve?



Dogodek A je vsota nezdružljivih dogodkov B in C, da potegnemo ali 3 bele kroglice ali 3 rdeče kroglice. Vsak od dogodkov B in C je produkt treh dogodkov, da potegnemo zapored tri bele in da potegnemo zapored tri rdeče kroglice.

Poglejmo, kako je z verjetnostjo dogodka B: verjetnost dogodka B_1, da je prva kroglica bela, je $P(B_1)=\frac{7}{10}$. Verjetnost, da je tudi druga kroglica bela, je odvisna od tega, kaj se je zgodilo prej (ko smo izvlekli prvo kroglico), zato je za drugo belo kroglico ugodnih 6 elementarnih dogodkov od vseh 9 elementarnih dogodkov (v posodi je ena bela kroglica manj, ker smo jo že izvlekli, s tem pa se je spremenilo tudi število vseh kroglic v posodi).

Dejstvo, da je verjetnost druge bele kroglice odvisna od prve bele kroglice, zapišemo $P(B_2|B_1)=\frac{6}{9}$ in jo imenujemo **pogojna verjetnost** dogodka. Da izvlečemo še tretjo belo kroglico, je odvisno od predhodnih dveh dogodkov $P(B_3|B_1B_2)=\frac{5}{8}$.

Verjetnost dogodka B je produkt vseh treh izračunanih verjetnosti.

$$P(B)=P(B_1)\cdot P(B_2|B_1)\cdot P(B_3|B_1B_2)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}$$

Podobno izračunamo verjetnost, da bodo vse tri kroglice rdeče.

$$P(C)=P(C_1)\cdot P(C_2|C_1)\cdot P(C_3|C_1C_2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{120}$$

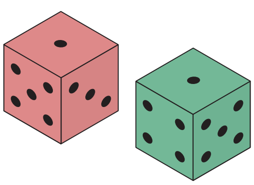
Verjetnost, da bodo izvlečene kroglice iste barve, je

$$P(A)=P(B)+P(C)=\frac{7}{24}+\frac{1}{120}=\frac{3}{10}.$$

Nalogo lahko rešimo še drugače, in sicer tako, da preoblikujemo poskus. Namesto da potegnemo iz posode tri kroglice zapored, potegnemo vse tri kroglice hkrati. Vseh elementarnih dogodkov tega poskusa je toliko, kot je podmnožic s tremi kroglicami iz množice 10 kroglic, ugodni dogodki pa so podmnožice, ki vključujejo le kroglice iste barve.

$$P(A)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}+\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{\binom{7}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{10}$$

3. Naj bo tokrat poskus met rdeče in zelene igralne kocke. Kako je z verjetnostmi naslednjih dogodkov:



A: rdeča kocka pokaže sodo pik, zelena pa liho pik,

B: rdeča pokaže 1 piko in vsota pik na obeh kockah je sodo število,

C: na nobeni kocki ne pade 1 pika in vsota pik je sodo število,

D: kocki pokažeta različno število pik in vsota je sodo število,

E: nobena od kock ne pokaže 1 pike, obe pa pokažeta isto število pik?

- Dogodek A je produkt dogodkov A_1 in A_2.
  Verjetnost produkta je $P(A_1\cap A_2)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.
  in je enaka produktu verjetnosti posameznih dogodkov
  $P(A_1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.
  $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$, iz česar vidimo, da sta dogodka A_1 in A_2 *neodvisna*.
- Dogodek B naj bo produkt dogodkov B_1 in B_2. Njegova verjetnost je $P(B_1\cap B_2)=\frac{3}{36}$,
  saj so od vseh 36 elementarnih dogodkov zanj ugodni le trije: (1, 1), (1, 3) in (1, 5).
  Izračunajmo še verjetnosti posameznih dogodkov: $P(B_1)=\frac{1}{6}$,
  $P(B_2)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.
  Ko primerjamo verjetnost produkta s produktom verjetnosti
  $P(B_1)\cdot P(B_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$,
  vidimo, da sta dogodka B_1 in B_2 *neodvisna*.

- Verjetnost dogodka $C = C_1 \cap C_2$ je kvocient med številom urejenih parov, ki na prvem mestu nimajo enke in je hkrati vsota pik sodo število – ti pari so (2, 2), (2, 4), (2, 6), …, (4, 6), (6, 6), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5) in jih je 13 – in med številom vseh urejenih parov, ki jih je 36:
  $P(C_1 \cap C_2) = \frac{13}{36}$.

  Verjetnost dogodka C_1 je $P(C_1) = \frac{25}{36}$. Ugodni elementarni dogodki so vsi urejeni pari, kjer na nobenem mestu ni 1, teh pa je $36 - 11 = 25$.

  Verjetnost dogodka C_2 je $P(C_2) = \frac{18}{36}$, saj je sodih vsot ravno polovica vseh elementarnih dogodkov.

  Ko primerjamo verjetnost produkta s produktom verjetnosti $\frac{25}{36} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{13}{36}$, vidimo, da sta dogodka C_1 in C_2 *odvisna*.

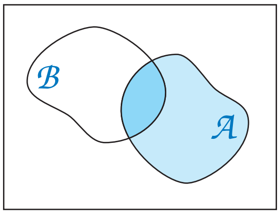
- Podobno naredimo še za dogodek $D = D_1 \cap D_2$.
  $P(D_1 \cap D_2) = \frac{18}{36}$

  $P(D_1) = \frac{5}{6}$, $P(D_2) = \frac{1}{2}$

  Dogodka D_1 in D_2 sta *odvisna*, ker je $P(D_1 \cap D_2) \neq P(D_1) \cdot P(D_2)$ oz. $\frac{1}{2} \neq \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}$.

- Tudi dogodka E_1 in E_2, ki sestavljata produkt $E = E_1 \cap E_2$, sta *odvisna*. Verjetnost produkta spet ni enaka produktu verjetnosti.
  $P(E_1 \cap E_2) = \frac{5}{36} = \frac{30}{216}$, $P(E_1) = \frac{25}{36}$, $P(E_2) = \frac{1}{6}$; $\frac{30}{216} > \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{6}$

Zdaj je že čas, da pokažemo, kako izračunamo **pogojno verjetnost** $P(B|A)$ dogodka B, ki je odvisen od dogodka A. Pomagali si bomo z Vennovim diagramom, v katerem narišemo odvisna dogodka A in B (če sta odvisna, sta gotovo tudi združljiva).



Ugodni elementarni dogodki dogodka $B|A$ so enaki številu k ugodnih elementarnih dogodkov produkta A in B, število elementarnih dogodkov dogodka $B|A$ pa je ravno število m ugodnih elementarnih dogodkov dogodka A glede na vse elementarne dogodke vzorčnega prostora dogodkov A in B. Zato je $P(B|A) = \frac{k}{m}$.

Če števec in imenovalec delimo z n, to je s številom vseh elementarnih dogodkov poskusa, dobimo

$$P(B|A)=\frac{k}{m}=\frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Tako smo dobili formulo za izračun pogojne verjetnosti, pa tudi formulo za verjetnost produkta odvisnih dogodkov.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$$

Če sta dogodka A in B neodvisna, je $P(B|A)=P(B)$; to imenujemo tudi **brezpogojna verjetnost**.

ZGLEDI

1. Poskus je sestavljen iz meta dveh različnih kock. Kolikšna je verjetnost, da je na eni od kock padla šestica, če kocki pokažeta vsoto 8 pik?

Vprašanje lahko postavimo tudi drugače: izračunati je treba verjetnost dogodka, da ena od kock pokaže 6 pik, pri pogoju, da pade vsota 8 pik, oziroma pogojno verjetnost $P(B|A)$, če:

A: je vsota pik na obeh kockah 8,

B: ena od kock pokaže 6.

Za izračun pogojne verjetnosti potrebujemo verjetnost produkta $A\cap B$ in verjetnost dogodka A. Dogodek $A\cap B$ pomeni, da je vsota pik na kockah 8 in hkrati ena kocka pokaže 6. Ugodna elementarna dogodka produkta sta (2, 6) in (6, 2), in zato je

$P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

Za dogodek A je ugodnih 5 elementarnih dogodkov: to so urejeni pari (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2).

$P(A)=\frac{5}{36}$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{36}}=\frac{2}{5}$$

2. Izmed listkov s števili od 1 do 11 izberemo naključno dva listka. Kolikšna je verjetnost, da sta izbrani števili lihi, če je vsota sodo število?

A: vsota je sodo število.

B: izbrani števili sta lihi.

Računamo pogojno verjetnost $P(B|A)$.

Vsota je sodo število, če sta sumanda lihi ali sodi števili.

$$P(A)=\frac{C_5^2+C_6^2}{C_{11}^2}=\frac{20+30}{110}=\frac{5}{11}$$

Produkt dogodkov sestavljajo vsi lihi sumandi, zato je

$$P(A\cap B)=\frac{C_6^2}{C_{11}^2}=\frac{30}{110}=\frac{3}{11} \text{ in rezultat je } P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{11}}{\frac{5}{11}}=\frac{3}{5}.$$

Kolikšna je verjetnost, da je vsota soda, če sta izbrani števili lihi? Po zdravi pameti mora to biti gotov dogodek, a vseeno se prepričajmo z računom.

$$P(B)=\frac{C_6^2}{C_{11}^2}=\frac{30}{110}=\frac{3}{11}$$

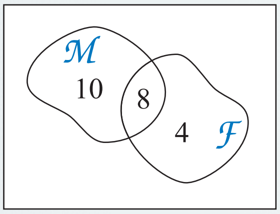
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{11}}{\frac{3}{11}}=1$$

3. Znanje matematike je po statističnih podatkih močno povezano z znanjem fizike. Na neki šoli ima 18 % dijakov popravni izpit iz matematike, 12 % iz fizike in 8 % iz obeh predmetov. Na slepo izberemo dijaka.

a) Če ni bil uspešen pri fiziki, kolikšna je verjetnost, da je bil nezadosten tudi pri matematiki?

b) Če ni naredil matematike, kolikšna je verjetnost, da tudi pri fiziki ni šlo?

c) Kolikšna je verjetnost, da je bil nezadosten pri matematiki ali fiziki?



Najprej se domenimo za imena dogodkov:

M: nezadostno pri matematiki.

F: nezadostno pri fiziki.

a) Izračunati moramo pogojno verjetnost $P(M|F)$.

$$P(M|F)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

b) $P(F|M)=\frac{P(M\cap F)}{P(M)}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$

c) $P(M\cup F)=P(M)+P(F)-P(M\cap F)=0{\cdot}18+0{\cdot}12-0{\cdot}08=0{\cdot}22$

4. Dane so verjetnosti $P(B|A) = 0{,}2$, $P(A' \cap B) = 0{,}3$ in $P(A \cup B) = 0{,}8$. Izračunajmo verjetnosti $P(B)$ in $P(A|B)$.

$P(A' \cap B) = P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
Tako dobimo enačbo $P(A \cap B) = P(B) - 0{,}3$.

Iz enakosti $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ dobimo enačbo
$P(A \cap B) = P(A) \cdot 0{,}2$,

iz enakosti $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ pa
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0{,}8$.

Po dve in dve enačbi izenačimo in dobimo sistem
$0{,}8 \cdot P(A) + P(B) = 0{,}8$
$-0{,}2 \cdot P(A) + P(B) = 0{,}3$
z rešitvama $P(A) = 0{,}5$ in $P(B) = 0{,}4$.

Odgovor na drugo vprašanje sledi iz enakosti.
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$
$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}2}{0{,}4} = 0{,}25$

NALOGE

476. V torbi so 3 zelene in 3 rdeče ploščice. Kateri od spodnjih dogodkov povzročijo, da je dogodek *A: iz vreče potegnemo zeleno ploščico* bolj verjeten?
a) Dodamo eno rdečo ploščico.
b) Dodamo dve modri ploščici.
c) Dodamo eno zeleno ploščico.
č) Odstranimo 2 rdeči in eno zeleno ploščico.

477. V torbi so 4 zelene ploščice in 5 rdečih. Kateri od spodnjih dogodkov poveča verjetnost dogodka *B: iz vreče potegnemo 2 rdeči ploščici*?
a) Odstranimo eno zeleno ploščico.
b) Dodamo eno rdečo in 1 zeleno ploščico.
c) Odstranimo 1 rdečo ploščico.
č) Dodamo dve rumeni ploščici.

478. Vržemo dve različni igralni kocki. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
a) A: obe kocki pokažeta »1«,
b) B: vsaj na eni kocki je »6«,
c) C: kocki pokažeta lihi števili,
č) $Č$: na prvi kocki je praštevilo, na drugi pa sodo število,
d) D: na eni kocki je število, deljivo s 3, na eni kocki pa število, večje od 4,
e) E: vsota pik na obeh kockah je 9.

479. V Evropi se po statističnih podatkih z varnostnim pasom pripenja 43 % voznikov. Naključno izberemo dva voznika. Izračunajte verjetnost, da se oba pripenjata med vožnjo.

480. Iz kupa 32 kart zapored izvlečemo tri karte. Kart ne vračamo. Kolikšna je verjetnost, da so to po vrsti as, kralj in kraljica?

481. Vržemo dve igralni kocki. Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik enaka 2?

482. Kolikšna je verjetnost, da pri dveh metih igralne kocke najprej pade 2 in je vsota pik pri obeh metih 6 ali 7?

483. Hkrati vržemo rdečo in zeleno igralno kocko. Kolikšna je verjetnost, da padeta 4 in 5?

484. V študentskem naselju 47 % študentov dela prek študentskega servisa, 78 % od teh študentov pa prejema tudi štipendijo. Če naključno izberemo študenta iz študentskega naselja, kolikšna je verjetnost, da dela prek študentskega servisa in ima štipendijo?

485. Avtobus odpelje iz Kopra z 18 potniki. V Postojni jih vstopi še 12, v Logatcu pa še 20. V Ljubljani naključno izberemo potnika. Kolikšna je verjetnost, da:
A: je potnik vstopil v Logatcu,
B: se je potnik peljal vso pot,
C: potnik ni vstopil v Kopru?

486. V šoli naključno izberemo osebo. Verjetnost, da je dekle, je $\frac{11}{20}$, da piše z levo roko, je $\frac{1}{11}$, in da nosi očala, je $\frac{4}{13}$. Izračunajte verjetnosti, da je slučajno izbrana oseba:
A: fant,
B: piše z desno roko,
C: ne nosi očal.

487. Na glasbeni šoli se 14 % dijakov uči klavir in violino, 67 % dijakov pa se uči klavir. Kolikšna je verjetnost, da se naključno izbrani dijak, ki se uči klavir, uči tudi violino?

488. Iz mreže 4×4 enotskih kvadratkov naključno izberemo dva kvadratka. Kolikšna je verjetnost, da izbrana kvadratka nimata skupne stranice?

489. Vržemo dve pošteni kocki in manjše število odštejemo od večjega.
a) Kolikšna je verjetnost, da dobimo rezultat 4?
b) Kolikšna je verjetnost, da je razlika števil enaka 0?
c) Katera razlika je najbolj verjetna in kolikšna je ta verjetnost?

490. Matej ima tri enako velike kartončke. Kartonček A je na obeh straneh bel, B je na obeh straneh črn, C pa je na eni strani bel in na drugi črn. Matej kartončke premeša in jih postavi na mizo enega vrh drugega, na vrhu je črna barva. Kolikšna je verjetnost, da je na drugi strani zgornji kartonček bel? Kaj pa brez pogoja?

491. Iz tovarne v trgovino pošljejo 100 televizorjev, od katerih je 6 % pokvarjenih. Kolikšna je verjetnost, da bo kupec, ki kupi dva televizorja, dobil oba aparata pokvarjena?

492. Vržemo kocko. Dogodek A pomeni: pade večkratnik števila 3, dogodek B: pade sodo število pik. Ali sta dogodka A in B neodvisna?

493. Kocko vržemo dvakrat. Dogodek A: prvič pade liho število, dogodek B: drugič pade liho število. Ali sta dogodka neodvisna?

494. Vržemo tri različne kovance in definiramo tri dogodke.
A: Trikrat pade mož ali trikrat pade cifra.
B: Vsaj dvakrat pade mož.
C: Največ dvakrat pade mož.
Ugotovite, ali sta po dva od teh dogodkov odvisna.

495. V glasbenem razredu je 30 študentov: 20 jih igra violino, 17 jih študira solopetje, 15 jih dela oboje.
a) Izračunajte verjetnost dogodka, da je naključno izbrani študent solopevec, pri pogoju, da igra violino.
b) Izračunajte verjetnost dogodka, da naključno izbrani študent ni violinist, če je solopevec.
c) Ugotovite, ali sta dogodka »študent je violinist« in »študent je solopevec, pri pogoju, da igra violino« neodvisna.

496. V registru prebivalstva na slepo izberejo mamo z dvema otrokoma. Ko jo vprašajo, ali ima vsaj enega dečka, odgovori z da. Privzemimo, da je verjetnost rojstva deklice enaka verjetnosti rojstva dečka. Kolikšna je verjetnost, da je vprašana gospa mati dveh dečkov?

497. Iz posode, v kateri so 3 bele in 2 rdeči kroglici, na slepo potegnemo belo kroglico. Potem potegnemo še eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da bomo iz posode še enkrat potegnili belo kroglico?

498. Na neki srednji šoli je 68 % deklet in 32 % fantov; 30 % deklet biva v dijaškem domu, 75 % fantov pa ne. Naključno izberemo enega od njih.
a) Kolikšna je verjetnost, da bo izbran dijak iz dijaškega doma?
b) Kolikšna je verjetnost, da bo izbran nekdo, ki ne živi v dijaškem domu, če vemo, da je dijakinja?

499. Kolikšna je verjetnost, da v metu dveh kock pade 6 pik, pri pogoju, da je vsota pik na obeh kockah enaka 7?

500. V škatli je 10 enakih kartončkov s števili od 1 do 10. Naključno izberemo enega. Kolikšna je verjetnost, da je število na kartončku sodo, pri pogoju, da je večje od 3?

501. Študent ima izpit v dveh delih. Verjetnost, da bo uspešen pri prvem delu izpita, je 75 %, verjetnost, da bo uspešen pri obeh delih, pa je 50 %. Izračunajte verjetnost, da bo študent naredil drugi del izpita, pri pogoju, da bo naredil prvi del izpita.

502. Kocko vržemo trikrat. Dogodek A pomeni, da v tretjem metu pade 4, dogodek B, da v prvem metu pade 6, v drugem metu pa 5. Izračunajte verjetnost, da se zgodi dogodek A, pri pogoju, da se zgodi dogodek B.

503. Kocko vržemo dvakrat in vsota pik je 6. Kolikšna je verjetnost, da je 4 padla vsaj enkrat?

504. Izračunajte verjetnost dogodka, da iz kupa 32 kart potegnemo pika, pri pogoju, da je izbrana karta črne barve.

505. Anže, Beti, Cene, Daša in Emil so rezerve za mešano šolsko ekipo. Kolikšna je verjetnost, da bosta izbrani dekleti, če sta se zaradi bolezni sprostili dve mesti?

506. Kolikšna je verjetnost, da pri metu 4 kock vse pokažejo 1?

507. Vržemo dve kocki in dogodek je produkt števil, ki ju pokažeta. Če je verjetnost dogodka $\frac{13}{18}$, potem je produkt padlih števil vsaj N. Izračunajte velikost števila N.

508. V veliki košari so 3 rdeče pomaranče, 2 veliki jabolki in 5 navadnih pomaranč. Na slepo sežemo v košaro in zagrabimo dva sadeža. Kolikšna je verjetnost, da sta sadeža:
a) iste vrste,
b) različne vrste?

509. Tadej ima poln žep drobiža: 8 kovancev po 5 centov, 7 kovancev po 10 centov, 11 kovancev po 20 centov, 5 kovancev po 1 evro in 2 kovanca za 2 evra. Iz žepa naenkrat na slepo potegne 5 kovancev. Kolikšna je verjetnost, da so vsi kovanci:
a) enakih vrednosti,
b) različnih vrednosti?

510. V vrečki so 5 rdečih, 3 modre in 4 zelene kroglice. Iz vrečke potegnemo tri zapored in prvih dveh ne vrnemo. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
a) A: vse so modre,
b) B: vse so iste barve,
c) C: vse so različnih barv.

511. Naj bo V vsota točk, ki pade pri metu dveh poštenih igralnih kock. Z A označimo dogodek, da je V deljiva s 5, z B pa dogodek, da velja $V < 6$. Izračunajte.
a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A \cap B)$
č) $P(A \cup B)$
d) $P(A|B)$
e) $P(B|A)$

512. Na kartončkih so napisana števila od 1 do 5. Kartončke damo v škatlo in na slepo izberemo enega. Dogodek A pomeni, da je izbrano število a manjše od 4, dogodek B pa, da je število liho. Izračunajte verjetnosti.
a) $P(A)$
b) $P(B)$
c) $P(A \cup B)$
č) $P(A|B)$
d) $P(B|A)$

513. Mojca, Manca in Tinca neodvisno rešijo nalogo z verjetnostjo $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$. Izračunajte verjetnost dogodkov:
a) A: natanko ena od njih reši nalogo,
b) B: vse rešijo nalogo,
c) C: vsaj dve rešita nalogo.

514. Štiri dekleta in štirje fantje se v piceriji naključno usedejo za okroglo mizo. Kolikšna je verjetnost, da sedijo izmenično fantje in dekleta?

515. Mojca je zvečer pripravljala šolsko torbo za naslednji dan in ugotovila, da ji v škatli, v kateri bi moralo biti 7 krogcev (3 modri in 4 rdeči) in 11 kvadratkov (6 modrih in 5 rdečih), dva kosa manjkata. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
a) A: izgubljena kosa sta enake oblike,
b) B: izgubljena kosa sta iste barve,
c) C: izgubljena kosa sta iste oblike in iste barve,
č) $\check{C}$: izgubljena kosa sta iste oblike pri pogoju, da sta iste barve.

516. Kolikšna je verjetnost, da pri metu dveh kock obe pokažeta isto število pik pri pogoju, da je vsota pik 8?

517. Gospod Levi Right ima v predalu garderobne omare 7 sivih in 8 črnih nogavic. Zjutraj, ko hiti v službo in je še temno, zagrabi zapored dve nogavici. Kolikšna je verjetnost, da se bosta barvi nogavic ujemali?

518. Človeško kri lahko razdelimo v 4 skupine: A, B, AB in 0. Neodvisno od tega pa ima kri vsakega človeka še faktor Rh, ki je lahko pozitiven ali negativen.

Neka skupina ljudi ima tako krvno strukturo:

A	B	AB	0
38 %	18 %	36 %	8 %

Porazdelitev faktorja Rh pa je razvidna iz preglednice.

	A	B	AB	0
Rh$^+$	85 %	81 %	83 %	86 %
Rh$^-$	15 %	19 %	17 %	14 %

Na slepo izberemo človeka iz skupine. Izračunajte verjetnosti dogodkov:
a) A: izbranec ima kri skupine A,
b) B: izbranec je univerzalni darovalec,
c) C: izbranec ima kri s faktorjem Rh$^-$,
č) $\check{C}$: izbranec ima kri skupine 0 z Rh$^+$.

519. Poskus je definiran z metom rumene in zelene igralne kocke hkrati, dogodki pa takole:
A: rumena kocka pokaže sodo število pik,
B: vsota pik na obeh kockah je 7,
C: vsota pik na obeh kockah je 8.
Izračunajte:
a) verjetnosti dogodkov A, B, C, $A \cap C$,
b) verjetnosti $P(B|A)$, $P(A|B)$,
c) verjetnosti $P(C|A)$, $P(A|C)$,
č) ugotovite, ali sta A in B neodvisna,
d) ugotovite, ali sta A in C neodvisna.

520. $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$.
Izračunajte
a) $P(A \cap B)$ in
b) $P(A|B)$, $P(A|B')$.

521. $P(A|B) = \frac{7}{10}$, $P(B|A) = \frac{7}{15}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$.
Izračunajte
a) $P(A \cap B)$ in
b) $P(A' \cap B)$.

522. V žepu imamo dva enaka kovanca, eden je pošten, drugi pa je prirejen tako, da z verjetnostjo $\frac{1}{3}$ pokaže »cifro«. Iz žepa vzamemo kovanec in po metu pokaže cifro. Izračunajte verjetnost, da je kovanec pošten.

523. Turist ima v žepu veliko kovancev po 20 centov in po 50 centov. Ko plačuje račun za 70 centov, zapored jemlje kovance iz žepa z enako verjetnostjo, ne glede na kovanec, dokler ni vsota vsaj 70 centov. Kolikšna je verjetnost dogodka, da bo blagajničarka turistu morala vrniti nekaj denarja?

524. Dogodka A in B sta neodvisna, njuni verjetnosti pa znašata: $P(A) = 2x$ in $P(B) = 3x$. Izračunajte neznano vrednost x, če je $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$.

525. Petčlanska komisija se mora sestati na enem od petih napovedanih sestankov. Vsak član komisije ima zadržek za natanko en termin, vendar so zadržki naključni in neodvisni. Kolikšna je verjetnost, da se bo dejansko sestalo vseh pet?

526. Igralni avtomat je sestavljen iz treh vrtljivih cilindrov, na vsakem je neenakomerno razporejenih 20 slik, kot je razvidno iz preglednice.

	CILINDER		
PREDMET	1	2	3
češnja	2	5	4
pomaranča	5	4	5
sliva	5	3	3
zvonec	2	4	4
melona	2	1	2
BAR	3	2	1
7	1	1	1
SKUPAJ	**20**	**20**	**20**

Najvišji dobitek *jackpot* igralnica izplača za tri *sedmice* (500 žetonov) ali za tri *bare* (200 žetonov) ali za tri melone (100 žetonov), potem so dobitki bistveno nižji: za tri zvonce 18 žetonov, za tri slive 14 žetonov, za tri pomaranče ali češnje 10 žetonov; za češnje na prvih dveh cilindrih 5 žetonov in za češnjo na prvem cilindru 3 žetone. V preostalih primerih ne dobimo nič.
Izračunajte verjetnosti dogodkov:
a) A: *jackpot* v sedmicah,
b) B: vsi trije cilindri pokažejo isto sliko,
c) C: zadnja dva cilindra sta pomaranči,
č) $Č$: dobimo vsaj 3 žetone,
d) D: dobimo vsaj 3 in največ 18 žetonov,
e) E: vsi trije cilindri pokažejo različne slike.

527. Izračunajte verjetnost, da sta oba otroka v družini fantka, pri pogoju, da je vsaj eden od otrok fantek.

528. Stric Gabrijel je za rojstni dan preizkusil srečo in kupil tri srečke: $3 \times 3 + 6$, Euro Jackpot in loto.

A: Srečka $3 \times 3 + 6$ je že natisnjena, zato stric ni sam izbral številk. Na listku je dobil 9 številk v treh vrsticah. V prvi vrsti tri številke od 1 do 8, v drugi tri številke od 9 do 17 in v tretji tri številke od 17 do 24. Spodaj je bila natisnjena tudi 6-mestna serijska številka. Žrebanje poteka tako, da iz treh bobnov zapored pridejo po tri številke za vsako vrstico, na koncu pa izžrebajo še serijsko številko. Stric je kupil eno srečko. Kolikšna je verjetnost, da bo zadel:
a) eno pravilno vrstico (dobitek je 3 evre)
b) dve pravilni vrstici (dobitek je 100 evrov)
c) tri pravilne vrstice (dobitek je 100 000 evrov)
č) tri pravilne vrstice in še serijsko številko (dobitek je 100 300 evrov)
d) nobene pravilne številke (dobitek je 10 evrov)

B: V igri Euro Jackpot žrebajo oštevilčene kroglice iz dveh bobnov. Iz prvega pet kroglic s številkami od 1 do 50 in iz drugega dve kroglici s številkami od 1 do 8. Stric je za igro vplačal štiri polja in izbral svoje »srečne« številke. Kolikšna je verjetnost, da bo zadel:
e) $5 + 2$ pravilni številki (dobitek je od 10 do 90 milijonov evrov)
f) $5 + 1$ pravilno številko
g) $4 + 0$ pravilnih številk
h) $1 + 2$ pravilni številki

C: Pri igri loto iz bobna z oštevilčenimi kroglicami od 1 do 39 izžrebajo sedem številk in še eno dodatno. Stric je vplačal 10 polj in spet izbral »srečne« kombinacije. Kolikšna je verjetnost, da bo zadel:
i) 7 pravilnih številk (garantirani dobitek je 250 000 evrov)
j) $5 + 1$ pravilno številko
k) 4 pravilne številke
l) $3 + 1$ pravilno številko

Popolna verjetnost (izbirna vsebina)

ZGLED

Tadej je imel v žepu dva po obliki in teži enaka kovanca. En kovanec je bil običajen (cifra/mož), drugi pa je imel na obeh straneh narisanega moža. Na slepo je vzel kovanec iz žepa in ga vrgel. Kolikšna je verjetnost, da je kovanec pokazal moža?

Najprej premislimo celoten poskus, ki ima dve fazi. V prvi fazi iz žepa potegnemo enega od kovancev. Ker sta po obliki in teži enaka, velja, da sta verjetnosti za oba kovanca enaki:

$P(H_1)=\frac{1}{2}$ verjetnost, da vzame pošten kovanec

$P(H_2)=\frac{1}{2}$ verjetnost, da vzame goljufiv kovanec

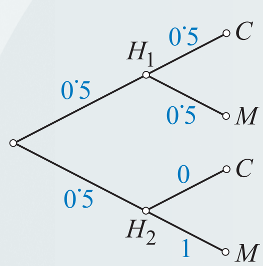
Sledi druga faza, v kateri vržemo kovanec, ki smo ga vzeli iz žepa. Verjetnost, da pade mož ali cifra, je pogojna, saj je odvisna od tega, katerega od obeh kovancev smo vrgli.

$P(C|H_1)=0{\cdot}5$ pogojna verjetnost, da pri metu poštenega kovanca pade cifra

$P(M|H_1)=0{\cdot}5$ pogojna verjetnost, da pri metu poštenega kovanca pade mož

$P(C|H_2)=0$ pogojna verjetnost, da na goljufivem kovancu pade cifra

$P(M|H_2)=1$ pogojna verjetnost, da na goljufivem kovancu pade mož



Verjetnost, da bo padel mož, lahko preberemo iz (verjetnostnega) drevesa tako, da gremo po vseh vejah in izberemo tisti dve, ki nas privedeta do »moža«:

$P(M)=P(H_1)\cdot P(M|H_1)+P(H_2)\cdot P(M|H_2)=0{\cdot}5\cdot 0{\cdot}5+0{\cdot}5\cdot 1=0{\cdot}75$

Če se dvofaznih poskusov lotimo bolj teoretično, lahko v prvi fazi predvidimo n dogodkov, od katerih se zgodi natanko eden. Te dogodke imenujemo **hipoteze** in tvorijo popoln sistem $\{H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n\}$. Od tega, katera hipoteza se je zgodila v prvi fazi, so odvisne verjetnosti iz druge faze. Verjetnost danega dogodka potem izračunamo, če poznamo verjetnosti hipotez in pogojne verjetnosti pri teh hipotezah:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)$$

ZGLEDA

1. Nuška vrže pošteno igralno kocko:
- če pade 1, seže v prvo posodo z 2 belima in 3 rdečimi kroglicami,
- če pade 2 ali 3, seže v drugo posodo z 1 belo in 4 rdečimi kroglicami,
- če pade 4, 5 ali 6, seže v tretjo posodo, v kateri so 3 bele in 2 rdeči kroglici.

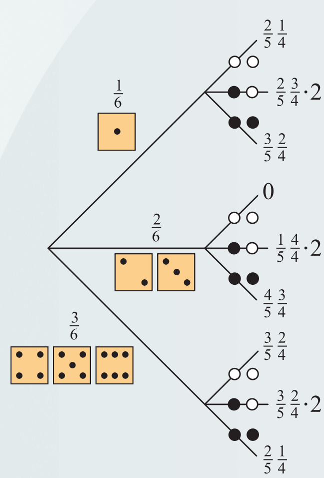
Kolikšna je verjetnost, da Nuška iz žare izvleče kroglici različnih barv?

Nuškin poskus ima dve fazi. Prva faza pomeni met kocke. V tej fazi so možni dogodki H_1, H_2 in H_3, ki tvorijo popoln sistem dogodkov. Njihove verjetnosti so znane:

$P(H_1) = \frac{1}{6}$, $P(H_2) = \frac{2}{6}$, $P(H_3) = \frac{3}{6}$

V drugi fazi poskusa iz ene od posod (odvisno od izida pri metu kocke) naključno potegnemo dve kroglici. Dogodek $\frac{M}{H_i}$ pomeni, da izbere kroglici različnih barv, pri pogoju, da je bila izbrana i-ta posoda.

Verjetnost, da iz naključno izbrane posode (odvisno od števila pik na kocki) izberemo kroglici različnih barv, lahko preberemo iz verjetnostnega drevesa. Izbrati moramo tiste veje, ki se končajo z dvema različnima kroglicama, in sešteti produkte verjetnosti. Vsi trije dogodki, ki jih dobimo, so nezdružljivi, zato je verjetnost vsote enaka vsoti verjetnosti.



$$P(M) = P(H_1)P(M|H_1) + P(H_2)P(M|H_2) + P(H_3)P(M|H_3) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot 2 + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot 2 = \frac{8}{15}$$

2. Zgled z začetka podpoglavja nadaljujmo z informacijo, da je Tadej iz žepa potegnil kovanec, ga vrgel in je pokazal moža. Kolikšna je verjetnost, da je Tadej iz žepa potegnil goljufiv kovanec? Iščemo torej verjetnost hipoteze H_2 pri pogoju, da je kovanec pokazal moža.

Spomnimo se na obrazec za računanje pogojne verjetnosti: $P(M \cap H_2) = P(M)P(H_2|M) = P(H_2)P(M|H_2)$, iz katerega izračunamo iskano verjetnost.

$$P(H_2|M) = \frac{P(H_2)P(M|H_2)}{P(M)} = \frac{.5 \cdot 1}{0.75} = \frac{2}{3}$$

Obrazec, ki smo ga uporabili, se po znanem matematiku, ki se je ukvarjal z verjetnostnim računom, imenuje **Bayesov obrazec**. V splošni obliki se glasi:

$$\boldsymbol{P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)}}$$

ZGLEDA

1. V deželi na senčni strani Alp je zaradi neke bolezni zbolelo 2 % prebivalcev. Zdravniki odkrivajo bolezen s testom, ki potrdi bolezen v 90 % primerih pri bolnih in v 5 % primerih pri zdravih prebivalcih. Naključno izberemo prebivalca.

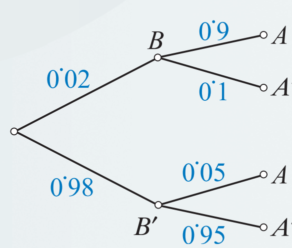
Kolikšna je verjetnost,

a) da je naključno izbrani prebivalec zdrav in njegov test pozitiven,
b) da je test pri naključno izbranem prebivalcu negativen,
c) da je prebivalec res bolan, če je test pozitiven?

Domenimo se za oznake dogodkov:

A: test je pozitiven.
B: prebivalec je bolan.

Do verjetnosti dogodkov si bomo pomagali z verjetnostnim drevesom:



a) Verjetnost, da je prebivalec zdrav s pozitivnim testom, dobimo iz tretje veje drevesa.
$P(B' \cap A) = P(B') \cdot P(A|B') = 0.98 \cdot 0.05 = 0.049$

b) Na posamezno vejo napišemo verjetnost dogodka in dobimo, da je test lahko negativen, če je prebivalec zdrav, pa tudi, če je bolan. Verjetnost, da je test prebivalca negativen, je vsota dveh verjetnosti, ki ju dobimo iz dveh vej na drevesu.

$$P(A') = P(B) \cdot P(A'|B) + P(B') \cdot P(A'|B') =$$
$$= 0.02 \cdot 0.1 + 0.98 \cdot 0.95 = 0.933$$

c) Izračunati moramo verjetnost, da je prebivalec bolan, pri pogoju, da je »pozitiven«.

$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ pri znanih verjetnostih:

$P(B)=0\text{˙}02$, $P(A|B)=0\text{˙}9$ in $P(A|B')=0\text{˙}05$

Iskana verjetnost je

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{1-P(A')}=\frac{0\text{˙}9\cdot 0\text{˙}02}{1-0\text{˙}933}=\frac{0\text{˙}018}{0\text{˙}067}=\frac{18}{67}=0\text{˙}27.$$

2. Podjetje za ekonomsko svetovanje je razvilo model, s katerim lahko predvidijo nastop recesije. Model napove recesijo z verjetnostjo 80 %, če se recesija res bliža, in z verjetnostjo 10 %, če recesije ne bo. Verjetnost hipoteze, da bo v državi nastopila recesija, je 20 %.

a) Izračunajmo verjetnost, da bo do recesije prišlo, če jo je model napovedal.

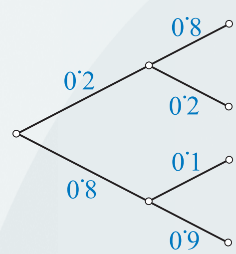
b) Kaj lahko povemo o učinkovitosti napovedi tega podjetja?

Najprej izberemo oznake:

$P(R|B)=\frac{8}{10}$ verjetnost napovedi, da recesija bo, pri pogoju, da se res bliža

$P(R|B')=\frac{1}{10}$ verjetnost napovedi, da recesija bo, pri pogoju, da se ne bliža

$P(B)=\frac{2}{10}$ verjetnost hipoteze, da nastopi recesija



Izračunamo brezpogojno verjetnost, da recesije ne bo:

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{2}{10}=\frac{8}{10}$$

Popolna verjetnost, da bo nastopila recesija:

$$P(R)=P(B)\cdot P(R|B)+P(B')\cdot P(R|B')=0\text{˙}2\cdot 0\text{˙}8+0\text{˙}8\cdot 0\text{˙}1=0\text{˙}24$$

Verjetnost, da je do recesije res prišlo (»se je približala«), pri pogoju, da je bila napovedana:

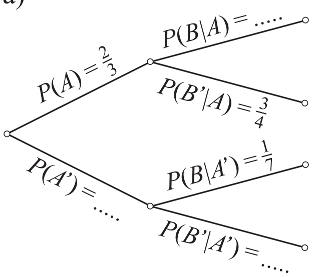
$$P(B|R)=\frac{P(R|B)P(B)}{P(R)}=\frac{0\text{˙}2\cdot 0\text{˙}8}{0\text{˙}24}=\frac{2}{3}$$

Rečemo lahko, da je podjetje uspešno v napovedih, saj v povprečju s 67-odstotno verjetnostjo pravilno napove recesijo.

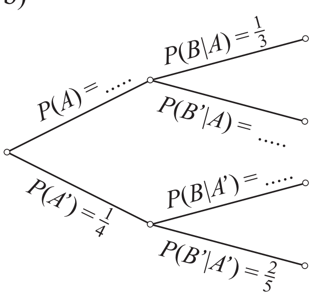
NALOGE

529. Dopolnite verjetnostna drevesa.

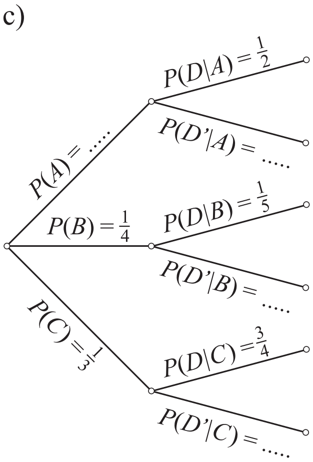
a)



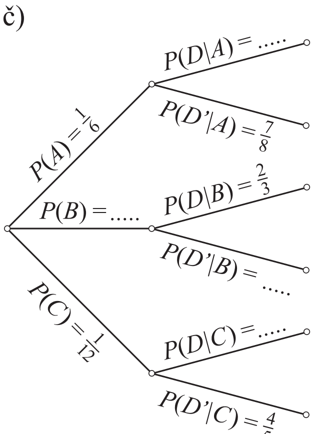
b)



c)



č)



530. Na neki univerzi 0·5 % študentov med šolskim letom poišče zdravniško pomoč v študentski ambulanti v skrbi, da imajo mononukleozo. Od tistih študentov, ki imajo mononukleozo, jih ima 90 % tudi bolečine v grlu. Prav tako ima bolečine v grlu 30 % tistih, ki nimajo mononukleoze. Kolikšna je verjetnost, da ima študent, ki pride v ambulanto in toži zaradi bolečin v grlu, mononukleozo?

531. Diskoteka ima tri vhode in ob vsakem je redar. Skozi vhod A pride 50 % obiskovalcev, skozi vhod B 30 % in skozi vhod C 20 %. Če ima obiskovalec lažno vstopnico, ga odkrijejo pri vhodu A v 75 %, pri vhodu B je ta odstotek 50 %, pri vhodu C pa samo 20 %. Denimo, da gost z lažno vstopnico naključno izbere vhod. Kolikšna je verjetnost, da bo prišel v diskoteko? Kolikšna je verjetnost, da se je izmuznil skozi vhod A?

532. Lekarna naroča pripravke za mazilo pri treh različnih dobaviteljih. Iz izkušenj vedo, da je verjetnost neustreznosti pripravka pri dobavitelju A enaka 3 %, pri dobavitelju B 5 % in pri C 4 %. Mazilo vsebuje 5000 enot pripravka od dobavitelja A, 3500 enot od dobavitelja B in 2000 enot od dobavitelja C. Naključno izberemo enoto pripravka. Kolikšna je verjetnost, da je neustrezna?

533. V bolnišnici je zaposlenih 300 bolniških sester. Pri zadnji obravnavi kakovosti jih je napredovalo 48. Na začetku leta bolnišnica organizira seminar, ki se ga udeleži 138 sester; 27 med njimi je tistih, ki so napredovale. Izračunajte verjetnost, da je slučajno izbrana sestra,

a) ki je obiskala seminar, napredovala;
b) bila na seminarju in je napredovala;
c) ki je napredovala, obiskala seminar.

534. Dve vreči iz blaga vsebujeta bele in črne kroglice enakih velikosti. V eni je trikrat več belih kot črnih, v drugi pa trikrat več črnih kot belih kroglic. Naključno izberemo vrečo in iz nje zapored potegnemo 5 kroglic, vsako pogledamo in jo vrnemo v vrečo. Iz vreče smo potegnili 4 bele in 1 črno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da smo jih potegnili iz vreče z večino belih kroglic?

535. V posodi A imamo 2 črni in 3 bele kroglice, v posodi B pa 4 črne in 1 belo kroglico. Vse kroglice so enako velike. Iz posode A na slepo vzamemo eno kroglico in jo prestavimo v posodo B, nato iz posode B na slepo vzamemo dve kroglici naenkrat.

a) Kolikšna je verjetnost, da bosta kroglici iste barve?
b) Iz posode B smo potegnili kroglice različnih barv. Kolikšna je verjetnost, da smo prej iz posode A v posodo B prestavili črno kroglico?
c) Narišite verjetnostno drevo.

536. Če je vreme lepo, gre Jurij v 90 % na dolg sprehod, če pa je slabo, le v tretjini primerov zdrži doma. Vremenska napoved za konec tedna z gotovostjo 70 % napoveduje sončno vreme. Kolikšna je verjetnost, da Jurij ne bo odšel na dolg sprehod?

537. Jure se v šolo vozi s primestnim avtobusom. Verjetnost, da ima pozimi avtobus zamudo, je 0˙4. Če ima avtobus zamudo, Jure v 80 % zamudi pouk, če pa avtobus nima zamude, Jure kljub temu zamuja z verjetnostjo 0˙3. Narišite verjetnostno drevo in izračunajte verjetnost, da jutri na zimski dan Jure ne bo zamudil pouka.

538. Na mizi sta dve enaki škatli: v eni so 3 rdeče kroglice, v drugi pa 2 rdeči in 3 črne kroglice. Iz ene od obeh vzamemo eno kroglico.

a) Kolikšna je verjetnost, da je kroglica rdeča?
b) Kroglice ne vrnemo v škatlo in spet na slepo sežemo v eno od škatel. Kolikšna je verjetnost, da je tudi druga izvlečena kroglica rdeča?
c) Obe izvlečeni kroglici sta rdeči. Kolikšna je verjetnost, da smo vsaj eno od njiju potegnili iz škatle, v kateri so bile same rdeče kroglice?

539. Tiskano vezje izdelujejo v treh tovarnah: v tovarni A 70 %, v tovarni B 20 % in v tovarni C 10 %. Verjetnosti, da imajo izdelana vezja napako, so zapored 6 %, 4 % in 9 %. Naključno izberemo vezje in ne vemo, v kateri tovarni je bilo narejeno. Izračunajte verjetnost, da ima napako.

540. Niko ima v žepu dva kovanca po 1 evro in en kovanec za 20 centov. Ker ima žep luknjo, mu en kovanec pade iz žepa. Niko ga pobere in da nazaj v žep, v raztresenosti pa pozabi, kateri kovanec je bil. Čez nekaj minut se situacija ponovi in kovanec spet vrne nazaj v žep (ter pomisli, da bo treba žep zašiti).

a) Narišite kombinatorično drevo poskusa in napišite popoln sistem elementarnih dogodkov.
b) Izračunajte verjetnost dogodka A, da je iz žepa dvakrat padel isti kovanec.
c) Izračunajte verjetnost dogodka B, da sta bila kovanca različnih vrednosti.
č) Kolikšna je verjetnost dogodka C, da je kovanec za 1 evro iz žepa padel vsaj enkrat?

541. Na mestni srednji šoli je razmerje med številom fantov in deklet 5 : 6. Petnajst odstotkov deklet in deset odstotkov fantov piše z levo roko. Na pročelju šole so našli žaljiv grafit in ugotovili, da je bil napisan z levo roko. Kolikšna je verjetnost, da ga je napisala ena od deklet?

542. Na mizi sta dve enaki vreči. V eni so 2 rdeči in 3 modre kroglice, v drugi pa 3 rdeče in 4 modre kroglice. Iz ene od vreč potegnemo modro kroglico. Kolikšna je verjetnost, da smo jo potegnili iz vreče s tremi modrimi kroglicami?

Zaporedje neodvisnih poskusov

(izbirna vsebina)

ZGLEDI

1. Spol novorojenčka bo kljub hitremu razvoju genske tehnologije za večino staršev še dolgo veliko presenečenje in v glavnem odvisen od naključja. Recimo, da mladoporočenca delata načrte za prihodnost in načrtujeta družino s 5 otroki. Kolikšna je verjetnost, da bodo med njimi 3 fantje, če je verjetnost, da se v Sloveniji rodi deček, $P(F)=0{\cdot}492$, in da se rodi deklica, $P(D)=0{\cdot}508$, in privzamemo, da spol otroka ni odvisen od spola drugih otrok v družini.

Vseh 5 rojstev imamo lahko za zaporedje neodvisnih poskusov oziroma dogodkov.

D D F F F, D F D F F, D F F D F, …, F F F D D

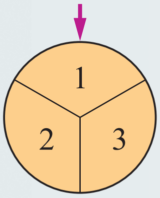
Po izkušnjah iz kombinatorike je vseh teh zaporedij $P_5^{3,2}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}$, še drugače: to je število podmnožic treh neodvisnih dogodkov (rojstvo fantov) iz množice 5 neodvisnih dogodkov, kar je isto $C_5^3=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}$. Ker so dogodki neodvisni, je verjetnost njihovega produkta enaka produktu verjetnosti teh dogodkov in za vsako zgoraj napisano zaporedje velja

$$P(D\cap D\cap F\cap F\cap F)=P(D)\cdot P(D)\cdot P(F)\cdot P(F)\cdot P(F).$$

Vseh zaporedij je $\binom{5}{3}$, zato je verjetnost, da bo imela družina s petimi otroki natanko 3 fante, enaka

$$P_5(3)=\binom{5}{3}\cdot 0{\cdot}492^3\cdot 0{\cdot}502^2=0{\cdot}3.$$

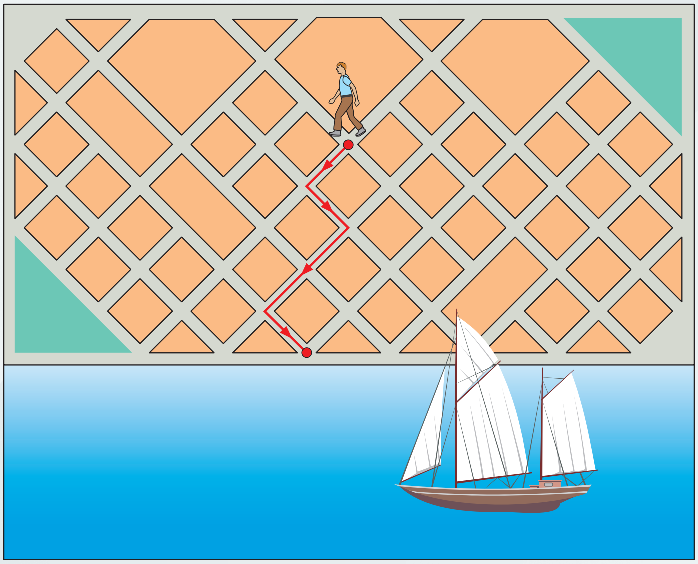
2. Isti tip naloge poglejmo še v drugi preobleki. Petkrat zapored zavrtimo kolo sreče. Kolikšna je verjetnost, da se natanko trikrat ustavi na številki 1?



Poskusi so očitno neodvisni, tudi dogodki so neodvisni in vseh razporedov s tremi enkami je $\binom{5}{3}$, verjetnost, ki jo računamo, pa

$$P_5(3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2=0{\cdot}165.$$

3. In še tretji zgled. Od avtobusne postaje do plaže vodi pot po delu mesta s pravokotnimi ulicami, kot kaže slika. Na vsakem križišču lahko gremo levo ali desno. Kolikšna je verjetnost, da bomo prišli na plažo in pri tem natanko dvakrat zavili na levo?



$P_5(3) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{\cdot}313$

Iz zgledov vidimo, da gre pri vseh treh za zaporedja neodvisnih poskusov, katerih popolni sistemi dogodkov so sestavljeni le iz dogodka A in njegovega nasprotnega dogodka A'. Izračunani verjetnosti v takih primerih rečemo tudi **binomska verjetnost**, zaporedju poskusov z dvema možnima elementarnima dogodkoma pa **Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov**. Če označimo $P(A) = p$ in $P(A') = 1 - p$, je verjetnost, da se dogodek A v n ponovitvah poskusa zgodi natanko k-krat, enaka

$A \cup A' = G$
$A \cap A' = N$

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

ZGLEDI

1. Ta zgled bo nadaljevanje zgleda iz začetka razdelka. Starša si želita 3 dečke, ampak rada bi še več: da se tretji deček rodi kot peti otrok. Kolikšna je verjetnost v tem primeru? Vsi drugi podatki ostanejo nespremenjeni, premisliti pa moramo: če naj se tretji deček rodi kot peti otrok, so se morali pred njim roditi dve deklici in dva dečka. Dogodek si zamislimo kot produkt dveh dogodkov: da sta se najprej od štirih otrok rodila dva dečka in da je petorojeni otrok deček. Torej najprej izračunamo verjetnost $P_4(2)$ in jo pomnožimo s $P(A)$.

$P_4(2) \cdot P(A) = \binom{4}{2} \cdot 0{\cdot}492^2 \cdot 0{\cdot}502^2 \cdot 0{\cdot}492 = 0{\cdot}18$

2. Naj bo poskus met poštene kocke in dogodek, da pade 6 pik. Poskus ponovimo 7-krat. Izračunajmo, katero število šestic je najbolj verjetno.

Izračunali bomo osem verjetnosti: da šestica sploh ne pade, da pade enkrat, dvakrat, trikrat, …, 7-krat.

$P_7(0)=\binom{7}{0}\cdot(\frac{1}{6})^0\cdot(\frac{5}{6})^7=0{\cdot}279$ $\quad P_7(4)=\binom{7}{4}\cdot(\frac{1}{6})^4\cdot(\frac{5}{6})^3=0{\cdot}016$

$P_7(1)=\binom{7}{1}\cdot(\frac{1}{6})^1\cdot(\frac{5}{6})^6=0{\cdot}391$ $\quad P_7(5)=\binom{7}{5}\cdot(\frac{1}{6})^5\cdot(\frac{5}{6})^2=0{\cdot}002$

$P_7(2)=\binom{7}{2}\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(\frac{5}{6})^5=0{\cdot}234$ $\quad P_7(6)=\binom{7}{6}\cdot(\frac{1}{6})^6\cdot(\frac{5}{6})^1=0{\cdot}0001$

$P_7(3)=\binom{7}{3}\cdot(\frac{1}{6})^3\cdot(\frac{5}{6})^4=0{\cdot}078$ $\quad P_7(7)=\binom{7}{7}\cdot(\frac{1}{6})^7\cdot(\frac{5}{6})^0=0{\cdot}000004$

Vidimo, da dobimo najvišjo verjetnost, če v 7 metih šestica pade enkrat.

Iz posameznih rezultatov lahko izračunamo tudi verjetnost drugih dogodkov, denimo, da šestica v 7 zaporednih metih pade vsaj štirikrat, kar je

$P(A)=P_7(4)+P_7(5)+P_7(6)+P_7(7)=0{\cdot}018$ ali malo manj kot 2 %.

3. Strelec Albin, ki zadeva z verjetnostjo 0˙70, potrebuje za napredovanje v finale 8 zadetkov v črno od 10 strelov. Kolikšne so verjetnosti dogodkov:

A: osmič zadene že v 8. krogu,

B: osmič zadene šele v 10. krogu.

Njegova klubska kolega Cene in Dare streljata z verjetnostma 0˙8 in 0˙95. Kolikšni sta verjetnosti, da se tudi onadva uvrstita v finale z 8 zadetki šele v 10. krogu?

Po Bernoullijevi formuli dobimo Albinovo verjetnost v prvem primeru:

$P(A)=P_8(8)=\binom{8}{8}\cdot(0{\cdot}7)^8=0{\cdot}0576$ ali 5˙8 %.

Drugi dogodek obravnavamo kot produkt dogodka, da je Albin v 9 poskusih zadel natanko 7-krat, in dogodka, da je zadel v 8. poskusu, in dobimo

$P(B)=P_9(7)=\binom{9}{7}\cdot(0{\cdot}7)^7\cdot(0{\cdot}3)^2\cdot 0{\cdot}7=0{\cdot}1867$ ali 18˙7 %.

Strelec Cene je boljši od Albina, zato pričakujemo, da bo imel večjo verjetnost za uvrstitev v finale, kar račun tudi potrdi:

$P(C)=P_9(7)=\binom{9}{7}\cdot(0{\cdot}8)^7\cdot(0{\cdot}2)^2\cdot 0{\cdot}8=0{\cdot}3019$

Poglejmo še, kako s finalom lahko računa Dare, ki je najboljši od vseh:

$P(D)=P_9(7)=\binom{9}{7}\cdot(0{\cdot}95)^7\cdot(0{\cdot}05)^2\cdot 0{\cdot}95=0{\cdot}0597$ ali 6 %

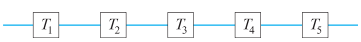
Nad tem rezultatom smo sprva zelo presenečeni, saj je skoraj enak Albinovemu iz dogodka A, zato računamo še enkrat. Vendar je rezultat pravilen pa tudi razumljiv. Ker je Dare tako dober, da redko zgreši, je zelo majhna verjetnost, da bo v 10 strelih zadel »samo« 8-krat. Ko izračunamo verjetnost, da v 10 strelih zadene vsaj 9-krat, nam je vse bolj jasno:

$$P(E)=P_{10}(9)+P_{10}(10)=\binom{10}{9}\cdot(0{\cdot}95)^9\cdot(0{\cdot}05)+\binom{10}{10}\cdot(0{\cdot}95)^{10}=$$
$$=0{\cdot}8138 \text{ ali } 81{\cdot}4\,\%$$

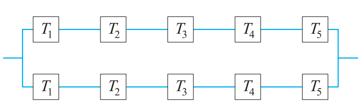
NALOGE

543. Naprava je sestavljena iz 5 delov. Njeno delovanje je odvisno od zanesljivosti vsakega od teh delov.

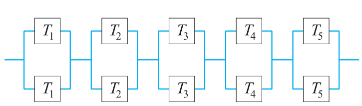
a) Kolikšna je zanesljivost naprave, če je verjetnost, da se pokvari vsak od sestavnih delov, $P=10\,\%$?



b) Dve omenjeni napravi vežemo vzporedno. Kolikšna je verjetnost, da se naprava ne pokvari, če je zanesljivost posameznih delov enaka kot v primeru a?



c) Iz enakih delov kot prej sestavimo napravo na drugačen način. Kolikšna je zanesljivost v tem primeru?



544. Kolikšna je verjetnost, da v metu sedmih kovancev pet kovancev pokaže cifro?

545. Verjetnost, da avgusta v Bohinju dežuje, je 30 %. Kolikšna je verjetnost, da bo deževalo en teden skupaj?

546. Študent ni nič študiral in gre na izpit popolnoma nepripravljen. Kolikšna je verjetnost, da bo z ugibanjem pravilno odgovoril na 6 od 10 vprašanj, če so pri vsakem vprašanju možni 4 odgovori?

547. Komisija za kakovost izdelkov zavrne pošiljko, če sta med 20 pregledanimi izdelki več kot 2 slaba. Kolikšna je verjetnost, da bo pošiljka sprejeta, če tovarna v povprečju naredi 2 % slabih izdelkov?

548. Nogometno moštvo zmaguje z verjetnostjo $0{\cdot}6$. Kolikšna je verjetnost, da zmaga osemkrat v 11 tekmah?

549. Verjetnost, da izstrelitev rakete ne uspe, je 5 %. Kolikšna je verjetnost, da izstrelitev ne bo uspela šele v 15 poskusu?

550. Kolo sreče je enakomerno pobarvano s petimi barvami. Kolikšna je verjetnost, da se v 10 vrtljajih 6-krat ustavi na rdeči barvi, petič v osmem vrtljaju?

551. V vrečki je enako število belih in rdečih kroglic. Iz vrečke 10-krat zapored potegnemo kroglico in jo potem damo nazaj. Kolikšna je verjetnost, da izvlečemo najprej 5 rdečih in nato 5 belih kroglic?

552. Verjetnost, da mestni redar kaznuje voznika, ki je nepravilno parkiral avto, je 40 %. Kolikšna je verjetnost, da bomo v dveh tednih nepravilnega parkiranja petkrat dobili poziv za plačilo kazni?

553. Kolikšna je verjetnost, da pri metu petih kovancev vsaj eden pokaže cifro?

554. Kolikšna je verjetnost, da pri 17 metih kovanca pade enako število cifer in mož?

Normalna porazdelitev

ZGLED

Dijakinja srednje trgovske šole je za prvo nalogo na obvezni praksi v trgovskem centru morala natančno stehtati po 1 kg pakirano belo moko. Po dolgotrajnem tehtanju z do grama natančno tehtnico, ko je imela na listu naslednjo množico podatkov:

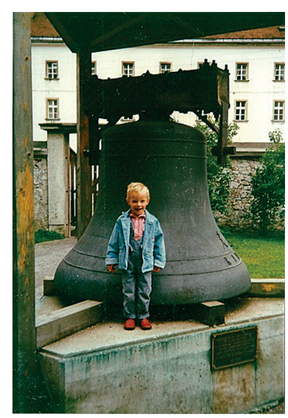
1001 1000 998 997 1002 1003 1000 999 1000 996 993
998 1000 1002 1003 1006 1002 1001 1001 997 998 999
1004 997 999 1000 1003 1002 998 1000,

je vzkliknila: »Ali je to sploh **normalno**?! Na vseh zavitkih piše 1 kg, pa je bilo do zdaj le pet zavitkov s to težo.«

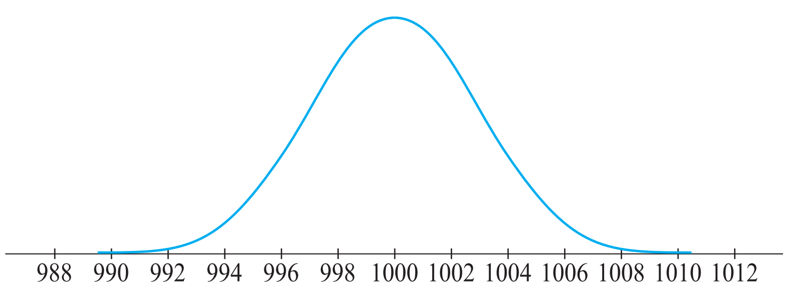
Tehtala je naprej in pisala:

1001 1000 997 998 1001 1003 999 999 1002 997 998
997 1000 1001 998 999 995 1002 1003 999

To, kar se je dogajalo dijakinji, je *povsem normalno*. Pakirni stroj deluje z določeno natančnostjo, zato pride do naključnih napak, ki so **normalno porazdeljene**. To pomeni, da stroj ne dela sistematičnih napak, ampak so te povsem naključne.



Graf, ki prikazuje vrednosti normalno porazdeljene količine, ima obliko zvona in se imenuje **normalna krivulja**, po slavnem nemškem matematiku pa tudi **Gaussova** krivulja.



Slučajne spremenljivke

Pri ukvarjanju z realnimi funkcijami smo doslej spoznali dva tipa spremenljivk: vrednosti *neodvisne spremenljivke* smo izbrali po svoji volji, *odvisna spremenljivka* pa je s to našo izbiro dobila določene vrednosti.

Med osnovnimi pojmi statistike, ki smo jih obravnavali v 1. letniku, je bila tudi statistična spremenljivka (statistični znak ali podatek). Glede na to, da v statističnih raziskavah po navadi obravnavamo vzorec kot naključno podmnožico celotne populacije, ne vemo, katere statistične spremenljivke (podatki) se bodo uvrstile v vzorec. Vemo le, katere vrednosti statistična spremenljivka *lahko* zavzame; katero *bo* zavzela, pa je odvisno od slučaja. Zato tej statistični spremenljivki rečemo **slučajna spremenljivka**. Slučajne spremenljivke bomo označevali z velikimi črkami X, Y, Z …

ZGLED

Primer slučajne spremenljivke je masa paketa moke, ki jo tehta dijakinja. Pri tehtanju na gram natančno lahko zavzame vse cele vrednosti na intervalu [993, 1006]. Pri metu kocke slučajna spremenljivka pomeni število pik in zavzame eno od vrednosti iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. V primeru meta kovanca, kjer je slučajna spremenljivka opisna (cifra in mož), pa ji priredimo numerični vrednosti: npr. cifra dobi vrednost 1, mož vrednost 0. Če bomo delali raziskavo za obutveno podjetje, bo pri moških čevljih zaloga vrednosti slučajne spremenljivke množica celih števil na intervalu [38, 56].

Poleg slučajne spremenljivke in njene zaloge vrednosti so bistven podatek še verjetnosti, s katerimi slučajna spremenljivka zavzame določene vrednost: $p_k = P(X = x_k)$. Če poznamo vse te vrednosti, lahko napišemo **verjetnostno shemo** oz. **porazdelitveni zakon** slučajne spremenljivke X.

$$X \sim \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

Iz sheme se lepo vidi, da je $p_1 + p_2 + \dots p_n = 1$, saj dogodki $x_1, x_2, \dots, x_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov (v vsaki ponovitvi poskusa se zgodi natanko eden od njih).

ZGLED

Najbolj enostavni porazdelitveni zakon imata slučajni spremenljivki v poskusih meta poštenega kovanca in poštene kocke:

$$X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad Y \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

V obeh primerih imajo vse vrednosti slučajne spremenljivke enake verjetnosti, ki so cela števila, zato rečemo, da sta slučajni spremenljivki X in Y **enakomerno diskretno porazdeljeni**.

Za nas bo mnogo bolj zanimiva in uporabna **binomska porazdelitev** slučajne spremenljivke. Vrednosti slučajne spremenljivke pri tej porazdelitvi so frekvence opazovanega dogodka v n ponovitvah poskusa. Iz prejšnjega poglavja se še spomnimo, da je zaloga vrednosti binomsko porazdeljene slučajne spremenljivke množica celih števil na intervalu $[0, n]$, posamezne verjetnosti pa izračunamo po Bernoullijevi formuli:

$$P(X=p_k)=P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Poglejmo binomsko porazdelitev na enostavnem zgledu.

ZGLED

Pošten kovanec vržemo 6-krat (ali v enem metu vržemo 6 enakih poštenih kovancev). Vrednosti slučajne spremenljivke X naj bodo frekvence cifre. V šestih metih lahko pade 0-krat, 1-krat, 2-krat, …, 6-krat. Narišimo tudi graf te porazdelitve.

$$P(X=0)=P_6(0)=\binom{6}{0}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

$$P(X=1)=P_6(1)=\binom{6}{1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5=\frac{6}{64}$$

$$P(X=2)=P_6(2)=\binom{6}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$$

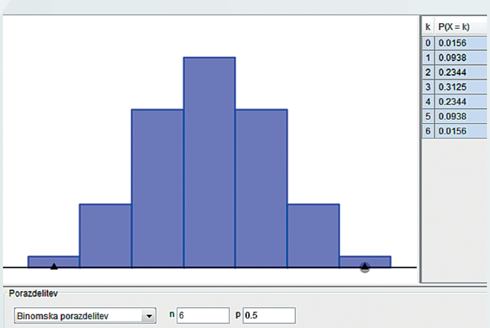
$$P(X=3)=P_6(3)=\binom{6}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64}$$

$$P(X=4)=P_6(4)=\binom{6}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$$

$$P(X=5)=P_6(5)=\binom{6}{5}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^1=\frac{6}{64}$$

$$P(X=6)=P_6(6)=\binom{6}{6}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}$$

$$X\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{64} & \frac{6}{64} & \frac{15}{64} & \frac{20}{64} & \frac{15}{64} & \frac{6}{64} & \frac{1}{64}\end{bmatrix}$$



Gaussova krivulja

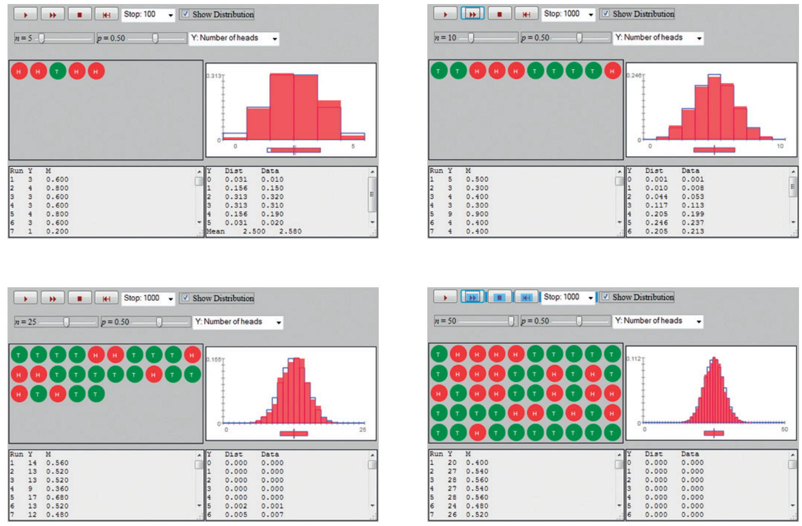
V vseh treh dosedanjih primerih je bila verjetnostna shema **simetrična**, kar se lepo vidi na grafu zadnjega primera.

Če npr. povečujemo število metov in hkrati povečujemo še število kovancev, se nazobčana krivulja, ki opisuje to slučajno spremenljivko, počasi zgladi v krivuljo zvonaste oblike, ki smo jo spoznali na začetku poglavja. Dobili

Oznaka za normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko: $X \sim N(a, \sigma)$.

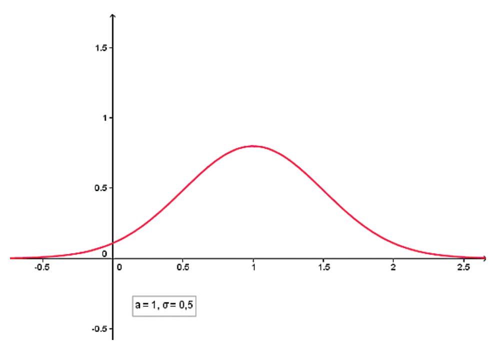
smo graf normalno porazdeljene zvezne slučajne spremenljivke z aritmetično sredino a in standardnim odklonom σ.

Naše znanje nam ne omogoča dokaza te trditve, lahko pa si pomagamo z uporabo tehnologije.



Ta zvonasta krivulja se imenuje **normalna** ali Gaussova **krivulja** in je graf funkcije

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} .$$

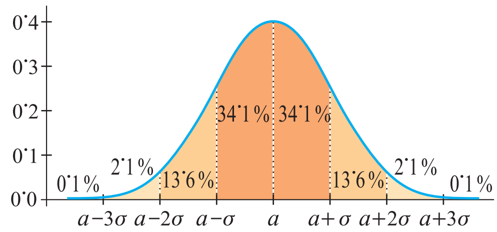


Lastnosti funkcije:

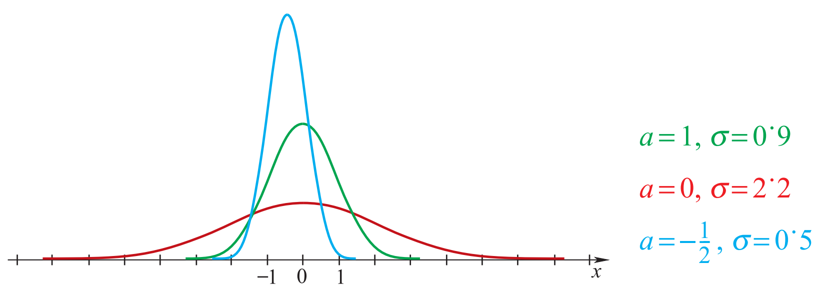
- Definirana je na celi realni osi in povsod pozitivna.
- Graf ima asimptoto $y = 0$.
- Graf je simetričen glede na premico $x = a$.
- Maksimalno vrednost $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ zavzame pri $x = a$.
- Ploščina lika med grafom in abscisno osjo je enaka 1.
- Ploščina pod krivuljo na intervalu $[a - \sigma, a + \sigma]$ predstavlja 68˙2 % celotne ploščine.

- Ploščina pod krivuljo na intervalu $[a-2\sigma, a+2\sigma]$ predstavlja 95˙4 % celotne ploščine.
- Ploščina pod krivuljo na intervalu $[a-3\sigma, a+3\sigma]$ predstavlja 99˙6 % celotne ploščine.

Iz zadnje lastnosti sledi, da leži na intervalu širine 6σ s središčem v a praktično večina (99˙6 %) normalno porazdeljenih podatkov.

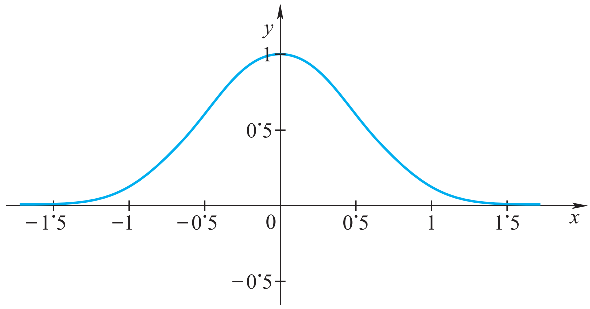


Graf normalne funkcije je odvisen le od parametrov a in σ. Pri večjih vrednostih σ je graf bolj sploščen, pri manjših pa bolj ozek; od prej že vemo, da je premica $x=a$ njegova simetrijska os.



Zaradi lažjega računanja, ki ga bomo spoznali kasneje, spremenljivki x v Gaussovi funkciji s parametroma a in σ priredimo novo spremenljivko $\frac{x-a}{\sigma}$. S to transformacijo iz Gaussove krivulje dobimo **standardizirano Gaussovo krivuljo** s parametroma $a=0$, $\sigma=1$ in s funkcijskim predpisom

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Standardizirana Gaussova krivulja ima poleg prejšnjih lastnosti še eno – je simetrična glede na ordinatno os, ker je funkcija f soda.

Normalno so porazdeljeni serijski izdelki, teža pakirane hrane, lastnosti ljudi (npr. velikost, teža, dolžina noge, obseg glave, IQ …), rezultati pedagoško sestavljenih testov večje skupine (vsaj 100), če naštejemo le nekaj primerov.

Če je slučajna spremenljivka X porazdeljena normalno: $X \sim N(a, \sigma)$, je normalno porazdeljena tudi standardizirana slučajna spremenljivka

$$\boldsymbol{Z = \frac{X-a}{\sigma};\ Z \sim N(0, 1).}$$

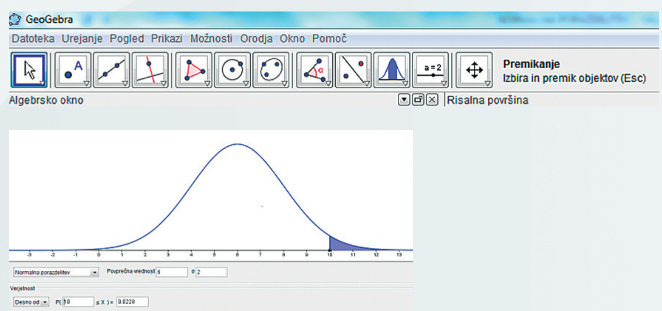
Računanje verjetnosti

ZGLED

Dolžine pogovorov znotraj telefonskega omrežja so normalno porazdeljene z aritmetično sredino 6 minut in standardnim odklonom 2 minuti. Kolikšna je verjetnost v odstotkih, da slučajno izbrani klic traja več kot 10 minut?

Ker je $a = 6$ in $\sigma = 2$, je 10- in večminutni klic od srednje vrednosti oddaljen za 2 standardna odklona in lahko verjetnost izračunamo na pamet: $P(x \geq 10) = 50\ \% - 47{\cdot}7\ \% = 2{\cdot}3\ \%$.

Pomagamo pa si lahko tudi z izjemno »prijaznim« delom programa *GeoGebra Računanje verjetnosti*, ki nam nariše graf in hkrati izpiše iskano verjetnost.



Normalna porazdelitev je najpomembnejša od verjetnostnih porazdelitev, zato (poleg računalniških programov) obstajajo za njeno računanje posebne preglednice; vsaka je odvisna od parametrov a in σ.

Verjetnost, da slučajna spremenljivka $X \sim N(a, \sigma)$ zavzame vrednost, ki leži na intervalu $[x_1, x_2]$, je številsko enaka ploščini med normalno krivuljo, abscisno osjo in premicama $x = x_1$, $x = x_2$.

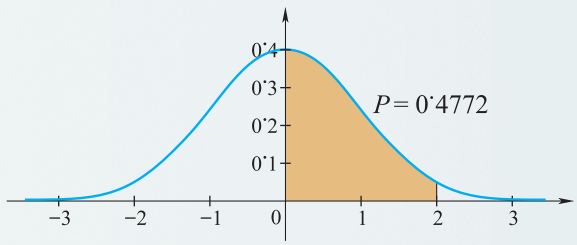
Če je slučajna spremenljivka standardizirana, za izračun verjetnosti potrebujemo le eno preglednico – dovolj je torej, da poznamo ploščino pod standardizirano Gaussovo krivuljo. Številsko vrednost ploščine pod to krivuljo na intervalu $[0, z]$ označimo s $\Phi(z)$ – to število je ravno verjetnost, da slučajna spremenljivka $Z \sim N(0, 1)$ zavzame vrednosti z intervala $[0, z]$.

$$\boldsymbol{\Phi(z) = P(0 \leq Z \leq z)}$$

ZGLED

S pomočjo preglednice zapišimo vrednosti funkcije $\Phi(z)$ za $z_1 = 2$, $z_2 = 0{,}67$, $z_3 = 2{,}29$, $z_4 = 1{,}2$, $z_5 = 2{,}74$ in $z_6 = -1{,}2$.

$\Phi(2) = 0{,}47725$



$\Phi(0{,}67) = 0{,}24857$

$\Phi(2{,}29) = 0{,}9890$

$\Phi(1{,}2) = 0{,}38493$

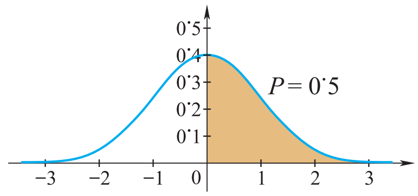
$\Phi(2{,}74) = 0{,}49693$

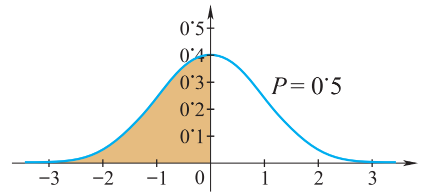
$$\Phi(-1{,}2) = P(-1{,}2 \le Z \le 0) = 0{,}5 - P(Z \le -1{,}2) =$$
$$= 0{,}5 - P(Z \ge 1{,}2) = \Phi(1{,}2) = 0{,}38493$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900

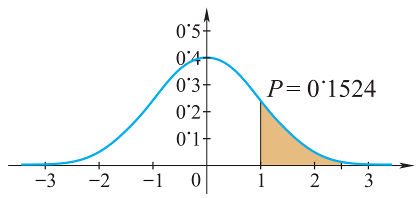
Do vrednosti funkcije $\Phi(z)$ pridemo tudi na drugačen način.
V *GeoGebri* je to ukaz **`NormalnaPorazdelitev[0,1,z]`**,
v programu *Graph* pa ***`dnorm (z, 0, 1)`***.

Ker je graf standardizirane slučajne spremenljivke simetričen in je ploščina pod celotno krivuljo enaka 1, je mogoče izračunati verjetnosti za poljuben interval, na katerem leži spremenljivka z.

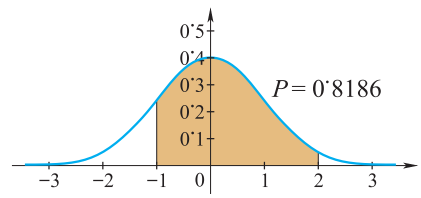




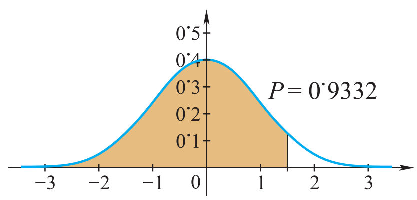
$$P(Z \geq 0) = P(Z \leq 0) = \frac{1}{2}$$



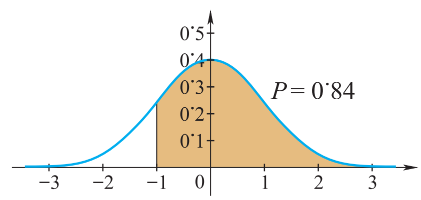
$z_1 > 0,\ P(z_1 \leq Z \leq z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$



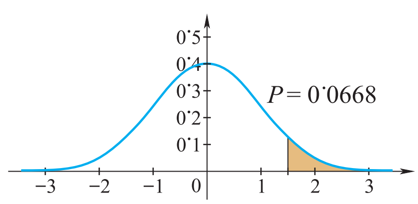
$z_1 < 0,\ P(z_1 \leq Z \leq z_2) = \Phi(z_2) + \Phi(-z_1)$



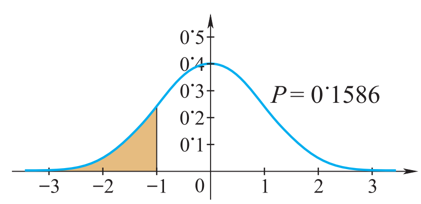
$z > 0,\ P(Z \leq z) = \frac{1}{2} + \Phi(z)$



$z < 0,\ P(Z \geq z) = \frac{1}{2} + \Phi(-z)$



$z > 0,\ P(Z \geq z) = \frac{1}{2} - \Phi(z)$



$z < 0,\ P(Z \leq z) = \frac{1}{2} - \Phi(-z)$

ZGLED

Izračunajmo verjetnosti.

a) $P(1{\cdot}03 \leq z \leq 1{\cdot}25)$
b) $P(-2{\cdot}1 \leq z \leq 1{\cdot}25)$
c) $P(z \geq 2{\cdot}41)$
č) $P(z \geq -0{\cdot}95)$
d) $P(z \leq 1{\cdot}63)$
e) $P(z \leq -2{\cdot}17)$

Rešitev preprosto preberemo iz preglednice:

a) $P(1{\cdot}03 \leq z \leq 1{\cdot}25) = \Phi(1{\cdot}25) - \Phi(1{\cdot}03) = 0{\cdot}39435 - 0{\cdot}34849 = 0{\cdot}04586$

b) $P(-2{\cdot}1 \leq z \leq 1{\cdot}25) = \Phi(1{\cdot}25) - \Phi(-2{\cdot}1) = \Phi(1{\cdot}25) + \Phi(2{\cdot}1) = 0{\cdot}39435 - 0{\cdot}48214 = 0{\cdot}87649$

c) $P(z \geq 2{\cdot}41) = 0{\cdot}5 - \Phi(2{\cdot}41) = 0{\cdot}5 - 0{\cdot}49202 = 0{\cdot}00798$

č) $P(z \geq -0{\cdot}95) = 0{\cdot}5 + \Phi(0{\cdot}95) = 0{\cdot}5 + 0{\cdot}32894 = 0{\cdot}82894$

d) $P(z \leq 1{\cdot}63) = 0{\cdot}5 + \Phi(1{\cdot}63) = 0{\cdot}5 + 0{\cdot}44845 = 0{\cdot}94845$

e) $P(z \leq -2{\cdot}17) = 0{\cdot}5 - \Phi(2{\cdot}17) = 0{\cdot}5 - 0{\cdot}44845 = 0{\cdot}015$

Največkrat normalna slučajna spremenljivka ni standardizirana, zato jo moramo pretvoriti v standardizirano:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P\left(\frac{x_1 - a}{\sigma} \leq \frac{X - a}{\sigma} \leq \frac{x_2 - a}{\sigma}\right) = P\left(\frac{x_1 - a}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x_2 - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

Spet si lahko pomagamo s programoma *GeoGebra* in *Graph*:

```
NormalnaPorazdelitev[<srednja vrednost>,<standardna deviacija>,x|]
dnorm (x, a, σ)
```

ZGLEDI

1. Motociklistični klub je z anketo ugotovil, da njihovi člani prevozijo povprečno 1200 km na mesec s standardnim odklonom 150 km.

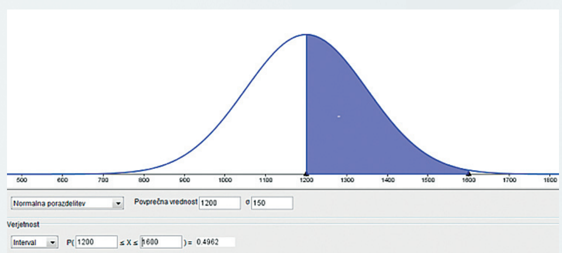
a) Izračunajmo, koliko odstotkov članov na mesec prevozi med 1200 km in 1600 km.

b) Koliko odstotkov članov na leto prevozi med 1000 in 1500 km?

a) Najprej standardiziramo slučajno spremenljivko:

$$z=\frac{x-a}{\sigma}=\frac{1600-1200}{150}=2{\cdot}67$$

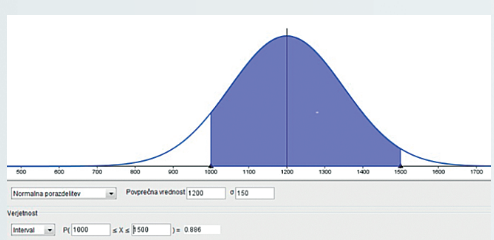
Ker je spodnja meja intervala enaka srednji vrednosti a, le še pogledamo v preglednico, $\Phi(2{\cdot}67)=0{\cdot}49621$, in dobimo odgovor: približno 50 % motoristov na mesec prevozi od 1200 do 1600 km (rezultat dobimo tudi s pomočjo programa *GeoGebra*). Do števila odstotkov bi lahko prišli tudi brez računanja, saj je $x=a=1200$ simetrijska os krivulje, desno krajišče $b=15\,000$ pa skoraj 3σ oddaljeno od aritmetične sredine.



b) $z_1=\frac{x-a}{\sigma}=\frac{1000-1200}{150}=-\frac{4}{3}$ $\qquad z_2=\frac{1500-1200}{150}=2$

$$P(\tfrac{4}{3}\le z\le 2)=\Phi(2)-\Phi(-\tfrac{4}{3})=\Phi(2)+\Phi(\tfrac{4}{3})=0{\cdot}47725+0{\cdot}40824=$$
$$=0{\cdot}8855$$

Od 1000 km do 1500 km na mesec prevozi 88·55 % članov.



2. Profesor je po izpitu naredil kratko analizo uspešnosti študentov. Ugotovil je, da so študentje dosegli v povprečju 80 od 100 točk, standardni odklon pa je bil 5 točk. Izračunajmo verjetnosti, da so študentje dobili:

a) manj ali enako 82 točk,

b) več ali enako 90 točk,

c) manj ali enako 74 točk,

č) med 78 in 88 točk vključno z mejama.

$$P(X \le 82) = P\left(Z \le \frac{82-80}{5}\right) = P(Z \le 0{\cdot}40) = 0{\cdot}15542 + 0{\cdot}5000 = 0{\cdot}65542$$

$$P(X \ge 90) = P\left(Z \ge \frac{90-80}{5}\right) = P(Z \ge 2{\cdot}00) = \frac{1}{2} - P(Z \le 2{\cdot}00) =$$
$$= \frac{1}{2} - 0{\cdot}4772 = 0{\cdot}0228$$

$$P(X \le 74) = P\left(Z \le \frac{74-80}{5}\right) = P(Z \le -1{\cdot}20) = P(Z \ge 1{\cdot}20) =$$
$$= \frac{1}{2} - P(Z \le 1{\cdot}20) = 0{\cdot}50000 - 0{\cdot}38493 = 0{\cdot}11507$$

$$P(78 \le X \le 88) = P\left(\frac{78-80}{5} \le Z \le \frac{88-80}{5}\right) = P(-0{\cdot}40 \le Z \le 1{\cdot}60) =$$
$$= P(Z \le 1{\cdot}60) - P(Z \le -0{\cdot}40) = 0{\cdot}9452 - 0{\cdot}3446 =$$
$$= 0{\cdot}6006$$

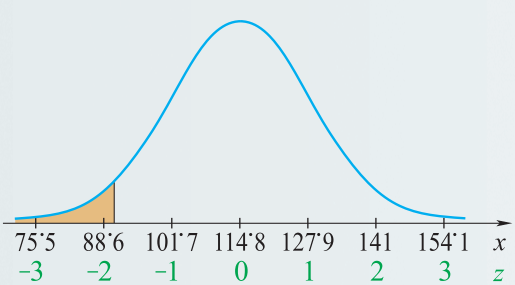
3. Po podatkih svetovne zdravstvene organizacije imajo ženske med 18. in 24. letom povprečen sistolični krvni tlak $114{\cdot}8$, njegov standardni odklon pa je $13{\cdot}1$.

a) Narišimo porazdelitveno krivuljo te populacije.

b) Izračunajmo, kolikšen odstotek žensk ima tlak manjši ali enak 90°.

c) Zdravnik v ordinaciji bi rad identificiral 5 % žensk, ki imajo najvišji tlak. Izračunajmo mejni tlak te skupine. Rezultat zaokrožimo na cela mesta.

a)



b) $z = \frac{x-a}{\sigma} = \frac{90-1114{\cdot}8}{13{\cdot}1} \approx -1{\cdot}89$

$\Phi(-1{\cdot}89) = 0{\cdot}5 - \Phi(1{\cdot}89) = 0{\cdot}5 - 0{\cdot}4706 = 0{\cdot}0294$

Najvišji tlak ima približno 3 % žensk med 18. in 24. letom.

c) Iz podatkov vidimo, da velja $P(Z \geq z) = 0{\cdot}05$, kar drugače zapišemo:

$0{\cdot}5 - P(Z \leq z) = 0{\cdot}05$ in $\Phi(z) = P(Z \leq z) = 0{\cdot}45$

Ko pobrskamo po preglednici, ugotovimo, da je $z = 1{\cdot}65$; do istega rezultata pridemo z računalnikom z uporabo funkcije

InverznaBinomskaPorazdelitev[<število poskusov>, <verjetnost dogodka>,<verjetnost>].

$\Phi(z) = \Phi(\frac{x-a}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-114{\cdot}8}{13{\cdot}1}) = \Phi(1{\cdot}56) = 0{\cdot}45$

Rešimo linearno enačbo $\frac{x-114{\cdot}8}{13{\cdot}1} = 1{\cdot}56$ in dobimo $x \approx 136$.

Mejni tlak podmnožice 5 % žensk z najvišjim tlakom je 136.

NALOGE

Pri vseh nalogah predvidevamo, da je slučajna spremenljivka normalno porazdeljena.

555. Zaposleni v podjetju X-COM imajo v povprečju 20 000 evrov letne plače s standardnim odklonom 5000 evrov. Izračunajte, koliko odstotkov zaposlenih ima plačo P.

a) $P \geq 22\,200$
b) $P \leq 17\,450$
c) $15\,000 \leq P \leq 21\,650$
č) $21\,200 \leq P \leq 22\,200$
d) $15\,000 \leq P \leq 25\,000$

556. Tovarna proizvaja žarnice s povprečno življenjsko dobo 500 ur in standardnim odklonom 100 ur. Izračunajte, koliko odstotkov žarnic bo svetilo:

a) od 500 do 700 ur,
b) od 400 do 500 ur.

557. Povprečna delovna doba baterije je 170 tednov, standardni odklon pa 10 tednov. Izračunajte, koliko odstotkov kupcev bo zahtevalo zamenjavo baterije pred zaključkom garancijske dobe.

558. Pri izdelavi kovinske palice s povprečno dolžino 100 mm in standardnim odklonom 2 mm kontrolor kvalitete izloči vse palice, ki so 5 mm predolge ali prekratke. Kolikšen je odstotek zavrnjenih izdelkov?

559. Zdravljenje neke bolezni traja v povprečju 240 ur, standardni odklon znaša 20 ur. Koliko odstotkov obolelih za to boleznijo bo zdravih v manj kot 8 dneh?

560. Povprečna višina detelje pred košnjo je 38 cm s standardnim odklonom $1{\cdot}5$ cm. Koliko odstotkov detelje bo pred košnjo zraslo čez 40 cm?

561. Zaposleni dosežejo na testu sposobnosti v povprečju 500 točk ter 100 točk standardnega odklona. Koliko odstotkov zaposlenih doseže 700 točk ali več?

562. Strokovna komisija ocenjuje seminarske izdelke, katerih točke so normalno porazdeljene z $a = 70$ in $\sigma = 8$. Izračunajte število točk za meje intervalov, da bo najboljših 10 % študentov dobilo oceno 5, naslednjih 20 % oceno 4, naslednjih 40 % oceno 3, naslednjih 20 % oceno 2, zadnjih 10 % pa bo moralo nalogo narediti še enkrat.

563. Inteligenčni kvocient (IQ) je normalno porazdeljen z $a = 100$ in $\sigma = 15$. Kolikšna je verjetnost, da ima slučajno izbrana oseba IQ večji od 120?

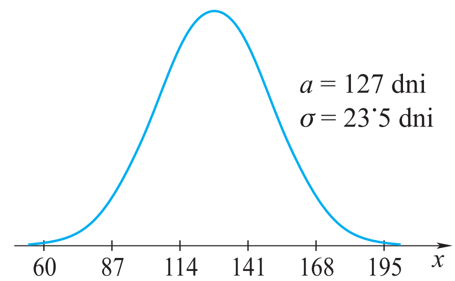
564. Trgovska veriga s pregledom računov ugotovi, da kupci pri nakupu porabijo v povprečju 74˙50 evra s standardnim odklonom 24˙30 evra. Izračunajte interval porabe denarja za srednjih 50 % kupcev.

565. V isti trgovski verigi so ugotovili, da se povprečni kupec v trgovini zadrži 45 minut s standardnim odklonom 12 minut.
a) Izračunajte verjetnost, da naključno izbrani kupec nakupuje med 14 in 54 minut.
b) Kolikšna je verjetnost, da se kupec v trgovini zadrži več kot 39 minut?
c) Koliko od 250 kupcev, ki so istočasno v trgovini, bo nakupovalo več kot 39 minut?

566. Raziskava je pokazala, da gledajo otroci v Sloveniji televizijo povprečno 20 ur na teden in da je $P(20 \leq t \leq 26) = 0˙341$. Izračunajte verjetnost, da naključno izbrani otrok v tednu dni presedi pred televizorjem:
a) manj kot 5 ur,
b) več kot 10 ur,
c) med 7 in 14 ur,
č) več kot 20 ur,
d) manj kot 14 ur.

567. V medicinski raziskavi je sodelovalo 1200 moških med 35 in 44 let. Ugotovili so, da imajo povprečno raven holesterola 205 mg/dl s standardnim odklonom 39˙2 mg/dl in da je raven holesterola v tej skupini normalno porazdeljena. Izračunajte tisto raven holesterola, ki spodnji 1 % moških iz te skupine loči od ostalih 99 %.

568. Po raziskavah mednarodne zdravstvene organizacije *Transplant Network* je v ameriški zvezni državi Ohio povprečen čakalni čas pacienta s krvno skupino A+ na transplantacijo srca normalno porazdeljen. Podatki so vidni na grafu.

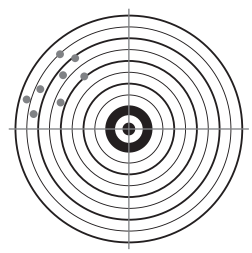


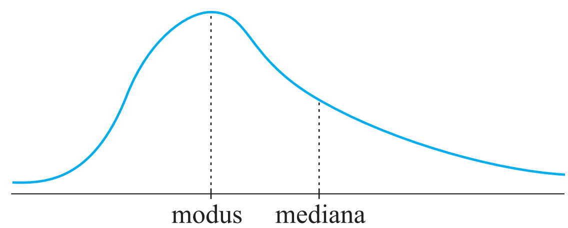
a) Izračunajte najkrajši čakalni čas za transplantacijo zgornjih 30 % čakajočih srčnih bolnikov.
b) Kolikšen je najdaljši čas spodnjih 10 % bolnikov?

Rezultate zaokrožite na cela mesta.

Asimetričnost

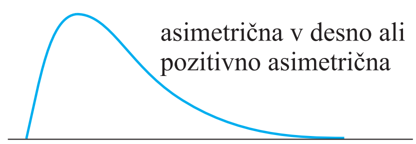
Razdalje zadetkov od središča tarče, ki bi jih dobil izkušen strelec v normalnih razmerah, bi bile normalno porazdeljene. Amaterski strelec, ki pri merjenju težko zatisne oko, pa bi zadeval tarčo na isti strani, zato bi bili vsi zgrešeni streli podobni in bi bila normalna krivulja premaknjena v levo ali v desno – bila bi asimetrična.

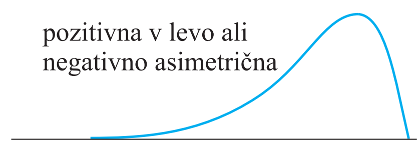




Velikost asimetrije normalne krivulje lahko ocenimo na več načinov.

- Porazdelitev oz. njena krivulja je **asimetrična v desno** (rep gleda proti desni), če je modus manjši od mediane, ta pa manjša od aritmetične sredine: $Mo < Me < a$, in je **asimetrična v levo** (rep krivulje gleda proti levi), če velja $a < Me < Mo$.





- Druga možnost ocene so razlike kvartilov. Porazdelitev je asimetrična v desno, če je $Q_2 - Q_1 < Q_3 - Q_2$, in asimetrična v levo, če je $Q_2 - Q_1 > Q_3 - Q_2$.
- Lahko pa asimetričnost izračunamo – s koeficientom asimetričnosti $k = \frac{3(a - M_e)}{\sigma}$. Kadar je $k < 0$, je krivulja asimetrična v desno, kadar je $k > 0$, je krivulja asimetrična v levo.

NE POZABI

Slučajni dogodek $A, B, C, D, E, F, H, \ldots$

Gotov dogodek G

Nemogoč dogodek N

Poskus X

- **Vsota dogodkov** A in B se zgodi, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B.

  Lastnosti vsote dogodkov:

  $A \cup B = B \cup A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup G = G, \quad A \cup N = A$

- **Produkt dogodkov** A in B se zgodi, če se zgodita dogodka A in B hkrati.

  Lastnosti produkta dogodkov:

  $A \cap B = B \cap A, \quad A \cap A = A, \quad A \cap G = A, \quad A \cap N = N$

- **Nasprotni dogodek** A' dogodka A se zgodi, če se A ne zgodi.

  Lastnosti nasprotnega dogodka:

  $A \cup A' = G, \quad A \cap A' = N, \quad (A')' = A, \quad G' = N, \quad N' = G$

- **Razlika dogodkov** A in B se zgodi, če se zgodi dogodek A in se hkrati ne zgodi dogodek B.

  Lastnosti razlike dogodkov:

  $A - B \neq B - A, \quad A - B = A \cap B'$

  – dogodek A je **način dogodka** B; $A \subset B$, če se vsakokrat, ko se zgodi A, zgodi tudi B;

  – dogodka A in B sta **enaka**, če in samo če velja $A \subset B$ in hkrati $B \subset A$.

- **Osnovni** ali **elementarni dogodki** – dogodki, ki jih ne moremo zapisati kot vsoto ali produkt kakšnih drugih dogodkov.

- **Sestavljeni dogodki** – dobimo jih iz elementarnih dogodkov ob pomoči operatorjev.

- **Vzorčni prostor** poskusa – vsi elementarni dogodki nekega poskusa. Za dogodke vzorčnega prostora velja:

  $G = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n; \ n \in \mathbb{N}$

  $E_i \cap E_j = N \quad \text{za} \quad i \neq j; \ i, j = 1, \ldots, n$

NE POZABI

- **Popoln sistem dogodkov** poskusa X – dogodki, katerih vsota je gotov dogodek in so paroma nezdružljivi.
  - dogodek in njegov nasprotni dogodek:
    $A \cup A' = G, \quad A \cap A' = N$
  - vsi elementarni dogodki poskusa:
    $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = G; \; n \in \mathbb{N}$
    $E_i \cap E_j = N \quad \text{za} \quad i \neq j; \; i, j = 1, \ldots, n$

- **Relativna frekvenca dogodka** ***A*** ali **empirična verjetnost dogodka** ***A***:
  $f_A = \frac{n_A}{n}$

- **Klasična (teoretična) definicija verjetnosti:**
  $P(A) = \frac{m}{n}$ (pri pogoju, da so vsi elementarni dogodki poskusa enakovredni)
  - m je število za dogodek A ugodnih elementarnih dogodkov
  - n je število vseh elementarnih dogodkov poskusa

  Lastnosti:

  1. $P(A) \geq 0$
  2. $P(G) = 1$
  3. Če sta dogodka A in B nezdružljiva, $A \cap B = N$, velja
     $P(A \cup \mathrm{B}) = P(A) + P(B)$.

Verjetnost nemogočega dogodka: $P(N) = 0$

Verjetnost nasprotnega dogodka: $P(A') = 1 - P(A)$

Če je $A \subset B$, potem velja $P(A) \leq P(B)$.

Verjetnost razlike dogodkov: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Verjetnost vsote dogodkov: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Verjetnost produkta neodvisnih dogodkov: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Verjetnost produkta odvisnih dogodkov: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Pogojna verjetnost: $P(B|A)$

Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov:
verjetnost, da se dogodek A v n ponovitvah poskusa zgodi natanko k-krat:
$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$

NE POZABI

Bernoullijeva formula:

$P(X=p_k)=P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Gaussova krivulja:

$g(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

Standardizirana Gaussova krivulja:

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Standardizirana slučajna spremenljivka:

$Z=\frac{X-a}{\sigma}$; $Z\sim N(0,\,1)$

LIMITA FUNKCIJE

– Računanje s funkcijami
– Limita funkcije
– Računanje limite funkcije
– Neskončna limita funkcije
– Limita funkcije v neskončnosti
– Limite trigonometričnih funkcij

Bernhard Riemann
(1826–1866)

Peter Gustav Lejeune Dirichlet
(1805–1859)

Zadnja tri poglavja so tako močno povezana med seboj, da njihovega zgodovinskega uvoda ni mogoče ločiti.
Osnova vsega je seveda funkcija, katere kratko zgodovino ste lahko prebrali v učbenikih *Linea nova* na str. 178, 179 in *Planum novum* na str. 158, 159.

Matematiki d'Alambert, Euler, Bernoulli pa tudi Lagrange so funkcijo vedno gledali »v enem kosu«. Najprej je bila zanje istovetna z matematičnim izrazom. Funkcija, ki je bila povsod, kjer je le bila smiselna, zapisana z istim izrazom, je bila za Eulerja zvezna. Za zvezno je npr. štel tudi funkcijo $\frac{1}{x}$, čeprav je njen graf iz dveh kosov. Drugič spet je funkcija pomenila to, čemur danes pravimo njen graf. Bila je krivulja, nekaj enotnega, povezanega, kar lahko narišemo. Med risanjem konica svinčnika gladko teče, v vsakem trenutku napreduje z določeno hitrostjo, krivulja je zato gladka. Ti pogledi so bili kmalu preseženi.

Končno je pravo podobo definiciji funkcije dal Dirichlet. Po Riemannovih besedah je Dirichlet postavil trden temelj raziskavam, ki so skoraj sedemdeset let vznemirjale izjemne matematike. Riemann nekje pravi: »Pogoji, ki jih je zahteval Dirichlet od funkcije, so bili taki, da lahko mirno privzamemo: v naravnih pojavih drugačnih funkcijskih zvez ne srečamo.«

Omenjena matematika sta bila povezana tudi sicer: Dirichlet, katerega učitelj v srednji šoli je bil Georg Simon Ohm (1792–1854), je po študiju v Parizu in prvi službi v Wroclavu nasledil slavnega Gaussa v Göttingenu. Za Dirichletom pa je slavno stolico zasedel prav Bernhard Riemann, o katerem bomo nekaj malega povedali še v poglavju o integralu.

Diferencialni in integralni račun oz. poenostavljeno rečeno računanje odvoda in integrala ima začetek pri starogrških matematikih, predvsem pri Evdoksu iz Knida (408–355 pr. Kr.) in Arhimedu iz Sirakuz (287–212 pr. Kr.). Razvila sta *metodo izčrpavanja*, ki je predhodnica današnjega računanja ploščine pod krivuljo oz. določenega integriranja. Bistvo metode izčrpavanja je vklenitev lika z neznano ploščino med dva lika z izmerljivima ploščinama, od katerih ena narašča, druga pa pada k vrednosti, ki jo želimo izračunati. Lik pod krivuljo je treba razdeliti na ozke pasove in vsakemu pasu prirediti najmanjši pravokotnik, ki pas še vsebuje, in največji pravokotnik, ki je še del pasu. Z vsoto ploščin večjih pravokotnikov tako dobimo zgornji približek, z vsoto ploščin manjših pravokotnikov pa spodnji približek iskane ploščine krivočrtnega lika. Približki so tem boljši, čim ožji so pasovi, na katere je razrezan lik.

Računanje ploščine kroga z metodo izčrpavanja v japonski matematični knjigi iz leta 1670

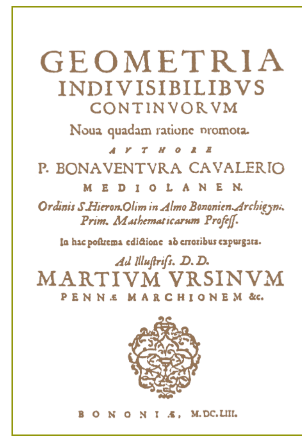
Pri svojem raziskovanju je Arhimed prišel do pomembnih odkritij:

- izračunal je obseg kroga z včrtavanjem in očrtavanjem pravilnih *n*-kotnikov in pri tem dobil dober približek za število π;
- znal je izračunati površino in prostornino krogle;
- dokazal je, da so prostornine stožca, polkrogle in valja z isto osnovno ploskvijo in isto višino v razmerju $1:2:3$;
- dokazal je, da je ploščina paraboličnega odseka enaka $\frac{4}{3}$ ploščine včrtanega trikotnika z osnovnico, ki je enaka osnovnici odseka in z vrhom v točki, v kateri je tangenta na parabolo vzporedna osnovnici odseka.

Drugi del razvoja diferencialnega in integralnega računa se je nadaljeval po skoraj 2000 letih v obdobju renesanse. Začetki industrije, iznajdba strelnega orožja in tiska, odkrivanje novih ozemelj in razcvet trgovine so močno vplivali tudi na razvoj matematike. Nadaljnja raziskovanja v matematiki je spodbudila tudi ponovna izdaja Arhimedovih del leta 1558.

Med najpomembnejšimi matematiki tega časa so:

- Simon Stevin (1548–1620); ukvarjal se je z izračunavanjem težišč in s hidravliko;
- Paul Guldin (1577–1643) z delom *Centrobaryca*;
- Evangelista Torricelli (1608–1647); Arhimedove metode je uporabljal v astronomiji in fiziki;
- Johannes Kepler (1571–1630);
- Bonaventura Cavalieri (1598–1647); leta 1635 je napisal prvi učbenik o integracijskih metodah *Geometria indivisibilibus continuorum*.



GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
P. BONAVENTVRA CAVALERIO
MEDIOLANEN.
Ordinis S. Hieron. Olim in Almo Bononien. Archigym. Prim. Mathematicarum Profess.
In hac postrema editione ab erroribus expurgata.
Ad Illustriss. D. D.
MARTIVM VRSINVM
PENNÆ MARCHIONEM &c.
BONONIÆ, M.DC.LIII.

484 GEOMETRIÆ

THEOREMA I. PROPOS. I.

Figuræ planæ quæcunq; in eisdem parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscunq; eisdem parallelis æquidistantibus rectis lineis, conceptæ cuiuscumq; rectæ lineæ portiones sunt æquales, etiam inter se æquales erunt: Et figuræ solidæ quæcumq; in eisdem planis parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscunq; planis eisdem planis parallelis æquidistantibus, conceptæ cuiuscunq; sic ducti plani in ipsis solidis figuræ planæ sunt æquales, pariter inter se æquales erunt. Dicantur autem figuræ æqualiter analogæ, tum planæ, tum ipsæ solidæ inter se comparatæ, ac etiam iuxta regulas lineas, seu plana parallela, in quibus esse supponuntur, cum hoc fuerit opus explicare.

LIBER VII.

Faksimile naslovnice in prve strani Cavalierijeve knjige

Po izidu Cavalierijeve knjige je precej matematikov začelo proučevati probleme, v katerih nastopajo neskončno majhne količine, imenovane *indivisibile* ali tudi *infinitezimale*. Osnovnih problemov so se lotevali v abstraktnejši obliki in pri tem pridobili splošnost.

Tako je tangentni problem oz. iskanje tangente na krivuljo v določeni točki krivulje pripeljal do definicije odvoda. Pri reševanju sta se razvili dve smeri: algebrska in geometrijska. Cavalierijevi nasledniki so razvijali grško geometrijsko metodo, Réné Descartes, Pierre de Fermat in John Wallis pa so poskušali na algebrski način. Spodbudo za razvoj t. i. infinitezimalnega računa so dobili z izidom Descartesove knjige *Géométrie*, v kateri je z uporabo algebre v geometriji postavil temelje analitične geometrije.

Razvoj infinitezimalnega računa sta nadaljevala Fermat (leta 1638 je odkril metodo za iskanje minimuma in maksimuma) in Johannes Hudde dvajset let pozneje s posplošitvami Fermatovega dela.

V tem času so že znali izračunati prostornine in zapisati enačbo tangente na krivuljo, vendar pravega odnosa med odvodom in integralom še niso poznali. Leta 1655 je izšlo še eno pomembno delo. S knjigo *Arithmetica infinitorum* je profesor geometrije v Oxfordu John Wallis (1616–1703) algebro razširil v pravo matematično analizo, kot jo pojmujemo danes.

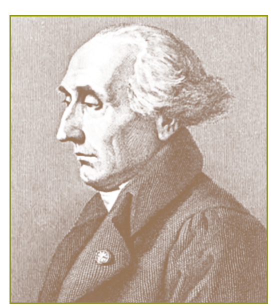
Do definicije odvoda in integrala ni bilo več daleč, potrebna je bila le še sinteza algebrske in geometrijske metode. In to sta neodvisno drug od drugega opravila Isaac Newton in Gottfried Wilhelm Leibniz.

Newton je svojo metodo, ki jo je imenoval *teorija fluksij*, odkril med letoma 1665 in 1666, ko se je pred kugo iz Cambridgea umaknil domov na deželo. Metoda je nastala med proučevanjem neskončnih vrst iz Wallisove knjige *Arithmetica.* Odvod oz. fluksijo si je predstavljal kot hitrost in jo tudi označeval s piko nad črko (ta oznaka za odvod poti po času je v fiziki ostala do danes). Svoje ideje o teoriji fluksij je opisal v istoimenski knjigi, ki je izšla po njegovi smrti leta 1736.

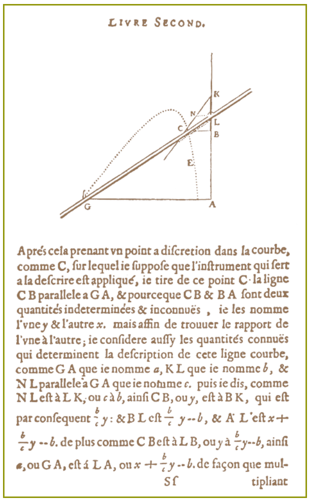
Leibniz je infinitezimalni račun premislil med letoma 1673 in 1676 pod vplivom del Huygensa, Descarta in Pascala. V nasprotju z Newtonovim kinematičnim pristopom je bila Leibnizeva metoda geometrijska. Svoje prve izsledke o odvodu in integralu je izdal že leta 1684 v knjigi *Acta eruditorum*. Leibniz je v diferencialni in integralni račun vpeljal večino simbolov, ki so v uporabi še danes.

Newton in Leibniz sta bila pri razlagi infinitezimalnega računa precej nejasna in v svojem delu nista dala popolnoma strogih definicij, kar je med matematiki

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)



Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

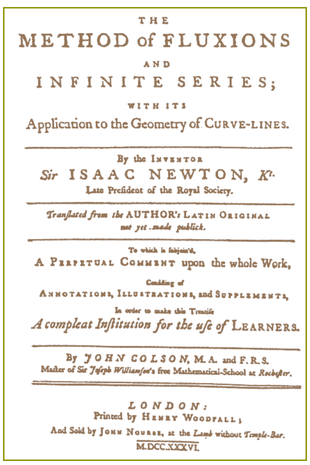


LIVRE SECOND.

Aprés cela prenant vn point a discretion dans la courbe, comme C, sur lequel ie suppose que l'instrument qui sert a la descrire est appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A sont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie considere aussy les quantités connuës qui determinent la description de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L est à L K, ou c à b, ainsi C B, ou y, est à B K, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & B L est $\frac{b}{c}y - b$, & A L est $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B est à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainsi a, ou G A, est á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-

Sſ tipliant

Faksimile iz Descartesove knjige



THE
METHOD of FLUXIONS
AND
INFINITE SERIES;
WITH ITS
Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR
Sir ISAAC NEWTON, Kt.
Late President of the Royal Society.

Translated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL
not yet made publick.

To which is subjoin'd,
A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,
Consisting of
ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,
In order to make this Treatise
A compleat Institution for the use of LEARNERS.

By JOHN COLSON, M.A. and F.R.S.
Master of Sir Joseph Williamson's free Mathematical-School at Rochester.

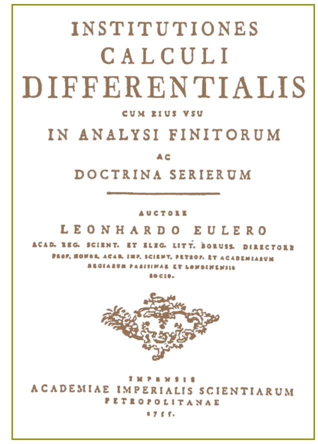
LONDON:
Printed by HENRY WOODFALL;
And Sold by JOHN NOURSE, at the Lamb without Temple-Bar.
M.DCC.XXXVI.

Naslovnica knjige Teorija fluksij

ACTA
ERUDITORUM
ANNO MDCLXXXIV
publicata,
ac
SERENISSIMO FRATRUM PARI,
DN. JOHANNI
GEORGIO IV,
Electoratus Saxonici Hæredi,
&
DN. FRIDERICO
AUGUSTO,
Ducibus Saxoniæ &c.&c.&c.
PRINCIPIBUS JUVENTUTIS
dicata.
Cum S.Cæsareæ Majestatis & Potentissimi Electoris Saxoniæ Privilegiis.

LIPSIÆ,
Prostant apud GROSSIUM & J. F. GLETITSCHIUM.
Typis CHRISTOPHORI GÜNTHERI.
Anno MDCLXXXIV.

Naslovnica Leibnizeve knjige Acta eruditorum sprožilo žolčne razprave in kritike. Njuno delo so v naslednjem stoletju dokončali Jakob in Johann Bernoulli, Leonhard Euler, Jean le Rond d’Alambert, Joseph Louis Lagrange in Pierre Simon Laplace.


INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS VSU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM
AUCTORE
LEONHARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.
IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.

Naslovnica Eulerjeve knjige O diferencialnem računu iz leta 1755

Isaac Newton se je rodil zemljiškemu posestniku v Lincolnshiru. V mladosti ga je zanimalo konstruiranje različnih predmetov (zmaji, sončne in vodne ure), za katere je sam delal načrte. Po nekaj letih šolanja je odšel domov in pomagal na kmetiji. Stric je v njem zaslutil genija in dosegel, da je odšel študirat na univerzo v Cambridgeu, kjer je brez posebnega truda diplomiral leta 1665. Zaradi kuge je odšel domov in imel veliko časa za razmišljanje in študij. V tem času je odkril infinitezimalni račun, gravitacijski zakon, ukvarjal se je z optiko (z optično prizmo je pokazal, da je bela svetloba sestavljena iz mavričnih barv), leta 1668 je sestavil prvi zrcalni teleskop. Leta 1687 je izdal knjigo *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Matematične osnove naravoslovja*), v kateri je opisal večino svojih najpomembnejših ugotovitev – tudi tri temeljne zakone mehanike in gravitacijski zakon. Newtona so še v času življenja zelo spoštovali. Postal je poslanec v parlamentu, dobil plemiški naslov in bil upravnik kraljeve kovnice denarja. Ko je umrl, so ga z največjimi častmi pokopali v Westminstrski opatiji ob pomembnih angleških junakih. Latinski napis na njegovem nagrobniku se končuje s stavkom: »Smrtniki, radujte se ob tem veličastnem okrasu človeštva.«

Isaac Newton (1642–1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz se je rodil v Leipzigu in potem večino življenja preživel na različnih dvorih. Na univerzi je študiral pravo in že dvajsetleten doktoriral iz filozofije. Glavni smisel njegovega življenja je bilo iskanje splošne metode za pridobivanje spoznanj, ustvarjanje izumov in razumevanje prave enotnosti vesolja. Zato je bil filozof, zgodovinar, teolog, lingvist, biolog, matematik, izumitelj (skonstruiral je mehanski računski stroj, imel je ideje o parnem stroju) in diplomat. Kot diplomat je leta 1672 prišel v Pariz in se seznanil z nekaterimi matematiki. Ko je opazil, da je njegovo matematično znanje bolj šibko, je začel študirati in kmalu sam začel prispevati nova matematična odkritja. Leibnizova zasluga je, da poznamo formulo za odvod produkta funkcij, veliko truda je vložil tudi v iskanje oznak v diferencialnem in integralnem računu. V nasprotju z Newtonom je starost preživel bolan, pozabljen in zagrenjen.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Računanje s funkcijami

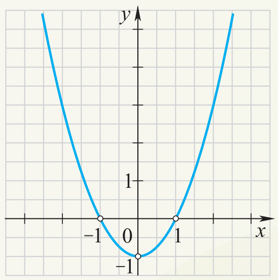
V tem poglavju bomo za pojme, kot so naraščanje in padanje, konveksnost in konkavnost elementarnih funkcij, uporabili bolj elegantno ugotavljanje in opisovanje lastnosti, ki smo jih spoznali v prvih treh letih. To nam bo omogočilo, da bomo lahko natančneje risali njihove grafe.

Za začetek naredimo kratko ponovitev z malo težjima zgledoma.

ZGLEDA

1. Zapišimo definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, intervale naraščanja in padanja ter ugotovimo omejenost oz. neomejenost in konveksnost oz. konkavnost funkcije $f(x) = \ln\sqrt{x^2-1}$.

Najprej se spomnimo, da je logaritemska funkcija definirana za pozitivna realna števila (ko gre $x \to 0$, gre $\ln x \to -\infty$), zato postavimo pogoj $\sqrt{x^2-1} > 0$. Potem je tudi $x^2 - 1 > 0$, iz česar že dobimo definicijsko območje $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Pri tem si lahko pomagamo z grafom kvadratne funkcije $g(x) = x^2 - 1$.



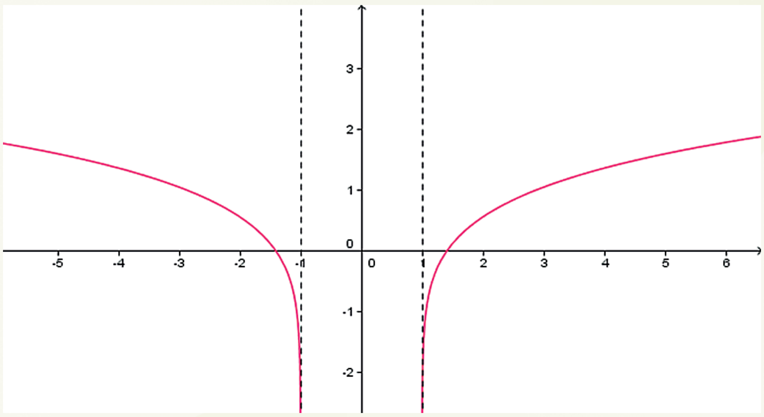
Funkcija f ima dve navpični asimptoti pri $x = 1$ in $x = -1$, ker logaritemska funkcija pri ničelnem logaritmandu ni definirana.

Pri $x = \sqrt{2}$ ima funkcija ničlo: $f(\sqrt{2}) = \ln\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = \ln 1 = 0$,
pri $x = \sqrt{e^2+1}$ je vrednost funkcije enaka 1:
$f(\sqrt{e^2+1}) = \ln\sqrt{(\sqrt{e^2+1})^2 - 1} = \ln e = 1$.

Funkcija na intervalu $(1, \infty)$ narašča podobno kot osnovna logaritemska funkcija.

Iz vsega sklepamo, da je na intervalu $(1, \infty)$ funkcija neomejena, torej je $Z_f = \mathbb{R}$, in je konkavna.
Ker je funkcija soda, $f(-x) = \ln\sqrt{(-x)^2 - 1} = \ln\sqrt{x^2-1} = f(x)$, je njen graf simetričen glede na ordinatno os. Funkcija je naraščajoča na intervalu $(1, \infty)$ in padajoča na intervalu $(-\infty, -1)$.

Glede na vse naštete lastnosti že lahko dokaj natančno skiciramo graf funkcije, s pomočjo programa *GeoGebra* pa se prepričamo, da smo pravilno razmišljali.



2. Pokažimo, da je funkcija $f(x) = 2x - 1$ bijektivna.

Najprej pokažimo, da je injektivna. Po definiciji se morata različna originala preslikati v različni sliki. Lahko pa trditev logično obrnemo: če sta enaki sliki, morata biti enaka tudi originala.

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow B \Rightarrow \neg A$

Iz $f(x_1) = 2x_1 - 1$ in $f(x_2) = 2x_2 - 1$ ter $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$ že sledi $x_1 = x_2$.

V drugem delu moramo pokazati, da je vsako realno število y slika nekega originala.

Vzemimo za original realno število $\frac{y+1}{2}$ in ga preslikajmo s funkcijo f.

$f(\frac{y+1}{2}) = 2 \cdot \frac{y+1}{2} - 1 = y + 1 - 1 = y$ in trditev je dokazana.

Ker je f injektivna in surjektivna, je bijektivna.

Seštevanje in odštevanje, množenje in deljenje funkcij

Funkcijama f in g, ki sta definirani na istem intervalu $[a, b]$, lahko priredimo:

- **vsoto** $\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **razliko** $\quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- **produkt** $\quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- **kvocient** $\quad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0, \forall x \;\; [a, b]$
- **produkt s številom** $\quad (kf)(x) = k \cdot f(x)$

ZGLEDA

1. Zapišimo vsoto, razliko, produkt in kvocient funkcij $f(x)=x-3$ in $g(x)=-2x+1$ na intervalu $[-3, 4]$ ter narišimo njihove grafe.

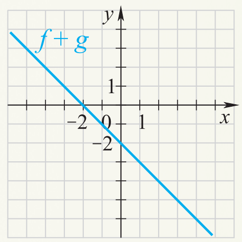
$(f+g)(x)=x-3+(-2x+1)=-x-2$
$(f-g)(x)=x-3-(-2x+1)=3x-4$

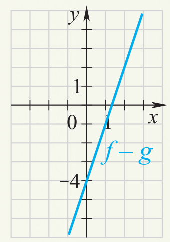
Vsota in razlika dveh linearnih funkcij sta linearni funkciji.
$(f\cdot g)(x)=(x-3)\cdot(-2x+1)=-2x^2+7x-3$

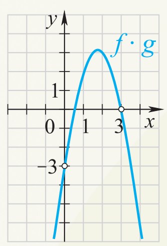
Produkt dveh linearnih funkcij je kvadratna funkcija.

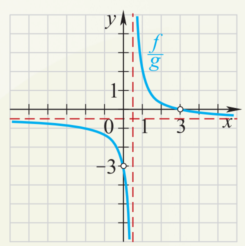
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x-3}{-2x+1}$

Kvocient dveh linearnih funkcij je racionalna funkcija, ki ni definirana v ničli funkcije v imenovalcu: $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$.









2. Narišimo graf funkcije $h(x)=x+\cos x$.

Naloga je kar precej trd oreh, saj taki funkciji ne znamo niti poiskati ničel. Edino začetno vrednost znamo določiti:
$h(0)=0+\cos 0=0+1=1$

Znali bi poiskati še nekaj točk z njenega grafa, ki pa nam ne bi pomagale kaj dosti in z njimi ne moremo narisati celotnega grafa:

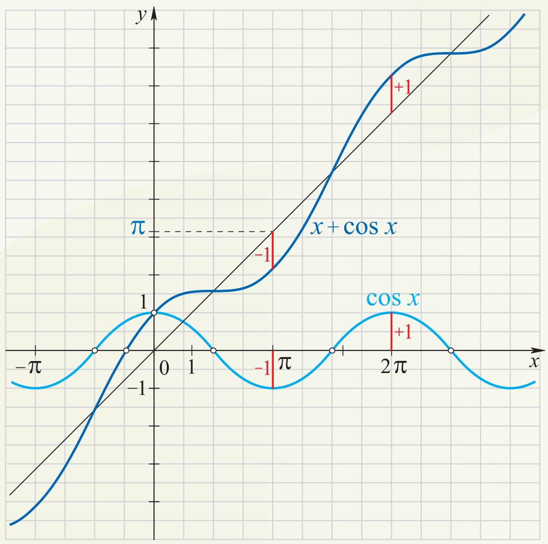
$h(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}\doteq 1{\cdot}57 \quad \Rightarrow \quad A(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$h(\pi)=\pi+\cos\pi=\pi-1\doteq 2{\cdot}14 \quad \Rightarrow \quad B(\pi, \pi-1)$

Funkcija $h(x)$ je vsota dveh funkcij:
$f(x)=x$ in $g(x)=\cos x$

Narišimo grafa funkcij f in g, potem pa bomo laže skicirali tudi graf vsote. Pri posameznih vrednostih x bomo pogledali vrednosti $f(x)$ in $g(x)$ in določili vrednost njune vsote.

Npr.: pri $x=\pi$ je $f(x)=\pi$ in $g(x)=-1$,
vrednost vsote oz. $h(x)=\pi-1$;

pri $x=\frac{3\pi}{2}$ je $f(x)=\frac{3\pi}{2}$ in $g(x)=0$,
vrednost vsote oz. $h(x)=f(x)=\frac{3\pi}{2}$.

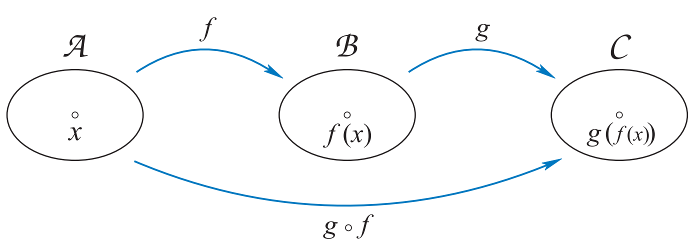


Sestava ali kompozitum funkcij

Vzemimo funkcijo f, ki elementom množice $\mathcal{A}$ priredi slike $f(x)$ v množici $\mathcal{B}$, in naj bo $\mathcal{B}$ zaloga vrednosti funkcije f (funkcija f je surjektivna). Slike $f(x)$ so originali nove funkcije g, ki jim priredi slike $g(f(x))$ v množici $\mathcal{C}$.

$$f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B} \qquad\qquad g\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$$

$$f\colon x \mapsto f(x) \qquad\qquad g\colon f(x) \mapsto g(f(x))$$

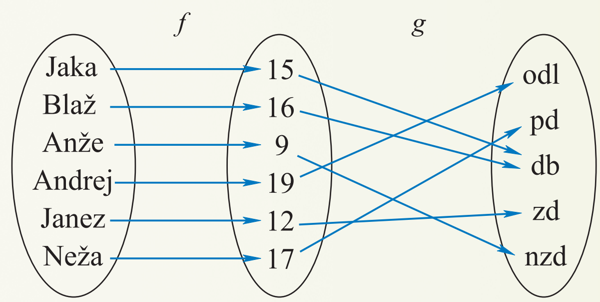


Od originala $x \in \mathcal{A}$ do njegove slike $g(f(x)) \in \mathcal{C}$ lahko pridemo tudi neposredno s funkcijo, ki jo imenujemo **sestava** ali **kompozitum** funkcij f in g:

$$g \circ f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}; \quad \boldsymbol{g \circ f\colon x \mapsto g(f(x))} \quad \text{oziroma} \quad \boldsymbol{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

ZGLEDA

1. Učenci so pisali šolsko nalogo iz matematike. Naj funkcija f vsakemu učencu priredi število zbranih točk, funkcija g pa vsakemu številu točk priredi oceno. Potem je kompozitum $g \circ f$ funkcija, ki vsakemu učencu priredi zasluženo oceno.



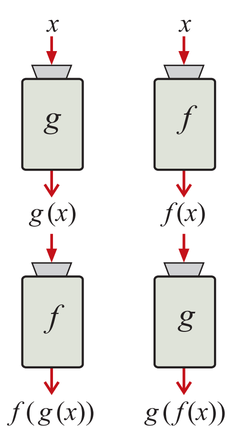
Funkcija f Jaku priredi 15 točk, funkcija g pa 15 točkam priredi oceno dobro.

$f(\text{Jaka}) = 15$

$g(15) = \text{db}$

$(g \circ f)(\text{Jaka}) = g(f(\text{Jaka})) = g(15) = \text{db}$

2. Funkcija f kvadrira vsako realno število, funkcija g pa številu prišteje 1. Kakšen je predpis funkcije $g \circ f$ in kakšen je predpis funkcije $f \circ g$?



$$x \xrightarrow[\text{kvadriraj}]{f} x^2 \xrightarrow[\text{prištej 1}]{g} x^2 + 1 \qquad (g \circ f)(x) = x^2 + 1$$

$$x \xrightarrow[\text{prištej 1}]{g} x + 1 \xrightarrow[\text{kvadriraj}]{f} (x+1)^2 \qquad (f \circ g)(x) = (x+1)^2$$

Vidimo, da sestavljanje funkcij ni komutativna operacija.

Če je funkcija f: $(a, b) \to (c, d)$ bijektivna, ji lahko poiščemo inverzno funkcijo. Definicijsko območje inverzne funkcije je zaloga vrednosti (c, d) prvotne funkcije f, zaloga vrednosti inverzne funkcije pa je definicijsko območje (a, b) prvotne funkcije f.

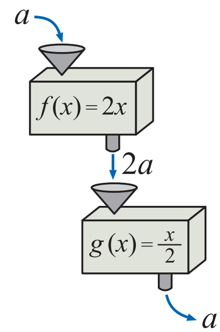
ZGLEDA

1. Eksponentna funkcija $f(x) = a^x$; $a > 0$; $a \neq 1$ z definicijskim območjem $D_f = \mathbb{R}$ in zalogo vrednosti $Z_f = \mathbb{R}^+$ ima inverzno funkcijo $f^{-1}(x) = \log_a x$; $a > 0$; $a \neq 1$ z definicijskim območjem $D_f = \mathbb{R}^+$ in zalogo vrednosti $Z_f = \mathbb{R}$.

2. Kvadratni funkciji ne moremo najti inverzne, ker ni bijektivna. Zato njeno definicijsko območje omejimo na nenegativna števila, ista množica je tudi zaloga vrednosti. V tem primeru ima inverzno funkcijo $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $D_f = Z_f = [0, \infty)$.

Kompozitum bijektivne funkcije f in njene inverzne funkcije f^{-1} je identična preslikava.

$$\boldsymbol{(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x}$$



$g(f(a)) = a$

ZGLEDI

1. Na primeru funkcij $f(x) = \ln(x^2 + 2)$ in $g(x) = 3x - 1$ pokažimo, da sestavljanje funkcij ni komutativna operacija.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln((3x - 1)^2 + 2 = \ln(9x^2 - 6x + 3)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x) = 3(\ln(x^2 + 2) - 1) = 3\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1)^3 =$
$= \ln(x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1)$

2. Izračunajmo inverzno funkcijo funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ in pokažimo, da velja $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

$y = \sqrt[3]{x} + 1$

$x = \sqrt[3]{y} + 1 \Rightarrow y = (x - 1)^3$

$f^{-1}(x) = (x - 1)^3$

$(f(f^{-1}(x)) = \sqrt[3]{(x-1)^3} + 1 = x - 1 + 1 = x$

$(f^{-1}(f(x)) = (\sqrt[3]{x} + 1 - 1)^3 = x$

3. Dani sta funkciji $f(x) = \frac{3x+4}{5x-7}$; $x \neq \frac{7}{5}$ in $g(x) = \frac{7x+4}{5x-3}$; $x \neq \frac{3}{5}$. Pokažimo, da sta funkciji druga drugi inverzni.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right)+4}{5\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right)-7} = \frac{21x+12+4(5x-3)}{35x+20-7(5x-3)} = \frac{41x}{41} = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right) = \frac{7\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right)+4}{5\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right)-3} = \frac{21x+28+4(5x-7)}{15x+20-3(5x-7)} = \frac{41x}{41} = x$$

$f^{-1}(x) = g(x)$ in $g^{-1}(x) = f(x)$

4. Dani sta funkciji $f(x) = 3x + 2$ in $g(x) = 2x + n$. Kolikšna mora biti vrednost neznanega števila n, da bo veljalo $f(g(x)) = g(f(x))$?

$f(g(x)) = 3(2x + n) + 2$

$g(f(x)) = 2(3x + 2) + n$

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

$3(2x + n) + 2 = 2(3x + 2) + n$

$3n + 2 = 4 + n$

$n = 1$

5. V jezero z mirno gladino vržemo kamen. Ta povzroči krožno valovanje, ki se širi s hitrostjo $v = 50$ cm/s. Izrazimo polmer r krožnice, ki je čelo valovanja, kot funkcijo časa (v sekundah) in zapišimo kompozitum funkcij $S \circ r$, kjer je S ploščina kroga in r polmer krožnice.

$r(t) = vt = 50t$

$S(r) = \pi r^2$

$(S \circ r)(t) = S(r(t)) = \pi(r(t))^2 = \pi(50t)^2 = 2500\pi t$

NALOGE

569. Zapišite definicijsko območje funkcij.

a) $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$

b) $g(x) = \log_3(x^3 - x^2 - x + 1)$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$

570. Dani sta funkciji $f(x) = 2x - 4$ in $g(x) = x^3 - 1$. Zapišite predpise za funkcije.

a) $f^{-1}(x)$, $f(x^{-1})$ in $[f(x)]^{-1}$

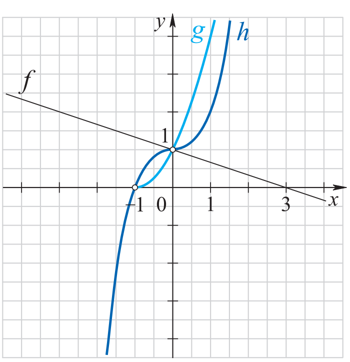
b) $g^{-1}(x)$, $g(x^{-1})$ in $[g(x)]^{-1}$

571. Dani sta funkciji $f(x) = 3^x + 1$ in $g(x) = \ln x$. Zapišite predpise za funkcije.

a) $f^{-1}(x)$, $f(x^{-1})$ in $[f(x)]^{-1}$

b) $g^{-1}(x)$, $g(x^{-1})$ in $[g(x)]^{-1}$

572. Na sliki so narisani grafi linearne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in potenčnih funkcij $g\colon [-1, \infty) \to [0, \infty)$ in $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Narišite grafe inverznih funkcij f^{-1}, g^{-1} in h^{-1} ter za vseh šest funkcij zapišite predpise.



573. Dani sta funkciji $f(x) = 2x - 3$ in $g(x) = -x + 2$. Za katera realna števila x velja:

a) $f(x) = g(x)$

b) $f(2x) = g(x)$

c) $f(x) + x = g(2x)$

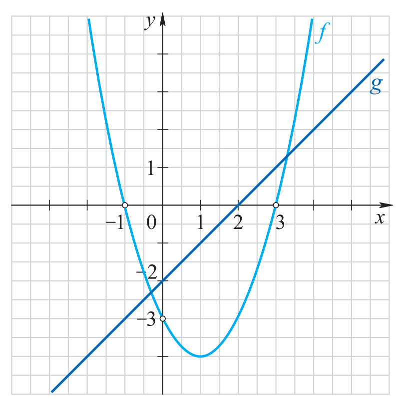
č) $f(x+1) = g(-2)$

d) $f(x+3) = g(2)$

e) $f(x^2) = g(-13)$

574. Dani sta funkciji f in g. Zapišite predpise za vsoto, razliko, produkt in kvocient funkcij $f(x) = x + 3$ in $g(x) = -\frac{3}{2}x - 2$. Zapišite še predpis za funkcijo $h\colon x \mapsto 2g(x)$.

575. Na sliki sta grafa funkcij f in g.



a) Z grafa odčitajte vrednosti: $(f+g)(-1)$, $(f-g)(1)$, $(f \cdot g)(3)$, $(g-f)(4)$ in $(\frac{f}{g})(0)$.

b) Zapišite predpise za funkcije f, g, $f+g$, $f-g$, $g-f$, $f \cdot g$ in $\frac{f}{g}$ ter preverite rezultate iz točke a.

576. Dani sta funkciji $f(x)=x^2+1$ in $g(x)=2^x-1$. Zapišite predpise za funkcije:
a) $f+g$,
b) $4g$,
c) $g-f$,
č) $f\cdot g$,
d) $\frac{g}{f}$ in zapišite njeno definicijsko območje.

577. Dani sta funkciji $f(x)=x^3-1$ in $g(x)=x^2-5x+6$.
a) Zapišite predpisa za funkciji $f\cdot g$ ter $\frac{f}{g}$ in njuni definicijski območji.
b) Izračunajte $(f\cdot g)(2)$ ter $(\frac{f}{g})(-1)$.

578. Dani sta funkciji $f(x)=\cos^2 x$ in $g(x)=\sin^2 x$. Zapišite predpise za funkcije:
a) $f+g$,
b) $f-g$,
c) $2g$,
č) $f\cdot g$,
d) $\frac{f}{g}$ in zapišite njeno definicijsko območje.

579. Zapišite definicijsko območje in zalogo vrednosti danih funkcij.
a) $f(x)=\sqrt{-x}$
b) $f(x)=\sqrt{\frac{7-x}{7+x}}$
c) $f(x)=2-\cos 2x$

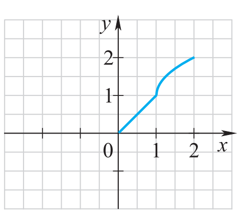
580. Zapišite definicijsko območje funkcije $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3\sqrt{\ln x+1}}$.

581. Pokažite, da ima funkcija $g(x)=\frac{x^4-2x-2}{x}-|x|$ dve ničli na intervalu $[-2, 2]$.

582. Izračunajte $f(2014)$, če je $f(x)=g(x)+2$ in $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$.

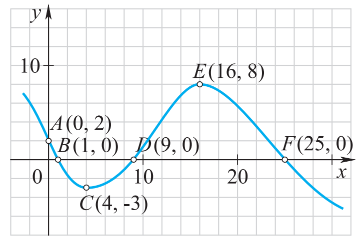
583. Dan je graf funkcije

$$f(x)=\begin{cases} x; & 0\le x\le 1 \\ \sqrt{x-1}+1; & 1<x\le 2 \end{cases}.$$



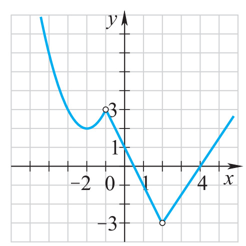
Razširite definicijo funkcije na interval $[-2, 2]$, da bo funkcija:
a) soda,
b) liha,
c) periodična z osnovno periodo 2.
Narišite grafe teh funkcij.

584. Na sliki je graf funkcije f z vrisanimi točkami A, B, C, D, E in F. Skicirajte spodaj navedene grafe in vsakokrat na grafu označite preslikane točke.



a) $y=8-f(x)$
b) $y=2f(x+1)$
c) $y=f(x^2)$
d) $y=|f(x)|$
e) $y=f(|x|)$

585. Dan je graf funkcije f. Izračunajte $r+f(-1)$, če je $f(-2)=p$ in $f(p)=r$.



586. Dani sta funkciji $f(x)=x+3$ in $g(x)=x^2-1$. Zapišite predpise za sestavljene funkcije.
a) $f\circ g$ b) $g\circ f$

587. Dani sta funkciji $f(x)=\sqrt{x+1}$ in $g(x)=x^4-1$. Zapišite predpise za sestavljene funkcije.
a) $f\circ g$ c) $f\circ f$
b) $g\circ f$ č) $g\circ g$

588. Dani sta funkciji $f(x)=x^{-1}$ in $g(x)=\frac{1}{1-x}$. Zapišite predpise za sestavljene funkcije.
a) $f\circ g$ c) $f\circ f$
b) $g\circ f$ č) $g\circ g$

589. Za funkciji $f(x)=\log(-x)$ in $g(x)=x^2+4x-12$ poiščite predpis za sestavljeno funkcijo $f\circ g$ in zapišite njeno definicijsko območje.

590. Najprej narišite grafa funkcij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$; $f(x) = 2^x$ in $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; $g(x) = \log_2 x$, nato zapišite predpise za funkcije in narišite še njihove grafe.
a) $f \circ g$
b) $g \circ f$
c) $f(x) \cdot f(x)$

591. Pokažite, da za funkciji $f(x) = \cos x$ in $g(x) = 3x^2$ velja $f \circ g \neq g \circ f$.

592. Dani so neznano število in funkciji $f(x)$ ter $g(x)$. Izračunajte vrednost neznanega števila, da bo $f(g(x)) = g(f(x))$.
a) $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = kx - 1$
b) $f(x) = kx + 3$, $g(x) = kx - 1$
c) $f(x) = 2x + n$, $g(x) = 3x + n$

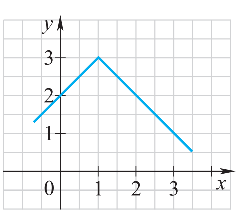
593. Poiščite kakšen primer funkcij f in g, da bo $f(g(x)) = \sin x^2$.

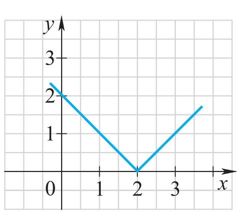
594. Če je T temperatura zraka in piha veter s hitrostjo v, potem imamo občutek, da je bolj mrzlo, kot kaže termometer. Temu pravimo vetrovni ohladitveni indeks (wind chill index) in ga izračunamo s funkcijo dveh spremenljivk:

$$\lambda(v, T) = \begin{cases} T; & 0 \le v < 6{,}5 \\ 33 - \dfrac{10{,}45 + 5{,}29\sqrt{v} - 0{,}278v}{22}(33 - T); & 6{,}5 \le v < 72 \\ 1{,}6T - 19{,}8; & v \ge 72 \end{cases}$$

a) Izračunajte $\lambda(50, 0)$ in $\lambda(100, 11)$.
b) Zapišite funkcijo $\lambda(v, 11)$.

595. Uporabite grafa funkcij f in g ter funkcijo $h(x) = -2x + 5$ za izračun kompozitov.





a) $h(f(0))$, $f(h(1))$, $f(g(2))$, $f(f(3))$
b) $g(f(0))$, $g(f(1))$, $g(h(2))$, $h(f(3))$
c) $f(g(0))$, $f(g(1))$, $f(h(2))$, $h(g(3))$

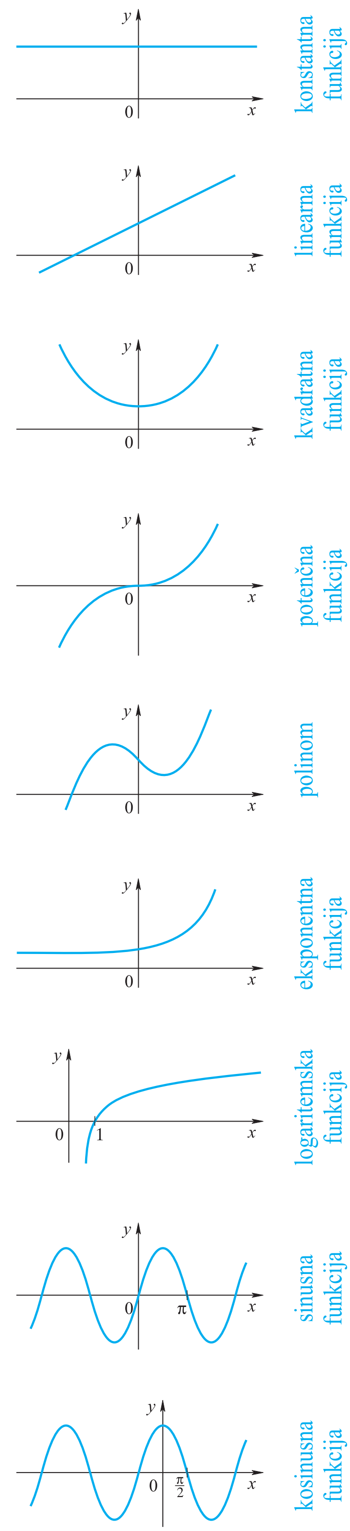
596. Dane so funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 3; & x < 1 \\ x - 2; & 1 \le x < 3 \\ 1; & x \ge 3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} |x+1|; & x < 0 \\ 2x; & x \ge 0 \end{cases}$$

in $h(x) = 2$.
a) Izračunajte $f(x)$ in $g(x)$ za $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.
b) Izračunajte $f(g(1))$, $f(h(1))$, $h(f(1))$, $f(f(2))$, $g(g(3{,}5))$.
c) Narišite grafe f, g in h na intervalu $(-5, 5)$.

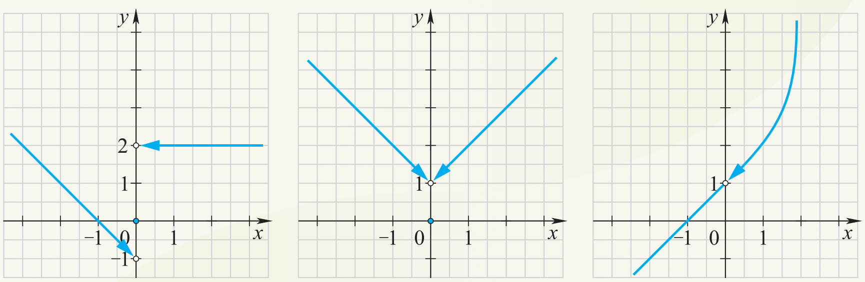
Limita funkcije

Pri pregledu elementarnih funkcij opazimo, da lahko grafe nekaterih funkcij narišemo z eno potezo, ne da bi pri tem dvignili konico svinčnika. Te funkcije so t. i. *zvezne funkcije*, grafi nekaterih so predstavljeni na robu strani. Poznamo pa tudi funkcije, ki niso zvezne.



ZGLED

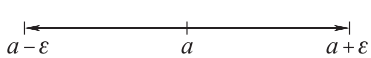
$$f(x)=\begin{cases}2; & x>0\\ 0; & x=0\\ -x-1; & x<0\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}|x+1|; & x\neq 0\\ 0; & x=0\end{cases}\qquad h(x)=\begin{cases}x+1; & x\leq 0\\ e^{x}; & x>0\end{cases}$$



Funkciji f in g nista zvezni v $x=0$, saj imata »pretrgan« graf, vendar je med njima bistvena razlika. Funkcijo g lahko »popravimo« tako, da postane zvezna, če spremenimo predpis v $g(x)=\begin{cases}|x|+1; & x\neq 0\\ 1; & x=0\end{cases}$, pri funkciji f to ne gre.

Funkcija h je zvezna, čeprav ima na različnih delih definicijskega območja različna predpisa.

Ponovimo: Odprt interval širine 2ε s središčem v a: $O_{\varepsilon}(a)=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ imenujemo **ε-okolica točke a**.



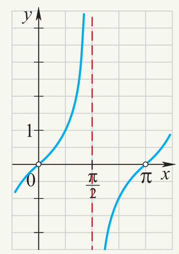
Če gledamo vrednosti funkcije, ko se x približuje točki, v kateri funkcija ni zvezna, vidimo, da se približujejo neki določeni vrednosti: pri funkciji g je ta vrednost 1, pri funkciji f pa take vrednosti ni. Če se namreč pri funkciji f približujemo točki nezveznosti $x=0$ z leve, gre vrednost funkcije proti -1, če gremo proti $x=0$ z desne, pa se vrednost funkcije približuje 2.

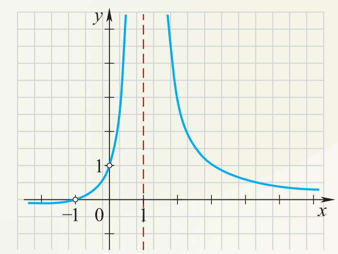
Številu 1 pri funkciji g rečemo **limita funkcije** (ko gre x proti 0 in ni enak 0) in je neke vrste »nadomestek« za vrednost funkcije. Funkcija f pa limite nima.

Limito funkcije ugotavljamo tudi, kadar funkcija pri določenem x ni definirana (npr. pri funkcijah $\tan x$, $\cot x$, pri potenčnih funkcijah z negativnim celim eksponentom x^{-1}, x^{-2} …, ali pri racionalnih funkcijah z realnimi poli).

ZGLED

$f(x) = \tan x$ $\qquad\qquad$ $g(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$





Funkcija $f(x) = \tan x$ v $x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$; $k \in \mathbb{R}$ nima limite, saj gre vrednost funkcije v okolici točk, kjer ni definirana, proti neskončno, če se bližamo z desne oz. proti $-\infty$, če se bližamo z leve. Racionalna funkcija $g(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ ni definirana v polu $x = 1$, vendar gre vrednost funkcije proti neskončno, če se bližamo polu z leve ali z desne. Zato ima funkcija g limito v tej točki.

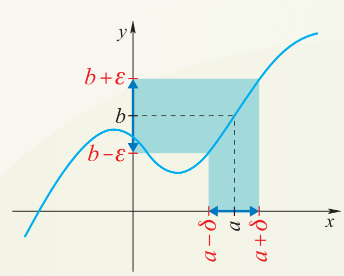
To, kar smo ugotovili intuitivno oz. bolj preprosto, bomo zdaj povedali z matematičnim jezikom.

Definicija: Število b je limita funkcije f, ko gre x proti a, če za poljubno ε-okolico točke b obstaja taka δ-okolica točke a, da brž ko je x v δ-okolici točke a, je tudi $f(x)$ v ε-okolici točke b.

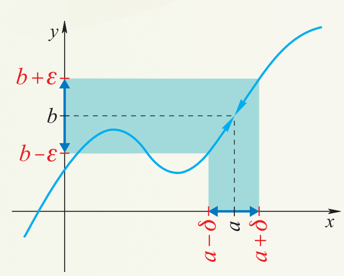
$$\boldsymbol{b = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\text{:}\ x \in (a-\delta,\ a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)}$$

ZGLED

Izberimo poljubno majhno pozitivno realno število ε, ki določa ε-okolico točke b na ordinatni osi. Preverimo, ali k izbranemu ε obstaja tako pozitivno realno število δ, da se vse vrednosti x iz δ-okolice točke a na abscisni osi (razen morda točke a) preslikajo v $f(x)$ iz ε-okolice točke b. Če obstaja, potem pravimo, da limita funkcije f v točki a obstaja in je enaka b. Pri tem ni pomembno, ali je funkcija v točki $x = a$ definirana ali ne.

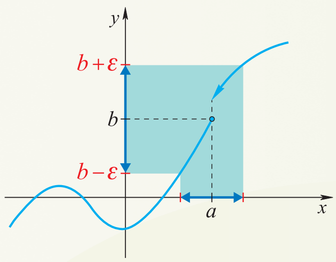


Funkcija pri $x = a$ je definirana.
Limita obstaja.

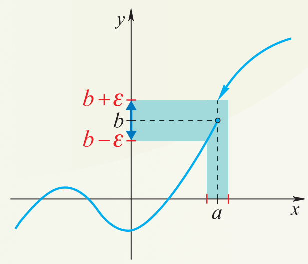


Funkcija pri $x = a$ ni definirana.
Limita obstaja.

Pri definiciji limite funkcije je pomembno, da **k vsakemu** še tako majhnemu ε lahko najdemo ustrezen δ, sicer limita v točki a ne obstaja:



Za tako izbran ε obstaja ustrezen δ.



Za tako izbran ε ne obstaja ustrezen δ.

Pri velikem ε lahko najdemo ustrezen δ, pri majhnih vrednostih ε pa tak δ ne obstaja. Če namreč vzamemo katerikoli x, ki je večji od števila a, njegova slika ni v ε-okolici b. Za obstoj limite pa mora tak δ obstajati za vsak ε.

Računanje limite funkcije je smiselno le v točkah nezveznosti, kajti v vseh točkah, kjer je funkcija zvezna, velja, da je limita enaka funkcijski vrednosti.

Definicija: Funkcija f je **zvezna v** $\boldsymbol{x = a}$, če in samo če

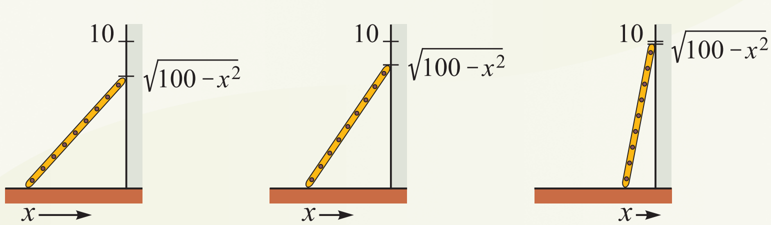
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\colon x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Funkcija je **zvezna** na intervalu $[a, b]$, če je zvezna v vsaki točki tega intervala.

Funkcije $\tan x$, $\cot x$, x^{-1}, x^{-2} in racionalne funkcije z realnimi poli so zvezne povsod, kjer so definirane.

ZGLED

Za boljšo predstavo limite poglejmo še preprost zgled z lestvijo. Bolj ko se njen spodnji konec približuje steni, bolj se višina njenega vrha bliža številu, ki pomeni dolžino lestve.



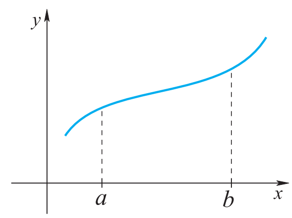
Lahko napišemo $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{100-x^2} = 10.$

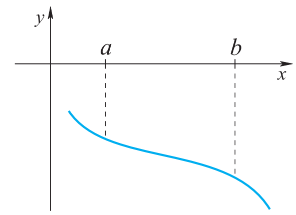
Lastnosti zveznih funkcij

Če seštejmo, odštejemo ali zmnožimo dve zvezni funkciji, dobimo novo zvezno funkcijo. Kvocient dveh funkcij pa je zvezen povsod, kjer je funkcija v imenovalcu različna od nič.

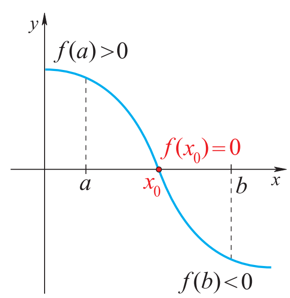
Zvezne funkcije imajo še druge lepe lastnosti:

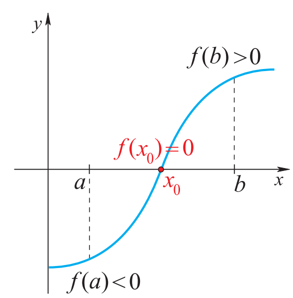
- Zvezna funkcija, ki ni nikjer na zaprtem intervalu enaka 0, ima na vsem intervalu stalen predznak (je povsod pozitivna ali povsod negativna).



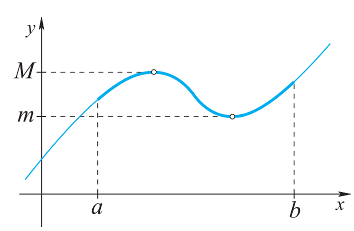


- Če je funkcija na krajiščih zaprtega intervala $[a, b]$, na katerem je zvezna, različno predznačena, ima na tem intervalu vsaj eno ničlo.

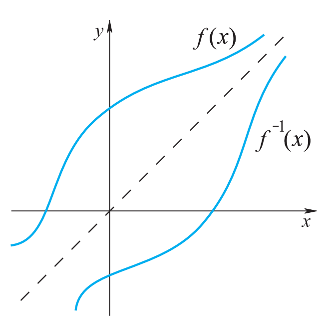




- Funkcija, ki je zvezna na zaprtem intervalu, je na njem omejena in zavzame svojo natančno zgornjo mejo M, natančno spodnjo mejo m in vse vrednosti med njima.



- Če je funkcija f naraščajoča in zvezna, je njena inverzna funkcija f^{-1} tudi naraščajoča in zvezna funkcija.



Grafa funkcije in njej inverzne funkcije sta simetrična glede na simetralo lihih kvadrantov.

NALOGE

597. Če je graf funkcije pretrgana krivulja, zapišite točke, kjer ni definirana, ali točke nezveznosti.

a) $f(x) = 3x - 2$
b) $f(x) = |4 - 2x|$
c) $f(x) = x^2 - 2x - 8$
č) $f(x) = x^3 - 7x + 6$
d) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$
e) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x-3}$
f) $f(x) = \log(x^2 + 4x + 4)$
g) $g(x) = \log_3(x^3 - 3x - 2)$
h) $h(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}$
i) $f(x) = (3^x - 1)^{-1}$
j) $f(x) = \log|x| + 1$
k) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

598. Narišite grafe spodnjih funkcij in zapišite točke nezveznosti.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1; & x > -1 \\ -x + 1; & x \le -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x + 1|; & x < 1 \\ \sqrt{x}; & x \ge 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 3; & x < -2 \\ x^2; & -2 \le x < 1 \\ 4 - x; & x \ge 1 \end{cases}$

č) $f(x) = \begin{cases} 2^x; & x \le 0 \\ x^{-1}; & 0 < x < 1 \\ 2x - 1; & x \ge 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin x; & x \le 0 \\ \tan x; & 0 < x \end{cases}$

599. Narišite grafa spodnjih funkcij in zapišite točke nezveznosti.

a) $f(x) = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases}$

b) $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty);\ f(x) = [x]$

Op. $[x]$ je celi del spremenljivke x. Vrednost funkcije f v točki x je enaka največjemu celemu številu, ki ne presega x.

600. Za katero realno število a bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}; & x > 4 \\ x + a; & x \le 4 \end{cases}$$ zvezna?

601. Za katero realno število k bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{4x}}{\sqrt{x}-2}; & x > 4 \\ -2x + k; & x \le 4 \end{cases}$$ zvezna?

602. Določite vrednosti števil a in b, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1; & x \le 3 \\ bx - 3; & x > 3 \end{cases}$$ zvezna v $T(3, 3)$.

603. Izračunajte števili a in b, da bo funkcija

$$g(x) = \begin{cases} 5; & x \le 2 \\ ax + b; & 2 < x < 10 \\ 21; & x \ge 10 \end{cases}$$ zvezna.

Računanje limite funkcije

Če obstajata limiti funkcij f in g, ko gre $x \to a$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = u$ in $\lim\limits_{x \to a} g(x) = v$, potem velja:

1. Limita vsote (razlike) je enaka vsoti (razliki) limit:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

Dokaz:

Ker je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = u$, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta_1 > 0$, da za vsak x iz okolice $|x - a| < \delta_1$ velja $|f(x) - u| < \frac{\varepsilon}{2}$, in ker je $\lim\limits_{x \to a} g(x) = v$, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta_2 > 0$, da za vsak x iz okolice $|x - a| < \delta_2$ velja $|g(x) - v| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Zdaj pogledamo

$$|(f(x) + g(x)) - (u + v)| = |(f(x) - u) + (g(x) - v)| \leq |f(x) - u| + \\ + |g(x) - v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

in vidimo, da je $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = u + v = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
Lastnost je dokazana.

2. Limita produkta konstantnega faktorja in funkcije je enaka limiti funkcije, pomnožene s konstanto:

$$\lim_{x \to a} (kf(x)) = k \lim_{x \to a} f(x)$$

Dokaz:

Po predpostavki je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = u$, zato za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak x iz okolice $|x - a| < \delta$ velja $|f(x) - u| < \frac{\varepsilon}{|k|}$.

Poglejmo:

$|k \cdot f(x) - k \cdot u| = |k \cdot (f(x) - u)| = |k| \cdot |f(x) - u| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$, iz česar lahko sklepamo $\lim\limits_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot u = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Lastnost je dokazana.

3. Limita produkta je enaka produktu limit:

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

4. Limita kvocienta je enaka kvocientu limit, če je limita v imenovalcu različna od nič:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \ \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to a}f(x)]^n,\ n\in\mathbb{R}$

6. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

7. $\lim\limits_{x\to a}c=c$

8. $\lim\limits_{x\to a}x=a$

Dokaz:

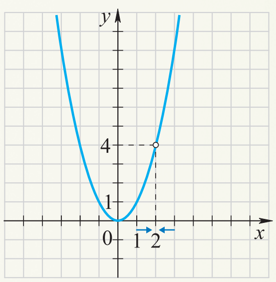
Po predpostavki za vsak $\varepsilon>0$ obstaja tak $\delta>0$, da za vsak x iz okolice $|x-a|<\delta$ velja $|f(x)-a|<\varepsilon$.

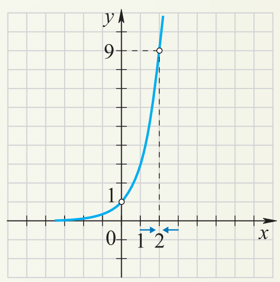
Vzemimo $\delta=\varepsilon$ in zapišimo $|f(x)-a|=|x-a|<\delta=\varepsilon$. Lastnost je dokazana.

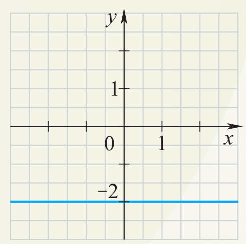
ZGLEDI

1. Izračunajmo limite funkcij $\lim\limits_{x\to 2}x^2$, $\lim\limits_{x\to 2}3^x$ in $\lim\limits_{x\to 2}(-2)$.

$\lim\limits_{x\to 2}x^2=2^2=4$ $\quad\lim\limits_{x\to 2}3^x=3^2=9$ $\quad\lim\limits_{x\to 2}(-2)=-2$



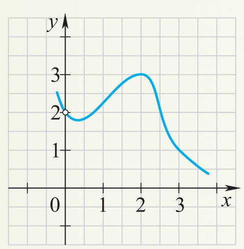




Ker so vse funkcije zvezne, je limita v $x=2$ v vseh primerih enaka $f(2)$.

2. Izračunajmo limite funkcije f s podatki iz slike.

a) $\lim\limits_{x\to 0}(3+f(x))$
b) $\lim\limits_{x\to 1}f(2+x)$
c) $\lim\limits_{x\to 2}f(3-x)$
č) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x+1)-f(x))$
d) $\lim\limits_{x\to 0}f(2x)$



a) $\lim\limits_{x\to 0}(3+f(x))=3+\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3+2=5$

b) Ko gre $x\to 1$, gre $2+x\to 3$, zato je $\lim\limits_{x\to 1}f(2+x)=\lim\limits_{t\to 3}f(t)=1$, $t=2+x$

c) $\lim\limits_{x\to 2}f(3-x)=\lim\limits_{t\to 1}f(t)=2$; $t=3-x$

č) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x+1)-f(x))=\lim\limits_{x\to 2}f(x+1)-\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1-3=-2$

d) $\lim\limits_{x\to 0}f(2x)=\lim\limits_{h\to 0}f(h)=2;\quad h=2x$

Poleg nedoločenega izraza $\frac{0}{0}$ poznamo še druge:

0^0, 1^∞, $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ 0^∞, ∞^0.

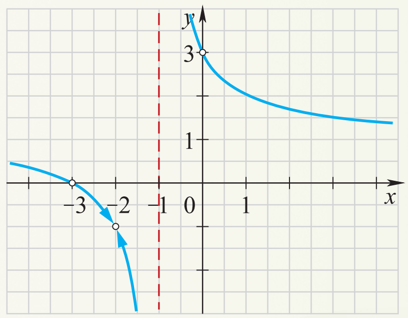
Če po vstavljanju števila pri računanju limite pride do takega primera, moramo na neki način preoblikovati izraz, sicer ne moremo izračunati limite (če limita sploh obstaja).

3. Izračunajmo limito $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}$.

Če v funkcijo pod limitnim izrazom namesto neodvisne spremenljivke x vstavimo -2, dobimo nedoločeni izraz $\frac{0}{0}$. Kvadratna izraza razcepimo in ugotovimo, da imata isti faktor $(x+2)$. Ko ulomek okrajšamo, dobimo:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{x+1}=\frac{-2+3}{-2+1}=-1$$

Na grafu vidimo, da je funkcija pri $x=-2$ nezvezna, ima pa limito, ki je enaka -1.



4. Izračunajmo $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+5x}-1}{2x}$.

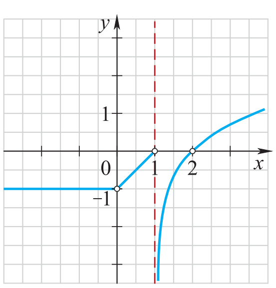
Funkcija, katere limito iščemo, ko gre x proti nič, v $x=0$ ni definirana. Preoblikujmo jo tako, da števec in imenovalec pomnožimo z izrazom $(\sqrt{1+5x}+1)$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+5x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+5x}-1)(\sqrt{1+5x}+1)}{2x(\sqrt{1+5x}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{5x}{2x(\sqrt{1+5x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{5}{2(\sqrt{1+5x}+1)}=\frac{5}{2(\sqrt{1+5\cdot0}+1)}=\frac{5}{4}$$

5. Izračunajmo limito funkcije f v točkah nezveznosti.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}; & x<0\\ x-1; & 0<x\le1\\ \ln(x-1); & x>1\end{cases}$$



Ne da bi narisali graf, je očitno, da je funkcija f nezvezna v $x=0$, kjer ni definirana, in pri $x=1$, kjer je definirana; $f(1)=0$.

Funkcija f ima limito v $x=0$: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$, v $x=1$ pa ne, kar potrjuje tudi narisani graf.

Neskončna limita funkcije

Spomnimo se potenčnih funkcij s celim negativnim eksponentom in narišimo graf ene od njih.

ZGLED

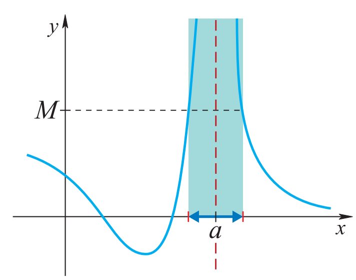
Oglejmo si funkcijo $f(x) = -(x+2)^{-2} + 1$.

Predpis f bi lahko zapisali tudi kot racionalno funkcijo
$f(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2} + 1$.

Funkcija ima pol v točki $x = -2$. Premica $x = -2$ je njena navpična asimptota. Ko se x kakorkoli bliža vrednosti $a = -2$, se vrednost funkcije izredno hitro zmanjšuje – gre pod vsako še tako negativno število. Čeprav ni največjega negativnega ali pozitivnega realnega števila, po dogovoru ležečo osmico uporabimo kot poseben znak za neskončno.

Definicija: Funkcija f ima v $x = a$ neskončno limito, če so njene vrednosti $f(x)$ večje od vsakega še tako velikega vnaprej izbranega realnega števila M, brž ko je x v δ-okolici točke a.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})\ (\exists \delta > 0)\text{: } x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) > M$$

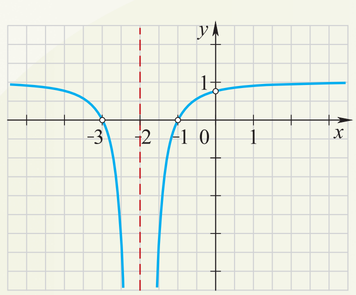


ZGLEDA

1. Izračunajmo limito funkcije $f(x) = -(x+2)^{-2} + 1$ pri $x = -2$.

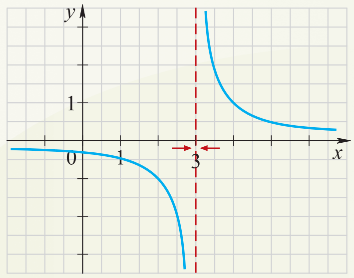
Ko se vrednosti neodvisne spremenljivke x približujejo -2 samo z leve strani (leva limita), se vrednosti funkcije vedno hitreje manjšajo. Enako se zgodi, če se vrednosti neodvisne spremenljivke x približujejo -2 samo z desne strani (desna limita). Tudi v tem primeru se funkcijske vrednosti vedno hitreje manjšajo proti negativni neskončnosti. Ker sta ti dve vrednosti enaki (leva limita je enaka desni), ima funkcija limito.

$$\lim_{x\to -2^-} (-(x+2)^{-2}+1) = \lim_{x\to -2^+} (-(x+2)^{-2}+1) = \lim_{x\to -2} (-(x+2)^{-2}+1) = -\infty$$



2. Izračunajmo limito funkcije $g(x)=\frac{1}{x-3}$, ko se x približuje vrednosti 3.

Če se x približuje trojki z leve, funkcija teži v negativno neskončnost. Če se približuje z desne, funkcija teži v pozitivno neskončnost. Ta funkcija torej pri $x=3$ nima limite (leva limita je različna od desne).



Limita funkcije v neskončnosti

Velikokrat nas zanima, kako se obnaša funkcija pri zelo velikih pozitivnih ali negativnih vrednostih neodvisne spremenljivke x. Tako smo se s pojmom limite v neskončnosti intuitivno srečali že v drugem letniku pri potenčnih funkcijah s celimi negativnimi eksponenti in lani, ko smo iskali vodoravne asimptote racionalnih funkcij.

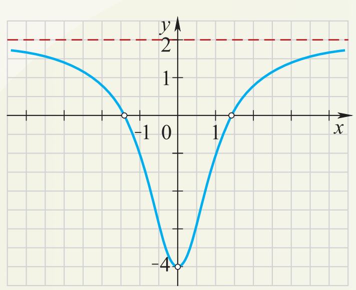
ZGLED

Kolikor mogoče natančno narišimo graf funkcije $f(x)=\frac{2x^2-4}{x^2+1}$.

Funkcija f ima ničli $x_1=\sqrt{2}$ in $x_2=-\sqrt{2}$, nima realnega pola, za obnašanje funkcije daleč od izhodišča pa izraz preoblikujemo:

$$f(x)=\frac{2x^2-4}{x^2+1}=\frac{x^2(2-\frac{4}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})}=\frac{2-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

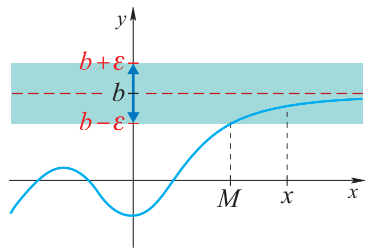
Graf funkcije se očitno bliža premici $y=2$, saj sta vrednosti $\frac{4}{x^2}$ in $\frac{1}{x^2}$ zanemarljivo majhni pri zelo velikih vrednostih neodvisne spremenljivke x.



Če ima vodoravna asimptota funkcije enačbo $y = b$, bomo rekli, da je število b limita funkcije, ko gre x proti neskončno.

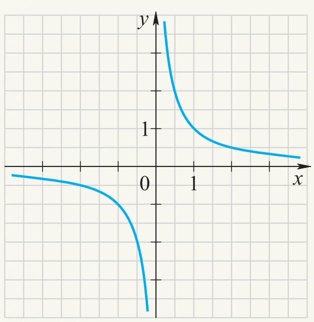
Definicija: Če za vsako še tako majhno pozitivno število ε najdemo tako realno število M, da se vsi x, ki so večji od tega M, preslikajo v ε-okolico točke b, potem je b limita funkcije f, ko gre x prek vseh meja.

$$\boldsymbol{b = \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists M \in \mathbb{R}) \colon x > M \Rightarrow f(x) \in (b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)}$$



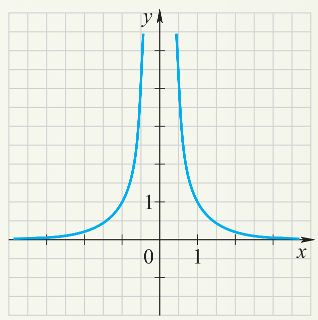
ZGLEDA

1. Izračunajmo limite:



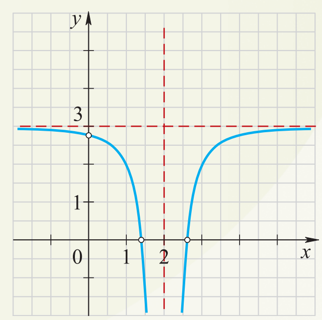
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} =$ *ne obstaja*



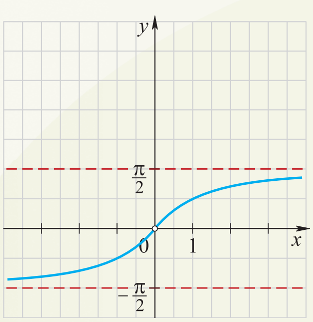
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$



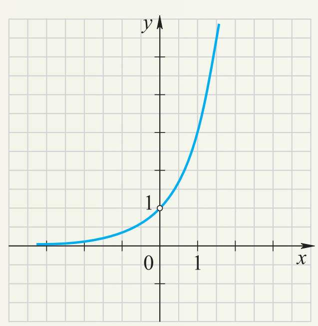
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{1}{(x-2)^2} + 3\right) = 3$

$\lim\limits_{x\to 2} \left(-\frac{1}{(x-2)^2} + 3\right) = -\infty$



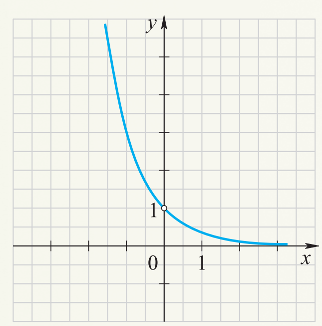
$\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$



$\lim\limits_{x\to\infty} 3^x = \infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} 3^x = 0$

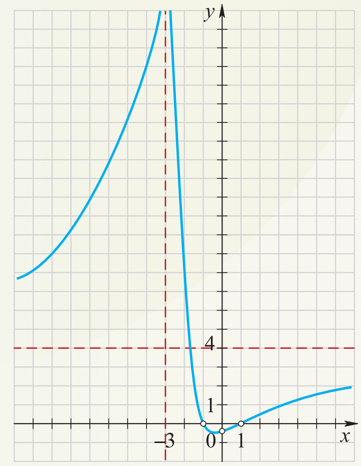


$\lim\limits_{x\to\infty} 3^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} 3^{-x} = \infty$

2. Poiščimo limito funkcije $f(x)=\frac{4x^2-4}{(x+3)^2}$, ko

- se x približuje vrednosti 2,
- se x približuje vrednosti -3,
- x raste prek vseh meja,
- x gre proti negativni neskončnosti.



Pri $x=2$ je f zvezna funkcija, zato je:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{4x^2-4}{(x+3)^2}=\frac{4\cdot 4-4}{(2+3)^2}=\frac{12}{25}$$

Pri $x=-3$ ima funkcija f pol druge stopnje. Njene vrednosti, ko se x približuje vrednosti -3, gredo v neskončnost, zato:

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\infty$$

Ko x raste prek vseh meja, se graf funkcije f približuje vodoravni asimptoti z enačbo $y=4$, zato je njena limita enaka 4. Izračunamo jo podobno, kot smo računali enačbo vodoravne asimptote:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4}{(x+3)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4}{x^2+6x+9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(4-\frac{4}{x^2})}{x^2(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{4}{1}=4$$

Podobne limite smo računali že pri zaporedjih:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-4}{(n+3)^2}=4$$

Tudi če gre x proti negativni neskončnosti, se vrednosti funkcije približujejo vrednosti 4, zato je:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} f(-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4(-x)^2-4}{(-x+3)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4}{x^2-6x+9}=4$$

Na koncu tega razdelka nas čaka še limita funkcije, ki smo jo spoznali pri zaporedjih in je bila definirana za diskretno spremenljivko $n\in\mathbb{N}$, velja pa tudi, če je njena spremenljivka realno število x:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e}$$

ZGLEDA

1. Izračunajmo najprej limito $\lim_{x\to\infty}(\frac{5x+3}{5x-7})^x$.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{5x+3}{5x-7})^x=\lim_{x\to\infty}(\frac{5x-7+10}{5x-7})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{10}{5x-7})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{5x-7}{10}})^x=$$

$$=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{2t+\frac{7}{5}}=$$

Uvedli smo novo spremenljivko $t=\frac{5x-7}{10}$, iz česar sledi $x=2t+\frac{7}{5}$.

$$=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{2t}\cdot\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{\frac{7}{5}}=(\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t)^2\cdot 1=e^2$$

Ko računamo limito produkta, moramo preveriti, ali obstajata limiti posameznih faktorjev.

2. Ta zgled bo še malo bolj zamotan.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+6-7}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{-7}{x+2}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{3(-7)}{3(x+2)}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}3^x\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{(-7)}{3(x+2)}\right)^x=$$

$$=0\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3(x+2)}{(-7)}}\right)^x=0\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{7}{3}t-2}=0\cdot e^{-\frac{7}{3}}\cdot 1=0$$

Nova neznanka je $t=-\frac{3(x+2)}{7}$, in od tod je $x=-\frac{7}{3}t-2$.

Limite trigonometričnih funkcij

Računanje limit funkcij $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ in $\operatorname{arccot} x$ ni posebno zanimivo. Vse te funkcije so zvezne; $\tan x$ in $\cot x$ pa v točkah, kjer nista definirani, nimata limite (leva limita je različna od desne).

Posvetili pa se bomo limiti funkcije $\frac{\sin x}{x}$, ki ni definirana v $x=0$. Dokazali bomo trditev:

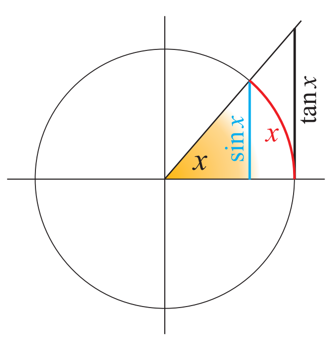
$$\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Dokaz:

Najprej v enotskem krogu izberemo pozitiven ostri kot x (merjen v radianih) ter označimo sinus in tangens tega kota. Za vsak ostri kot x velja neenakost:

$$\sin x<x<\tan x \quad \text{oziroma} \quad \sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$$

Neenakost delimo s $\sin x$ ($\sin x>0$, kjer je $x>0$) in dobimo $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$.
Če vzamemo obratne vrednosti vseh treh izrazov, se neenakosti obrneta: $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. Denimo, da gre zdaj x proti 0. Ker je $\lim_{x\to 0}\cos x=1$, gre tudi vrednost izraza $\frac{\sin x}{x}$ proti 1 in trditev je dokazana. Če je $x<0$, je izpeljava podobna.



ZGLEDI

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3\cdot 2x}=\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$

Naredili smo zamenjavo spremenljivke $3x=t$. Če gre $x\to 0$, gre tudi $t\to 0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{4x\cdot\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}=\frac{3}{4},$

saj smo se v prvem zgledu naučili, da je

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=1.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1}{2}=$

$=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{1}{2}$

NALOGE

604. Narišite graf funkcije in v dani točki ugotovite zveznost funkcije. V tej točki tudi izračunajte limito, če obstaja.

a) $x=2;\quad f(x)=\begin{cases}x+3; & x\le 2\\ 4x-3; & x>2\end{cases}$

b) $x=-3$ in $x=3;\quad f(x)=\begin{cases}|-x+3|; & x\le -3\\ -2x; & -3<x<3\\ 6x+2; & x\ge 3\end{cases}$

c) $x=0;\quad f(x)=\begin{cases}|x|; & x\ne 0\\ 1; & x=0\end{cases}$

č) $x=0;\quad f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}; & x<0\\ -1; & x\ge 0\end{cases}$

d) $x=1;\quad f(x)=\begin{cases}2^x; & x\ge 1\\ x^2+1; & x<1\end{cases}$

e) $x=2;\quad f(x)=\begin{cases}x^3-3; & x<2\\ 3; & x=2\\ x^2+1; & x>2\end{cases}$

f) $x=1;\quad f(x)=\begin{cases}x^{12}-1; & x\le 1\\ \ln x; & x>1\end{cases}$

605. Dana je funkcija $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R};$

$f(x)=\begin{cases}x+2; & x<-1\\ x^2; & -1\le x<1\\ 3-x; & x\ge 1\end{cases}$

a) Narišite graf funkcije f.
b) Iz slike odčitajte $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ in $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

606. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}(\sqrt{x^3+5})$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-3}{x+1}$

č) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+3}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\log_2 x}{4^x}$

607. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+x^2}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x}{x^5-x}$

č) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{1-x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{x^3+27}{x^2-9}-x\right)$

f) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{2x^2+5x+2}{4x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{3x^2+13x+4}{x^3+4x^2+x+4}$

608. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{24x-72}{x^2-9}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+6x+5}}$

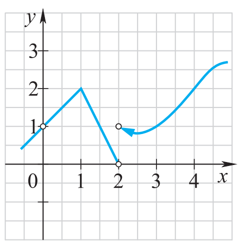
č) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{x-2}-2}$

609. Določite limite funkcije f. Potrebne podatke preberite z grafa funkcije.



a) $\lim\limits_{x\to 0} f(2x+1)$

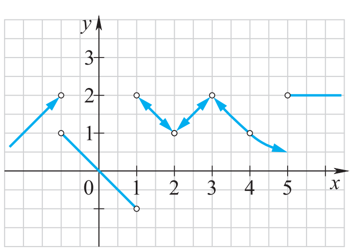
b) $\lim\limits_{x\to 4} f(x-1)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} 3f(4+x)$

č) $\lim\limits_{x\to 2} f(3x-2)$

d) $\lim\limits_{x\to 1} f(2x)$

610. Zapišite limite funkcije f. Potrebne podatke preberite z grafa funkcije.



a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

č) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

611. Izračunajte vrednosti limit.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{11+x}-4}{x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{3x^2-17x-6}{36-x^2}$

č) $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{\frac{1}{t}+\frac{1}{2}}{t+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^3-x^2+8x-4}{2x-1}$

612. Temperatura objekta v stopinjah Celzija se spreminja s časom t. Spreminjanje temperature opisuje funkcija $T(t)=\dfrac{250t+80\sqrt{t}}{5t+25}$. Izračunajte temperaturo objekta po zelo dolgem času.

613. Izračunajte.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+7}{x^2+9x+14}$

b) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+7}{x^2+9x+14}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+7}{x^2+9x+14}$

č) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x+7}{x^2+9x+14}$

614. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-1}{(x+2)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$

č) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-x}{x^2-6x+9}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\log|x|$

615. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{1+x}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2}{x^3+3x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+5}{3-2x}$

č) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{9-x^2}{x^2-10x+25}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(4x-5)(4x+5)}{5-(2+x)^2}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+2)^3}$

f) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{2x-1}-\dfrac{3x}{1-x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x}{x^2-5x}-\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+2}}$

i) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

616. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}2^x$

č) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-3^x)$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+e^{-x})$

617. Zapišite enačbe vodoravnih asimptot funkcij in narišite njihove grafe.

a) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x}$

b) $g(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-4x+4}$

c) $h(x)=3^{-x}$

č) $f(x)=1-x^{-1}$

d) $g(x)=4^{-x}-1$

e) $h(x)=3e^x-2$

618. Zapišite enačbe poševnih asimptot funkcij in narišite njihove grafe.

a) $f(x)=\frac{x^2-4}{x+1}$

b) $g(x)=\frac{x^3+x^2-3x-3}{x^2-4}$

c) $h(x)=\frac{x^3-3x^2}{x^2+1}$

č) $f(x)=\frac{4x-x^3}{x^2-2x-3}$

619. Izračunaj limite funkcij (če limite obstajajo).

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{x^2+2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^2+2}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2}{x^2+2}$

č) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x}{(x+2)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x}{(x+2)^2}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x}{(x+2)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\ln|x|$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}+\sqrt{-x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x+3}{x-2}$

620. Dana je funkcija $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\begin{cases}\cos x; & x<0\\ \sin x; & x\geq 0\end{cases}$

a) Narišite graf funkcije f.

b) Izračunajte $f(\frac{\pi}{4})$, $f(-\frac{\pi}{3})$ in $f(0)$.

c) Izračunajte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}} f(x)$ in $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

621. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin 2x}$

č) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{x}$

622. Za katero realno število φ bo funkcija $f\colon (-\infty, \frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, podana s predpisom,

$$f(x)=\begin{cases}\tan x+\frac{1}{2}; & x>0\\ \sin(x+\varphi); & x\leq 0\end{cases}\quad \text{zvezna?}$$

623. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-1}\tan x\cos x$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{\sin^3 x}$

č) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos^2 x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} x^2(1+\cot^2 x)$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^3-x^2}$

624. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{-4x^2+2x}{4x^2-8x+3}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x+2)^2}{2x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$

č) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$

625. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+5}\right)^{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{x}$

č) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}$

626. Izračunajte limite.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5\sin 3x}{4x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+\sin 2x}{x}$

č) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-1+x\sin\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{2x}$

627. Izračunajte vodoravno asimptoto funkcije $f(x)=2+x\sin\frac{1}{x}$.

628. Izračunajte vrednost parametra k, da bo funkcija

$$h(x)=\begin{cases}4e^x+x-k; & x\leq 0\\ \frac{\sin kx}{x}; & x>0\end{cases}\quad \text{zvezna.}$$

NE POZABI

Računanje s funkcijami

Vsota: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

Produkt: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Kvocient: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

Če f priredi elementom x iz množice $\mathcal{A}$ slike $f(x)$ v množici $\mathcal{B}$, funkcija g pa je definirana na množici $\mathcal{B}$ in $f(x)$ priredi $g(f(x))$, potem je kompozitum funkcij f in g funkcija $g \circ f$, ki elementom x iz množice $\mathcal{A}$ priredi slike $g(f(x))$ v množici $\mathcal{C}$:

$g \circ f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$

$g \circ f \colon x \mapsto g(f(x))$

Kompozitum bijektivne funkcije f in njene inverzne funkcije f^{-1} je identična preslikava: $f^{-1}(f(x)) = x$.

Limita funkcije

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja:
če je x v δ-okolici a in $x \neq a$, je tudi $f(x)$ v ε-okolici b.

1. Limita vsote je enaka vsoti limit:
   $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2. Limita produkta konstantnega faktorja in funkcije je enaka limiti funkcije, pomnožene s konstanto:
   $\lim\limits_{x \to a} (kf(x)) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$

3. Limita produkta je enaka produktu limit:
   $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

4. Limita kvocienta je enaka kvocientu limit, če je limita v imenovalcu različna od nič:
   $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$, $n \in \mathbb{R}$

6. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

7. $\lim\limits_{x \to a} c = c$

8. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

NE POZABI

Neskončna limita

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, če za vsak $M\in\mathbb{R}$ obstaja tak $\delta>0$, da velja:
če je x v δ-okolici točke a, je $f(x)>M$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}(-f(x))=\infty$

Limita v neskončnosti

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja tako realno število M, da velja:
brž ko je $x>M$, je $f(x)$ v ε-okolici točke b.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Zveznost

Funkcija f je v točki a zvezna natanko takrat, ko je v točki a definirana in ima limito in je $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Funkcija f je zvezna na intervalu $[a, b]$, če je zvezna v vsaki točki tega intervala.

Zvezna funkcija, ki ni nikjer na zaprtem intervalu enaka 0, ima na vsem intervalu stalen predznak (je povsod pozitivna ali povsod negativna).

Če je funkcija na krajiščih zaprtega intervala $[a, b]$, na katerem je zvezna, različno predznačena, ima na tem intervalu vsaj eno ničlo.

Funkcija, ki je zvezna na zaprtem intervalu, je na njem omejena in zavzame svojo natančno zgornjo mejo M in spodnjo mejo m ter vse vrednosti med njima.

Če je funkcija f naraščajoča in zvezna, je njena inverzna funkcija f^{-1} tudi naraščajoča in zvezna funkcija.

ODVOD

- Definicija odvoda
- Uporaba odvoda
- Odvodi drugih elementarnih funkcij
- Implicitni odvod
- Višji odvodi
- Diferencial funkcije
- Modeliranje z odvodom

Hiter razvoj matematike v 17. in 18. st. je bil povezan z razvojem drugih znanosti. Največkrat je prav matematika dala odgovor na dolgo nerešena vprašanja. Tudi Newtonovo odkritje teorije fluksij (tako je imenoval infinitezimalni račun, kakor danes pravimo računanju limit, odvodov in integralov) je bilo povezano z mehaniko in gravitacijsko teorijo. Newton je imel odvod v prvi vrsti za izražanje hitrosti. Pri svoji definiciji pojma limita pa je bil tako nejasen, da ga je bilo res težko razumeti.

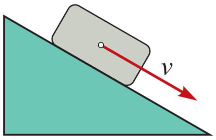
George Berkeley (1685–1753) je izhajal iz filozofije Johna Locka, po kateri so neposredni predmet zavesti le ideje. Materija ne obstaja, obstajajo samo ideje in duh.

Takole piše v svojem delu *Principia*:

»Ta končna razmerja količin, s katerimi gredo količine proti nič, v resnici niso razmerja končnih količin, ampak limite, proti katerim vedno konvergirajo razmerja količin, ki gredo proti nič in katerim se približajo bolj kot za katerokoli dano razliko, vendar je nikoli ne prekoračijo niti je v bistvu ne dosežejo, dokler se količine ne zmanjšajo ad infinitum.«

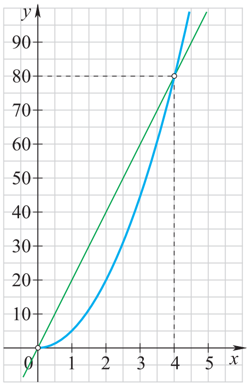
Nič čudnega, da je *teorija fluksij* pri nekaterih sodobnikih naletela na zavračanje in celo posmeh. Idealistični filozof, matematik in škof George Berkeley, znan po načelu *esse est percipi* (biti pomeni biti zaznan), se je norčeval iz neskončno majhnih količin in jih imenoval *duhovi izumrlih količin*.

Definicija odvoda



Poglavje bomo začeli z namišljenim fizikalnim poskusom. Zamislimo si, da imamo dve ravni drči, po katerih istočasno spustimo dve kladi. Na prvi drči ima klada zaradi trenja konstantno hitrost, druga drča pa omogoča gibanje brez trenja, zato se klada giblje enakomerno pospešeno. Klada, ki jo spustimo po prvi drči, najprej prehiti drugo drčo, po nekaj sekundah pa sta kladi spet poravnani. Kako bi ugotovili spreminjanje hitrosti druge klade oz. hitrost te klade v točno določenem času?

Čas	Hitrost prve klade [m/s]	Pot prve klade [m] (pri trenju)	Pot druge klade [m] (brez trenja)
0	20	0	0
1	20	20	5
2	20	40	20
3	20	60	45
4	20	80	80



Nalogo bomo rešili s pomočjo krivulje poti v odvisnosti od časa za obe kladi.

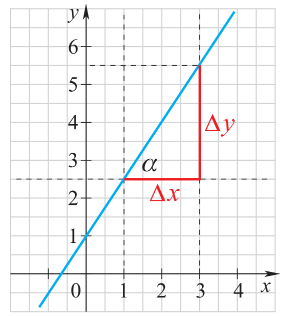
Na intervalu [0, 4] imata kladi isto povprečno hitrost.

$$\bar{v} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

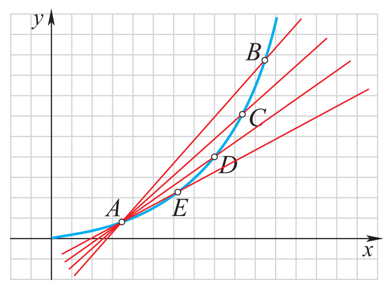
Povprečno hitrost lahko preberemo iz strmine premice, ki opisuje pot enakomerno gibajoče se prve klade.

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ je diferenčni količnik funkcije f in je enak tangensu naklonskega kota α oz. smernemu koeficientu premice. Ker je funkcija f linearna, je vrednost diferenčnega količnika neodvisna od izbire spremenljivke x.

Preden se kladi poravnata, ima druga klada manjšo hitrost, nato pa večjo hitrost od prve klade.



Hitrost druge klade v določenem trenutku (v točki $A(a, f(a))$ dobimo tako, da računamo povprečne hitrosti na vedno krajših intervalih: izberemo točko B na krivulji in dobimo povprečno hitrost na intervalu (a, b), potem izberemo točki A bližjo točko C in ugotovimo, da je povprečna hitrost na tem intervalu (a, c) manjša od prejšnje. Postopek nadaljujemo s točkama D in E. Razdalje, ki jih izbiramo od abscise točke A od abscise naslednje točke, so vedno manjše, pa tudi povprečne vrednosti hitrosti se manjšajo proti neki pozitivni vrednosti.



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{f(c)-f(a)}{c-a} > \frac{f(d)-f(a)}{d-a} > \frac{f(e)-f(a)}{e-a} > 0$$

Na misel nam pride, da gre za limitni postopek.

Trenutno hitrost lahko ugotovimo, če obstaja limita

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{(x-a)\to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Vrednost limite je enaka smernemu koeficientu tangente na krivuljo v $x = a$, kar pa ravno pomeni trenutno hitrost klade.

Če našo zgodbo prevedemo v matematični jezik, se najprej spomnimo, da so samo pri konstantni in linearni funkciji spremembe funkcije neodvisne od izbire neodvisne spremenljivke x. Pri nas kvocient vrednosti spremembe funkcije glede na spremembo neodvisne spremenljivke pomeni hitrost. Hitrost klade se zato na drči s trenjem ne spreminja, na drči brez trenja pa se s časom povečuje.

Ko smo zmanjševali razliko neodvisnih spremenljivk, se je zmanjševala tudi razlika funkcijskih vrednosti – premica, ki povezuje točki na krivulji, je iz sekante v limiti prešla v tangento.

Zdaj smo lahko že zelo natančni.

Definicija: Odvod funkcije f v dani točki $T(x_0, y_0)$ je limita diferenčnega kvocienta, ko gre razlika vrednosti neodvisne spremenljivke kakorkoli proti nič:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Odvod funkcije v dani točki $T(x_0, y_0)$ geometrijsko pomeni tangens naklonskega kota oz. smerni koeficient tangente v izbrani točki krivulje:

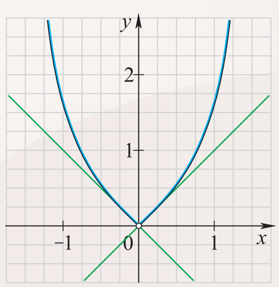
$$f'(x_0) = \tan\varphi = k_t$$

Funkcija f je **odvedljiva na intervalu $[a, b]$**, če je odvedljiva za vsak x iz $[a, b]$. Z odvajanjem funkcije f na nekem intervalu dobimo novo funkcijo f' oz. odvod funkcije f.

Odvod funkcije ne obstaja v točkah nezveznosti, v nekaterih primerih pa limita diferenčnega kvocienta ne obstaja niti v primeru, ko je funkcija zvezna.

ZGLED

Vzemimo funkcijo $f(x) = |\tan x|$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ki ima v $x = 0$ dve različni tangenti (leva limita diferenčnega kvocienta je različna od desne). Zato ta funkcija ni odvedljiva v $x = 0$.



V nadaljevanju bomo izračunali nekaj odvodov preprostih funkcij po definiciji.

ZGLEDI

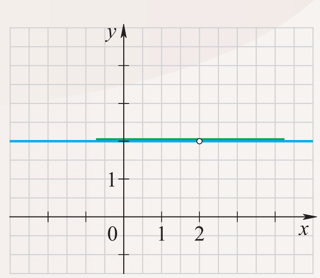
1. Izračunajmo odvod konstantne funkcije $f(x) = c$:

$f(x) = c$

$f(x+h) = c$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$

Smerni koeficient tangente na graf konstantne funkcije v katerikoli točki je enak 0.



2. Izračunajmo po definiciji odvod linearne funkcije $f(x) = -2x + 3$.

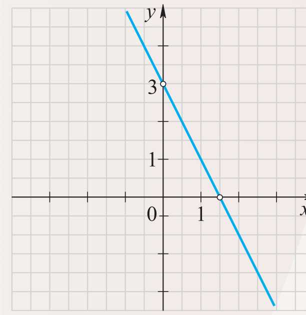
$f(x) = -2x + 3$

$f(x+h) = -2(x+h) + 3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2(x+h)+3+2x-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h} =$$

$$= -2$$



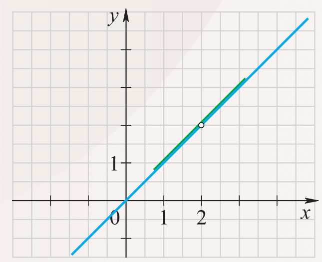
Smerni koeficient tangente na premico je kar enak smernemu koeficientu premice.

3. Izračunajmo odvod linearne funkcije $f(x) = x$.

$f(x) = x$

$f(x+h) = x + h$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$



Smerni koeficient tangente na premico je kar enak smernemu koeficientu premice.

4. Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = x^2$.

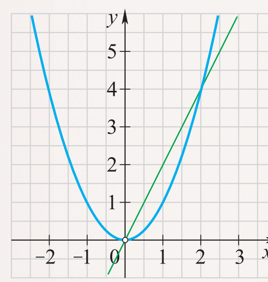
$f(x) = x^2$

$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

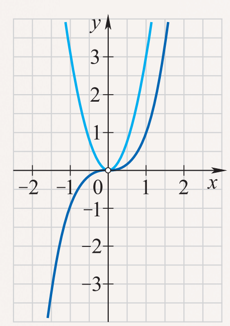


5. Poiščimo odvod funkcije $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$



Računanje odvoda po definiciji je lahko zelo zapleteno, zato si pri odvajanju pomagamo tudi s pravili, ki nam olajšajo delo.

1. Odvod vsote funkcije je enak vsoti odvodov:

$$\boldsymbol{[(f+g)(x)]' = (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)}$$

2. Odvod produkta dveh funkcij se izračuna po formuli:

$$\boldsymbol{[(f\cdot g)(x)]' = (f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

3. Odvod funkcije, ki je pomnožena s konstanto, je enak odvodu, pomnoženemu s konstanto:

$$\boldsymbol{[(kf)(x)]' = (k(f(x))' = kf'(x)}$$

4. Odvod kvocienta:

$$\boldsymbol{[\tfrac{f}{g}(x)]' = (\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,;\;\; g(x)\neq 0}$$

Dokazi teh pravil zahtevajo kar nekaj pisanja:

- $(f+g)'(x)=(f(x)+g(x))' = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)+g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$

- $(f\cdot g)'(x)=(f(x)\cdot g(x))' = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$

  $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x+h)+\lim\limits_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\lim\limits_{h\to 0}g(x+h)+\lim\limits_{h\to 0}f(x)\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Naslednjo trditev dokažimo s pravilom za odvajanje produkta in upoštevajmo, da je odvod konstante enak 0.

- $(kf(x))' = k'f(x)+kf'(x)=0\cdot f(x)+kf'(x)=kf'(x)$

Preden dokažemo formulo za odvod količnika, dokažimo:

- $(\frac{1}{f(x)})' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

  $(\frac{1}{f(x)})' = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)f(x)}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x)-f(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{f(x+h)f(x)}\right] =$

  $= \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x)-f(x+h)}{h}\right]\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{1}{f(x+h)f(x)}\right] = -f'(x)\cdot\frac{1}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

Kvocient $\frac{f(x)}{g(x)}$ bomo odvajali kot produkt $f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$.

- $(\frac{f}{g})'(x)=(\frac{f(x)}{g(x)})' = (f(x)\cdot\frac{1}{g(x)})' = f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Iz zadnjih treh narejenih zgledov lahko uganemo pravilo za odvajanje potenčne funkcije z naravnim eksponentom:

$f(x)=x \rightarrow f'(x)=1$

$f(x)=x^2 \rightarrow f'(x)=2x$

$f(x)=x^3 \rightarrow f'(x)=3x^2$

…

$\boldsymbol{f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=nx^{n-1}}$

Formulo dokažemo z matematično indukcijo.

1. Za $n=1$ velja:

$f(x)=x^1$, $\qquad f'(x)=1x^{1-1}=x^0=1$

2. Predpostavimo, da za neki $n \in \mathbb{N}$ velja:

$f(x)=x^n$, $\qquad f'(x)=nx^{n-1}$

Ali ob tej predpostavki velja tudi za $(n+1)$?

$$f(x)=x^{n+1}$$

$$f'(x)=(x^{n+1})'=(x \cdot x^n)'=x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n =$$
$$=(n+1)x^n$$

Do zdaj znamo odvajati le potenčno funkcijo z naravnim eksponentom, s pomočjo pravila za odvajanje kvocienta funkcij pa pridemo do pravila za odvajanje potenčne funkcije z negativnim celim eksponentom.

$$f(x)=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

Po pravilu za odvod kvocienta je:

$$f'(x)=\frac{0-nx^{n-1}}{(x^n)^2}=-nx^{n-1} : x^{2n}=-nx^{n-1-2n}=-nx^{-n-1}$$

$(x^m)'=mx^{m-1}$ za vsak $m \in \mathbb{Z}$.

Po definiciji odvajajmo še korensko funkcijo in videli bomo, da splošno pravilo velja tudi v tem primeru. Pri delu nam bo pomagalo, če se bomo spomnili nalog, ki smo jih predelali pri računanju limite (str. 194).

$$(\sqrt{x})' = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Brez dokaza bomo verjeli, da isto pravilo velja za vse racionalne eksponente.

ZGLEDI

1. Izračunajmo odvode funkcij:

$f(x)=x^{-3}$ $\qquad f'(x)=-3x^{-4}$

$g(x)=3x^8+x^{-2}$ $\qquad g'(x)=24x^7-2x^{-3}$

$p(x)=3x^4-5x^3+2x^2+6x-8$ $\qquad p'(x)=12x^3-15x^2+4x+6$

2. Izračunajmo odvod funkcije $f(x)=(x^7-3x^4+12)(x^3+x-5)$ po pravilu produkta.

$$f'(x)=(x^7-3x^4+12)'(x^3+x-5)+(x^7-3x^4+12)(x^3+x-5)'=$$
$$=(7x^6-12x^3)(x^3+x-5)+(x^7-3x^4+12)(3x^2+1)=$$
$$=10x^9+8x^7-56x^6-15x^4+60x^3+36x^2+12$$

3. Izračunajmo odvod racionalne funkcije $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$.

Odvajajmo po pravilu za odvod kvocienta:

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2-1)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x^2+1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

4. Avto spelje in njegova pot se s časom takole spreminja:

$$s(t)=\frac{t^3-6t^2+16t}{10}$$

Čas je v minutah, pot v kilometrih.

Ker je $s(1)=1^3-6\cdot 1^2+16\cdot 1=11$, to pomeni, da je v prvi minuti avto prevozil 1100 m.

$$s(2)=2^3-6\cdot 2^2+16\cdot 2=16$$
$$s(3)=3^3-6\cdot 3^2+16\cdot 3=21$$

Po dveh minutah je prevozil 1600 m, po treh minutah pa 2100 m.

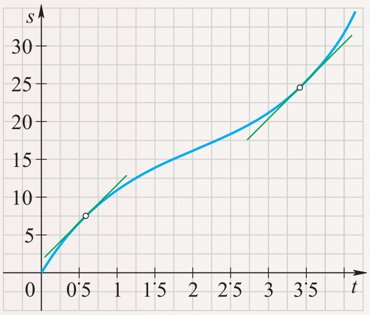
Po kolikem času je avto imel hitrost 1 km na minuto, to je 60 km/h?

Odvajamo pot po času in dobimo hitrost:

$$s'(t)=\frac{3t^2-12t+16}{10}$$

Kdaj je ta odvod enak 1 km/min?

$$3t^2-12t+16=10$$
$$3t^2-12t+6=0$$
$$t^2-4t+2=0$$
$$t=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$
$$t_1\doteq 3{\cdot}41$$
$$t_2\doteq 0{\cdot}59$$



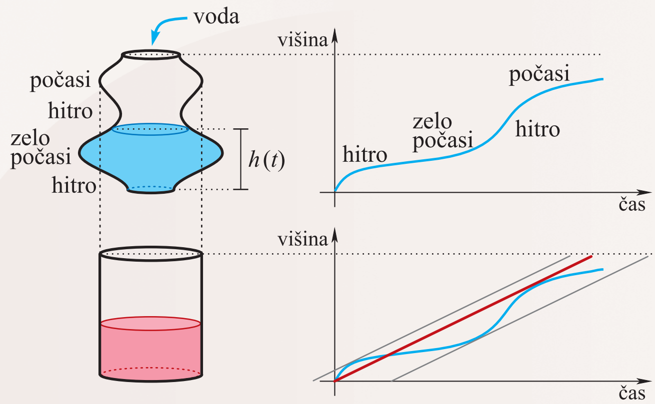
Izračunali smo, da ima avto dvakrat tako hitrost, in sicer po $0{\cdot}59$ minute in po $3{\cdot}41$ minute.

Poglavje bomo končali s trditvijo, ki se imenuje tudi **izrek o povprečni vrednosti**, da za zvezno in odvedljivo funkcijo na intervalu (a, b) vedno obstaja tak $x_0 \in (a, b)$, v katerem je vrednost odvoda enaka diferenčnemu količniku sekante na intervalu (a, b): $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Izreka ne bomo dokazali, pokazali pa bomo njegovo veljavnost na zgledu.

ZGLED

V vazo enakomerno priteka voda. Gladina se ne dviga enakomerno, ampak v odvisnosti od oblike – kjer je vaza širša, se gladina dviga počasneje, kjer je ožja, hitreje. Spreminjanje nam pokaže modra krivulja.

Gibanje gladine vode v vazi primerjamo z gibanjem gladine vode v valjasti posodi, ki je enakomerno, kar pokaže rdeča krivulja. Ob primerjavi opazimo, da sta poleg dotikališča rdeče in modre krivulje še dve točki, v katerih je tangenta na modro krivuljo vzporedna z rdečo premico – takrat ko je širina obeh posod enaka.



NALOGE

629. Zapišite naklonske kote premic.

a) $y=2x-3$
b) $y=4-x$
c) $y=-3x+1$
č) $y=-1$
d) $x=3$
e) $2x-3y+5=0$

630. Narišite graf funkcije $f(x)=x^{-1}-1$ in zapišite odsekovno obliko enačbe sekante grafa funkcije f, ki gre skozi točki z abscisama $x_1=-2$ in $x_2=-1$. V isti koordinatni sistem narišite še sekanto in zapišite, v katerih točkah seka koordinatni osi.

631. Zapišite diferenčni količnik funkcije $f(x)=x^3-1$ v točki 3 in izračunajte $f'(3)$.

632. Zapišite diferenčni količnik funkcije $f(x)=x^2-x$ v poljubni točki x in zapišite $f'(x)$. Koliko je $f'(2)$?

633. Zapišite diferenčni količnik funkcije $f(x)=x^{-2}$ v poljubni točki x in zapišite $f'(x)$. Koliko je $f'(-2)$?

634. Zapišite smerni koeficient tangente na graf funkcije f v dani točki.

a) $f(x)=x^2-1$; $x_0=2$
b) $f(x)=x^3+x^2$; $x_0=-1$
c) $f(x)=x^{-1}$; $x_0=1$
č) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $x_0=2$

635. Zapišite enačbo sekante s grafa funkcije $f(x)=x^2-9$, ki gre skozi točki z abscisama $x_1=1$ in $x_2=2$, in enačbo tangente t na graf funkcije f v točki $x_0=1$. V istem koordinatnem sistemu narišite graf funkcije f in premici s in t.

636. Izračunajte po definiciji odvode naslednjih funkcij:

a) $f(x)=5x+2$
b) $f(x)=4-x$
c) $f(x)=x^3-4x$
č) $f(x)=(x+3)^2$
d) $f(x)=x^{-1}$
e) $f(x)=\sqrt{x}$

637. Zapišite odvode funkcij.

a) $f(x)=5x$
b) $f(x)=\sqrt{3}\,x+\sqrt{5}$
c) $f(x)=x^2-3x$
č) $f(x)=\frac{x-1}{3}-1$
d) $f(x)=x^3-x^2+2$
e) $f(x)=-2x^5+2x^4+x^3+x$
f) $f(x)=(2x-1)^2-5$
g) $f(x)=kx+n$
h) $f(x)=ax^2+bx+c$
i) $f(x)=a(x-p)^2+q$

638. Za $p(x)=3x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-3$ izračunajte $p'(-1)$.

639. Dana je funkcija $f(x)=(x-5)(x+2)$. Za kateri x je $f'(x)=5$?

640. Izračunajte odvode funkcij.

a) $f(x)=x^{-2}+x^2$
b) $f(x)=x-x^{-1}$
c) $f(x)=\frac{a}{x}+b$
č) $f(x)=-2x^{-2}+\frac{x^2}{4}-1$
d) $f(x)=\frac{1}{(2x)^2}$
e) $f(x)=\frac{x}{k}+\frac{k}{x}+\frac{x^2}{k^2}+\frac{k^2}{x^2}$

641. Odvajajte funkcije.

a) $f(x)=(3x+2)(x-1)$
b) $f(x)=(x-2)(x^2-3x+1)$
c) $f(x)=(4x+3)^2$
č) $f(x)=(2x-1)^3$
d) $f(x)=(x-1)^2(3x+1)$
e) $f(x)=(2-x^2)(x^2+2x-4)$

642. Zapišite odvode funkcij.

a) $f(x)=\frac{x+1}{x}$
b) $f(x)=\frac{x-3}{3x+2}$
c) $f(x)=\frac{x^2-x}{3x-1}$
č) $f(x)=\frac{1}{2-3x}$
d) $f(x)=(9-x^2)^{-1}$
e) $f(x)=\frac{3}{(6x-1)^2}$
f) $f(x)=\frac{0{\cdot}1x-\sqrt{2}x}{x+4}$
g) $f(x)=\frac{2}{ax^2+bx+c}$

643. Za $f(x)=\frac{2x^3+1}{2x-x^2}$ izračunajte $f'(1)$.

644. Pri katerem x je za funkcijo $f(x)=(5x-2)^3$ vrednost njenega odvoda enaka 0?

645. Izračunajte odvode funkcij.

a) $f(x)=2x(4-\sqrt{2}\,x)^2$
b) $f(x)=(4-3x^2)^2$
c) $f(x)=\frac{2x-3}{(1-3x)^2}$
č) $f(x)=(1-x)(1-x^{-1})$
d) $f(x)=\frac{(2x-1)^2}{x^2+x-2}$
e) $f(x)=(kx+n)(ax^2+bx+c)$

646. Avtomobil pred semaforjem po prižgani zeleni luči spelje in enakomerno pospešuje s pospeškom $a=3\ \mathrm{m/s^2}$. Enačba $s(t)=\frac{at^2}{2}$ opisuje prevoženo pot avtomobila v času t z enakomernim pospeškom a.

a) Izračunajte, kako se spreminja hitrost avtomobila v odvisnosti od časa.
b) Narišite graf, ki prikazuje prevoženo pot v odvisnosti od časa, in graf, ki opisuje hitrost avtomobila v odvisnosti od časa.
c) Izračunajte, kolikšna je hitrost avtomobila in kolikšno pot je avto prevozil v 3 sekundah in kolikšno v 10 sekundah.

Uporaba odvoda

Tangenta in normala na krivuljo

Iz definicije odvoda vemo, da je smerni koeficient tangente na krivuljo enak odvodu funkcije v dani točki: $\boldsymbol{k_t = f'(x_0)}$.

Enačba tangente v dani točki krivulje: $\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$.

Normala na krivuljo je premica, ki je pravokotna na tangento v dani točki. Smerni koeficient normale je zato nasprotna in obratna vrednost smernega koeficienta tangente: $k_n = -\frac{1}{k_t}$.

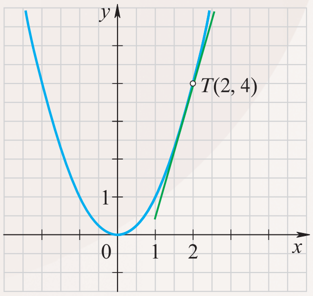
Enačba normale v dani točki krivulje: $\boldsymbol{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)}$.

ZGLEDI

1. Zapišimo enačbo tangente na krivuljo $y = x^2$ v točki $T(2, 4)$.

Odvod funkcije $f(x) = x^2$ v poljubni točki x je enak $f'(x) = 2x$.
Smerni koeficient tangente v točki $T(2, 4)$ je enak odvodu funkcije v točki $x = 2$:

$k_t = f'(2) = 4$.



Enačba tangente v točki $T(2, 4)$ je:

$y - y_0 = k(x - x_0)$

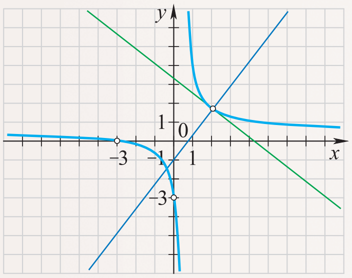
$y - 4 = 4(x - 2)$

$y = 4x - 8 + 4$

$y = 4x - 4$

2. Zapišimo tangento in normalo na graf funkcije $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ v točki z absciso $x_1 = 2$.

Spomnimo se geometrijske razlage odvoda v dani točki. Vrednost odvoda v določeni točki je enaka smernemu koeficientu tangente na krivuljo v tej točki. Zato najprej izračunamo odvod po pravilu za odvod kvocienta, potem pa namesto neznanke x vstavimo absciso točke.



$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2x-1) - (x+3) \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{-7}{(2x-1)^2}$$

Smerni koeficient tangente: $k_t = f'(2) = \frac{-7}{(2\cdot 2-1)^2} = -\frac{7}{9}$

Smerni koeficient normale: $k_n = \frac{9}{7}$

$y_1 = f(2) = \frac{2+3}{2\cdot 2-1} = \frac{5}{3}$, $T(2, \frac{5}{3})$

Enačba tangente:

$y - y_1 = k_t(x - x_1)$

$y - \frac{5}{3} = -\frac{7}{9}(x-2)$ oz. $7x + 9y - 29 = 0$

$y - y_1 = k_t(x - x_1)$

Enačba normale:

$y - \frac{5}{3} = \frac{9}{7}(x-2)$ oz. $27x - 21y - 19 = 0$

3. Izračunajmo, v kateri točki krivulje $y = x^2 - x - 2$ je tangenta vzporedna premici $y = 2x - 6$.

Ker je tangenta vzporedna dani premici, imata enak smerni koeficient:

$k_t = 2$.

Smerni koeficient tangente v neki točki je enak odvodu v tej točki.

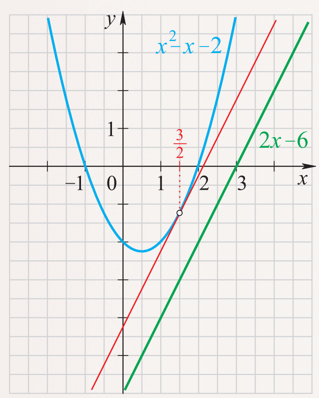
Izračunajmo odvod $y' = 2x - 1$.

Pri katerem x je odvod enak 2?

$2x - 1 = 2$

$x = \frac{3}{2}$

$y = (\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2} - 2 = -\frac{5}{4}$

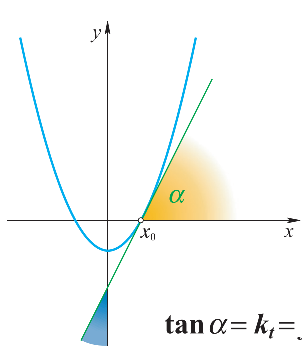


Dani premici je vzporedna tangenta na krivuljo v točki $T(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$.

Dve vzporednici imata enak smerni koeficient: $k_1 = k_2$.

Kot, pod katerim krivulja seka abscisno in ordinatno os

Kot med abscisno osjo in krivuljo je enak kotu med abscisno osjo in tangento na krivuljo v presečišču krivulje z osjo – to je prav naklonski kot tangente.



$$\tan\alpha = k_t = f'(x_0)$$

Kot med tangento in ordinatno osjo je komplementarni kot kota α.

ZGLED

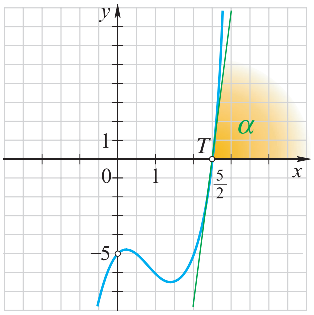
Izračunajmo, pod kolikšnim kotom graf funkcije $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 5$ seka abscisno os.

Najprej poiščimo presečišča grafa funkcije z abscisno osjo, to je ničle funkcije:

$2x^3 - 5x^2 + 2x - 5 = 0$

$x^2(2x - 5) + (2x - 5) = 0$

$(2x - 5)(x^2 + 1) = 0$



Presečišče je eno samo v točki $T(\frac{5}{2}, 0)$.

Odvod funkcije je enak:

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 2.$

Izračunajmo odvod pri $x = \frac{5}{2}$:

$f'(\frac{5}{2}) = 6 \cdot (\frac{5}{2})^2 - 10 \cdot (\frac{5}{2}) + 2 = \frac{75}{2} - 25 + 2 = \frac{29}{2} = 14{,}5$

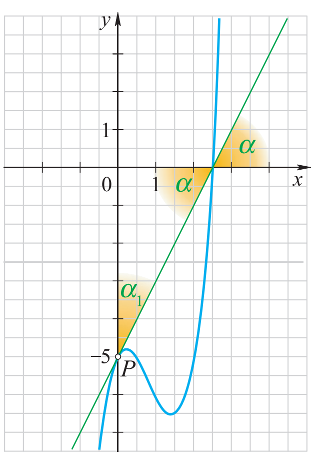
Tangens naklonskega kota je enak odvodu v presečišču:

$\tan\alpha = 14{,}5 \qquad \alpha \doteq 86{,}05°$

Kota sta komplementarna, kadar je njuna vsota 90°.

Kot med ordinatno osjo in krivuljo je enak kotu med ordinatno osjo in tangento na krivuljo v presečišču krivulje z ordinatno osjo. Vemo že, da je smerni koeficient tangente enak tangensu naklonskega kota tangente α oz. kota med tangento in abscisno osjo. Kot med tangento in ordinatno osjo α_1 pa je temu kotu α komplementaren.

ZGLED



Vzemimo funkcijo iz prejšnjega zgleda $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 5$ in izračunajmo, pod kolikšnim kotom njen graf seka ordinatno os.

Presečišče grafa z ordinatno osjo je $P(0, -5)$.

Odvod funkcije f je enak:

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 2.$

Odvod funkcije f v točki P je enak:

$f'(0) = 2.$

Tangenta na krivuljo v točki P ima smerni koeficient enak $k_t = 2$, kar pomeni, da ta tangenta seka abscisno os pod kotom α, za katerega velja:

$\tan\alpha = 2 \qquad \alpha \doteq 63{,}43°$

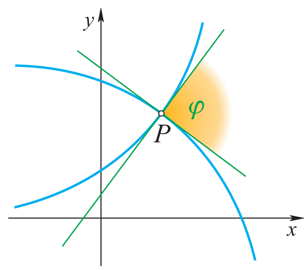
Kot med tangento v točki P in ordinatno osjo pa je temu kotu komplementaren.

$\alpha_1 = 90° - \alpha \doteq 26{,}56°$

Kot med krivuljama

Kot med dvema krivuljama je enak kotu med tangentama na ti dve krivulji v presečišču krivulj.

$$\tan\varphi = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\cdot g'(x_0)}\right|$$



Kot med premicama s smernima koeficientoma k_1 in k_2 izračunamo s formulo

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Izpeljavo te formule lahko najdete v knjigi *Spatium novum* na str. 185.

ZGLED

Izračunajmo kot med krivuljama $y = \frac{1}{x^2}$ in $y = \frac{x^2+1}{2}$.

Najprej izračunajmo, v katerih točkah se krivulji sekata.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{2}$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{x^2+1}{2} = 0$$

$$\frac{2 - x^4 - x^2}{2x^2} = 0$$

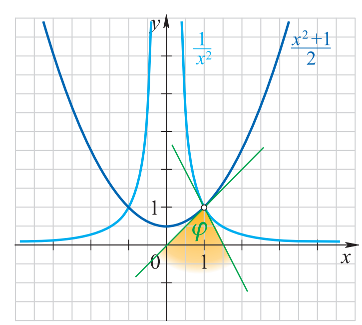
$$2 - x^4 - x^2 = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0$$

$$(x + 1)(x - 1)(x^2 + 2) = 0$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1$$

Krivulji se sekata v dveh točkah, $T_1(1,\ 1)$ in $T_2(-1,\ 1)$. Krivulji sta grafa sodih funkcij, zato sta simetrični glede na ordinatno os. Tudi kota med krivuljama v obeh presečiščih sta enaka, zato bo dovolj, da izračunamo enega od kotov, denimo v točki $T_1(1,\ 1)$.



Funkciji odvajamo in izračunamo odvod pri $x = 1$:

$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$y = \frac{x^2+1}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$
$y' = -2x^{-3}$	$y' = \frac{2x}{2} = x$
$y'(1) = -2$	$y'(1) = 1$
$k_1 = -2$	$k_2 = 1$

Vstavimo vrednosti za k_1 in k_2 v formulo:

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{1-(-2)}{1+1(-2)}\right| = \left|\frac{3}{-1}\right| = 3$$

$$\varphi \doteq 71^\circ 57'$$

NALOGE

647. Zapišite enačbo tangente na graf dane funkcije v točki T_0.
a) $f(x)=x^2-3x+5$; $T_0(2, y_0)$
b) $f(x)=x^3+3$; $T_0(1, y_0)$
c) $f(x)=(3x-2)^2$; $T_0(\frac{1}{3}, y_0)$
č) $f(x)=\frac{x^{-2}}{4}$; $T_0(-2, y_0)$
d) $f(x)=\frac{3x-1}{2x-4}$; $T_0(3, y_0)$
e) $f(x)=\frac{x^2-5}{(x-1)^2}$; $T_0(-1, y_0)$

648. Zapišite enačbi tangent na graf funkcije $f(x)=x^3-3x^2+x-3$ v presečiščih s koordinatnima osema.

649. Zapišite tangento na graf funkcije $f(x)=-6x^2+3x$ v točki $T(2, y)$.

650. Zapišite enačbi tangente in normale na graf funkcije $f(x)=9x^{-2}$ v točki $T_0(3, y_0)$.

651. Zapišite odsekovno obliko enačbe tangente na graf funkcije $f(x)=1-x^{-3}$ v točki -1. V katerih točkah seka tangenta koordinatni osi?

652. Dana je funkcija $f(x)=(x+2)^3$.
a) Zapišite koordinate oglišč trikotnika, ki ga s koordinatnima osema oklepa tangenta na graf funkcije f v točki $(-1, y_0)$.
b) Koliko meri njegova ploščina?

653. Enačbo tangente na graf funkcije $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x^2-9}$ v točki $x=4$ zapišite v vseh treh oblikah.

654. V kateri točki grafa funkcije $f(x)=(5x-4)^2$ je tangenta na graf funkcije vzporedna premici $10x-y-5=0$? Zapišite enačbo tangente.

655. Zapišite dotikališči in enačbi tangent na graf funkcije $f(x)=x^3+3x^2+3x+3$, ki sta vzporedni premici $3x-y-2=0$.

656. Zapišite enačbo normale na graf funkcije $f(x)=-x^{-1}$, ki je vzporedna simetrali sodih kvadrantov.

657. Katere tangente na graf funkcije $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ imajo naklonski kot $135°$? Zapišite tudi koordinate dotikališč.

658. V katerih točkah krivulje $y=-2x^3+5x$ ima normala naklonski kot $45°$?

659. V kateri točki grafa funkcije $f(x)=2x(1-x)$ je premica $x-10y-123=0$ normala na graf funkcije?

660. Za kateri q je premica $y=-6x+7$ tangenta na graf funkcije $f(x)=3(x-1)^2+q$? Zapišite dotikališče tangente.

661. Za kateri k je normala na graf funkcije $f(x)=kx^3$ v točki z absciso $x=-2$ vzporedna premici $x+6y+26=0$?

662. Pod katerim kotom seka graf polinoma $p(x)=x^3-3x^2+2x-6$ abscisno os?

663. Pod katerim kotom seka krivulja z enačbo $y=2x^2-7x-4$ abscisno os?

664. Kolikšen kot oklepata tangenti na graf funkcije $f(x)=2+\frac{1}{x}$ v točkah z abscisama -3 in 2?

665. Pod katerim kotom seka graf funkcije $f(x)=-(x-2)^2$ ordinatno os?

666. Narišite graf funkcije $f(x)=\frac{1-x}{x+2}$ in izračunajte, pod katerim kotom seka graf funkcije koordinatni osi.

667. V kateri točki grafa polinoma $p(x)=x^3-6x^2+9x-18$ so tangente vzporedne abscisni osi?

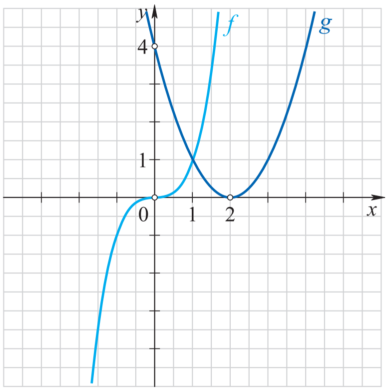
668. Izračunajte presečišče in kot med premicama $3x-y-3=0$ in $\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1$. Narišite sliko.

669. Narišite grafa danih funkcij. Izračunajte presečišči ter kota med grafoma funkcij.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$ in $g(x) = x + 3$

b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$ in $g(x) = -x^2 + 4x$

670. Na sliki sta dana grafa potenčne funkcije f in kvadratne funkcije g. Zapišite njuna predpisa in izračunajte kot med grafoma funkcij.



671. Izračunajte presečišče in kot med krivuljama.

a) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 4x^2 - 3$

b) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$, $y = \frac{x}{2} + 2$

c) $y = x^3 - 12x + 16$, $y = -4x^2 + 16$

č) $y = \frac{2x+1}{x-4}$, $y = -x^{-1}$

672. Zapišite enačbi tangent na krivuljo $y = x^{-2}$, ki gresta skozi točko $(0, 12)$.

673. Zapišite enačbo tangente na krivuljo $y = f(x)$ v točki $T(0, 1)$, če je $f'(0) = 6$.

Stacionarne točke, naraščanje ali padanje funkcije

V tretjem letniku smo se naučili risati grafe polinomov, vendar pri tem nismo mogli biti prav natančni. Naslednji zgled nam bo pokazal, kje je težava.

ZGLED

Narišimo graf funkcije $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

Izračunajmo ničle.

$3x^4 - 4x^3 = 0$

$x^3(3x - 4) = 0$

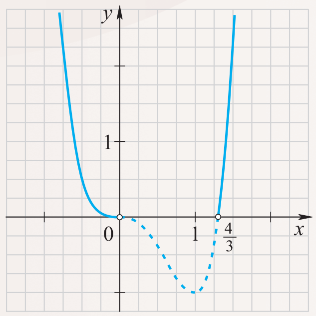
$x_{1,2,3} = 0$

$x_4 = \frac{4}{3}$

Graf seka ordinatno os v točki $T(0, 0)$, saj je $f(0) = 0$.

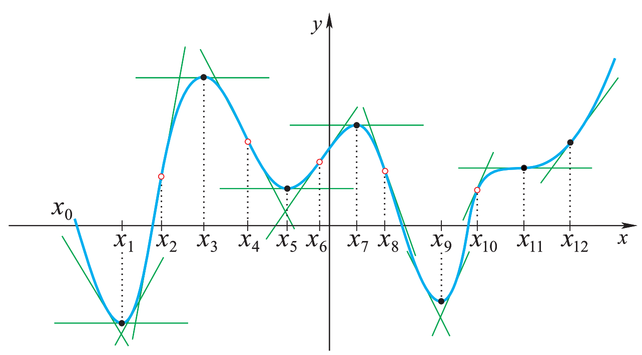
Obnašanje daleč od koordinatnega izhodišča:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (3x^4 - 4x^3) = \infty$



Graf lahko dokaj lepo narišemo okoli obeh ničel in daleč od izhodišča, ne vemo pa, kako »globoko se spusti« na intervalu $(0, \frac{4}{3})$ – ne poznamo minimuma funkcije. Naslednji premislek nam bo pokazal, kako rešimo take težave.

Na spodnji sliki je graf polinoma precej visoke stopnje. Če gremo od leve proti desni po krivulji s tangento, vidimo, da ima ta najprej negativen smerni koeficient in narašča (tangenta se vrti v pozitivni smeri) do točke z absciso x_1, kjer je vodoravna. Potem narašča do rdeče točke, kjer se tangenta začne vrteti v smeri urnega kazalca. Potem se vse skupaj ponovi: smerni koeficienti se zmanjšujejo do 0 v točki z absciso x_3, potem padajo do neke negativne vrednosti (v rdeči točki) in spet začnejo naraščati do 0 v točki z absciso x_5 …



Z uporabo odvoda lahko zdaj bolj elegantno opišemo naraščanje in padanje funkcije, kot smo to naredili v 2. letniku.

Funkcija f **narašča v točki** z absciso $x = x_0$, če je $f'(x_0) > 0$ oz. **narašča na intervalu** (a, b), če je $f'(x_0) > 0$ za vsak $x \in (a, b)$.

Funkcija f **pada v točki** z absciso $x = x_0$, če je $f'(x_0) < 0$ oz. **pada na intervalu** (a, b), če je $f'(x_0) < 0$ za vsak $x \in (a, b)$.

Opazovana funkcija narašča na uniji intervalov $(x_1, x_3) \cup (x_5, x_7) \cup (x_9, \infty)$ in pada na uniji intervalov $(-\infty, x_1) \cup (x_3, x_5) \cup (x_7, x_9)$.

Na krivulji so nekatere točke pomembnejše od drugih – to so črno označene točke z abscisami x_1 x_3, x_5, x_7, x_9, v katerih so tangente vodoravne in rdeče označene točke z abscisami x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, x_{11}.

Točka, kjer funkcija lokalno gledano (v dovolj majhni okolici) zavzame največjo ali najmanjšo vrednost, se imenuje **lokalni ekstrem**.

Funkcija f ima v $x = x_0$ **lokalni minimum**, če velja $f(x) > f(x_0)$ za vsak x iz dovolj majhne okolice točke x_0.

Funkcija f ima v $x = x_0$ **lokalni maksimum**, če velja $f(x) < f(x_0)$ za vsak x iz dovolj majhne okolice točke x_0.

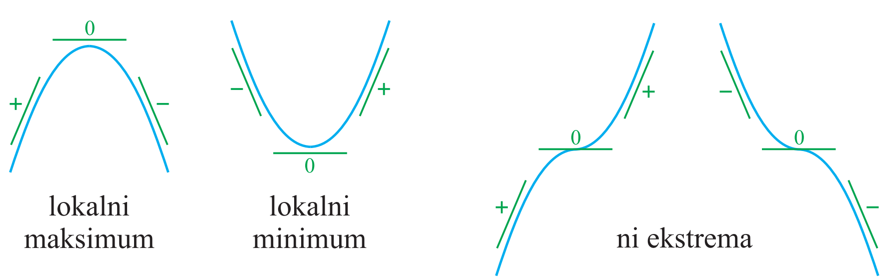
Ničle odvoda $f'(x) = 0$ so **stacionarne točke** funkcije f. V stacionarni točki je tangenta na krivuljo vodoravna.

Stacionarne točke pri opazovani funkciji so točke x_1 x_3, x_5, x_7, x_9 in x_{11}, lokalni minimum doseže funkcija v točkah x_1 x_5, x_9, lokalni maksimum v točkah x_3, x_7; v točki x_{11} pa ni lokalnega ekstrema, čeprav je tangenta na krivuljo vodoravna. Zakaj je tako, bomo spoznali kasneje.

	Predznak odvoda funkcije v točki x		
	$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
Lokalni minimum	–	0	+
Lokalni maksimum	+	0	–
Ni ekstrema	+	0	+
Ni ekstrema	–	0	–

Vse ugotovitve lahko strnemo v pravilo:

Potrebni pogoj za lokalni ekstrem: vrednost odvoda v stacionarni točki je enaka 0: $f'(x) = 0$, vendar ta pogoj še ne zadostuje, zato potrebujemo še **zadostni pogoj**: odvod mora spremeniti predznak pri prehodu čez stacionarno točko.



lokalni maksimum

lokalni minimum

ni ekstrema

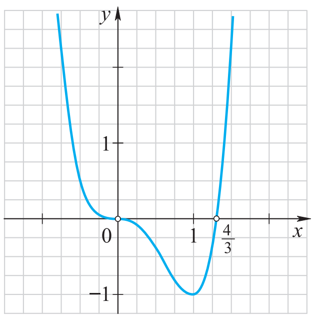
ZGLEDA

1. Vrnimo se k našemu prejšnjemu zgledu: $f(x)=3x^4-4x^3$.

Kje ima funkcija lokalni minimum?

Odvajajmo funkcijo:
$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

Odvod je torej enak nič pri $x=0$ in $x=1$.



Interval, kjer je odvod pozitiven, dobimo z rešitvijo neenačbe:
$12x^2(x-1)>0$
$x\in(1,\infty)$
Na intervalu $(1,\infty)$ funkcija narašča.

Odvod je negativen na intervalu $(-\infty, 1)$, na tem intervalu funkcija pada. Izjema je le ena točka s tega intervala, $x=0$, v kateri je vrednost odvoda enaka 0.

Funkcija f ima pri $x=0$ trikratno ničlo in v tej točki nima ekstrema. Doseže pa minimum pri $x=1$, in sicer $y=-1$.

2. Dan je polinom $p(x)=\frac{4}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4-4x^3-x^2+4x+4$.
Poiščimo ekstreme in intervale naraščanja in padanja.

Odvajajmo:
$p'(x)=4x^4-2x^3-12x^2-2x+4$

Stacionarne točke so v ničlah odvoda:
$p'(x)=0$
$4x^4-2x^3-12x^2-2x+4=0/:2$
$2x^4-x^3-6x^2-x+2=0$

Kandidati za celoštevilske ničle so delitelji prostega člena 2:
$\pm1, \pm2$.
Hitro se lahko prepričamo, da 1 ni ničla odvoda, saj: $p'(1)\neq0$.

Preverimo, če je $p'(-1)=0$:

	2	−1	−6	−1	2
−1		−2	3	3	−2
	2	−3	−3	2	0
−1		−2	5	−2	
	2	−5	2	0	

$x_{1,2}=-1$ je dvojna ničla odvoda.

Drugi dve ničli odvoda lahko dobimo iz kvadratne enačbe:
$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$

$x_3 = 2$

$x_4 = \frac{1}{2}$

Tako lahko odvod $p'(x)$ zapišemo v faktorizirani obliki:
$p'(x) = 2(x+1)^2(x - \frac{1}{2})(x-2)$

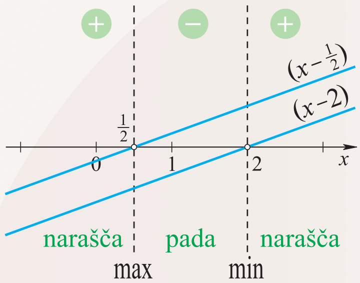
Funkcija narašča, kjer je odvod pozitiven, in pada, kjer je odvod negativen:

$p'(x) = 2(x+1)^2(x - \frac{1}{2})(x-2) > 0 \qquad p$ narašča

$p'(x) = 2(x+1)^2(x - \frac{1}{2})(x-2) < 0 \qquad p$ pada

Neenačbi najlaže rešimo z analizo predznakov posameznih faktorjev.

Faktorja 2 in $(x+1)^2$ sta vedno pozitivna in ne vplivata na rešitev, faktor $(x - \frac{1}{2})$ spremeni predznak pri $\frac{1}{2}$, faktor $(x-2)$ pa spremeni predznak pri 2.

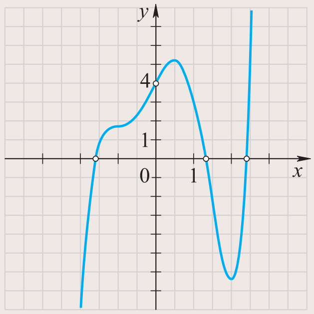


Od tod lahko razberemo:

- v stacionarni točki $x = -1$ ni ekstrema,
- pri $x = \frac{1}{2}$ ima polinom lokalni maksimum,
- pri $x = 2$ ima polinom lokalni minimum.

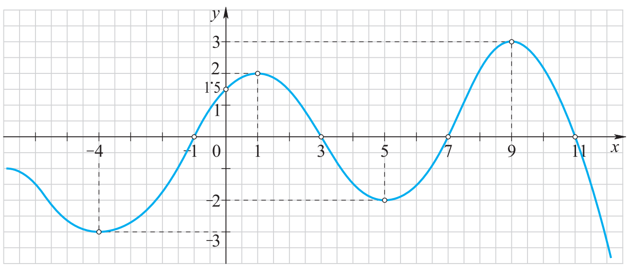
Polinom narašča na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ in na intervalu $(2, \infty)$, pada pa na intervalu $(\frac{1}{2}, 2)$, ima lokalni minimum $m(2, -\frac{32}{5})$ in lokalni maksimum $M(\frac{1}{2}, \frac{829}{160})$.

O pravilnosti našega izračuna se lahko prepričamo na grafu polinoma, ki smo ga narisali z računalnikom:



NALOGE

674. Proučite funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, katere graf je na sliki, ter ugotovite vrsto preslikave (injektivna, surjektivna, bijektivna) in naslednje lastnosti: definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle in presečišče z ordinatno osjo, naraščanje, padanje, pozitivnost, negativnost, omejenost, neomejenost, sodost, lihost, periodičnost, lokalne in globalne ekstreme.



675. Zapišite intervale naraščanja in padanja funkcij.

a) $f(x) = -x^3 + 12x - 1$

b) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{27}{8}$

c) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6x - 8$

č) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 5$

d) $f(x) = x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{5}{12}x^3 - \frac{5}{8}x^2$

e) $f(x) = x^3(4 - x)^2$

f) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

g) $f(x) = \frac{x^2-x}{1+x^2}$

h) $f(x) = 5x^5 - 50x^3 + 1600$

676. Ugotovite definicijsko območje funkcije in pokažite, da je funkcija na njem strogo naraščajoča.

a) $f(x) = 3x + 16$

b) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 15$

c) $g(x) = (x+1)^3 + (x-3)^3$

677. Pokažite, da je funkcija $g(x) = x + \frac{1}{x}$ na intervalu $(-1, 0)$ padajoča.

678. Izračunajte vrednost parametra a tako, da bo funkcija $f(x) = x^2 + ax + 1$ naraščajoča na intervalu $(1, \infty)$.

679. Izračunajte odvode funkcij in zapišite ekstreme.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$

c) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 15x$

č) $f(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{5}{4}$

d) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^2$

e) $f(x) = 2x^{-1} + x$

f) $f(x) = \frac{x^5-8}{x^4}$

g) $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+4}$

h) $f(x) = \frac{5-x}{9-x^2}$

680. Izračunajte globalne ekstreme funkcij.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ na intervalu $[-3, 3]$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 6$ na intervalu $[-5, 5]$

c) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+2}$ na intervalu $[-1, 2]$

681. Za dane funkcije zapišite ničle, presečišče z ordinatno osjo in ekstreme ter narišite njihove grafe.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

c) $f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-4)$

č) $y = -4x^3 - x^2 + 4x + 1$

d) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$

e) $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 5$

f) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(4-x)^2$

682. Za dane funkcije zapišite ničle, presečišče z ordinatno osjo, pole, asimptote in ekstreme ter narišite njihove grafe.

a) $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2-2}$

b) $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = \frac{2x^2}{x^4+1}$

č) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

d) $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2+3x}$

e) $f(x) = \frac{8-2x}{7-x^2}$

f) $f(x) = \frac{2x^2-2}{5x^2+4x}$

683. Pokažite, da je funkcija $h(x) = -2x^3 + 9x^2 - 18x + 10$ na intervalu $(-\infty, \infty)$ padajoča.

684. Za dane funkcije zapišite definicijsko območje, ničle, presečišče z ordinatno osjo, pole, pole, asimptote in ekstreme ter narišite njihove grafe.

a) $f(x) = x + \frac{4}{x}$

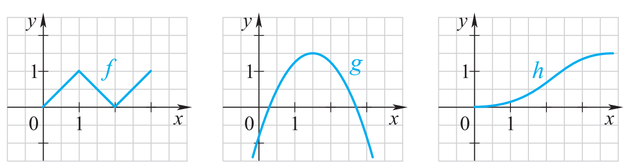
b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{8 - 2x}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

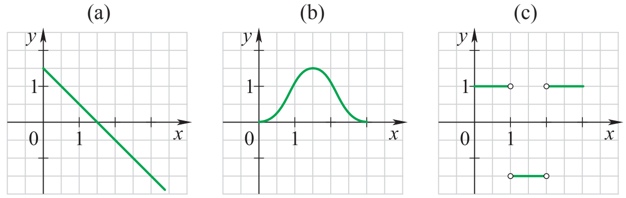
685. Delec se giblje po tiru in opisuje pot $s(t) = 4t^3 - 6t^2 - 72t + 48$, $t \geq 0$. Njegovo hitrost merimo v m/s. Izračunajte, po kolikšnem času delec obmiruje. V katerem trenutku je njegova hitrost 6 m/s?

686. Funkcije f, g in h ter njihovi odvodi so predstavljene z grafi. H kateremu grafu funkcije iz zgornje vrste spada graf z njenim odvodom v spodnji vrsti?

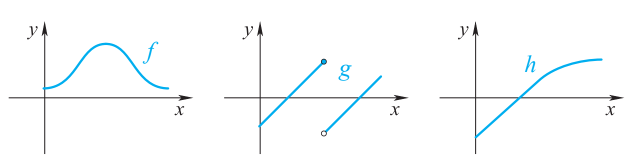
a)



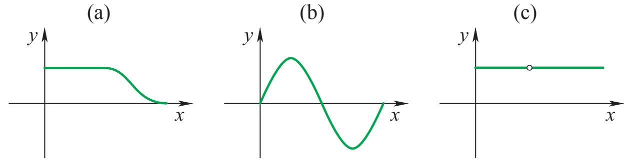
(a) (b) (c)



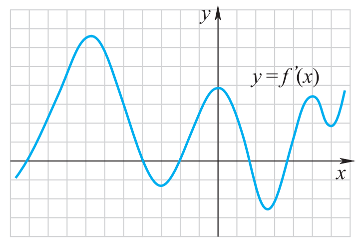
b)



(a) (b) (c)



687. Iz grafa odvoda dane funkcije ugotovite, koliko lokalnih maksimumov in lokalnih minimumov ima funkcija f.



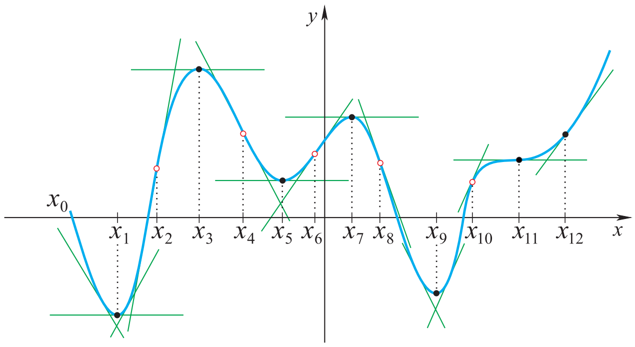
688. Pokažite, da funkcija $f(x) = \frac{4x(1-x)}{(1+x)^2}$ ne zavzame večje vrednosti od $\frac{1}{2}$. Narišite njen graf.

689. Funkcija $f(x) = \begin{cases} 2x + 5; & 0 < x < 2 \\ ax^2 + bx + c; & 2 \leq x < 5 \end{cases}$ je zvezna na intervalu $(0, 5)$. Izračunajte vrednosti parametrov a, b in c, če velja $f(4) = 11$ in $f'(3) = 1$.

Drugi odvod in njegova uporaba (višja raven)

Če obstaja $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ oz. če je prvi odvod funkcije odvedljiva funkcija, dobimo **drugi odvod** funkcije. Če je odvedljiv tudi drugi odvod, dobimo tretji odvod in tako naprej.

S pomočjo drugega odvoda bomo pojasnili vlogo rdeče obarvanih točk na grafu polinoma – odgovorili na vprašanje, zakaj v nekaterih primerih v stacionarni točki ni ekstrema (točka z absciso x_{11}) .



Zamislimo si, da je tangenta na zgornjo krivuljo tanka palica, ki jo pomikamo po grafu od točke za absciso od x_0 do x_{12}. Na intervalu (x_0, x_2) se tangenta vrti v pozitivni smeri (nasprotno gibanju urnega kazalca), pri prehodu čez x_2 oz. na intervalu (x_2, x_4) pa se vrti v negativni smeri. Potem se na naslednjih intervalih tangenta izmenično vrti v pozitivni in negativni smeri.

Na uniji intervalov $(x_0, x_2) \cup (x_4, x_6) \cup (x_8, x_{10}) \cup (x_{11}, x_{12})$ je funkcija konkavna, na uniji intervalov $(x_2, x_4) \cup (x_6, x_8) \cup (x_{10}, x_{11})$ pa konveksna.

Na uniji intervalov $(x_0, x_2) \cup (x_4, x_6) \cup (x_8, x_{10}) \cup (x_{11}, x_{12})$ odvod narašča, zato je njegov odvod (drugi odvod prvotne funkcije) pozitiven, na uniji intervalov $(x_2, x_4) \cup (x_6, x_8) \cup (x_{10}, x_{12})$ pa odvod prvega odvoda (drugi odvod prvotne funkcije) pada, zato je negativen.

Če oba zadnja razmisleka združimo, dobimo kriterij za konveksnost oz. konkavnost funkcije.

Funkcija f je na intervalu (a, b) **konveksna**, če je $f''(x) > 0$ za vsak $x \in (a, b)$.

Funkcija f je na intervalu (a, b) **konkavna**, če je $f''(x) < 0$ za vsak $x \in (a, b)$.

Točka, v kateri funkcija preide iz konveksnosti v konkavnost, se imenuje **prevoj**.

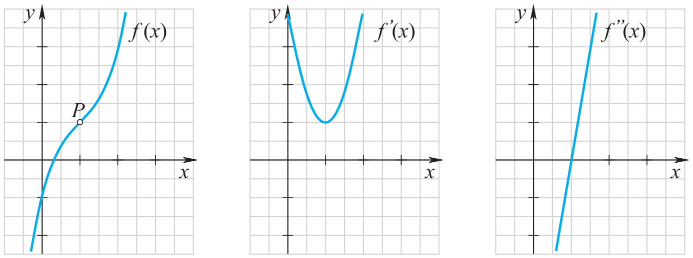
– **Potrebni pogoj** za nastop prevoja: drugi odvod v stacionarni točki je enak nič: $f''(x) = 0$.

Rešitve te enačbe so stacionarne točke za prevoj. Tudi ta pogoj ne zadostuje.

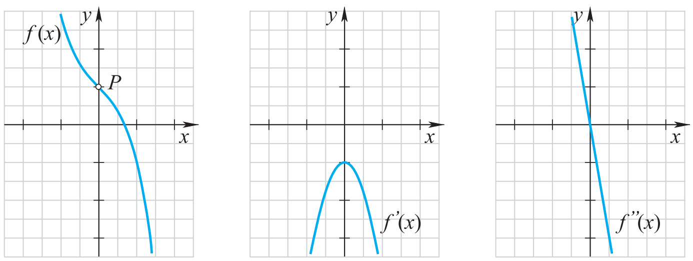
– **Zadostni pogoj** za nastop prevoja: drugi odvod spremeni predznak pri prehodu čez stacionarno točko za prevoj.

V naslednjih dveh zaporedjih grafov bomo preverili potrebni in zadostni pogoj za nastop prevoja.

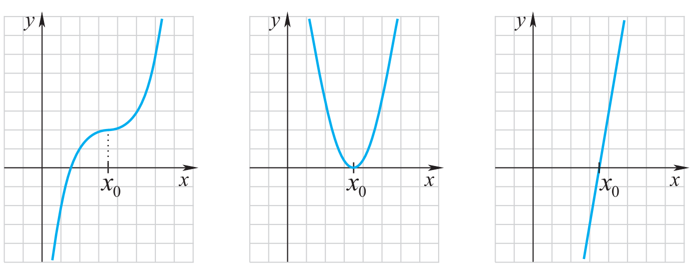
Če gre pri naraščajoči funkciji za prevoj iz konkavnosti v konveksnost, je drugi odvod je v tej točki enak nič, prvi odvod pa povsod pozitiven.



V primeru prevoja iz konveksnosti v konkavnost pri padajoči funkciji je drugi odvod v tej točki enak nič, prvi odvod pa povsod negativen.

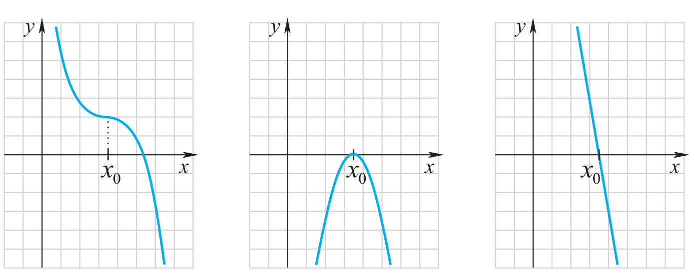


Odgovoriti moramo še na vprašanje, zakaj je v točki z absciso x_{11} tangenta vodoravna, pa v njej ni lokalnega ekstrema. Najprej vzemimo za primer naraščajočo funkcijo $f(x)=(x-2)^3+2$, ki ima stacionarno točko x_0, in narišimo njen graf ter graf prvega in drugega odvoda.



Potem razmišljamo takole: drugi odvod v x_0 je enak nič, prvi odvod ima v x_0 ničlo sode stopnje, funkcija f pa ima v tej točki prevoj, v katerem je tangenta vodoravna (iz konkavnosti v konveksnost).

Podobne grafe lahko narišemo za padajočo funkcijo $g(x)=-(x-2)^3+2$.



Drugi odvod v x_0 je enak nič, prvi odvod ima v x_0 ničlo sode stopnje, funkcija f pa ima v x_0 prevoj (iz konveksnosti v konkavnost) in tangenta v prevoju je spet vodoravna.

Prevoj, v katerem je tangenta vodoravna, imenujemo **sedlo**.

ZGLEDA

1. Kar se da natančno narišimo graf funkcije $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 7x + 6$.

Izračunali bomo ničle, lokalne ekstreme, prevoje, intervale naraščanja in padanja ter intervale, na katerih je funkcija konveksna ali konkavna.

Najprej poiščemo ničle, tako da rešimo enačbo $x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 = 0$.

Prvo ničlo $x_1 = 1$ lahko kar »uganemo«, potem pa s Hornerjevim algoritmom dobimo še $x_2 = 3$, zadnji dve, $x_3 = 3$ in $x_4 = -2$, pa z rešitvijo kvadratne enačbe $x^2 - x - 6 = 0$.

Zdaj polinom odvajamo: $f'(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 5x^2 - \frac{2}{3}x - 7$ in rešimo enačbo $4x^3 - 15x^2 + 2x + 21 = 0$. Njene rešitve so stacionarne točke za lokalne ekstreme.

Spet lahko prvo rešitev, $x_1 = 3$, uganemo, ker je število 3 dvojna ničla funkcije f, ostali dve ničli, $x_2 = -1$ in $x_3 = \frac{7}{4}$, pa izračunamo iz kvadratne enačbe $4x^2 - 3x - 7 = 0$.

Izračunamo še drugi odvod: $f''(x) = -4x^2 + 10x - \frac{2}{3}$.

Njegovi ničli sta abscisi prevojev: $x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{201}}{12} \sim \frac{15 \pm 14}{12}$.

Če vstavimo stacionarne točke v drugi odvod, ugotovimo, ali je v dani točki lokalni ekstrem.

Pogledamo vrednost drugega odvoda pri stacionarni točki $x_1 = 3$ in dobimo $f''(3) < 0$, zato je v tej stacionarni točki lokalni maksimum: $M_1(3, 0)$, saj je 3 dvojna ničla funkcije.

Ker je $f''(-1) < 0$, je v $x_2 = -1$ lokalni maksimum $M_2(-1, \frac{32}{3})$, saj je $f(-1) = \frac{32}{2}$.

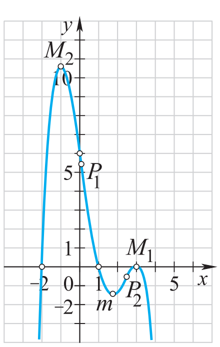
Ker je $f''(\frac{7}{4}) > 0$, je v $x_3 = \frac{7}{4}$ lokalni minimum $m(\frac{7}{4}, -\frac{375}{256})$.

Za risanje grafa poiščemo še začetno vrednost: $f(0) = 6$.

Funkcija f je naraščajoča na uniji intervalov $(-\infty, -1) \cup (\frac{7}{4}, 3)$ in je padajoča na uniji intervalov $(-1, \frac{7}{4}) \cup (3, \infty)$.

Funkcija f je konveksna na intervalu $(\frac{15-\sqrt{201}}{12}, \frac{15+\sqrt{201}}{12})$

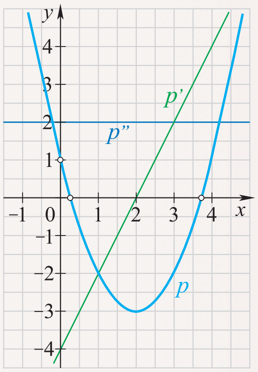
in je konkavna na uniji intervalov $(-\infty, \frac{15-\sqrt{201}}{12}) \cup (\frac{15+\sqrt{201}}{12}, \infty)$.



2. Zapišimo enačbo polinoma in skicirajmo njegov graf, če so dani podatki:

a) $p''(x)=2$ za vsak x, $p'(2)=0$, $p(2)=-3$

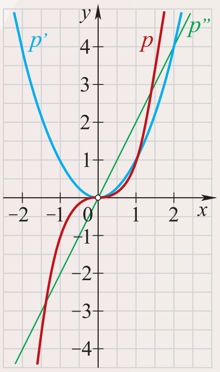
Ker je drugi odvod pozitiven za vsak x, je funkcija konveksna na celem definicijskem območju; ker je v $x=2$ prvi odvod nič, mora biti tam ekstrem, in to minimum zaradi trditve o konveksnosti funkcije. Tretji pogoj nam pove vrednost funkcije v dani točki oz. minimum $(2, -3)$. Zdaj že lahko napišemo enačbo $p(x)=(x-2)^2-3$ in narišemo graf.



b) $p''(x)<2$ za vsak $x<0$, $p''(x)>0$ za vsak $x>0$, $p'(0)=0$, $p(0)=0$

Zaradi prvih dveh pogojev je funkcija f na intervalu $(-\infty, 0)$ konkavna, na intervalu $(0, \infty)$ pa konveksna; v točki $x=0$ je prevoj. Zaradi tretjega pogoja je v točki 0 tangenta vodoravna in ni ekstrema, zato je v tej točki sedlo.

Ena od možnih rešitev je $p(x)=x^3$.



c) $p''(x)>0$ za vsak $x<-1$, $p''(x)<0$ za vsak $x>-1$, $p'(-1)=1$, $p(-1)=2$

Zaradi prvih dveh pogojev je funkcija p na intervalu $(-\infty, -1)$ konkavna, na intervalu $(-1, \infty)$ pa konveksna; v točki $x=-1$ je prevoj. Prvi odvod v $x=-1$ je 1, zato gre tangenta pod kotom 45°, krivulja gre skozi točko $(-1, 2)$.

Iskana funkcija je lahko polinom 3. stopnje,
$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, katerega prvi odvod je
$p'(x)=3ax^2+2bx+c$ in drugi odvod $p''(x)=6ax+2$.

$p(-1)=-a+b-c+d=2$

$p'(-1)=3a-2b+c=1$

$p''(-1)=-6a+2b=0$

Dobimo sistem treh linearnih enačb s štirimi neznankami, od katerih ena postane parameter. Izberemo si kar neznanko a.

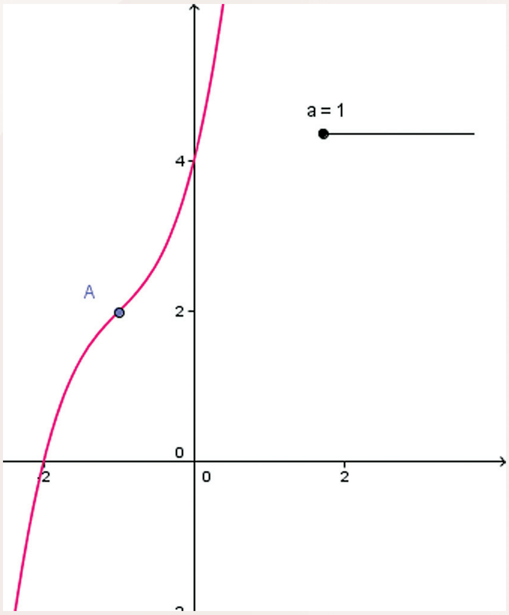
$b=3a,\ c=3a+1,\ d=a+3$

Rezultat je družina funkcij $p(x)=ax^3+3ax^2+(3a+1)x+(a+3)$.

Grafi funkcij za $a=1, 2, 3 \dots$ se vrtijo okoli prevoja $P(-1, 2)$ v pozitivnem smislu, vendar je tangenta v vsakem primeru enaka $y=x+3$, ker je $p'(x)=3ax^2+6ax+(3a+1)$ in je odvod v -1 neodvisen od izbire parametra a: $p'(-1)=3a-6a+(3a+1)=1$.

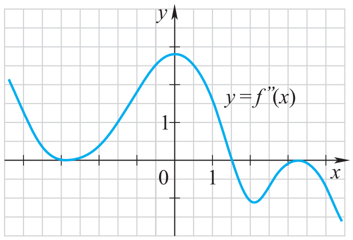
Če izberemo $a=1$, dobimo funkcijo $p(x)=x^3+3x^2+4x+4$.

Svoje ugotovitev lahko preverimo tudi s programom *GeoGebra*, kjer za spreminjanje parametra a uporabimo drsnik.

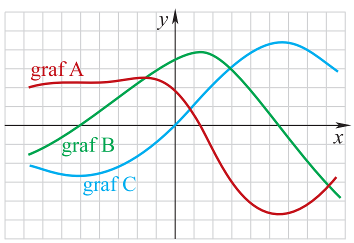


NALOGE

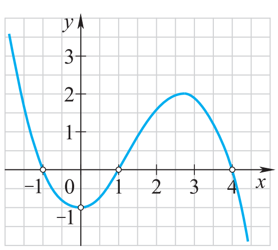
690. Z grafa dane funkcije ugotovite, koliko prevojev ima funkcija f.



691. Na sliki so grafi A, B in C. Ugotovite, kateri od njih je funkcija f, kateri je f' in kateri je f''.



692. Na sliki je graf funkcije g''. Odgovorite na vprašanji in utemeljite odgovora.



a) Na katerem intervalu g' narašča, pada?

b) Na katerem intervalu je funkcija g konkavna, konveksna?

Ekstremalni problemi

S pomočjo odvoda lahko rešujemo tudi t. i. ekstremalne probleme. Poglejmo si nekaj zgledov, ki smo jih srečali že v učbenikih *Planum novum* in *Spatium novum*:

ZGLEDI

1. Bolnik dobi zdravilo. Racionalna funkcija $f(t)=\frac{8t}{t^2+4}$ opisuje koncentracijo zdravila v krvi v mg/liter v odvisnosti od časa t po zaužitem zdravilu. Kdaj bo koncentracija zdravila v krvi največja?

Odvajajmo funkcijo f in izračunajmo, pri kateri vrednosti t je odvod enak nič oz. pri katerem času t je koncentracija maksimalna:

$$f'(t)=\frac{8(t^2+4)-8t\cdot 2t}{(t^2+4)^2}=\frac{8t^2+32-16t^2}{(t^2+4)^2}=\frac{32-8t^2}{(t^2+4)^2}$$

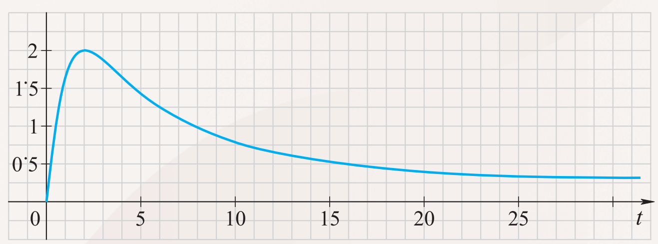
$$f'(t)=0$$

$$\frac{32-8t^2}{(t^2+4)^2}=0$$

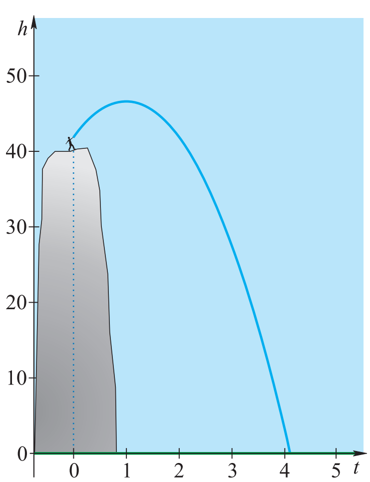
$$8t^2=32$$

$$t^2=4$$

$$t=\pm 2$$



Največja koncentracija zdravila v krvi je po dveh urah. (Rešitev $t=-2$ v našem primeru ni smiselna.)



2. Fantek na 40 m visoki pečini vrže v zrak kamen. Na kateri višini h je kamen po času t, nam pove formula: $h(t)=41{\cdot}5+10t-4{\cdot}9t^2$. Po kolikem času bo kamen najvišje nad tlemi?

Odvajajmo funkcijo h in izračunajmo, pri kateri vrednosti t je odvod enak 0:

$$h'(t)=10-2\cdot 4{\cdot}9t$$

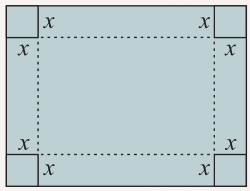
$$h'(t)=0$$

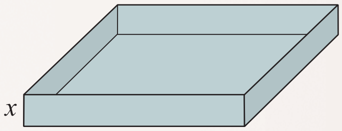
$$10-9{\cdot}8t=0$$

$$t=\frac{100}{98}=1{\cdot}02$$

Kamen bo naredil preobrat po dobri sekundi.

3. Iz lepenke pravokotne oblike (80 cm × 60 cm) naredimo škatlo tako, da iz vogalov izrežemo kvadrate s stranico x, preostanke zavihamo navzgor in jih zlepimo po robovih.





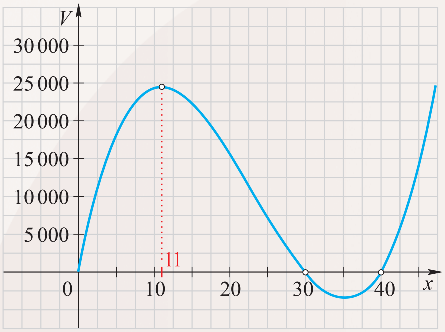
Pri katerem x bo prostornina narejene škatle največja?

Zapišimo prostornino škatle v odvisnosti od x.

$V(x) = (80 - 2x)(60 - 2x)x$

$V(x) = 4x^3 - 280x^2 + 4800x$

Če narišemo graf, lahko z njega preberemo odgovor:



Največji volumen bo približno takrat, ko bomo odrezali iz vogalov kvadratke 11 × 11.

Natančno vrednost lahko izračunamo s pomočjo ničle odvoda:

$V'(x) = 12x^2 - 560x + 4800$

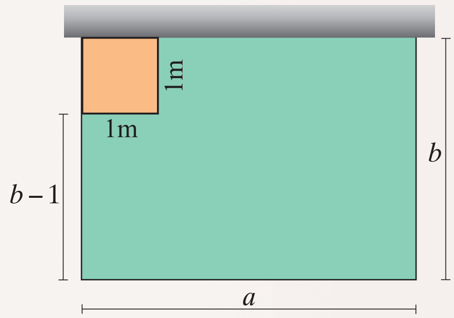
$V'(x) = 0$

$12x^2 - 560x + 4800 = 0$

$x = 11{\cdot}31$ cm

Druga ničla odvoda, $x = 35{\cdot}35$ cm, pa za naš primer ni uporabna.

4. Ob hiši stoji uta (1 m × 1 m) psa Lorda. Za ograditev pesjaka smo kupili 9 m ograje. Kolikšna naj bo dolžina in širina pravokotnega pesjaka, da bo imel naš ljubljenec največ prostora za gibanje?



Radi bi izračunali največjo možno ploščino pesjaka pri dani omejitvi: za ograditev pesjaka imamo 9 m ograje.

Ploščina pravokotnika je odvisna od dolžine a in širine b in je enaka: $S = ab$.

Večja ko bo dolžina a, manjša bo morala biti širina b, saj imamo le 9 m ograje:

$(b-1)+a+b=9$

$a+2b=10$

Iz druge enačbe izrazimo a:

$a=10-2b$

V formuli za ploščino $S=ab$ namesto a pišimo $10-2b$:

$S(b)=(10-2b)b=10b-2b^2$

Ploščina je zdaj funkcija spremenljivke b, odvisna je od izbire širine pesjaka. (Dolžina je z izbiro širine tako že določena.)

Odvajajmo:

$S'(b)=10-4b$

Največja ploščina bo pri taki izbiri b, da bo $S'(b)=0$.

$10-4b=0$

$b=2{\cdot}5$

Širina pesjaka bo torej $2{\cdot}5$ m, dolžina pa: $a=10-2\cdot 2{\cdot}5=5$ m.

5. Konjeniški stadion naj bi imel obliko pravokotnika s polkrogom ob obeh krajših stranicah. Obseg stadiona mora biti 400 m. Določimo dolžini stranic pravokotnika tako, da bo njegova ploščina največja, in jo izračunajmo. Rezultat zaokrožimo na desetice.

$S(x, y) = xy$, $2x + \pi y = 400$, $S(x) = x \cdot \frac{400 - 2x}{\pi}$

$S'(x) = -\frac{4}{\pi}x + \frac{400}{\pi}$

$-\frac{4}{\pi}x + \frac{400}{\pi} = 0$, $x = 100$, $y = \frac{200}{\pi}$

Ploščina pravokotnika je 6370 m^2.

NALOGE

693. Število 100 zapišite kot vsoto dveh pozitivnih števil tako, da bo njun produkt največji.

694. Število 18 zapišite kot vsoto dveh pozitivnih števil tako, da bo vsota njunih kvadratov najmanjša.

695. Med vsemi pravokotniki z obsegom o poiščite dolžine stranic tistega, ki ima največjo ploščino.

696. Med vsemi krožnimi izseki z obsegom o poiščite polmer tistega, ki ima največjo ploščino. Kolikšna je njegova ploščina?

697. Kartonska škatla brez pokrova ima prostornino 288 dm^3, razmerje stranic osnovne ploskve pa je $2 : 1$. Kolikšne so mere škatle, če je njena površina maksimalna?

698. Iz 8 dm dolge žice naredimo model pravilne štiristrane prizme z osnovnim robom a in višino v. Izračunajte dolžino roba a in višino v tako, da bo:
a) prostornina prizme največja,
b) površina prizme največja.

699. V kolikšnem razmerju sta polmer r in višina v pokončnega krožnega valja, pri katerem je pri dani prostornini V njegova površina najmanjša?

700. V trikotnik z osnovnico o in višino v včrtamo pravokotnik z največjo ploščino. Kolikšne so mere pravokotnika?

701. V pravokotni trikotnik s hipotenuzo $c = 8$ cm in kotom $30°$ je včrtan pravokotnik z največjo možno ploščino. Kolikšne so mere pravokotnika, če stranici pravokotnika ležita na katetah trikotnika?

702. Zapišite enačbo tiste premice, ki gre skozi točko $(4, 1)$ in ima negativni smerni koeficient in za katero je vsota odsekov, ki jih odreže od koordinatnih osi, minimalna.

703. Katera točka na paraboli z enačbo $y = x^2 - 3x + 3$ je najbližja koordinatnemu izhodišču?

704. Katera točka na hiperboli z enačbo $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ je najbližja krožnici z enačbo $x^2 + (y - 2)^2 = 4$?

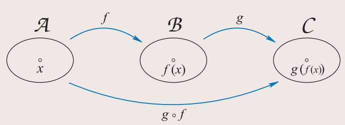
705. Izračunajte globalni minimum funkcije $f(x) = \cos 2x + 2x \sin 2x$ na intervalu $[0, \pi]$.

Odvodi drugih elementarnih funkcij

Kompozitum funkcije

$f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $\quad g\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$

$f\colon x \mapsto f(x)$ $\quad g\colon f(x) \mapsto g(f(x))$



Kompozitum funkcij f in g je funkcija $g \circ f$, ki elementom x iz množice $\mathcal{A}$ priredi slike $g(f(x))$ v množici $\mathcal{C}$:

$$g \circ f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$$
$$g \circ f\colon x \mapsto g(f(x))$$

Funkcijo $h(x) = (3x^2 + 7)^4$ bi lahko z binomskim izrekom zapisali kot polinomsko funkcijo

$h(x) = 81x^8 + 756\,x^6 + 2646x^4 + {}$
$\qquad + 4116x^2 + 2401$

in jo odvajali kot polinom.

Odvod sestavljene funkcije

Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x, funkcija g pa odvedljiva v točki $f(x)$. Potem je v točki x odvedljiva tudi sestavljena funkcija $g \circ f$ in velja:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

Dokaz:

Označimo s k razliko $g(x+h) - g(x)$. Če gre h proti nič, gre tudi k proti nič.

Ker je $g(x+h) - g(x) = k$, je $g(x+h) = g(x) + k$. To zvezo bomo uporabili v izpeljavi odvoda sestavljene funkcije:

$$[g(f(x))]' = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{h} \cdot \frac{k}{k} = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{h} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{k} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(f(x))\, f'(x)$$

ZGLEDA

1. Odvajajmo funkcijo $h(x) = (3x^2 + 7)^4$.

Funkcija h je sestavljena funkcija $h = g \circ f$:

$$x \xrightarrow{\;f\;} y = 3x^2 + 7 \xrightarrow{\;g\;} y^4$$

$(y^4)' = 4y^3$

$(3x^2 + 7)' = 6x$

2. Izračunajmo odvod funkcije $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+2}{2x+1}}$.

Funkcija h je sestavljena funkcija: $h(x) = u(v(x))$; $u(v) = \sqrt{v}$, $v(x) = \dfrac{x^3+2}{2x+1}$.

$$h'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \frac{(x^3+2)'(2x+1) - (x^3+2)(2x+1)'}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3+2}{2x+1}}} \cdot \frac{3x^2(2x+1) - (x^3+2)2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+1}{x^3+2}} \cdot \frac{5x^3 + 3x^2 - 4}{(2x+1)^2}$$

Odvod inverzne funkcije

Bijektivna funkcija f ima inverzno funkcijo f^{-1}, tako da velja: $f(f^{-1}(x)) = x$.

Denimo, da je funkcija f odvedljiva funkcija. Potem je odvedljiva tudi inverzna funkcija f^{-1}. Poiščimo njen odvod.

Izpeljavo odvoda inverzne funkcije začnimo z enačbo:

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Odvajajmo levo stran po pravilu za odvod sestavljene funkcije in odvajajmo tudi desno stran enačbe:

$$[f(f^{-1}(x))]' = x'$$
$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$$

Izrazimo odvod inverzne funkcije $(f^{-1}(x))'$:

$$\boldsymbol{(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}; \quad f'(f^{-1}(x)) \neq 0}$$

To formulo bomo najprej uporabili pri izpeljavi odvoda korenske funkcije, pozneje pa še pri iskanju odvodov krožnih funkcij.

ZGLED

Čeprav smo odvod korenske funkcije izračunali že po definiciji (str. 212), ga izpeljimo še po pravilu za inverzno funkcijo.

Odvajajmo korensko funkcijo $g(x) = \sqrt{x}$.

Funkcija g je inverzna funkcija kvadratne funkcije $f(x) = x^2$ za $x \geq 0$.

Ponovimo postopek, ki smo ga uporabili pri izpeljavi odvoda inverzne funkcije:

$(\sqrt{x})^2 = x$

Odvajajmo levo in desno stran:

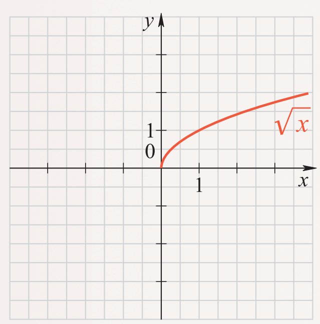
$2(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = 1$

Izrazimo odvod korenske funkcije:

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Zapišimo še drugače:

$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$



V zgledu smo odvajali kvadratni koren. Enako lahko izpeljemo odvod poljubne korenske funkcije $g(x) = \sqrt[n]{x}$, ki je inverzna funkcija potenčne funkcije $f(x) = x^n$.

$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$

Odvajajmo levo in desno stran enačbe:

$$n(\sqrt[n]{x})^{n-1}(\sqrt[n]{x})' = 1$$

Izrazimo odvod korenske funkcije:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

Zapišimo pravilo še drugače:

$$\left(\boldsymbol{x^{\frac{1}{n}}}\right)' = \boldsymbol{\frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}}$$

In poglejmo še odvod funkcije $g(x) = \sqrt[n]{x}^{\,m}$. To je pravzaprav potenčna funkcija z racionalnim eksponentom: $g(x) = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$.

Funkcijo $g(x) = (\sqrt[n]{x})^m$ odvajajmo po pravilu za odvod sestavljene funkcije:

$$g'(x) = m(\sqrt[n]{x})^{m-1}(\sqrt[n]{x})' = m(\sqrt[n]{x})^{m-1}\cdot\frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{m}{n}\cdot\frac{(\sqrt[n]{x})^{m-1}}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{m}{n}\cdot\frac{x^{\frac{m-1}{n}}}{x^{\frac{n-1}{n}}} =$$

$$= \frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m-1}{n}} : x^{\frac{n-1}{n}} = \frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m-1-n+1}{n}} = \frac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Če dobro pogledamo, smo za odvod potenc z racionalnim eksponentom dobili nam že znano formulo za odvod potenc z naravnim eksponentom:

$$\boldsymbol{g(x) = x^q}$$

$$\boldsymbol{g'(x) = qx^{q-1};\ q \in \mathbb{Q}}$$

Brez dokaza povejmo, da isto pravilo velja tudi pri odvajanju potence s poljubnim realnim eksponentom.

$$g(x) = x^r;\ r \in \mathbb{R};\ g'(x) = rx^{r-1};\ r \in \mathbb{R}$$

ZGLEDI

1. Odvajajmo $g(x) = \sqrt[3]{x^7}$.

$$g(x) = \sqrt[3]{x^7} = x^{\frac{7}{3}}$$

$$g'(x) = \frac{7}{3}\, x^{\frac{7}{3}-1} = \frac{7}{3}\, x^{\frac{4}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$$

2. Odvajajmo $f(x) = \sqrt{1-x^5}$.

Funkcija $f(x) = \sqrt{1-x^5} = (1-x^5)^{\frac{1}{2}}$ je sestavljena funkcija.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^5)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-5x^4) = \frac{-5x^4}{2\sqrt{1-x^5}}$$

3. Odvajajmo še funkcijo $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \sqrt{\frac{1}{(x-1)(x+1)^3}}$$

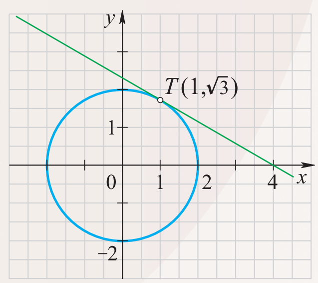
Implicitni odvod

Implicitno odvajanje je poseben primer posrednega odvajanja, pri katerem za novo funkcijo izberemo kar y.

ZGLEDI

1. Recimo, da bi radi izračunali enačbo tangente na krožnico $x^2+y^2=4$ v točki $T(1, \sqrt{3})$. Najprej bi morali enačbo pretvoriti v eksplicitno obliko, $y=\pm\sqrt{4-x^2}$, in izbrati vejo s pozitivnim znakom. Nadaljevali bi z odvajanjem sestavljene korenske funkcije. Vendar ne bomo šli po tej poti, temveč bomo obravnavali y^2 kot sestavljeno funkcijo $(y(x))^2$ in odvajali enačbo $x^2+y^2=4$.

Ker je odvod vsote vsota odvodov, dobimo $2x+2y\cdot y'=0$ in naprej $y'=-\frac{x}{y}$. Implicitni odvod je odvisen od obeh spremenljivk (neodvisne in odvisne) in za izračun smernega koeficienta potrebujemo absciso in ordinato točke, v kateri se tangenta dotika krivulje: $k_t=y'(T)=\sqrt{3}$. Zdaj že lahko zapišemo enačbo tangente:



$$y-\sqrt{3}=-\sqrt{3}(x-1) \text{ oz } y=-\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}$$

Če želimo odvod v dani točki, potrebujemo v tem primeru obe koordinati točke, medtem ko je pri odvodu eksplicitno podane funkcije dovolj le abscisa točke.

2. Odvajajmo še implicitno podano funkcijo, ki se skriva v zapisu $y^3+y-x^2+4x+xy=0$ in katere graf lahko narišemo le z uporabo tehnologije.

Odvodi posameznih členov so:

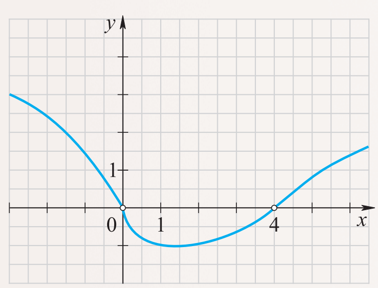
$(y^3)'=3y^2y'$

$y'=y'$

$(x^2)'=2x$

$(4x)'=4$

$(xy)'=1\cdot y+xy'$



Zato:

$3y^2y'+y'-2x+4+y+xy'=0$

Izrazimo y':

$y'(3y^2+1+x)=2x-4-y$

$$y'=\frac{2x-4-y}{3y^2+1+x}$$

3. Pod kolikšnim kotom se sekata parabola $y^2 = \frac{3}{2}x$ in elipsa $x^2 + 4y^2 = 16$? Kot izračunaj na stotinko stopinje natančno.

Najprej izračunajmo presečišči parabole in elipse:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= \tfrac{3}{2}x \\ x^2 + 4y^2 &= 16 \end{aligned}\right\} \text{ rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama}$$

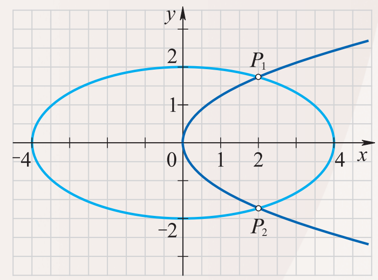
$$x^2 + 4\left(\tfrac{3}{2}x\right) = 16$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$(x+8)(x-2) = 0$$

$$x_1 = -8$$

$$x_2 = 2$$



Prava rešitev je le $x = 2$.

$$y^2 = \tfrac{3}{2}x = \tfrac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

$$y = \pm\sqrt{3}$$

Parabola in elipsa se sekata v dveh točkah:
$P_1(2, \sqrt{3})$ in $P_2(2, -\sqrt{3})$.

Kota med krivuljama sta zaradi simetričnosti v obeh presečiščih enaka, zato izračunajmo le kot v točki $P_1(2, \sqrt{3})$.

Odvajajmo enačbo parabole:

$$2yy' = \tfrac{3}{2}$$

$$y' = \frac{3}{4y}$$

Odvod v točki $P_1(2, \sqrt{3})$ je enak smernemu koeficientu tangente na parabolo v presečišču:

$$y' = k_{t_{parabola}} = \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Odvajajmo enačbo elipse:

$$2x + 8yy' = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y}$$

Odvod v točki $P_1(2, \sqrt{3})$ je enak smernemu koeficientu tangente na elipso v presečišču:

$$y' = k_{t_{elipsa}} = -\frac{2}{4\sqrt{3}} = -2\frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{-\sqrt{3}}{6}$$

Kot med krivuljama je kot med tangentama v presečišču krivulj, zato:

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_p - k_e}{1 + k_p k_e}\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}}{1 - \frac{3}{24}}\right| = \left|\frac{\frac{5\sqrt{3}}{12}}{\frac{7}{8}}\right| = \frac{10\sqrt{3}}{21}$$

$$\varphi \doteq 39.52^\circ$$

V zadnjih zgledih smo spoznali smerne koeficiente tangent na krožnico, elipso in hiperbolo. Zdaj poglejmo še, kako se zelo preprosto zapiše tangenta na stožnico v središčni legi.

Krožnica $x^2+y^2=r^2$; $k_t=-\frac{x_0}{y_0}$

$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$; $yy_0-y_0^2=-x_0x+x_0^2$

Tangenta na krožnico v točki $T(x_0, y_0)$ je $\boldsymbol{xx_0+yy_0=r^2}$, ker je $x_0^2+y_0^2=r^2$.

Elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $k_t=f'(T)=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$

$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$; $b^2x_0x+a^2y_0y=b^2x_0^2+a^2y_0^2$; delimo z a^2b^2.

Tangenta na elipso v točki $T(x_0, y_0)$ je $\boldsymbol{\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1}$, ker je $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$.

Hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Tangento na hiperbolo v točki $T(x_0, y_0)$ dobimo podobno kot pri elipsi: $\boldsymbol{\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1}$.

Parabola $y^2=2px$

$2yy'=2p$; $y'=\frac{p}{y}$; $k_t=\frac{p}{y_0}$

$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0)$; $yy_0-y_0^2=px-px_0$

Tangenta na parabolo v točki $T(x_0, y_0)$ je $\boldsymbol{yy_0=p(x+x_0)}$, ker je $y_0^2=2px_0$.

NALOGE

706. Izračunajte odvode funkcij.

a) $f(x)=(1+2x^2)^4$
b) $f(x)=(x+\frac{1}{x})^4$
c) $f(x)=(3x-5x^3)^5$
č) $f(x)=(3-2x^2)^{-3}$
d) $f(x)=(6x^2-\frac{3}{x}+2)^5$
e) $f(x)=(kx+n)^4$
f) $f(x)=2x^3(2-x^{-2})^3$
g) $f(x)=(3x^4-2)(2x+x^3)^2$
h) $f(x)=\frac{x+2}{(1-x)^3}$

707. Dana je funkcija $f(x)=(2ax+1)^2$. Za katero realno število a bo $f'(4)=6$?

708. Izračunajte odvode funkcij.

a) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x^2}$
b) $f(x)=x^2\sqrt{x}$
c) $f(x)=(x+\sqrt{x})^2$
č) $f(x)=(\frac{2}{3x})^{-1}\sqrt[3]{x^5}$
d) $f(x)=\frac{(2x)^3\sqrt[4]{x^3}}{(\frac{3}{2})^{-1}\sqrt[3]{x}}$
e) $f(x)=\frac{x^3+\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

709. Zapišite enačbo tangente na graf funkcije $f(x)=2\sqrt{x}+2$ v točki $T_0(4, y_0)$.

710. Zapišite enačbi tangente in normale na krivuljo z enačbo $y=3\sqrt[3]{x}$ v točki $T_0(x_0, -3)$.

711. Narišite krivuljo, podano z enačbo $y=\sqrt[3]{x}+2$, in izračunajte, v katerih točkah in pod katerima kotoma seka koordinatni osi.

712. Izračunajte odvode funkcij.

a) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

b) $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt[3]{6x-1}$

c) $f(x)=\sqrt{(x-2)(2x+3)}$

č) $f(x)=x\sqrt{1-2x}$

d) $f(x)=3x^2\sqrt[3]{8-x}$

e) $f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}}{1-2x}$

f) $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}}$

g) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}}$

h) $f(x)=\sqrt[n]{nx+m}$

713. Zapišite enačbo normale na krivuljo z enačbo $y=\sqrt[3]{1-x}$ v točki $T_0(9, y_0)$.

714. Dani sta funkciji f: $[-1, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x)=\sqrt{x+1}$ in g: $[-1, \infty) \to \mathbb{R}$; $g(x)=\sqrt[3]{x+1}$.

a) Izračunajte presečišči grafov funkcij.

b) Grafa funkcij narišite v istem koordinatnem sistemu.

c) Koliko meri kot med grafoma funkcij v presečišču?

715. V kateri točki bo imela tangenta na graf funkcije $f(x)=\sqrt{x^2+2x-5}$ naklonski kot $60°$?

716. V kateri točki in pod kakšnim kotom bo graf funkcije $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ sekal premico $y=\frac{1}{2}$?

717. Za katero realno število a bo za funkcijo $f(x)=\frac{9a}{\sqrt[3]{1-x}}$ veljalo $f'(9)=\frac{1}{2}$?

718. Zapišite intervale naraščanja in padanja funkcij.

a) $f(x)=4x\sqrt{x}$

b) $f(x)=(2x)^2\sqrt{1+x}$

719. Izračunajte odvode funkcij in zapišite abscise lokalnih ekstremov.

a) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{8}{x^2}$

b) $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

720. Dana je funkcija $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$.

a) Zapišite definicijsko območje funkcije f.

b) Izračunajte ničle funkcije f.

c) Izračunajte njen odvod in koordinati ekstremov.

č) Narišite njen graf.

721. Dana je funkcija $f(x)=x+\sqrt{1-x}$.

a) Zapišite definicijsko območje funkcije f.

b) Izračunajte ničlo funkcije f in presečišče grafa z ordinatno osjo.

c) Izračunajte njen odvod in koordinati ekstrema.

č) Zapišite intervale, na katerih funkcija narašča, in intervale, na katerih funkcija pada.

d) Narišite njen graf.

722. Za funkcijo $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$ zapišite definicijsko območje, ničle in presečišče grafa z ordinatno osjo. Izračunajte limiti $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ in $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ in odvod ter zapišite koordinati ekstrema. Narišite njen graf.

723. Izračunajte odvode funkcij.

a) $x^2+y^2=5$

b) $y^2=x^2+2x+3$

c) $(x+1)^2-3y^2-9=0$

č) $x+xy+y+1=0$

d) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$

e) $x^3y-x^2-9xy+2x+8=0$

724. Dani sta funkciji $f(x)=g(x^2+7)$ in $g(x)=x^{\frac{2}{3}}$. Izračunajte $f'(1)$.

725. Izračunajte $f'(1)$ za $f(x)=e^{\sin\pi x}$.

726. Izračunajte $g'(1)$ za $g(x)=\frac{\cos\pi x}{x+\ln x}$.

727. Pokažite, da je $f(x)=x^3+4x-2$ injektivna, in izračunajte $(f^{-1})'(-2)$.

728. Poiščite intervale, na katerih je funkcija $g(x)$ naraščajoča oz. padajoča, in zapišite definicijsko območje funkcije $g(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+1}$.

729. V kateri točki ima krivulja $y=\sqrt{4x-3}-1$ tangento s smernim koeficientom $k=\frac{2}{3}$?

730. V točki $T(1, 1)$ zapišite smerni koeficient tangente na krivuljo $x^2(2-y)=y^3$.

731. Enačba $x^2+y^2+6x-8y=0$ določa krožnico.
a) Zapišite koordinati središča krožnice in njen polmer.
b) Zapišite presečišča krožnice s koordinatnima osema.
c) Narišite krožnico.
č) Pod katerim kotom seka krožnica abscisno os v koordinatnem izhodišču?

732. Krivulji sta podani z enačbama $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ in $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.
a) Kateri krivulji predstavljata dani enačbi? Narišite ju v istem koordinatnem sistemu.
b) Izračunajte presečišča med krivuljama.
c) Izračunajte kot, pod katerim se sekata krivulji v drugem kvadrantu.

733. Parabola je podana z enačbo $y^2+2y-4x-7=0$.
a) Zapišite koordinati temena parabole in enačbo simetrale.
b) Zapišite presečišča parabole s koordinatnima osema.
c) Narišite parabolo.
č) Pod katerim kotom seka parabola abscisno os?

734. Z enačbo $4x^2+9y^2-24x+18y+9=0$ je podana krivulja drugega reda.
a) Katero krivuljo predstavlja dana enačba? Zapišite koordinati središča in temen.
b) Zapišite enačbo tangente na krivuljo v desnem temenu.

735. a) Katero krivuljo predstavlja enačba $x^2-y^2+4x+4y-4=0$?
b) Zapišite koordinate njunih temen in enačbi asimptot.
c) Krivuljo narišite.
č) Pod katerim kotom seka krivulja abscisno os?

736. Napišite enačbo tangente na krivuljo v dani točki:
a) $x^2+3y^2=4,\ T(1, y),\ y<0$
b) $x^2-3y^2=-15,\ T(x, \sqrt{8}),\ x>0$
c) $x^2+y^2=25,\ T(x, -3),\ x<0$
č) $y^2=8x,\ T(2, y),\ y>0$

Odvodi kotnih funkcij

Prvo pravilo bomo izpeljali z odvajanjem po definiciji, naslednja pa z lastnostmi kotnih funkcij in odvoda.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = (\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

Razlika sinusov:
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Spomnimo se tudi:
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Uporabimo formulo za razliko sinusov:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(\frac{2x+h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(\frac{2x+h}{2})\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \cos x\cdot 1 = \cos x$$

Izpeljali smo:

$$\mathbf{(\sin x)' = \cos x}$$

Podobno bi lahko po definiciji izpeljali tudi odvod funkcije $f(x) = \cos x$. Manj dela bomo imeli, če uporabimo zvezo $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ in namesto $\cos x$ odvajamo sestavljeno funkcijo $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

$$(\cos x)' = (\sin(\tfrac{\pi}{2} - x))' = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x)\cdot(\tfrac{\pi}{2} - x)' = \sin x\cdot(-1) = -\sin x$$

Velja torej:

$$\mathbf{(\cos x)' = -\sin x}$$

Pri izpeljavi odvoda funkcije $f(x) = \tan x$ upoštevajmo zvezo $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ in odvajajmo kvocient $\frac{\sin x}{\cos x}$:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\mathbf{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

In še odvod funkcije $f(x) = \cot x = \tan^{-1} x$:

$$(\tan^{-1} x)' = -\tan^{-2} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\mathbf{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

ZGLEDA

1. Izračunajmo odvode funkcij f, q, g.

- $f(x) = \sin(5x)$
  $f'(x) = \cos(5x) \cdot (5x)' = \cos(5x) \cdot 5 = 5\cos(5x)$
- $q(x) = \cos^7 x$
  $q'(x) = 7\cos^6 x \cdot (\cos x)' = 7\cos^6 x \cdot (-\sin x) = -7\cos^6 x \sin x$
- $g(x) = 4\sin x - 3\cos^5 x + \tan(5x)$
  $g'(x) = 4\cos x - 15\cos^4 x \cdot (-\sin x) + \dfrac{1}{\cos^2(5x)} \cdot 5 =$
  $= 4\cos x + 15\cos^4 x \sin x + \dfrac{5}{\cos^2(5x)}$

2. Zapišimo enačbo tangente na sinusoido $y = 2\sin 3(x - \frac{\pi}{6})$ v najmanjši pozitivni ničli.

Ničle dobimo s pogojem $3(x - \frac{\pi}{6}) = k\pi$ in najmanjša pozitivna ničla je $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Z odvajanjem pridemo do smernega koeficienta tangente.

$y' = 2\cos 3(x - \frac{\pi}{6}) \cdot 3$; $k_t = y'(\frac{\pi}{6}) = 6\cos 3(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = 6$

Tangenta v izbrani točki je $y = 6(x - \frac{\pi}{6}) = 6x - \pi$.

Odvodi krožnih funkcij

Krožne funkcije so inverzne funkcije trigonometričnih funkcij:

$f(x) = \sin x$	$f^{-1}(x) = \arcsin x$
$f(x) = \cos x$	$f^{-1}(x) = \arccos x$
$f(x) = \tan x$	$f^{-1}(x) = \arctan x$
$f(x) = \cot x$	$f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$

Če upoštevamo formulo, ki smo jo že izpeljali za odvod inverzne funkcije:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

dobimo:

$$\mathbf{(\arcsin x)'} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \mathbf{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\mathbf{(\arccos x)'} = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\mathbf{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\mathbf{(\arctan x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \mathbf{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\mathbf{(\operatorname{arccotan} x)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arccot} x)}} = -\sin^2(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+\cot^2(\operatorname{arccot} x)} = -\mathbf{\frac{1}{1+x^2}}$$

ZGLEDI

1. Izračunajmo odvod funkcije $g(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ v točki $T(-\frac{\sqrt{3}}{2}, y)$.

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}(\sqrt{1-x^2})'=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)=$$

$$=\frac{(-x)}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'(-\tfrac{\sqrt{3}}{2})=-2$$

2. Odvajajmo funkcijo $f(x)=x^2\arctan(3x)$.

$$f'(x)=2x\arctan(3x)+x^2\frac{1}{1+(3x)^2}\cdot 3=2x\arctan(3x)+\frac{3x^2}{1+9x^2}$$

3. Izračunajmo še odvod funkcije $h(x)=\arccos(1-x^2)$.

$$h'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}\cdot(-2x)=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}=\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}$$

NALOGE

737. Izračunajte odvode funkcij.
a) $f(x)=3\sin x+2\cos x-1$
b) $f(x)=\cot x-\tan x$
c) $f(x)=\sin x\cdot\cos x$
č) $f(x)=\cos^2 x$
d) $f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\sin x}$
e) $f(x)=\frac{\sin x}{1-\tan x}$
f) $f(x)=\tan^{-1}x$
g) $f(x)=\frac{\tan x+1}{\cot x}$

738. Za funkcijo $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$ izračunajte $f'(\frac{\pi}{3})$.

739. Zapišite enačbo tangente na graf funkcije $f(x)=\tan x$ v točki $T_0(\frac{\pi}{3}, y_0)$.

740. Zapišite enačbo tangente in normale na graf funkcije $f(x)=\cos x$ v točki $T_0(\frac{\pi}{3}, y_0)$.

741. Na minuto natančno zapišite ostri kot, pri katerem ima tangenta na graf funkcije $f(x)=\sin x$ naklonski kot $20°$.

742. Izračunajte odvode funkcij.
a) $f(x)=\sin 3x-3x+3$
b) $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+1$
c) $f(x)=\cos^3 x$
č) $f(x)=\sin 3x\cos^2 x$
d) $f(x)=\frac{\sin 2x-\cos x}{\sin x}$
e) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$
f) $f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin x}$
g) $f(x)=\tan 3x$
h) $f(x)=\cot^2 x$
i) $f(x)=\tan\sqrt{x}$
j) $f(x)=\sqrt{\tan 2x}$

743. Za funkcijo $f(x)=\sin^2 x(1+\cos^2 x)$ izračunajte $f'(\frac{5\pi}{6})$.

744. Zapišite dotikališča in smerne koeficiente tangent na graf funkcije $f(x)=\frac{1}{\sin 2x}$ v točkah $T(\frac{\pi}{8}+k\pi, y_0)$; $k\in\mathbb{Z}$.

745. Izračunajte odvod funkcije $f(x)=\tan^4 x$ in zapišite enačbo tangente na njen graf v točki $T_0(-\frac{\pi}{4}, y_0)$.

746. Izračunajte abscise točk, v katerih ima krivulja $y = \cos 3x - 2x$ tangente s smernim koeficientom 1.

747. Dana je funkcija $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{2})$. Za katere x je $f'(x) = \sqrt{2}$?

748. Izračunajte odvod funkcije $f(x) = \sin 2x(1 - \tan x)$ in izračunajte abscise točk, v katerih so tangente na njen graf vzporedne abscisni osi.

749. Narišite graf funkcije $f(x) = \cos x + 1$ in premico $y = \frac{3}{2}$. Zapišite presečišča in kot med grafoma funkcij.

750. Zapišite intervale naraščanja in padanja funkcij.
a) $f(x) = \cos^2 x$
b) $f(x) = \cos x + \sin x$

751. Pokažite, da je funkcija $f(x) = \frac{4\sin x}{\cos x + 2}$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ naraščajoča.

752. Izračunajte odvode funkcij in zapišite abscise lokalnih ekstremov.
a) $f(x) = \sin 2x - x$
b) $f(x) = \sin x + \frac{x}{2}$
c) $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\cos x - \sin x}$
č) $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sin x - \cos x}$

753. Za dane funkcije zapišite definicijsko območje, ničle, presečišče z ordinatno osjo in ekstreme ter narišite njune grafe.
a) $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$
b) $f(x) = \sin^2 x$
c) $f(x) = x + 1 - 2\cos(x + \frac{\pi}{3})$

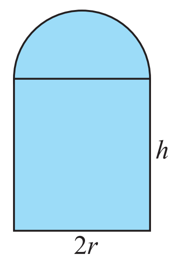
754. Izračunajte odvode funkcij.
a) $f(x) = \arcsin 2x$
b) $f(x) = \arctan 3x$
c) $f(x) = \arcsin(4x - 1)$
č) $f(x) = \arctan(1 - x)$
d) $f(x) = \arcsin(3\sin x)$
e) $f(x) = \arctan(\frac{1-x}{1+x})$
f) $f(x) = (x^2 + 1)\arctan(\frac{1}{x})$
g) $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}\arcsin 2x$
h) $f(x) = \arccos(-x)$
i) $f(x) = \operatorname{arccot}\sqrt{x}$
j) $f(x) = \arccos(3 - x)$

755. V polkrog s polmerom R včrtamo trapez z največjo ploščino tako, da leži daljša osnovnica trapeza na premeru polkroga. Kolikšen je kot med krakom in osnovnico trapeza?

756. Okoli polkrogle s polmerom R očrtajte stožec z najmanjšo prostornino, katerega osnovnica vsebuje glavni krog polkrogle.

757. Iz kroga izrežemo središčni izsek s središčnim kotom α in ga zvijemo v stožec. Pri katerem kotu α bo prostornina stožca največja?

758. Izračunajte mere polkrožnega okna, katerega zunanji obseg meri 4 m, da bo prepuščalo največ svetlobe.



Odvod logaritemske in eksponentne funkcije

Razlika logaritmov je enaka logaritmu kvocienta:

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

Logaritem potence je enak produktu eksponenta in logaritma osnove:

$\log_a x^r = r \log_a x$

Funkcijo $f(x) = \log_a x$ odvajamo po definiciji:

$$f'(x) = (\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{h} =$$

Uvedemo novo spremenljivko: $m = \frac{x}{h}$.

Ko gre h proti nič, gre vrednost m v neskončnost.

Nadaljujemo:

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{\log_a(1+\frac{1}{m})}{\frac{x}{m}} = \lim_{m \to \infty} \frac{m \log_a(1+\frac{1}{m})}{x} = \lim_{m \to \infty} \frac{\log_a(1+\frac{1}{m})^m}{x} =$$

Naravni logaritem je logaritem z osnovo e:

$\log_e x = \ln x$ in $\ln e = 1$

Ker je limita logaritma enaka logaritmu limite, sledi:

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a(\lim_{m \to \infty} (1+\frac{1}{m})^m) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Spomnimo se formule za prehod na novo osnovo:

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$, saj je $\ln e = 1$.

Zato je odvod logaritemske funkcije s poljubno osnovo a enak:

$$\boldsymbol{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}},$$

odvod naravnega logaritma pa:

$$\boldsymbol{(\ln x)' = \frac{1}{x}}.$$

Eksponentna funkcija pa je inverzna funkcija logaritemske funkcije.

Če je $f(x) = \ln x$, je $f^{-1}(x) = e^x$. Če je $f(x) = \log_a x$, je $f^{-1}(x) = a^x$.

Če naredimo kompozitum funkcij f in f^{-1}, dobimo identično preslikavo:

$\ln(e^x) = x$ $\log_a(a^x) = x$

Leva stran obeh enačb je sestavljena funkcija. Odvajajmo in izrazimo odvoda eksponentnih funkcij:

$[\ln(e^x)]' = [x]'$	$[\log_a(a^x)]' = [x]'$
$\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1$	$\frac{1}{a^x \ln a}(a^x)' = 1$
$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$	$\boldsymbol{(a^x)' = a^x \ln a}$

ZGLEDA

1. Izračunajmo odvode sestavljenih funkcij:

$g(x) = e^{2x}$
$g'(x) = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x}$

$h(x) = e^{kx}$
$h'(x) = e^{kx}(kx)' = ke^{kx}$

$k(x) = \ln(2x+1)$
$k'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot (2x+1)' = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1}$

$r(x) = \ln(x^3)$
$r'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)' = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

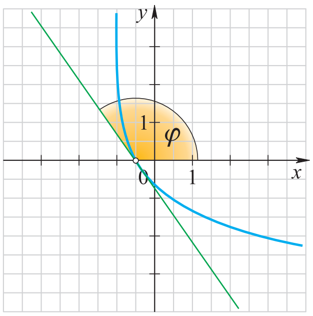
$r(x) = \ln(x^3) = 3\ln x$
$r'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

$s(x) = \ln^3 x$
$s'(x) = 3\ln^2 x \cdot (\ln x)' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\ln^2 x}{x}$

2. Pod kolikšnim kotom seka krivulja $y = -\ln(2x+2)$ koordinatni osi?

Presečišče z abscisno osjo:
$y = 0$
$-\ln(2x+2) = 0$
$2x+2 = 1$
$x = -\frac{1}{2}$
točka $P_a(-\frac{1}{2}, 0)$

Presečišče z ordinatno osjo:
$x = 0$
$y = -\ln 2$
$y \doteq -0{,}69$
točka $P_o(0, -\ln 2)$



Odvajajmo $y = -\ln(2x+2)$:

$y' = -\frac{1}{2x+2} \cdot 2 = -\frac{1}{x+1}$

Odvod v točki $P_a(-\frac{1}{2}, 0)$ je enak: $y' = -\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} = -2$

Odvod je enak smernemu koeficientu tangente v tej točki, smerni koeficient tangente pa tangensu naklonskega kota:

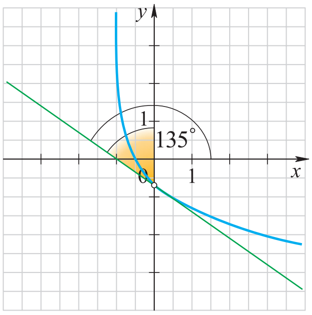
$\tan\varphi = k_t = y' = -2$

$\varphi = \arctan(-2) \doteq 116{,}57°$

Odvod v točki $P_o(0, -\ln 2)$ je enak: $y' = -1$.

Tangenta v tej točki oklepa z abscisno osjo kot $135°$,

z ordinatno osjo pa temu kotu komplementarni kot $\varphi_2 = 45°$.



NALOGE

759. Izračunajte odvode funkcij.

a) $f(x)=\mathrm{e}^{4x}$

b) $f(x)=3x\ln x$

c) $f(x)=\frac{x+1}{\ln x}$

č) $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$

d) $f(x)=\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$

e) $f(x)=2+2\cdot 3^x$

f) $f(x)=3-3\ln x+\frac{1}{x}+e^{x^2}-x\sqrt{x}-2^x$

760. Kolikšen je naklonski kot tangente na graf funkcije $f(x)=3\cdot 2^x+2$ v presečišču z ordinatno osjo?

761. V kateri točki in pod kolikšnim kotom seka graf funkcije $f(x)=2\ln x$ abscisno os?

762. Narišite graf funkcije $f(x)=4^x-4$ in izračunajte kot, pod katerim seka graf funkcije koordinatni osi.

763. Pod kolikšnim kotom seka graf funkcije $f(x)=x\cdot 10^x$ abscisno os?

764. Zapišite enačbo tangente na graf funkcije $f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$ v točki $T_0(-1, y_0)$.

765. Za funkcijo $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$ izračunajte $f'(e^2)$.

766. Zapišite enačbo normale na graf funkcije $f(x)=\frac{\cos x}{e^{2x}}$ v točki $T_0(x_0, 0)$; $x_0\in[0,\pi]$.

767. Izračunajte odvode funkcij.

a) $f(x)=\ln 2x$

b) $f(x)=\ln(1-2x)$

c) $f(x)=x^3e^{x^2}$

č) $f(x)=\ln(1-\frac{1}{x})$

d) $f(x)=10^{2x+1}$

e) $f(x)=\sqrt{\ln x}$

f) $f(x)=(2-x^2)\ln 2x$

g) $f(x)=\ln\cot x$

h) $f(x)=\sin^2 x\cdot e^{-2x}$

i) $f(x)=a^{-kx}$

768. Za funkcijo $f(x)=e^{\sqrt{x-1}}$ izračunajte $f'(\frac{10}{9})$.

769. Pod kolikšnim kotom seka graf funkcije $f(x)=\ln(x+2)$ abscisno os?

770. V kateri točki ima tangenta na graf funkcije $f(x)=\ln\sqrt{x^2+2x-3}$ smerni koeficient $k=\frac{3}{5}$?

771. Zapišite vse tri oblike enačbe normale na graf funkcije $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+5})$ v točki $T_0(-2, y_0)$.

772. Za dane funkcije zapišite definicijsko območje in intervale, na katerih naraščajo oz. padajo.

a) $f(x)=xe^{-3x}$

b) $f(x)=x^2\ln x$

773. Pokažite, da je funkcija $h(x)=\ln\sin x$ naraščajoča na intervalu $(0,\frac{\pi}{2})$ in padajoča na intervalu $(\frac{\pi}{2},\pi)$.

774. Ugotovite definicijsko območje funkcije in pokažite, da je funkcija na njem strogo naraščajoča.

a) $g(x)=\mathrm{e}^{3x}$

b) $u(x)=3x+\sin 2x$

775. Izračunajte odvode funkcij in zapišite abscise lokalnih ekstremov.

a) $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$

b) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

c) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

776. Za dane funkcije zapišite definicijsko območje, ničle, presečišče z ordinatno osjo, pole, asimptote in ekstreme ter narišite njihove grafe.

a) $f(x)=(ex)^2e^{-x}$

b) $f(x)=(\ln x)^2$

c) $f(x)=2x(\ln x)^2$

777. Dana je funkcija $f(x)=\frac{x^2}{e\ln x}$.

a) Zapišite definicijsko območje in pol funkcije. Ali ima funkcija f ničlo?

b) Izračunajte prvi odvod funkcije f in zapišite koordinati ekstrema.

c) Zapišite intervale naraščanja in intervale padanja funkcije f.

č) Narišite graf.

Višji odvodi (izbirna vsebina)

Če odvajamo funkcijo odvod in je ta spet odvedljiva, dobimo drugi odvod. Če je drugi odvod odvedljiv, ga lahko odvajamo in dobimo tretji odvod. Seveda lahko s tem početjem nadaljujemo, če so za to izpolnjeni pogoji – vsak odvod mora biti spet odvedljiv.

$(f')' \equiv f''$

$(f'')' \equiv f'''$

$(f''')' \equiv f''''$

$\vdots$

Nekaterim funkcijam lahko zelo preprosto izračunamo odvod poljubne stopnje, pri čemer ***n*-ti odvod funkcije *f*** $(n \geq 5)$ označimo s simbolom $\boldsymbol{f^{(n)}}$.

Poglejmo nekaj primerov višjih odvodov, zapisanih z rekurzivnimi formulami.

ZGLEDI

1. Izračunajmo sedmi odvod polinoma $p(x) = x^7 - 3x^5 + 10x^4 + 4x^2 - 10$.

$p'(x) = 7x^6 - 15x^4 + 40x^3 + 8x$
$p''(x) = 7 \cdot 6x^5 - 60x^3 + 120x^2 + 8$
$p'''(x) = 7 \cdot 6 \cdot 5x^4 - 15 \cdot 4 \cdot 3x^2 + 40 \cdot 3 \cdot 2x$

Ker že vidimo, v katero smer gre zgodba, ne pišemo več naslednjih odvodov, ampak samo naredimo premislek. Pri vsakem odvajanju se stopnja polinoma zniža za ena, zato bo pri sedmem odvajanju ostal samo vodilni koeficient, pomnožen s 6!.

$p^{(7)}(x) = 7 \cdot 6! = 7! = 4340$

2. Najbolj enostavni so višji odvodi funkcije $f(x) = e^x$, ker so enaki osnovni funkciji za vsak n:

$f^{(n)}(x) = e^x,\ n \in \mathbb{N}$

3. Malo več razmisleka potrebujemo pri zaporednem odvajanju funkcije $f(x) = e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = k\mathrm{e}^{kx},\ f''(x) = k^2\mathrm{e}^{kx},\ f'''(x) = k^3\mathrm{e}^{kx},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = k^n\mathrm{e}^{kx}$

4. Zanimivo je tudi zaporedno odvajanje funkcije $f(x)=\ln x$.

$f'(x)=x^{-1}$ $\quad$ $f''''(x)=(-1)(-2)(-3)x^{-4}$

$f''(x)=(-1)x^{-2}$ $\quad$ $f^{(5)}(x)=(-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5}$

$f'''(x)=(-1)(-2)x^{-3}$ $\quad$ $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}x^{-n}(n-1)!$

5. Poglejmo še zaporedne odvode funkcije $f(x)=\sin x$.

$f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x, f'''(x)=-\cos x, f''''(x)=\sin x$

Po štirih korakih smo prišli do osnovne funkcije, zato lahko pišemo:

$f^{(4n+1)}(x)=\cos x, f^{(4n+2)}(x)=-\sin x, f^{(4n+3)}(x)=-\cos x, f^{(4n)}(x)=\sin x$

ali samo z enim izrazom: $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n}{2}\pi)$.

Preverimo dobljeno formulo za prve štiri odvode:

$f'(x)=\sin(x+\frac{1}{2}\pi)=\sin(\pi-x-\frac{1}{2}\pi)=\sin(\frac{1}{2}\pi-x)=\cos x$

$f''(x)=\sin(x+\pi)=\sin(-x-\pi)=\sin(-x)=-\sin x$

$f'''(x)=\sin(x+\frac{3}{2}\pi)=-\sin(2\pi-x-\frac{3}{2}\pi)=-\sin(\frac{1}{2}\pi-x)=-\cos x$

$f''''(x)=\sin(x+\frac{4}{2}\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x$

Rezultat vseeno še preverimo z matematično indukcijo:

$f'(x)=\sin(x+\frac{1}{2}\pi)=\sin(\pi-x-\frac{1}{2}\pi)=\sin(\frac{1}{2}\pi-x)=\cos x$

$(f^{(n)}(x))'=f^{(n+1)}(x)=(\sin(x+\frac{n}{2}\pi))'=\cos(x+\frac{n}{2}\pi)=\sin(\frac{\pi}{2}+x+\frac{n}{2}\pi)=$

$=\sin(x+\frac{n+1}{2}\pi)$

NALOGE

778. Izračunajte peti in šesti odvod funkcije $f(x)=2x^5-x^4+10x^2-x+13$.

779. Izračunajte n-ti odvod funkcije.

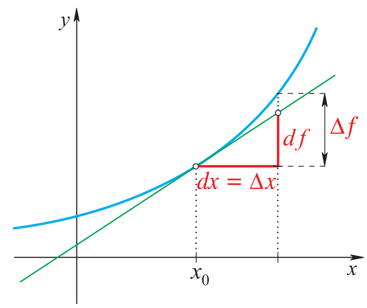
a) $f(x)=x^{-1}$
b) $g(x)=xe^x$

780. Izračunajte 365. odvod funkcije $\sin x$ in 2014. odvod funkcije $\cos x$.

Diferencial funkcije

V limiti diferenčnega kvocienta je sprememba neodvisne spremenljivke Δx zelo zelo majhna, lahko bi rekli »neskončno« majhna oz. praktično enaka 0. Označimo jo z dx. Tudi sprememba funkcijske vrednosti Δf je zaradi zveznosti funkcije f ustrezno majhna; označimo jo z df. Tako dobimo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'(x)$$



df imenujemo **diferencial** funkcije f in je enak $\boldsymbol{df = f'(x)dx}$.

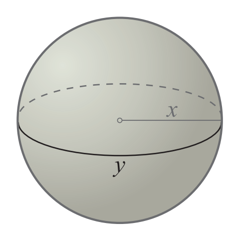
Diferencial funkcije df v točki x_0 pravzaprav pove, za koliko se spremeni ordinata pri spremembi abscise dx, toda ne na grafu funkcije, ampak na tangenti v točki x_0. Pri majhni spremembi neodvisne spremenljivke x diferencial funkcije pomeni glavni del spremembe funkcije in ga lahko vzamemo za približek za spremembo funkcije.

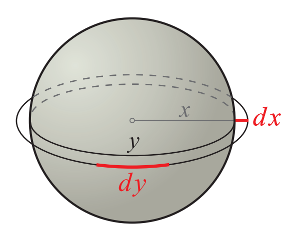
ZGLEDA

1. Izračunajmo diferenciale funkcij:

$f(x) = 3x^2$	$df = 6x\,dx$
$g(x) = 5e^{3x} + x^4$	$dg = (15e^{3x} + 4x^3)\,dx$
$h(x) = \sin(4x).$	$dh = 4\cos(4x)\,dx$

2. Predstavljajmo si naš planet kot veliko kroglo s polmerom x. Po ekvatorju jo obdajmo z jekleno žico, ki se tesno prilega njegovemu površju. Dolžina žice y je enaka dolžini ekvatorja oz. obsegu kroga s polmerom x: $y = 2\pi x$. Žico podaljšajmo za 1 m. Za koliko se bo žica enakomerno odmaknila od zemeljskega površja? Se bo pod njo lahko splazila mačka? Ali pa bo dovolj prostora le za mravljo?



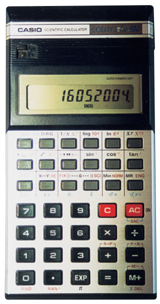


$x = 6370$ km	polmer Zemlje
$y = 2\pi x = 40\,024$ km	obseg Zemlje po ekvatorju
$y' = 2\pi$	odvod y
$dy = 1$ m	sprememba dolžine žice
dx	sprememba polmera oz. odmik žice od Zemljinega površja

Izračunajmo dx:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} \text{ oz. } dx = \frac{dy}{y'} = \frac{1}{2\pi} \doteq 0{\cdot}16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

To pomeni, da bi se žica, ki bi jo podaljšali le za 1m, okrog in okrog odmaknila od Zemlje za 16 cm.



Diferencial lahko uporabljamo pri približnem računanju funkcijskih vrednosti za funkcije, kjer je računanje prave funkcijske vrednosti prezapleteno. Danes se sicer v praksi ne uporablja več, saj te vrednosti veliko preprosteje izračunamo s pomočjo kalkulatorja. Pa vendar poglejmo, kako so pred vsesplošno uporabo žepnih računal s pomočjo diferenciala izračunali korene ter vrednosti trigonometričnih, eksponentnih in logaritemskih funkcij.

Izhajajmo iz formule:

$$df = f'(x)dx$$

Denimo, da poznamo funkcijsko vrednost v točki x_0: $f(x_0)$. Želimo pa jo izračunati v njeni neposredni bližini v točki x_1, ki je za h oddaljena od točke x_0, to je v točki $x_1 = x_0 + h$: $f(x_0 + h)$.

Spomnimo se definicije odvoda:

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Če izpustimo limito, lahko zgornjo enačbo zapišemo:

$f'(x_0) \doteq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ za zelo majhne vrednosti h.

Izrazimo $f(x_0 + h)$, ki ga iščemo:

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)h$$

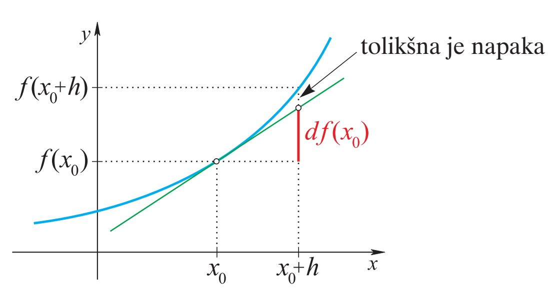
Vrednost h je zelo majhna in pomeni spremembo neodvisne spremenljivke x, poimenovali smo jo diferencial spremenljivke x in jo označili z dx:

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)dx$$

$f'(x_0)dx$ pa je diferencial funkcije f in ga označimo z df:

$$\boldsymbol{f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + df(x_0)}$$

Če torej iščemo vrednost funkcije f v točki $x_0 + h$, funkcijsko vrednost v točki x_0 pa poznamo, le-tej prištejemo diferencial funkcije in dobimo približno vrednost $f(x_0 + h)$, saj smo namesto pravega prirastka funkcije prišteli diferencial, ki pa pomeni prirastek linearne funkcije – tangente na krivuljo:



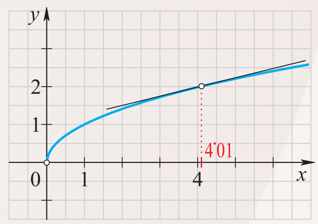
ZGLEDI

1. Izračunajmo približno vrednost $\sqrt{4{\cdot}01}$.

Opraviti imamo s korensko funkcijo $f(x) = \sqrt{x}$.

Radi bi izračunali njeno vrednost za $x_1 = 4{\cdot}01$:

$f(4{\cdot}01) = f(4 + 0{\cdot}01)$.



Poznamo njeno natančno vrednost pri $x_0 = 4$:

$f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2$.

Sprememba x je enaka:

$dx = 0{\cdot}01$.

Odvajajmo funkcijo $f(x) = \sqrt{x}$:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Odvod v točki $x_0 = 4$ je enak:

$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Uporabimo formulo:

$f(x_o + h) \doteq f(x_o) + df(x_o)$

$f(4{\cdot}01) \doteq f(4) + f'(4) \cdot 0{\cdot}01$

$f(4{\cdot}01) \doteq 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100} = 2 + \frac{1}{400} = 2{\cdot}0025$

Če pa vrednost $\sqrt{4{\cdot}01}$ izračunamo z žepnim računalom, dobimo $2{\cdot}002498439$.

2. Izračunajmo približno vrednost $\cos 60{\cdot}2°$.

$f(x) = \cos x$

$f'(x) = -\sin x$

$x_0 = 60° = \frac{\pi}{3}$

$dx = 0{\cdot}2° = \frac{\pi}{900}$

$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0)\, dx$

$\cos 60{\cdot}2° \doteq \cos\frac{\pi}{3} + \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{\pi}{900} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{900} = \frac{900 - \pi\sqrt{3}}{1800} = 0{\cdot}4970$

Kote moramo zapisati v radianih.

3. Pri segrevanju kovinske kocke se dolžina roba $a = 2$ cm poveča za $0{\cdot}03$ cm. Z diferencialom ocenimo, za koliko se povečata prostornina in površina.

Prostornina in površina sta funkciji osnovnega roba: $P(a) = 6a^2$, $V(a) = a^3$.

$dP = 12a \cdot da = 12 \cdot 2 \cdot 0{\cdot}03 = 0{\cdot}72\ \text{cm}^2$

$dV = 3a^2 da = 3 \cdot 4 \cdot 0{\cdot}03 = 0{\cdot}36\ \text{cm}^3$

Sprememba površine je številsko enaka dvakratni spremembi prostornine.

NALOGE

781. Z odvodom približno izračunajte (aproksimirajte) in rezultate zapišite na štiri mesta ter jih primerjajte z vrednostmi, ki jih izračunate z žepnim računalom.

a) $\sqrt{9{\cdot}06}$
b) $\sqrt[3]{28}$
c) $\sin 30{\cdot}5°$
č) $\tan 45{\cdot}5°$
d) $2^{0{\cdot}01}$
e) $\ln 1{\cdot}05$

782. Za koliko odstotkov se približno spremeni obseg in za koliko odstotkov ploščina kroga, če polmer $r = 1$ m povečamo za 1 cm?

783. Ploščina okroglega madeža iz pokvarjenega ladijskega motorja se na jezerski gladini širi s hitrostjo 3 m^2 na sekundo. Izračunajte hitrost naraščanja polmera madeža, ko je njegova ploščina enaka 1200 m^2.

784. Pri segrevanju kovinske kocke se dolžina njenega roba povečuje s hitrostjo $0{\cdot}3$ mm/s. Izračunajte hitrost povečevanja površine kocke, ko je dolžina osnovnega roba enaka 8 cm.

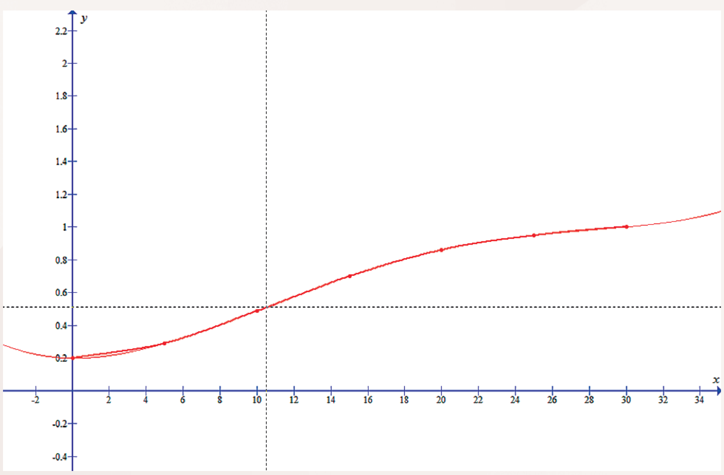
Modeliranje z odvodom

ZGLEDI

1. Ljudje vdihnemo zrak tako, da posebna mišica (prepona) popusti pritisk na pljučni krili, ki se zato razširita in napolnita z zrakom. Preglednica prikazuje prostornino pljuč kot funkcijo sprostitve pritiska prepone. Pulmologi (zdravniki specialisti za bolezni pljuč) odvod te funkcije imenujejo *komplianca* (voljnost, podajnost).

Zmanjšanje pritiska v cm	0	5	10	15	20	25	30
Prostornina v litrih	0,20	0,29	0,49	0,70	0,86	0,95	1,00

a) Ugotovite največjo vrednost kompliance.
b) Razložite, zakaj ima ta funkcija tako nizko vrednost, ko so pljuča že polna zraka.



S programom *Graph* narišemo prilagoditveno krivuljo skozi točke iz preglednice in ugotovimo, da je odvod funkcije največji pri $x = 10{\cdot}5$. Pri največjem zmanjšanju pritiska so pljuča že tako razširjena, da se ne morejo več širiti.

2. V krajevni skupnosti je 20 navdušencev odprlo fitnes klub in sčasoma je članstvo naraščalo, kot kaže preglednica.

Število dni	10	20	30	40	50
Število članov	34	46	56	60	75

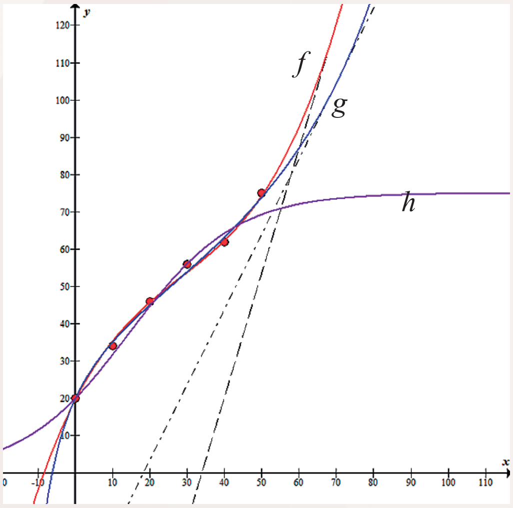
Opišite gibanje članstva z ustrezno funkcijo (poskušajte najti več primerov) in ugotovite, kako hitro se bo po najboljšem scenariju večalo število članov, ko jih bo v klub včlanjenih 70. Ali lahko uporabimo ta model, tudi ko bo klub že nekaj mesecev deloval?

S programom *Graph* lahko ugotovimo, da naraščanje članstva zelo dobro opisujeta dve funkciji:

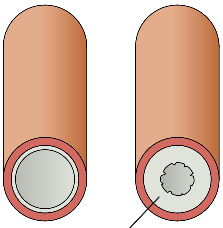
- polinom $f(x)=0{\cdot}0005x^3-0{\cdot}04x^2+1{\cdot}95x+19{\cdot}5$,
- racionalna funkcija $g(x)=\dfrac{3{\cdot}22x+20}{-0{\cdot}0005x^2+0{\cdot}053x+1}$.

Ko je v klubu že 70 članov, pri modeliranju s polinomsko funkcijo pristopijo še malo več kot trije člani na dan, pri drugem modelu pa dva člana na dan. Oboje nam prikažeta tangenti na oba grafa pri $x=70$.

Za daljše časovno obdobje bi morali za model izbrati logistično krivuljo, saj se naraščanje članstva po določenem času »umiri«. Najboljša prilagoditvena logistična krivulja skozi dane točke ima enačbo $h(x)=\dfrac{30}{0{\cdot}4+1{\cdot}1e^{-0{\cdot}07x}}$.



3. Arterioskleroza je bolezen, ki jo povezujemo s starostjo, vendar »napade« človeka že takoj po rojstvu. Na notranjih stenah arterij se začnejo odlagati krvne maščobe ali holesterol, in ta obloga z leti vedno bolj ovira normalni pretok krvi. Najprej se pojavi zvišan krvni pritisk, rezultat skoraj zamašene žile pa je lahko srčni infarkt ali gangrena.



Denimo, da je idealni presek aorte krog s premerom $d = 2^{\cdot}4$ cm in da se je v t letih nabrala obloga z debelino h. Debelina obloge je funkcija časa $h = g(t)$, pa tudi ploščina preseka je funkcija časa $S(t) = \pi(r-h)^2$. Zdravniki so z raziskavami ugotovili, da velja $h = g(t) = r - 0^{\cdot}01\sqrt{10000 - t^2}$, pri čemer je h izražen v centimetrih.

Hitrost nabiranja krvnih maščob izračunamo z odvajanjem funkcije S po času:

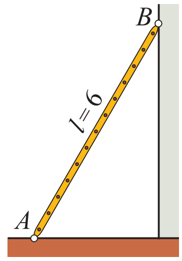
$$S'(t) = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = S'(h) \cdot h'(t)$$

$$S'(t) = 2\pi(r-h)(-1)\cdot(-0^{\cdot}01)\left(\frac{-t}{\sqrt{10000-t^2}}\right) = \frac{-0^{\cdot}02 \cdot \pi(r-h)\cdot t}{\sqrt{10000-t^2}}$$

Vzemimo za primer 50-letno osebo, ki ima polmer aorte $1^{\cdot}2$ cm. Osebi se je v 50 letih na steno aorte nabrala obloga debeline $h = g(50) = 1^{\cdot}2 - 0^{\cdot}01\sqrt{10000-2500} = 0^{\cdot}33$ cm, zato se ji presek aorte pri 50 letih na leto zmanjša za $3^{\cdot}15$ mm^2.

$$S'(50) = \frac{-0^{\cdot}02 \cdot \pi(1^{\cdot}2 - 0^{\cdot}33)\cdot 50}{\sqrt{10000-2500}} = -0^{\cdot}0315$$

4. Šest metrov dolga lestev je prislonjena na zid. Nenaden tresljaj povzroči, da začne njen spodnji konec A drseti po vodoravni podlagi s konstantno hitrostjo $0^{\cdot}6$ m/s. Izračunajmo, s kolikšno hitrostjo se po steni navzdol pomika zgornji del B, ko je na višini 4 m in ko je na višini 20 cm.



Razdalji točk A in B od vznožja zidu naj bosta funkciji časa. Potem velja $[f(t)]^2 + [g(t)]^2 = 6^2$.

$$f(t) = \sqrt{36 - [g(t)]^2}$$

Implicitno odvajamo zgornji izraz:

$2f(t)\cdot f'(t) + 2g(t)\cdot g'(t) = 0$, in izrazimo

$g'(t) = -\frac{f(t)\cdot f'(t)}{g(t)}$; $g'(t)$ je hitrost točke B;

$f'(t) = 0^{\cdot}6$ m/s je konstantna hitrost točke A.

Če je točka B na višini 4 m, se v tistem trenutku giblje navzdol s hitrostjo

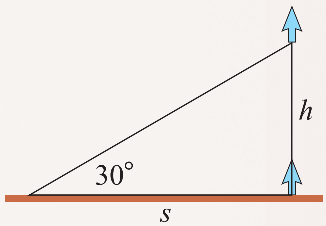
$$g'(t) = \left|-\frac{\sqrt{36-4^2}\ \text{m}\cdot 0^{\cdot}6\ \text{m/s}}{4\ \text{m}}\right| = 0^{\cdot}67\ \text{m/s}.$$

Negativni predznak odvoda nam pove, da se točka giblje navzdol, zato za hitrost gibanja vzamemo absolutno vrednost odvoda.

Na višini 20 cm je hitrost že skoraj 30-krat večja:

$$g'(t) = \left|-\frac{\sqrt{36-0^{\cdot}2^2}\ \text{m}\cdot 0^{\cdot}6\ \text{m/s}}{0^{\cdot}2\ \text{m}}\right| = 18\ \text{m/s}$$

5. Raketa se z odštevanjem »…, 3, 2, 1, 0« odlepi od vzletne rampe in poleti v višino. Njen vzlet opazujemo z razdalje 8 km. Predpostavimo, da smo med opazovanjem na isti višini kot rampa. Med letom se vznožje rakete dviga s kotno hitrostjo 2 ločni minuti na sekundo. Izračunajmo hitrost rakete, ko njeno vznožje vidimo pod kotom 30° glede na podlago. Kako hitro se dviga raketa v trenutku, ko je 10000 m visoko?



Višina rakete je funkcija kota φ. Velja zveza $\tan\varphi = \frac{h(t)}{s}$, iz katere dobimo $h(t) = s \tan\varphi$.

Tudi kot φ je funkcija časa: $\varphi = \varphi(t)$.

Hitrost dviganja dobimo tako, da funkcijo h odvajamo po času:

$$h'(t) = s \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi(t)} \cdot \varphi'(\mathrm{t})$$

$\varphi'(t)$ pomeni naraščanje kota in je naš podatek: $\varphi'(t) = \frac{\pi}{90}$ (uporabljati moramo radiane).

Hitrost rakete pri dvižnem kotu 30° je torej

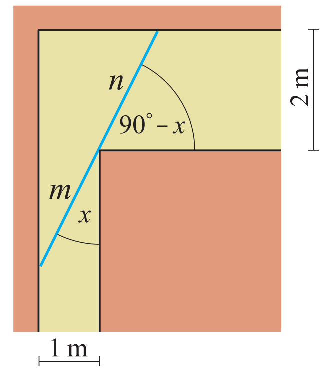
$$v(t) = h'(t) = 8000 \cdot \frac{1}{\cos^2 30°} \cdot \frac{\pi}{90} = 372 \text{ km/h} = 103 \text{ m/s}.$$

Ko je raketa na višini 10000 m, jo vidimo pod kotom

$$\varphi = \arctan\frac{10000}{8000} = 51{\cdot}34°.$$

Hitrost dviganja na višini 10 000 m je $h'(t) = 8000 \cdot \frac{1}{\cos^2 51{\cdot}34°} \cdot \frac{\pi}{90} = 1231{\cdot}7 \text{ km/h} = 342 \text{ m/s}$.

6. Po hodniku širine 2 m vodoravno nesemo lestev. Za vogalom se hodnik zoži na 1 m. Ali je lestev lahko dolga 4 m?



Dolžina lestve je $l = m + n$. Ko lestev nesemo okoli vogala, se spreminja kot x od $\frac{\pi}{2}$ do 0, skupaj z x pa se spreminjata tudi m in n:

$$\sin x = \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sin(90° - x) = \frac{2}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2}{\sin(90° - x)} = \frac{2}{\cos x}$$

Dolžina lestve je torej enaka: $l = m + n = \frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\cos x}$; $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Najdaljša lestev, ki jo lahko prenesemo vodoravno okoli vogala, je enaka najmanjši vrednosti vsote $\frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\cos x}$.

Odvajajmo:

$$\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\cos x}\right)' = (\sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x)' = -\sin^{-2} x \cos x + 2\cos^{-2} x \sin x =$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$$

Minimum doseže, kjer je odvod enak 0:

$$\frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{-\cos^3 x + 2\sin^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 0$$

$$-\cos^3 x + 2\sin^3 x = 0 / : \cos^3 x$$

$$-1 + 2\tan^3 x = 0$$

$$\tan^3 x = \frac{1}{2}$$

$$\tan x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

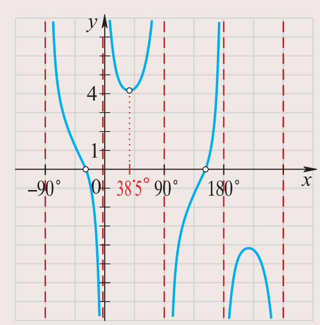
$$x \doteq 38{\cdot}44°$$

Največji problem z dolžino nastopi pri kotu $38{\cdot}44°$, in sicer je takrat dolžina lestve lahko največ

$$\frac{1}{\sin 38{\cdot}44°} + \frac{2}{\cos 38{\cdot}44°} = 1{\cdot}6 + 2{\cdot}55 = 4{\cdot}14 \text{ m.}$$

Odgovor na vprašanje je pritrdilen.

Če graf te funkcije $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\cos x}$ narišemo s programom, lahko razberemo približno vrednost minimuma s slike.



7. Študentska zveza vsako leto organizira izlet. Zadnja tri leta je stal 140 evrov, pri tem je bilo zasedenih vseh 200 mest na štirih avtobusih. Letošnje leto nameravajo organizatorji izlet podražiti. S poizvedbami so ugotovili, da se bo pri vsakem povišanju cene za 10 evrov število prijavljenih študentov zmanjšalo za 5.

a) Kakšna je enačba prihodka kot funkcije števila n poviškov cene?
b) Zapišimo odvod te funkcije po n in razložimo njegov pomen.
c) Kolikšna je hitrost spremembe prihodka, če je cena izleta 200 evrov? Koliko študentov bi se udeležilo izleta pri tej ceni?
č) Pri kolikšni podražitvi bo prihodek študentov največji in kolikšen bo? Koliko študentov bi bilo na izletu v tem primeru?

a) Spreminjanje dohodka pokažemo s preglednico pri različnih številih poviškov cene:

Število podražitev	Cena izleta	Število udeležencev	Prihodek
0	$140+10\cdot 0$	200	$140\cdot 200$
1	$140+10\cdot 1$	$200-5\cdot 1$	$(140+10)\cdot(200-5\cdot 1)$
2	$140+10\cdot 2$	$200-5\cdot 2$	$(140+20)\cdot(200-5\cdot 2)$
3	$140+10\cdot 3$	$200-5\cdot 3$	$(140+30)\cdot(200-5\cdot 3)$
…	…	…	…
n	$140+10\cdot n$	$200-5\cdot n$	$(140+10\cdot n)\cdot(200-5\cdot n)$

Dohodek lahko zapišemo kot $D(n)=(140+10n)(200-5n)$ in je kvadratna funkcija.

b) Odvod izračunamo po verižnem pravilu:

$D'(n)=10(200-5n)+(140+10n)(-5)=1300-100n$

D' pomeni hitrost spreminjanja dohodka pri povečevanju cene po 10 evrov.

c) Če je cena izleta 200 evrov, so osnovno ceno 140 evrov 6-krat povečali za 10 evrov. To pomeni, da je $n=6$. Tako dobimo $D'(6)=1300-100\cdot 6=700$.

Če bi ceno izleta povišali na 200 evrov, bi se izleta udeležilo $200-5\cdot 6$ ali 170 študentov.

č) Dohodek bo največji, ko bo odvod $D'(n)=0$.

$1300-100n=0;\ n=13$

$D(13)=(140+10\cdot 13)(200-5\ \ 13)=36\,450$

Na izletu bi bilo $200-5\cdot 13=135$ študentov.

NALOGE

785. Po podatkih ameriške nacionalne zdravstvene organizacije se je število bolnikov z alzheimerjevo boleznijo spreminjalo, kot kaže preglednica.

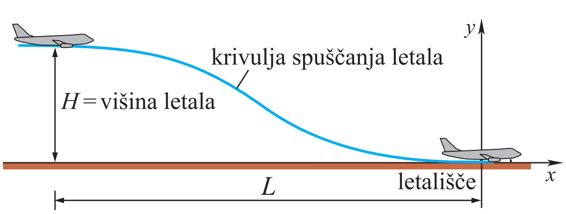
Leto	2000	2002	2004	2006	2008	2010
Število v mil.	3,77	4,70	4,93	5,37	6,17	6,82

Poiščite prireditveno krivuljo in izračunajte, v katerih letih je bilo naraščanje bolezni največje. Ali lahko napovemo število bolnikov leta 2014?

786. Vrednost avtomobila se s časom manjša s funkcijo $A(t)=\frac{4t+15000}{0{\cdot}5t+1}$.

a) Kolikšna je bila cena novega avtomobila?
b) Kolikšno je bilo letno zmanjšanje vrednosti avta po tretjem letu?
c) Kolikšno je bilo letno zmanjšanje vrednosti avta po osmem letu?
č) Po koliko letih je bilo letno zmanjšanje vrednosti enako desetini cene novega avta?
d) Koliko po tem modelu cenitve stane avto po dveh letih? Kako bi razmišljali pri nakupu avta – bi kupili novega ali starega?

787. Letalo leti vodoravno na višini H in se na talni razdalji L od letališča začne spuščati po krivulji $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Privzemimo, da je $y(-L)=H$, $y(0)=0$, $y'(-L)=0$ in $y'(0)=0$.



Pokažite, da je iskana krivulja $y(x)=H(2(\frac{x}{L})^3+3(\frac{x}{L})^2)$.

788. Po podatkih svetovne organizacije se je število prebivalcev na svetu spreminjalo, kot kaže preglednica. Zapišite prilagoditveno krivuljo in napovejte število prebivalcev leta 2020. Izračunajte trend naraščanja prebivalstva v zadnjih štirih desetletnih obdobjih in narišite graf. Izračunajte, kolikšen naj bi bil trend v letih 2010–2020.

Leto	Število v milijardah
1975	4·08
1980	4·45
1985	4·84
1990	5·27
1995	5·68
2000	6·07
2005	6·45
2010	6·85

789. Sladko raziskovanje. Kupite okroglo liziko in s kljunastim merilom izmerite premer lizike. Vsakih pet minut po začetku uživanja lizike ponovno izmerite njen premer in podatke vpisujte v preglednico. Vaša hipoteza naj bo, da je hitrost zmanjševanja prostornine lizike sorazmerna njeni površini.

Čas v min.	5	10	15	20	25	30	35	40
Premer v mm								

a) Uporabite podatke za določitev hitrosti spremembe polmera lizike s časom.
b) Zapišite model za spreminjanje prostornine lizike kot funkcijo polmera in kot funkcijo časa.
c) Kolikšna je hitrost spreminjanja prostornine lizike, ko je je na paličici le še pol?
č) Pojasnite, zakaj hitrost spreminjanja prostornine v odvisnost od časa ni konstantna.
d) Uporabite model za napoved, kdaj bo lizika izginila.
e) Ali so vaši izračuni z modelom potrdili hipotezo? Zakaj?
f) Kako bi se spremenil čas, v katerem lizika izgine, če bi njen začetni polmer pomnožili s konstanto $k>0$?

NE POZABI

Odvod funkcije f v x_0 je enak limiti diferenčnega kvocienta, ko gre h proti 0:

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

1. Odvod vsote funkcije je enak vsoti odvodov:
   $[(f+g)(x)]'=(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
2. Odvod produkta dveh funkcij se izračuna po formuli:
   $[(f\cdot g)(x)]'=(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. Odvod funkcije, ki je pomnožena s konstanto, je enak odvodu, pomnoženemu s konstanto:
   $[(kf)(x)]'=(k(f(x))'=kf'(x)$
4. Odvod kvocienta:
   $\left[\frac{f}{g}(x)\right]'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$; $g(x)\neq 0$

Tangenta na krivuljo $y=f(x)$ v točki x_0 ima **smerni koeficient enak odvodu** funkcije f v tej točki:
$k_t=f'(x_0)$

Enačba tangente na krivuljo $y=f(x)$ v točki $T_0(x_0, y_0)$ je enaka:
$y-y_0=f'(x_0)\,(x-x_0)$

Kot med abscisno osjo in krivuljo je enak kotu med abscisno osjo in tangento na krivuljo v presečišču krivulje z osjo – to je prav naklonski kot tangente.

Tangens naklonskega kota je enak smernemu koeficientu tangente.
Tangens naklonskega kota je enak **odvodu funkcije** v presečišču.

Kot med dvema krivuljama je enak kotu med tangentama na ti dve krivulji v presečišču krivulj.

Če je $\boldsymbol{f'(x)>0}$ za vsak x z intervala (a, b), potem je f na tem intervalu **naraščajoča**.
Če je $\boldsymbol{f'(x)<0}$ za vsak x z intervala (a, b), potem je f na tem intervalu **padajoča**.

Funkcija f ima v točki x_0 lokalno največjo vrednost ali **lokalni maksimum**, če so vse funkcijske vrednosti na nekem odprtem intervalu s središčem v x_0 manjše od funkcijske vrednosti $f(x_0)$.
Funkcija f ima v točki x_0 lokalno najmanjšo vrednost ali **lokalni minimum**, če so vse funkcijske vrednosti na nekem odprtem intervalu s središčem v x_0 večje od funkcijske vrednosti $f(x_0)$.

V točki lokalnega ekstrema je odvod enak 0: $\boldsymbol{f'(x_0)=0}$.

NE POZABI

Ničlam odvoda pravimo **stacionarne točke**.

Odvedljiva funkcija f ima v točki x_0 **lokalni maksimum**, če velja:

1. $f'(x_0)=0$
2. Odvod je levo od točke x_0 pozitiven, desno od x_0 pa negativen.

Odvedljiva funkcija f ima v točki x_0 **lokalni minimum**, če velja:

1. $f'(x_0)=0$
2. Odvod je levo od točke x_0 negativen, desno od x_0 pa pozitiven.

Odvod **potence**: $(x^n)'=nx^{n-1}$ za vsak $n\in\mathbb{R}$

Odvod **sestavljene** funkcije: $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\,f'(x)$

Odvod **inverzne** funkcije: $(f^{-1}(x))'=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Odvod **korenske** funkcije: $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$

Odvodi **trigonometričnih** funkcij:

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Odvodi **krožnih** funkcij:

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arccotan}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Odvod **logaritemske** funkcije:

$(\log_a x)'=\dfrac{\log_a e}{x}$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

Odvod **eksponentne** funkcije:

$(e^x)'=e^x$

$(a^x)'=\dfrac{a^x}{\log_a e}=\dfrac{a^x\ln a}{\ln e}=a^x\ln a$

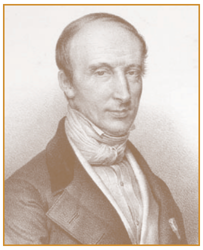
Diferencial funkcije: $\boldsymbol{df=f'(x)dx}$

Računanje približne vrednosti funkcije f v točki x_0+h:

$f(x_o+h)\doteq f(x_o)+df(x_o)$

NEDOLOČENI IN DOLOČENI INTEGRAL

- Nedoločeni integral
- Integracijska praksa
- Določeni integral
- Nepravi integrali
- Uporaba določenega integrala v geometriji
- Uporaba določenega integrala v fiziki
- Numerično računanje določenega integrala



Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Prvo strogo definicijo določenega integrala, za katero se moramo zahvaliti francoskemu matematiku Cauchyju, sta že mnogo prej začela pripravljati še en francoski matematik Fourier in češki matematik, filozof in teolog Bolzano. Oba sta v matematiko prinesla novega duha strogosti. Bolzano je v uvodu v eno od razprav napisal: »Izreka v znanosti ne dokažemo s potrdilom; utemeljiti ga moramo, pojasniti moramo objektivne osnove, na katerih sloni dokazana resnica.« Bolzano je dal tudi današnji pomen zveznosti funkcije, Fourierov pa je znak za določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$, ki ga danes na splošno uporabljamo.

Bernhard Bolzano (1781–1848)

Definicijo določenega integrala, ki jo uporabljamo danes, je zasnoval Bernhard Riemann. Leta 1854 jo je zapisal v habilitacijskem traktatu, ko se je potegoval za profesorsko mesto na univerzi v Göttingenu in ga tudi dobil.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) je bil profesor na znanih šolah École normale in École Polytechnique v Parizu. Sodeloval je v pohodu Napoleona I. v Egipt in postal guverner Spodnjega Egipta. Ukvarjal se je predvsem s toplotno prevodnostjo in ugotovil, da vsako nihanje lahko zapišemo kot vsoto trigonometričnih funkcij (t. i. Fourierove vrste).

Nedoločeni integral

Z odvajanjem neki funkciji F priredimo novo funkcijo – njen odvod F'. Zdaj pa bi radi neki funkciji f, za katero vemo, da je odvod $f = F'$, poiskali funkcijo F, ki smo jo odvajali, da smo dobili ta odvod F'. Skratka, radi bi našli obratno operacijo odvajanju. Iskani funkciji rečemo primitivna funkcija ali nedoločeni integral.

ZGLEDA

1. Poiščimo primitivno funkcijo funkciji $f(x) = 3x^2$. Če se spomnimo odvajanja, takoj ugotovimo, da je $(x^3)' = 3x^2$, zato je primitivna funkcija funkcije $3x^2$ enaka x^3. Vendar bi dobili isto primitivno funkcijo, tudi če bi odvajali funkcije $x^3 + 1$, $x^3 - 1$, $x^3 + 365$, $x^3 + 4014$, $x^3 - \pi$ oz. $F(x) = x^3 + C$, pri čemer je C poljubna realna konstanta.

2. Poiščimo še primitivno funkcijo kotnima funkcijama sinus in kosinus.

Ker je $(\sin x)' = \cos x$ in $(\cos x)' = -\sin x$, je primitivna funkcija funkcije kosinus enaka $\sin x$, primitivna funkcija funkcije $\sin x$ pa $-\cos x$.

Odvod F'	Nedoločeni integral F
$3x^2$	$x^3 + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$

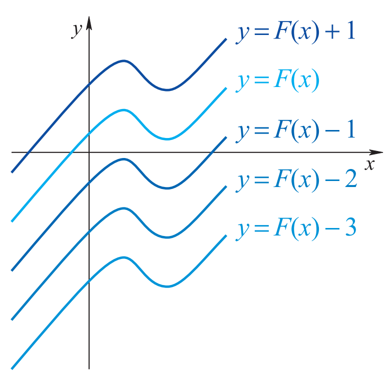
V zgledih smo ugotovili, da prvotna funkcija s svojim odvodom oz. diferencialom ni natanko določena. Pri vsaki konstanti C je:

$$\boldsymbol{(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)}$$

oz.

$$\boldsymbol{d(F(x) + C) = dF(x) = f(x)\,dx.}$$

Če torej najdemo eno funkcijo F, ki ima odvod enak dani funkciji f (oz. diferencial enak danemu diferencialu $f(x)\,dx$), imamo z njo celo družino takih funkcij, ki se med seboj razlikujejo le za aditivno konstanto C.



Konstanta C se imenuje aditivna konstanta, ker jo prištejemo funkciji F; *adicere* namreč v latinščini pomeni sešteti, dodati.

Graf funkcije $y = F(x) + C$ je le togo premaknjen graf funkcije $y = F(x)$ v smeri ordinatne osi.

ZGLEDI

1. Poiščimo primitivno funkcijo F, če je njen diferencial $dF(x) = e^x\,dx$.

Funkcija F je enaka kar $F(x) = e^x + C$, saj je $F'(x) = e^x$ in $dF(x) = e^x\,dx$.

2. Denimo, da poznamo diferencial funkcije $x^{-1}\,dx$. Katero funkcijo smo diferencirali, da smo ga dobili?

Ko pogledamo v preglednico odvodov elementarnih funkcij, ugledamo ln$x$, čeprav bi najprej pomislili, da gre za potenčno funkcijo: $dF(x) = \frac{dx}{x}$, $F(x) = \ln|x| + C$ (neodvisno spremenljivko pišemo absolutno, ker je D_f funkcije $f(x) = x^{-1}$ množica $\mathbb{R} - \{0\}$, logaritemska funkcija pa je definirana zgolj za pozitivne x).

3. Če bi radi iz družine funkcij, ki jih dobimo z integriranjem dane funkcije, dobili natanko eno, moramo določiti točko, skozi katero gre njen graf. Vzemimo, da gre za funkcijo g, katere graf poteka skozi točko $T(4, 5)$, njen odvod pa je funkcija $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Integrirajmo funkcijo g':

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

Dobili smo družino funkcij $g(x) = 2\sqrt{x} + C$, ki imajo enak odvod, razlikujejo se le za aditivno konstanto C. Med njimi izberimo tisto, katere graf poteka skozi točko $T(4, 5)$.

$5 = 2\sqrt{4} + C \quad \Rightarrow \quad C = 1$

$g(x) = 2\sqrt{x} + 1$

Obratno operacijo, ki nam omogoča iz danega odvoda F' (diferenciala dF) izračunati prvotno funkcijo F, imenujemo integriranje, primitivno funkcijo F pa **nedoločeni integral**:

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

Če je odvod F' enak dani funkciji f, lahko zapišemo definicijo nedoločenega integrala funkcije f takole:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$$

Odvod nedoločenega integrala je funkcija pod integralskim znakom (diferencial nedoločenega integrala pa je cel izraz pod integralskim znakom):

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

ZGLED

Izračunajmo nedoločeni integral funkcije $f(x) = x^2$.

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$, saj je $F'(x) = (\frac{x^3}{3} + C)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$

Obratna operacija kvadriranju je korenjenje.

$$x \xrightarrow{\text{kvadriranje}} x^2$$
$$\sqrt{y} \xleftarrow{\text{korenjenje}} y$$

Če ju uporabimo drugo za drugo na spremenljivki x, dobimo spet x:

$$(\sqrt{x})^2 = x$$
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Obratna operacija diferenciranju je integriranje:

$$F(x) \xrightarrow{\text{diferenciranje}} dF(x) = f(x)\,dx$$
$$\int f(x)\,dx = F(x) \xleftarrow{\text{integriranje}} f(x)\,dx$$

Ker poznamo odvode najpomembnejših elementarnih funkcij, lahko zapišemo seznam nedoločenih integralov:

$\int 1\,dx = x + C,$	ker:	$(x+C)' = 1$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$	ker:	$(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C)' = x^n;\ n \neq -1$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$	ker:	$(-\cos x + C)' = \sin x$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$	ker:	$(\sin x + C)' = \cos x$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C,$	ker:	$(\tan x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C,$	ker:	$(-\cot x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C,$	ker:	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C,$	ker:	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C,$	ker:	$(\ln\lvert x\rvert + C)' = \frac{1}{x}$
$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C,$	ker:	$(\mathrm{e}^x + C)' = \mathrm{e}^x$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$	ker:	$(\frac{a^x}{\ln a} + C)' = a^x$

Pravila, ki smo se jih naučili, uporabimo na zgledu.

ZGLED

Izračunajmo nedoločeni integral funkcij $f(x) = x^5$ in $g(x) = \cos^{-2} x$.

$\int x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 + C$, ker je $(\frac{1}{6}x^5 + C)' = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot x^{6-1} = x^5$.

$\int \cos^{-2} x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$, ker je $(\tan x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Zaradi pravil za odvajanje vsote funkcij in za odvajanje funkcije, pomnožene s konstanto, veljata tudi naslednji dve **pravili za integriranje vsote in integriranje funkcije, pomnožene s konstanto**:

1. Integral vsote je enak vsoti integralov.

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$(f+g)' = f' + g'$

2. Konstantni faktor pred funkcijo, ki jo integriramo, lahko pišemo pred integralski znak.

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$(kf)' = kf'$

ZGLEDI

1. Izračunajmo nedoločeni integral polinoma $p(x) = 5x^4 - 6x^2 - 4x + 2$.

Z upoštevanjem prejšnjih dveh pravil dobimo:

$$\begin{aligned}
&\int (5x^4 - 6x^2 - 4x + 2)\,dx = \\
&= \int 5x^4\,dx - \int 6x^2\,dx - \int 4x\,dx + \int 2\,dx = \\
&= 5\int x^4\,dx - 6\int x^2\,dx - 4\int x\,dx + 2\int dx = \\
&= 5\frac{x^5}{5} - 6\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x + C = \\
&= x^5 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + C
\end{aligned}$$

Konstanto C zapišemo samo enkrat.

2. Integrirajmo.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(1-x\sqrt{x})^2}{x^3}\,dx = \int \frac{1-2x\sqrt{x}+x^3}{x^3}\,dx = \\
&= \int x^{-3}\,dx - 2\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx + \int dx = \\
&= \frac{x^{-2}}{-2} - 2\frac{2x^{-\frac{1}{2}}}{-1} + x + C = -\frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}} + x + C
\end{aligned}$$

3. Izračunajmo vsoto nedoločenih integralov $\int \sin^2 x\,dx + \int \cos^2 x\,dx$.

Kasneje bomo pokazali, da je potrebno za rešitev vsakega od obeh integralov precej časa, če pa upoštevamo pravilo za vsoto integralov, dobimo:

$$\int \sin^2 x\,dx + \int \cos^2 dx = \int (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int 1 \cdot dx = x + C$$

NALOGE

790. Izračunajte nedoločene integrale in rezultate preverite z odvodom.

a) $\int 2x\,dx$

b) $\int 6x^2\,dx$

c) $\int (12x - 3)\,dx$

č) $\int dx$

d) $\int (\cos x + \sin x)\,dx$

e) $\int e^x\,dx$

791. Zapišite predpis za množico funkcij F, katere odvod je funkcija $f(x) = 8x^3$.

792. Zapišite množico kvadratnih funkcij, za katere je graf njihovih odvodov simetrala sodih kvadrantov. Iz iskane množice funkcij zapišite predpis in narišite graf tiste funkcije, katere zaloga vrednosti je interval $(-\infty, 3]$.

793. Zapišite predpis za funkcijo g, katere odvod je funkcija $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ in velja $g(-1) = -2$.

794. Izračunajte nedoločene integrale.

a) $\int (x^4 + x^{-2})\,dx$

b) $\int (\frac{1}{x^5} + k)\,dx$

c) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,dx$

č) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}})\,dx$

d) $\int x\sqrt{x}\,dx$

e) $\int (\sqrt{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x})\,dx$

f) $\int \frac{\sqrt{x}}{x \cdot x^{\frac{2}{3}}}\,dx$

g) $\int x^2 \cdot \sqrt[4]{x}\,(\frac{x^{-1}}{\sqrt[3]{x}})^2\,dx$

795. Zapišite predpis za funkcijo f, katere graf gre skozi točko $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$, njen odvod pa je $f'(x) = \sin x$.

796. Zapišite predpis za funkcijo f z ničlo $x_1 = 1$, če je njen odvod $\frac{1}{x} - 2$.

797. Izračunajte.

a) $\int (2 - 2x - \frac{1}{x})\,dx$

b) $\int (2x)^2 (x^2 - 3x^{-2} + 5x^{-5})\,dx$

c) $\int (2x-1)^3\,dx$

č) $\int x(x+a)(x+b)\,dx$

d) $\int (x^4 - \sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2})\,dx$

e) $\int (\sqrt[3]{x^2} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}})\,dx$

f) $\int \frac{4x^3 - 3}{x^2}\,dx$

g) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$

h) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

798. Zapišite predpis za funkcijo f, katere graf pri 3 seka ordinatno os, njen odvod pa je $f'(x) = (3+5x)^2$.

799. Pri katerih vrednostih parametrov a in b ima funkcija F v točki $T(1, y_0)$ tangento $y = 8x - 3$ in odvod $F'(x) = ax + b$, njen graf pa poteka skozi koordinatno izhodišče?

800. Izračunajte nedoločene integrale.

a) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x}\,dx$

b) $\int \frac{\sin^2 x - 1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos 2x}$

č) $\int \frac{2\tan x}{\sin 2x}\,dx$

d) $\int (1 + \tan^2 x)\,dx$

e) $\int (1 - \cos^2 x)^{-1}\,dx$

f) $\int (e^t + 3^t)\,dt$

g) $\int (\ln e^x + xe^{\ln x} - \frac{1}{\log 10^x})\,dx$

801. Ugotovite, ali velja $\int 5^x \cdot 3^{-x}\,dx = \frac{(\frac{5}{3})^x}{\ln\frac{5}{3}} + C$.

802. Izračunajte nedoločene integrale.

a) $\int (1 - \frac{1}{xe^x})e^x\,dx$

b) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

č) $\int \sin^2 x\,dx + \int \cos^2 x\,dx$

d) $\int \tan^2 x\,dx$

e) $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}\,dx$

Integracijska praksa

Odvod vsote (razlike) funkcij je enak vsoti (razliki) odvodov, pri odvodu produkta in kvocienta pa te enostavnosti ni več. Zato bomo morali pri integriranju produkta in kvocienta funkcij uporabiti posebne metode. Ena od njih je uvedba nove integracijske spremenljivke.

Uvedba nove integracijske spremenljivke

ZGLED

Na primeru se spomnimo, kako smo odvajali sestavljeno funkcijo $h(x) = (3x^7 + x^2)^{11}$.

Takrat nam niti na misel ni prišlo, da bi razrešili potenco binoma in potem funkcijo členoma odvajali. Funkcijo h smo zapisali kot sestavljeno funkcijo:
$F(g(x)) = (3x^7 + x^2)^{11}$, kjer je
$g(x) = 3x^7 + x^2$ in $F(y) = y^{11}$.

Njuna odvoda sta:
$g'(x) = 21x^6 + 2x$ in $F'(y) = 11y^{10}$.

Odvod sestavljene funkcije je po pravilu enak:
$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = 11(3x^7 + x^2)^{10} \cdot (21x^6 + 2x)$.

Zdaj lahko izpeljemo pravilo integriranja z uvedbo nove spremenljivke.

Če sta enaka odvoda:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x),$$

sta enaka tudi diferenciala:

$$[F(g(x))]'\,dx = F'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx.$$

Integrirajmo levo in desno stran:

$$\int [F(g(x))]'\,dx = \int F'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

in dobimo:

$$F(g(x)) = \int F'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx.$$

Odvod funkcije F' označimo z f, za funkcijo $g(x)$ vpeljimo novo spremenljivko t, namesto diferenciala $g'(x)\,dx$ enostavno pišimo dt. Tedaj dobimo formulo za računanje integrala z uvedbo nove spremenljivke:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt=F(t)=F(g(x))$$

$$t=g(x)$$

$$dt=g'(x)\,dx$$

$$F'(t)=f(t)$$

ZGLEDI

1. $\int(3x-7)^4\,dx$

Osnovna funkcija je potenčna funkcija, zato za novo spremenljivko izberemo osnovo $t=3x-7$; diferenciramo levo in desno stran $dt=3\cdot dx$ in izrazimo $dx=\frac{1}{3}\,dt$. V integralu izvedemo ustrezni zamenjavi in pridemo do enostavnega integrala:

$$\int(3x-7)^4\,dx=\int t^4\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{15}(3x-7)^5+C$$

2. $\int\sqrt[3]{x+10}\;dx$

Osnovna funkcija je korenska funkcija, zato za novo spremenljivko izberemo $t=x+10$, diferenciramo in dobimo $dt=dx$.

$$\int\sqrt[3]{x+10}\;dx=\int t^{\frac{1}{3}}\,dt=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\,t^{1+\frac{1}{3}}+C=\frac{3}{4}\,(x+10)^{\frac{4}{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+10)^3}+C$$

3. $\int\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx$

Osnovna funkcija je kosinus, izberemo novo spremenljivko $t=2x+\frac{\pi}{6}$.

Diferenciramo enačbo $dt=2\,dx$, izrazimo $dx=\frac{1}{2}\,dt$ in naredimo zamenjavo.

$$\int\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)dx=\int\cos t\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\sin t+C=\frac{1}{2}\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+C\right.$$

4. $\int\cot x\,dx$

Kotangens zapišemo drugače $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}$. Če vzamemo novo spremenljivko $t=\sin x$, je njen diferencial $dt=\cos t\,dt$ ravno »ostanek« integrala:

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\sin x|+C$$

5. $\int \cos^4 x \sin x\, dx$

Izberemo novo spremenljivko $t=\cos x$, ker je potem njen diferencial $dt=-\sin x\, dx$ oz. $\sin x\, dx=-dt$.

$$\int \cos^4 x \sin x\, dx=\int t^4(-dt)=-\frac{1}{5}t^5+C=-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$$

6. $\int e^{-2x}\, dx$

Osnovna funkcija je e^x, zato vzamemo novo spremenljivko $t=-2x$ in dobimo diferencial $dt=-2\,dx$ ali $dx=-\frac{1}{2}\,dt$.

$$\int e^{-2x}\, dx=\int e^t\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)=-\frac{1}{2}\int e^t\, dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$$

7. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$

Osnovna funkcija je e^x, eksponent vzamemo za novo spremenljivko, ker njen diferencial »pokrije« ostanek integrala $t=x^3$, $dt=3x^2\,dx$ oz. $x^2\,dx=\frac{1}{3}\,dt$.

$$\int x^2 e^{x^3}\, dx=\int e^t \frac{1}{3}\, dt=\frac{1}{3}e^t+C=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$$

8. $\int \frac{2x\,dx}{x^2+5}$

Podobno kot v prejšnjem primeru izberemo novo spremenljivko $t=x^2+5$, njen diferencial je $dt=2x\,dx$.

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2+5}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln(x^2+5)+C$$

9. $\int \frac{x^3+x^2+5}{x+2}\, dx$

Najprej kvocient zapišemo kot vsoto celega in ulomljenega dela in nato integriramo.

$$\int \frac{x^3+x^2+5}{x+2}\, dx=\int\left(x^2-x+2+\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x+2|+C$$

10. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$

Ker je diferencial logaritemske funkcije $\ln x$ ravno $\frac{dx}{x}$, takoj vidimo, kaj bo nova spremenljivka: $t=\ln x$, $dt=\frac{dx}{x}$.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx=\int t^2\, dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\ln^3 x+C$$

11. $\int \cos x \sin 3x \, dx$

Najprej funkcijo, ki jo integriramo, zapišemo v drugačni obliki s formulo $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$.

$\sin 3x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$

$$\int \cos x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2}\int(\sin 4x + \sin 2x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 4x \, dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = \ldots$$

Dvakrat izberemo novo spremenljivko. V prvem primeru je $t = 4x$, $dt = 4\, dx$, v drugem primeru pa $z = 2x$, $dz = 2\, dx$.

$$\ldots = \frac{1}{2}\int \sin t \cdot \frac{1}{4}\, dt + \frac{1}{2}\int \sin z \cdot \frac{1}{2}\, dz = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

12. $\int \sin^2 dx$

Uporabimo trigonometrično formulo $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

$$\int \sin^2 dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

Integral prevedemo na integral arkus sinusa $1-9x^2 = 1-(3x)^2$, $3x = t$, $dx = \frac{1}{3}\, dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{3dt}{1-t^2} = 3\arcsin t + C = 3\arcsin(3x) + C$$

14. $\int \frac{dx}{x^2+4}$

Integral prevedemo na integral arkus tangensa $x^2+4 = 4((\frac{x^2}{4})+1) = 4((\frac{x}{2})^2+1)$, $\frac{x}{2} = t$, $dx = 2\, dt$.

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{dx}{4((\frac{x}{2})^2+1)} = \frac{1}{4}\int \frac{2dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\arctan t + C =$$
$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

15. $\int \frac{2dx}{1-x^2}$

Integriramo s parcialnimi ulomki, ki smo jih spoznali v knjigi *Spatium novum* (str. 58).

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

Rešimo sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama: $A-B=0$, $A+B=2$, in dobimo rešitev $A=1$, $B=1$.

$$\int \frac{2dx}{1-x^2} = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{dx}{1+x} =$$

Novi spremenljivki sta: $t=1-x$, $dt=-dx$, in $z=1+x$, $dz=dx$.

$$= \int -\frac{dt}{t} + \int \frac{dz}{z} = -\ln|t| + \ln|z| + C = -\ln|1-x| + \ln|1+x| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

16. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$

Števec in imenovalec ulomka pomnožimo s $\sqrt{x+1}$.

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \int \sqrt{\frac{(1+x)(1+x)}{(1-x)(1+x)}}\, dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \ldots$$

Prvi integral uženemo z novo spremenljivko, drugega poznamo iz preglednice:

$t^2 = 1-x^2$, $2t\,dt = -2x\,dx$, $x\,dx = -t\,dt$, $t = \sqrt{1-x^2}$

$$\ldots = \int -\frac{tdt}{t} + \arcsin x + C = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

Vpeljemo novo spremenljivko $x=t^2$, $dx = 2t\,dt$, $t=\sqrt{x}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{2t\,dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C$$

NALOGE

803. Z uvedbo nove spremenljivke izračunajte:

a) $\int (5-2x)^9\, dx$

b) $3 \cdot \int x^2 (x^3+2)^2\, dx$

804. Integrirajte racionalne funkcije.

a) $\int \frac{-2}{(2ax+b)^3}\, dx$; $a \neq 0$

b) $\int \frac{2}{(2x-1)^2}\, dx$

c) $\int \frac{x\, dx}{(1+x^2)^2}$

805. Integrirajte iracionalne funkcije.

a) $\int \sqrt[5]{1-x}\,dx$
b) $\int x^2\sqrt{x^3-9}\,dx$
c) $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx$

806. Integrirajte.

a) $\int \frac{x+3}{x^2+6x-7}\,dx$
b) $\int \frac{2}{x+1}\,dx$
c) $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$

807. Zapišite racionalno funkcijo kot vsoto celega in ulomljenega dela ter integrirajte.

a) $\int \frac{x+2}{x-1}\,dx$
b) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}\,dx$
c) $\int \frac{x^3-3x^2+x+2}{x^2+3}\,dx$
č) $\frac{x^5+5x^3-2x^2+12}{x^3+1}\,dx$

808. Zapišite predpis za funkcijo F, katere odvod je funkcija $f(x)=\sqrt{8-3x}$ ter zanjo velja $F(-\frac{1}{3})=6$.

809. Katera funkcija z odvodom $3x^2(x^3-1)^2$ seka ordinatno os pri 1?

810. Narišite graf funkcije $f(x)=(x-1)^{-1}$ in izračunajte $\int f(x)\,dx$. Zapišite enačbo tangente v presečišču z ordinatno osjo in izračunajte njen naklonski kot.

811. Integrirajte kotne funkcije:

a) $\int \sin 5x\,dx$
b) $\int \sin(x+\pi)\,dx$
c) $\int \cos x\sin^2 x\,dx$
č) $\int \tan x\,dx$
d) $\int \frac{\cos x+1}{\sin x+x}\,dx$
e) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$
f) $\int \cos(\frac{\pi}{7}-2x)\,dx$
g) $\int \cos^3 x\,dx$
h) $\int \sin x\cos x\,dx$
i) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x+2}$
j) $\int \sin^2 x\,dx$ z uporabo formule $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

812. Z uvedbo nove spremenljivke izračunajte:

a) $\int e^{-x}\,dx$
b) $\int (2-e^{3x})\,dx$
c) $\int x e^{x^2}\,dx$
č) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$
d) $\int \frac{\arctan x\,dx}{1+x^2}$
e) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}$
g) $\int \frac{(2+\ln x)\,dx}{x}$
h) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$
i) $\int \frac{\ln^3 x\,dx}{x}$

813. Dana je funkcija $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

a) Zapišite njeno definicijsko območje.
b) Izračunajte odvod funkcije f in zapišite koordinati njenega ekstrema.
c) Zapišite ničlo funkcije f in narišite njen graf.
č) Pokažite, da je funkcija $F(x)=\frac{1}{2}(\ln(x))^2+C$ nedoločeni integral funkcije f. Pri katerem C bo graf funkcije F šel skozi točko $(\frac{1}{e}, 0)$?

814. Integrirajte s prevedbo na funkcijo $\arctan x$:

a) $\int \frac{dx}{x^2+4}$
b) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$
c) $\int \frac{dx}{9x^2+12x+20}$
č) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$
d) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$
e) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; $(x=t^2)$
f) $\int \frac{x\,dx}{1+4x^2}$; $(x^2=t)$

815. Integrirajte s prevedbo na funkcijo $\arcsin x$:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
b) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$
c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$
č) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-16x^2}}$
e) $\int \frac{dx}{\sqrt{15-10x-25x^2}}$
f) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ nova sprem. $x^2=t$

816. Integrirajte z uporabo nove spremenljivke:

a) $\int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+3}}\,dx$, $2x-1=t^2$
b) $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$; $1+e^x=t^2$
c) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$; $1+\ln x=t^2$

817. Integrirajte iracionalne funkcije:

a) $\int \frac{\sqrt{x^4-1}}{x}\,dx$

(Števec in imenovalec pomnožite z x^3.)

b) $\int \frac{4x^3}{\sqrt{2x^2-1}}\,dx$

(Nova spremenljivka: $2x^2-1=t^2$.)

818. Integrirajte iracionalne funkcije:

a) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}}$; $(x=\sin^2 t)$

b) $\int \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx$; $(x=\sin^2 t)$

c) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$; $(x=\sin t)$

819. Integrirajte s prevedbo na parcialne ulomke:

a) $\int \frac{4x-7}{x^2-x-6}\,dx$

b) $\int \frac{x+3}{x^2-1}\,dx$

c) $\int \frac{5}{x^2-3x-4}\,dx$

Integriranje po delih ali »per partes«

Najprej bomo izpeljali formulo, potem pa prikazali nekaj zgledov.

Spomnimo se, kako odvajamo produkt:

$$(u(x)\cdot v(x))'=v(x)u'(x)+u(x)v'(x)$$

oz.

$$d(u(x)\cdot v(x))=v(x)u'(x)\,dx+u(x)v'(x)\,dx$$

Integrirajmo zgornjo enačbo:

$$u(x)\cdot v(x)=\int v(x)u'(x)\,dx+\int u(x)v'(x)\,dx$$

Če pišemo:

$$u'(x)\,dx=du$$

$$v'(x)\,dx=dv,$$

sledi

$$u\cdot v=\int v\,du+\int u\,dv.$$

Izrazimo enega od integralov in dobimo formulo:

$$\boldsymbol{\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du}$$

ZGLEDI

1. $\int x\sin x\,dx$

$u=x,\ du=dx$

$dv=\sin x\,dx,\ v=-\cos x$

$\int x\sin x\,dx=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\sin x+C$

2. $\int \ln x\,dx$

$u=\ln x,\ du=\frac{dx}{x}$

$dv=dx,\ v=x$

$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int\frac{xdx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$

3. Izračunajmo z *dvojnim obratom* per partesa integral $I=\int\cos^2 x\,dx$.

$u=\cos x,\ du=-\sin x\,dx,\ dv=\cos x\,dx,\ v=\sin x$

$I=\cos x\sin x+\int\sin^2 x\,dx=\cos x\sin x+\int(1-\cos^2 x)\,dx=$

$\quad=\cos x\sin x+\int dx-\int\cos^2 x\,dx=\cos x\sin x+x-I$

$2I=\cos x\sin x+x$

$\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}(\cos x\sin x+x)+C$

NALOGE

820. Integrirajte z metodo per partes.

a) $\int 3xe^{2x}\,dx$

b) $\int x^2 \ln x\,dx$

c) $\int x\cos\frac{x}{2}\,dx$

č) $\int xe^{-x}\,dx$

d) $\int x^2 \sin 4x\,dx$

e) $\int \arctan x\,dx$

821. Integrirajte z metodo per partes (z dvojnim obratom).

a) $\int \sin(\ln x)\,dx$

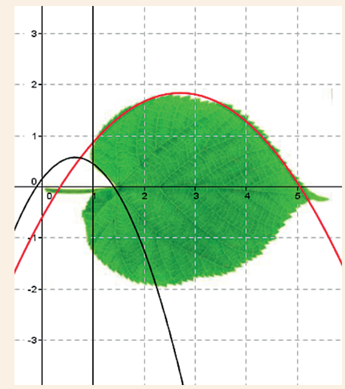
b) $\int \sin\sqrt{x}\,dx$

c) $\int e^x \sin x\,dx$

822. Zapišite enačbo funkcije, za katero velja $f'(x)=x\ln x$ in graf poteka skozi točko $T(1,-1)$.

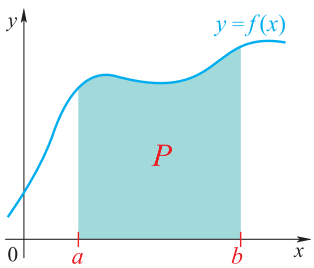
Določeni integral

Spomnimo se problema iz tretjega letnika (*Spatium novum*, str. 208), ko smo računali ploščino lipovega lista. Metodo kvadratkov, s katero smo le ocenili ploščino, bomo zdaj nadgradili do »spodobne« metode.

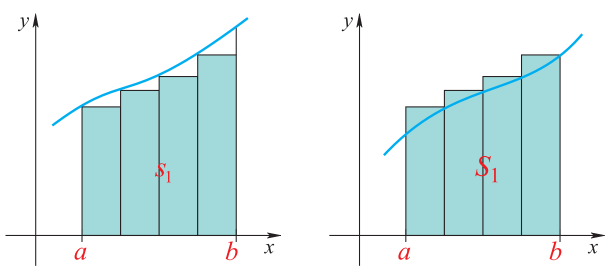


$f(x)=-\frac{1}{3}\cdot(x-0.2)(x-5.2)-0.24$

Oglejmo si ploščino krivočrtnega lika, ki ga z abscisno osjo na intervalu $[a, b]$ določa graf pozitive funkcije f.



Lik na dva načina razrežemo na enako široke trakove.

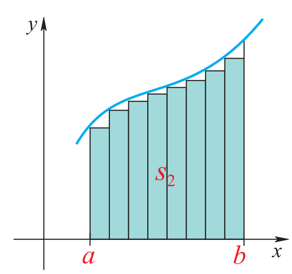


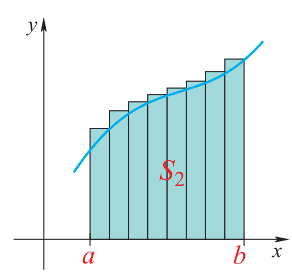
Najprej seštejemo ploščine pravokotnikov, katerih višine so minimumi m_i funkcije na teh intervalih, potem pa še ploščine pravokotnikov, ki imajo za višine maksimume M_i funkcije na intervalih. Tako ploščino krivočrtnega lika vklenemo med dve vrednosti:

med prvo spodnjo vsoto $\quad s_1=\sum_{i=1}^{n}|x_n-x_{n+1}|\cdot m_i$

in prvo zgornjo vsoto $\quad S_1=\sum_{i=1}^{n}|x_n-x_{n+1}|\cdot M_i;$

očitno velja $s_1 < P < S_1$.

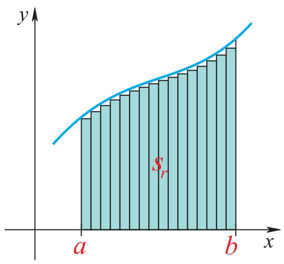


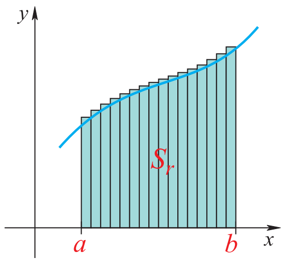


V naslednjem koraku vsakega od intervalov razdelimo na pol in postopek ponovimo. Dobimo drugo spodnjo in drugo zgornjo vsoto:

$s_2=\sum_{i=1}^{2n}|x_n-x_{n+1}|\cdot m_i \quad$ in $\quad S_2=\sum_{i=1}^{2n}|x_n-x_{n+1}|\cdot M_i;$

$s_1 < s_2 < P < S_2 < S_1.$





Postopek nadaljujemo:

$$s_r = \sum_{i=1}^{rn} |x_n - x_{n+1}| \cdot m_i, \quad S_r = \sum_{i=1}^{rn} |x_n - x_{n+1}| \cdot M_i;$$

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_r < \ldots < \; P < \ldots < S_r < \ldots < S_2 < S_1$$

Zaporedje spodnjih vsot je navzgor omejeno, zato ima limito. Prav tako je zaporedje zgornjih vsot navzdol omejeno in je konvergentno:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \; \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Če sta ti dve limiti enaki, je to število enako ploščini krivočrtnega lika oz. določenemu integralu funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$P = \int_a^b f(x)\,dx$; a je **spodnja meja**, b je **zgornja meja** določenega integrala.

V izpeljavi smo interval $[a, b]$ razdelili na enako široke intervale, vendar je bila to le poenostavitev. Izkaže se, da so lahko delilni intervali intervala $[a, b]$, po katerih razrežemo lik, različno široki.

Definicija:

Za nedoločeni in določeni integral uporabljamo isti znak, zvezo med njima bomo pokazali kasneje.

Določeni integral pozitivne funkcije na intervalu $[a, b]$ je enak limiti zaporedja integralskih vsot, ko gre število delilnih intervalov proti neskončno, širina vsakega od njih pa neodvisno proti nič.

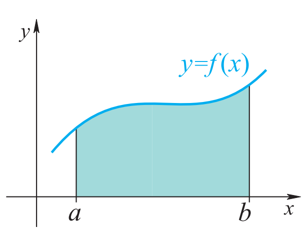
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Lastnosti določenega integrala

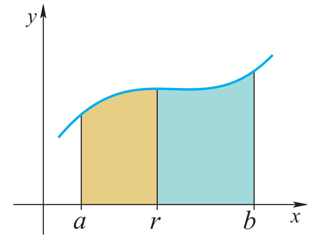
1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz$

Integracijsko spremenljivko lahko poljubno poimenujemo, vrednost integrala se ne spremeni.

Vrednost integrala je namreč enaka ploščini krivočrtnega lika, ki je omejen z grafom funkcije, ki je na intervalu $[a, b]$ nenegativna, z abscisno osjo ter premicama $x = a$ in $x = b$ (ali njeni negativni vrednosti, če je funkcija na integracijskem intervalu negativna), in se ne spremeni, če poimenujemo abscisno os kako drugače. V fiziki npr. na abscisno os nanašamo čas in jo zato poimenujemo s t.

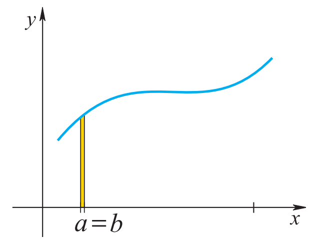


2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^r f(x)\,dx + \int_r^b f(x)\,dx;\ c \in [a, b]$



Če je f zvezna in nenegativna funkcija na intervalu $[a, b]$ in točka r leži na tem intervalu, potem lahko izračunamo celotno ploščino med krivuljo in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$ kot vsoto dveh ploščin manjših likov: prvega med krivuljo in abscisno osjo na intervalu $[a, r]$ in drugega med krivuljo in abscisno osjo na intervalu $[r, b]$.

3. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$



Če sta zgornja in spodnja meja enaki, je smiselno definirati, da je vrednost integrala enaka 0. Krivočrtni lik se je namreč izrodil v daljico in ima ploščino enako 0.

4. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

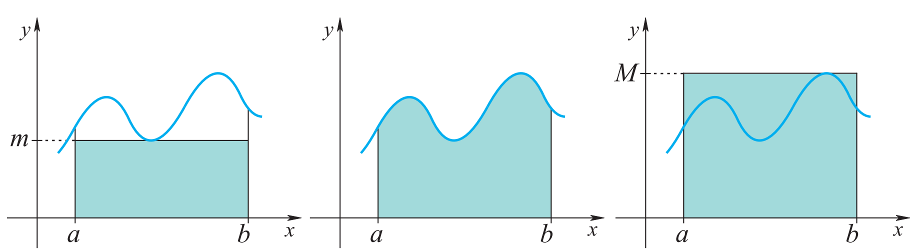
Pri integriranju na intervalu $[a, b]$ smo predpostavili, da je spodnja meja intervala manjša od zgornje meje: $a < b$. Če zamenjamo spodnjo in zgornjo mejo integriranja, se integralu spremeni predznak.

Dokaz te lastnosti je zelo enostaven:

$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx = 0$, od tod že sledi $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

5. Pozitivna zvezna funkcija f na intervalu $[a, b]$ je vedno omejena. Če je m najmanjša vrednost funkcije f, M pa največja vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$, potem velja ocena:

$$\boldsymbol{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)}$$

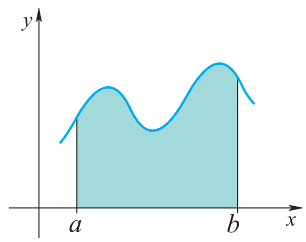


ploščina pravokotnika je:		ploščina tega lika je:		ploščina pravokotnika je:
$m(b-a)$	$\le$	$\int_a^b f(x)\,dx$	$\le$	$M(b-a)$

Če zgornjo neenačbo delimo z $(b-a)$, dobimo:

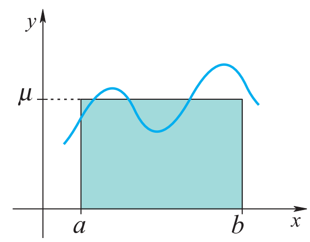
$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

Število $\boldsymbol{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$, ki leži med največjo in najmanjšo vrednostjo funkcije na intervalu $[a, b]$, imenujemo **povprečna vrednost funkcije $\boldsymbol{f}$ na $\boldsymbol{[a, b]}$**. Predstavlja pa višino pravokotnika, ki ima za osnovnico interval $[a, b]$ in je ploščinsko enak krivočrtnemu liku s ploščino $\int_a^b f(x)\,dx$.



ploščina tega lika je:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



ploščina pravokotnika je:

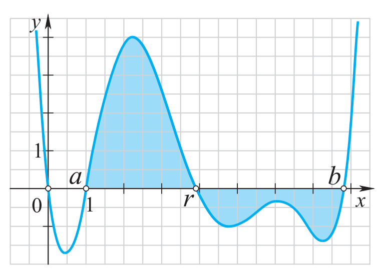
$$(b-a)\mu = (b-a)\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

6. Določeni integral zvezne negativne funkcije na intervalu $[a, b]$ je negativno število. Ploščina lika, ki ga graf te funkcije f oklepa z abscisno osjo, je:

$$-\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

7. Če zvezna funkcija f na intervalu $[a, b]$ zamenja predznak, je ploščina lika, ki ga graf funkcije f oklepa z abscisno osjo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^r f(x)\,dx + \left|\int_r^b f(x)\,dx\right|$$



ZGLEDI

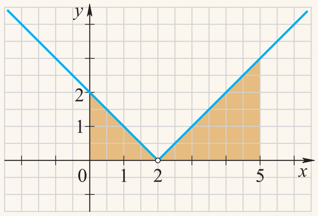
1. Izračunajmo vrednost določenega integrala $\int_2^2 x^2\,dx$.

Določeni integral je enak ploščini lika med krivuljo, v našem primeru parabolo, in abscisno osjo na intervalu [2, 2]. Ker je širina danega intervala enaka 0, je tudi ploščina lika enaka 0:

$$\int_2^2 x^2\,dx = 0$$

2. Izračunajmo $\int_0^5 |x-2|\,dx$.

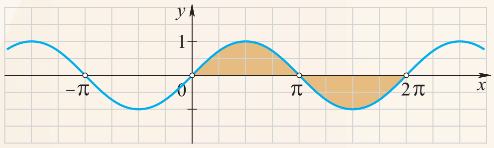
Če narišemo funkcijo $f(x) = |x-2|$, se kar sama ponudi ideja, da poiščemo vrednost integrala v dveh delih: najprej na intervalu [0, 2] in potem še na intervalu [2, 5].



Do ploščine lika med krivuljo in abscisno osjo pridemo na elementaren način – to je vsota ploščin dveh trikotnikov.

$$\int_0^5 |x-2|\,dx = \int_0^2 |x-2|\,dx + \int_2^5 |x-2|\,dx = 2 + \tfrac{9}{2} = 6\tfrac{1}{2}$$

3. Izračunajmo $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$.



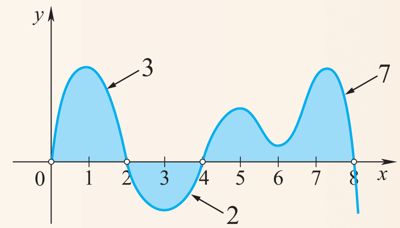
Tudi tokrat se ponuja računanje integrala kot vsote dveh integralov:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$$

Ker pa sta absolutni vrednosti integrala $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ in $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$ enaki (saj sta lika ploščinsko enaka), razlikujeta se le po predznaku, je njuna vsota enaka 0. Zato:

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

4. Izračunajmo vrednosti določenih integralov s podatki s slike.



a) $\int_0^4 f(x)\,dx = 1$, ker moramo od 3 odšteti 2.

b) $\int_2^4 f(x)\,dx = -2$, ker leži celotna krivulja na intervalu pod abscisno osjo.

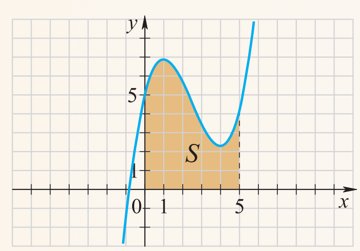
c) $\int_2^8 f(x)\,dx = 5$, od 7 moramo odšteti 2.

č) $\int_4^2 (f(x)+1)\,dx = 0$, meji integrala sta obrnjeni, poleg tega moramo prišteti ploščino pravokotnika s stranicama 2 in 1.

d) $\int_0^8 |f(x)|\,dx = 12$, sešteti moramo absolutne vrednosti vseh ploščin.

5. Ocenimo ploščino osenčenega lika na spodnjem grafu, če je narisan graf funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 5$. Ploščina je enaka vrednosti integrala $\int_0^5 (\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 5)\,dx$.

Izračunajmo najmanjšo in največjo vrednost polinoma $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 5$ na intervalu [0, 5] z odvodom:



$f'(x) = x^2 - 5x + 4$

$f'(x) = 0$

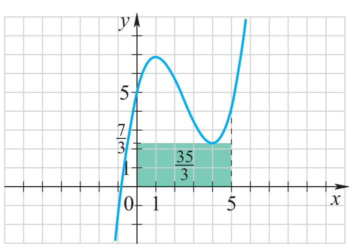
$(x-1)(x-4) = 0$

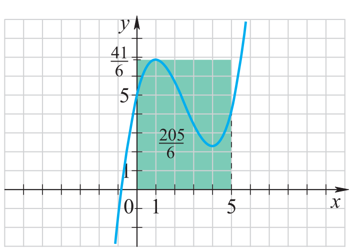
$x_1 = 1,\ x_2 = 4$

Z grafa je razvidno, da ima funkcija f pri $x_1 = 1$ maksimum in pri $x_2 = 4$ minimum.

$m = f(4) = \frac{7}{3}$

$M = f(1) = \frac{41}{6}$





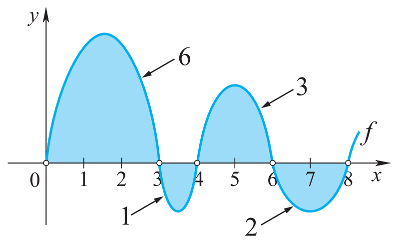
Pravokotnik, včrtan našemu krivočrtnemu liku, ima ploščino $\frac{35}{3}$, očrtan pravokotnik pa $\frac{205}{6}$. Zato velja ocena:

$$\frac{35}{3} < \int_0^5 (\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 4x + 5)\,dx < \frac{205}{6}$$

Ocena je zelo nenatančna. Prava vrednost integrala je torej med 11˙7 in 34˙2. V naslednjem poglavju bomo spoznali, kako lahko izračunamo točno vrednost določenega integrala.

NALOGE

823. Glede na sliko in oznake zapišite vrednosti določenih integralov:



a) $\int_0^3 f(x)\,dx$

b) $\int_3^4 f(x)\,dx$

c) $\int_6^8 f(x)\,dx$

č) $\int_3^6 f(x)\,dx$

d) $\int_0^4 f(x)\,dx$

e) $\int_3^8 f(x)\,dx$

f) $\int_8^6 f(x)\,dx$

g) $\int_3^0 f(x)\,dx$

h) $\int_6^3 f(x)\,dx$

i) $\int_4^3 f(x)\,dx$

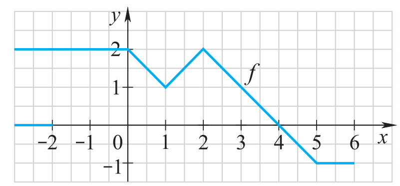
j) $\int_6^0 f(x)\,dx$

k) $\int_0^3 2f(x)\,dx$

l) $\int_2^2 f^2(x)\,dx$

m) $\int_3^8 |f(x)|\,dx$

824. Izračunajte določene integrale glede na graf funkcije f:



a) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

b) $\int_3^5 f(x)\,dx$

c) $\int_0^{-2} f(x)\,dx$

č) $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$

d) $\int_4^2 (-f(x))\,dx$

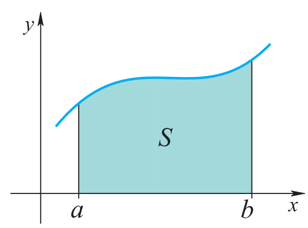
e) $\int_3^6 |f(x)|\,dx$

f) $\int_0^4 3f(x)\,dx$

Zveza med nedoločenim in določenim integralom

Določeni integral funkcije f je po absolutni vrednosti enak ploščini lika med grafom funkcije in abscisno osjo nad intervalom, kjer f ne spremeni predznaka. Če gre za linearno funkcijo, je ta lik trapez in lahko natančno izračunamo njegovo ploščino, s tem pa določeni integral. V vseh drugih primerih pa smo ga lahko doslej izračunali le približno – seštevali smo ploščine liku včrtanih ali očrtanih pravokotnikov. Zdaj bomo izpeljali formulo, ki nam bo omogočala natančen izračun ploščine krivočrtnega lika oz. natančno vrednost določenega integrala. Morda se bo kakšnemu matematiku zdela izpeljava poenostavljena in premalo korektna, vendar bi radi pokazali le osnovno idejo. Matematično povsem korektna izpeljava bi od nas terjala nekoliko več napora in časa.

Naj bo f pozitivna zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Radi bi izračunali ploščino krivočrtnega lika med grafom funkcije f in abscisno osjo na tem intervalu:

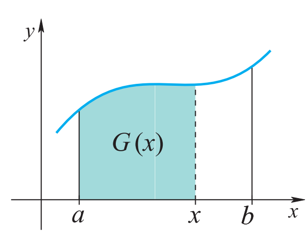


$$S = \int_a^b f(t)dt$$

Če je x poljubna vrednost med a in b, lahko definiramo novo funkcijo G takole:

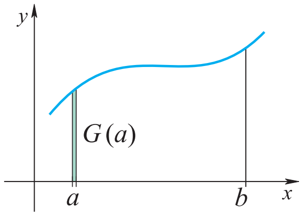
$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

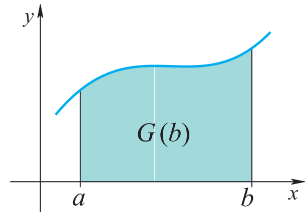
Funkcija G predstavlja ploščino krivočrtnega lika med grafom f in abscisno osjo na intervalu $[a, x]$.



Funkcija G je torej definirana na intervalu $[a, b]$. Njena vrednost na mejah definicijskega območja je enaka:

$$G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \qquad\qquad G(b) = \int_a^b f(t)dt = S$$



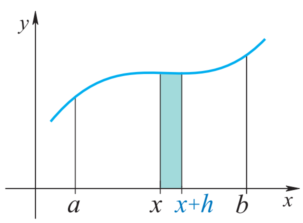


Predpostavimo, da je funkcija G odvedljiva, in poiščimo njen odvod:

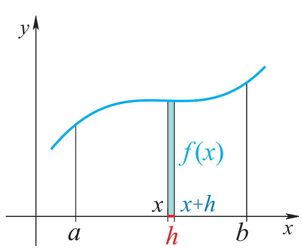
$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

Razlika $G(x+h) - G(x)$ je ravno ploščina lika na intervalu $[x, x+h]$:



Če za h vzamemo zelo zelo majhno število, dobimo zelo zelo ozek »pravokotnik«, ki ima osnovnico enako h, višino približno $f(x)$, ploščino pa $h \cdot f(x)$.



Tedaj je:

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt \doteq h \cdot f(x)$$

Delimo to enačbo s h in napravimo limito, saj smo rekli, da velja za h, ki je praktično enak 0:

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hf(x)}{h} = f(x)$$

Tako smo izračunali odvod funkcije G:

$$G'(x) = f(x)$$

Od tod je razvidno, da je funkcija G nedoločeni integral funkcije f:

$$G(x) = \int f(x)\,dx$$

Vsaka funkcija ima več nedoločenih integralov, ki se med seboj razlikujejo za aditivno konstanto. Če je $F(x)$ tudi njen nedoločeni integral, potem je

$$G(x) = F(x) + C.$$

Ker je $G(a) = 0$, velja:

$$0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a),$$

od tod:

$$G(x) = F(x) - F(a)$$

in

$$G(b) = F(b) - F(a).$$

Ker je $G(b) = \int_a^b f(t)dt$, velja:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Ugotovili smo, da določeni integral izračunamo tako, da poiščemo $F(x)$, ki je nedoločeni integral funkcije f, in vanj vstavimo najprej zgornjo mejo, potem pa odštejemo vrednost nedoločenega integrala na spodnji meji.

Zaključimo:

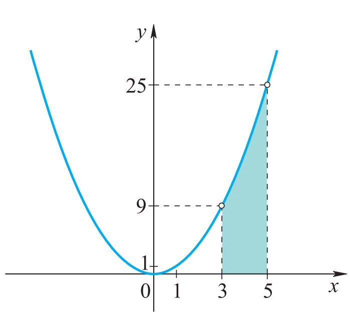
Med nedoločenim in določenim integralom velja zveza, ki jo imenujemo **Newton-Leibnizova formula** ali **osnovni izrek integralskega računa:**

Določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ je enak razliki vrednosti nedoločenega integrala $F(x)$ na zgornji in spodnji meji:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ če je } F'(x) = f(x)}$$

ZGLED

Ocenimo in potem izračunajmo $\int_3^5 x^2\,dx$.



Včrtan pravokotnik ima ploščino: $2 \cdot 9 = 18$.

Očrtan pravokotnik ima ploščino: $2 \cdot 25 = 50$.

Od tod ocena: $18 \leq \int_3^5 x^2\,dx \leq 50$

Zdaj pa izračunajmo pravo vrednost:

$$\int_3^5 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\,\Big|_3^5 = \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3}$$

K lastnostim določenega integrala, ki smo jih spoznali v prejšnjem razdelku, dodajmo še dve, ki smo ju že srečali pri lastnostih nedoločenega integrala:

8. Za dve zvezni funkciji f in g na intervalu $[a, b]$ velja, da je določeni integral vsote enak vsoti določenih integralov:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

9. Konstantni faktor, s katerim je pomnožena funkcija pod integralskim znakom, lahko pišemo pred integralski znak:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

ZGLEDI

1. Izračunajmo vrednosti določenih integralov:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\,\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\,\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4 - 0 = 4$$

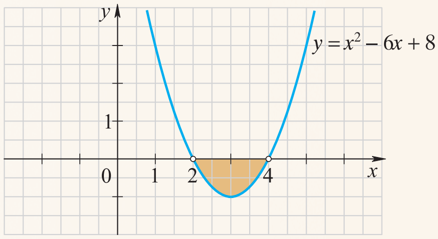
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x\,\Big|_0^{\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 2} - \mathrm{e}^0 = 2 - 1 = 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx = \sin x\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3}{5}\,x^{\frac{5}{3}}\,\Big|_0^1 = \frac{3}{5}(1-0) = \frac{3}{5}$$

2. Izračunajmo ploščino osenčenega lika, ki ga parabola na sliki oklepa z abscisno osjo.



Funkcija $f(x) = x^2 - 6x + 8$, ki jo integriramo, je na intervalu [2, 4] negativna, zato bo tudi vrednost integrala negativna:

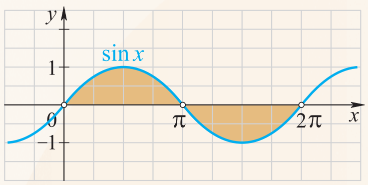
$$\int_2^4 (x^2 - 6x + 8)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 8x\right)\Big|_2^4 =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - 3 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2\right) = 5\tfrac{1}{3} - 6\tfrac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

Ploščina je enaka absolutni vrednosti tega števila.

$$S = \left|\int_2^4 (x^2 - 6x + 8)\, dx\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$$

3. Izračunajmo ploščino osenčenega dela na sliki, pri katerem je krivulja graf funkcije $f(x) = \sin x$.



$$S = \int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1 - 1) = 0$$

Ploščina osenčenega lika ni enaka nič. Vrednost integrala na intervalu $[\pi, 2\pi]$ je namreč negativna in se odšteje od vrednosti integrala na intervalu $[0, \pi]$. Da se izognemo tej napaki, lahko integriramo v dveh delih in upoštevamo absolutne vrednosti.

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx\right|$$

Ker pa sta oba dela ploščinsko enaka, lahko ploščino izračunamo tudi tako, da ploščino prvega dela pomnožimo z 2.

$$S = 2\int_0^{\pi} \sin x\, dx = -2\cos x\Big|_0^{\pi} = -2(\cos \pi - \cos 0) = -2(-1 - 1) = 4$$

Kadar rešujemo integral z uvedbo nove spremenljivke, moramo pri določenem integralu ustrezno spremeniti tudi meje integriranja.

V integralu $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ se meji integrala a in b nanašata na spremenljivko x.

Če uvedemo novo spremenljivko u namesto $g(x)$, spremenimo tudi meji določenega integrala, ki se nanašata na spremenljivko u.

Spremenljivka x se giblje na intervalu $[a, b]$;

spremenljivka $u=g(x)$ se giblje na intervalu $[g(a), g(b)]$:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du}$$

Funkcija g, ki jo izberemo za substitucijo, mora biti injektivna na danem intervalu.

ZGLEDI

1. $\displaystyle\int_0^e \frac{x\,dx}{x^2+1}$

Nova spremenljivka je $t=x^2+1$, njen diferencial $dt=2x\,dx$, nova spodnja meja $t=1$ in nova zgornja meja c.

$$\int_0^e \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_1^{e^2+1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\,\Big|_1^{e^2+1} = \frac{1}{2}(\ln(e^2+1)-\ln 1) = \ln\sqrt{e^2+1}$$

2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{\cos x}\,dx$

Nova spremenljivka je $t=\cos x$, njen diferencial $dt=-\sin x\,dx$, nova spodnja meja $t=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ in zgornja meja $t=\cos\frac{\pi}{2}=0$.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{\cos x}\,dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{t}\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}}\,\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-0\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

3. $\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{x^2+4}\, x\, dx$

Z novo spremenljivko $x^2+4=t^2$ in njenim diferencialom $x\,dx=t\,dt$ spremenimo tudi integracijski meji: če je na spodnji meji $x=0$, je potem $t=\sqrt{0+4}=2$, in če je na zgornji meji $x=\sqrt{5}$, je potem $t=\sqrt{(\sqrt{5})^2+4}=3$.

$$\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{x^2+4}\, x\, dx=\int_2^3 t\cdot t\, dt=\int_2^3 t^2\, dt=\frac{t^3}{3}\Big|_2^3=\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{19}{3}$$

4. $\int_{-1}^{1} x(3x^2+1)^4\, dx$

Nova spremenljivka je $t=3x^2+1$, njen diferencial $dt=6x\,dx$, nova spodnja meja $t=4$ in nova zgornja meja $t=4$. Očitno je prišlo do napake, saj je integral pri enakih mejah enak 0. Naredili smo napako in za novo spremenljivko vzeli funkcijo, ki ni injektivna na $[-1, 1]$.

5. Koncentracija zdravila v krvi bolnika (v mg/ml) se spreminja po zakonu $C(t)=4e^{-0{\cdot}3t}$, pri čemer t pomeni čas v dnevih. Izračunajmo povprečno koncentracijo za prvih pet dni po zaužitju zdravila in koncentracijo med tretjim in petim dnem.

Po formuli za povprečno vrednost dobimo odgovor na prvo vprašanje:

$$\frac{1}{5-0}\int_0^5 4e^{-0{\cdot}3t}\, dt=\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{0{\cdot}3}\right)e^{-0{\cdot}3t}\Big|_0^5=-\frac{8}{3}\left(e^{-1{\cdot}5}-1\right)\doteq 2{\cdot}07.$$

In še odgovor na drugo vprašanje:

$$\frac{1}{5-3}\int_3^5 4e^{-0{\cdot}3t}\, dt=\frac{4}{2}\left(-\frac{1}{0{\cdot}3}\right)e^{-0{\cdot}3t}\Big|_3^5=-\frac{20}{3}\left(e^{-1{\cdot}5}-e^{-0{\cdot}9}\right)=1{\cdot}22.$$

6. Krvni tlak je pomemben pokazatelj zdravstvenega stanja posameznika. Zdravstvene raziskave so pokazale, da je za človeka med 17. in 70. letom starosti krvni tlak normalno porazdeljen z aritmetično sredino 119˙7 mm Hg in standardno deviacijo 10˙9 mm Hg.

Z uporabo tehnologije izračunajmo:

a) Kolikšen odstotek ljudi ima krvni tlak med 140 in 160 mm Hg, kar že pomeni prvo stopnjo tveganja?
b) Kolikšen odstotek ljudi ima krvni tlak med 160 in 180 mm Hg, kar pomeni drugo stopnjo tveganja?
c) Kolikšen odstotek ljudi ima normalni krvni tlak med 90 in 120 mm Hg?

Rešitev: Iskani odstotek izračunamo kot verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti na intervalu [140, 160]. Spomnimo se normalne porazdelitve:

$$P(140 \le X \le 160) = \int_{140}^{160} \frac{1}{10{\cdot}9\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(X-119{\cdot}7)^2}{2(10{\cdot}9)^2}}\, dx \doteq 0{\cdot}031.$$

Prva stopnja tveganja pri krvnem tlaku ogroža malo več kot 3 % populacije.

$$P(160 \le X \le 180) = \int_{160}^{180} \frac{1}{10{\cdot}9\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(X-119{\cdot}7)^2}{2(10{\cdot}9)^2}}\, dx \doteq 0{\cdot}0001$$

Druga stopnja tveganja pri krvnem tlaku ogroža stotinko odstotka populacije.

$$P(90 \le X \le 120) = \int_{90}^{120} \frac{1}{10{\cdot}9\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(X-119{\cdot}7)^2}{2(10{\cdot}9)^2}}\, dx \doteq 0{\cdot}508$$

Normalni krvni tlak ima (samo) 51 % populacije.

NALOGE

825. Izračunajte z uporabo Newton-Leibnizove formule.

a) $\int_0^3 (x^2 + x)\, dx$

b) $\int_{-1}^2 (6x^3 - 1)\, dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

č) $\int_0^2 (1 - e^x)\, dx$

826. Izračunajte.

a) $\int_{-2}^2 (x^3 - 6x^2 - 2x + 3)\, dx$

b) $\int_{-1}^3 (2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})\, dx$

c) $\int_1^e (x + \frac{1}{x})\, dx$

č) $\int_0^1 x^n\, dx,\ n \ne -1$

d) $\int_1^8 (\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x})\, dx$

e) $\int_0^8 (1 + \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\, dx$

f) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\, dx$

g) $\int_1^{16} (\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\cdot\sqrt[4]{x}})\, dx$

h) $\int_1^4 \frac{(1+x^2)}{x\sqrt{x}}\, dx$

827. Ugotovite, ali velja:

a) $\int_2^3 3^x\,dx = \frac{18}{\ln 3}$

b) $\int_1^e (1-\frac{1}{xe^x})e^x\,dx = e^e - e - 1$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = 1$

č) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx = 1$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

828. Izračunajte povprečne vrednosti funkcij:

a) $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$

b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $[1, 4]$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $[\frac{1}{2}, 2]$

829. Z uvedbo nove spremenljivke izračunajte:

a) $\int_{-1}^{1} (3x-2)^3\,dx$

b) $\int_{-1}^{2} x^2(1-x^3)^2\,dx$

c) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3}\,dx$

č) $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$

d) $\int_{2}^{3} \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$

e) $\int_{2}^{-13} \frac{dx}{5\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

f) $\int_{0}^{4} 3x\sqrt{x^2+9}\,dx$

g) $\int_{0}^{R} x\sqrt{R^2-x^2}\,dx$

830. Ugotovite, ali velja $\int_{-2}^{2} \frac{x+1}{x+3}\,dx = 4 - 2\ln 5$.

831. Izračunajte.

a) $\int_{-1}^{0} (e^{-x} - x)\,dx$

b) $\int_{0}^{1} 5e^x(e^x-1)^4\,dx$

c) $\int_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,dx$

č) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{2+x}$

d) $\int_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

e) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{x}{2}\,dx$

f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-\frac{\pi}{3})\,dx$

g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$

h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x\,dx$

i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(1+\cos^2 x)\,dx$

832. Izračunajte.

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \sin x\,dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cos x\,dx$

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2x\,dx$

833. Dana je funkcija $f(x) = x^3$.

a) Zapišite predpis za inverzno funkcijo f^{-1}.

b) V istem koordinatnem sistemu narišite grafa funkcij f in f^{-1}.

c) Izračunajte $\int_{0}^{4} (\sqrt[3]{x} - x^3)\,dx$.

834. Dan je polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Za katera realna števila a, b in c ima polinom ekstrema v točki $(-1, 0)$ in $(1, -3)$?

b) Narišite graf iskanega polinoma.

c) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta graf polinoma p in abscisna os.

835. Dana je funkcija $f(x)=x^{-2}$.
a) Narišite graf funkcije f.
b) Zapišite enačbo tangente in normale na graf funkcije f v točki z absciso $x_0=-2$.
c) Izračunajte presečišča grafa funkcije f in premice p z enačbo $30x+9y-91=0$.
č) Izračunajte $\int_1^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx$.

836. a) Zapišite definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije $f(x)=-3x^{-3}$.
b) Narišite graf funkcije f. Pokažite, da je funkcija f naraščajoča na intervalu $(0,\infty)$ in $(-\infty, 0)$.
c) Za katero pozitivno realno število a je $\int_a^3 f(x)\,dx=-1\frac{1}{3}$?

837. Dana je funkcija $f\colon [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R};\ f(x)=|2\sin x|$.
a) Narišite graf funkcije f.
b) Izračunajte $S=\int_{-\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx$.

838. a) V koordinatnem sistemu na intervalu $[-\pi, \pi]$ narišite krivuljo $y=\sin 2x$.
b) Zapišite abscise točk dane krivulje, v katerih imajo tangente na krivuljo naklonski kot 135°.
c) Pokažite, da je $\int \sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.
č) Izračunajte $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\,dx$.

839. Dana je funkcija $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R};\ f(x)=\frac{-2}{\cot x}$.
a) Izračunajte $f(-\frac{\pi}{4})$, $f(\frac{\pi}{4})$ in $f(\frac{\pi}{3})$.
b) Narišite graf funkcije f.
c) Zapišite enačbo tangente na graf funkcije f v točki $\frac{\pi}{3}$.
č) Izračunajte $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$.

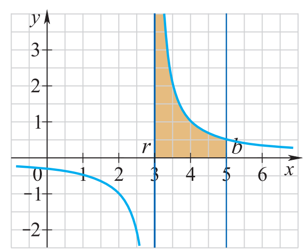
Nepravi integrali (izbirna vsebina)

Določeni integral zvezne in omejene funkcije na intervalu $[a, b]$ je vedno končno realno število. Včasih pa bi radi integrirali funkcije, ki v eni ali več točkah integracijskega intervala niso definirane. V nadaljevanju bomo videli, da si v teh primerih pomagamo z limito. Limito pri integriranju uporabljamo tudi, če je integracijski interval neskončen. Obema vrstama integralov rečemo nepravi ali izlimitirani integrali. Če limita obstaja, je integral konvergenten in ima končno vrednost, če limita ne obstaja, je integral divergenten in ne moremo izračunati njegove vrednosti oz. je ta neskončno.

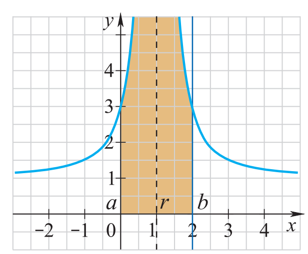
Najprej si oglejmo integrala funkcij, ki nista definirani za vsak $x \in [a, b]$.

Naj bo nezveznost le v eni točki, $x = r$.

$$\int_r^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

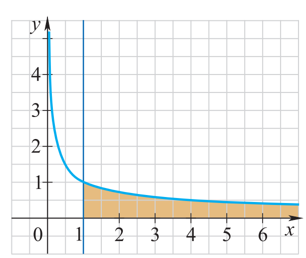


$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{r-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$



Ostal je še integral, pri katerem je integracijski interval neskončen.

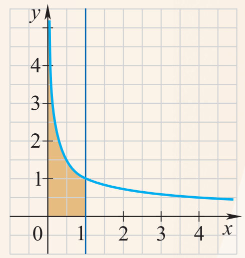
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$



ZGLEDI

1. Preverimo, ali je integral $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ končen.

Funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ni definirana v $x = 0$, v tej točki ima njen graf navpično asimptoto, zato zapišemo:



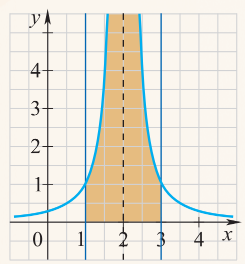
$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (2x^{\frac{1}{2}})\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \to 0} (1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2$$

Ploščina, ki jo krivulja $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $(0, 1)$ oklepa z abscisno osjo, je 2.

2. Izračunajmo še vrednost integrala $\int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$, če obstaja.

Funkcija $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ je nezvezna v $x = 2$. Ker je ta točka na sredini integracijskega intervala, pišemo:



$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(x-2)^2} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x-2}\right)\Big|_1^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x-2}\right)\Big|_{2+\varepsilon}^3 =$$

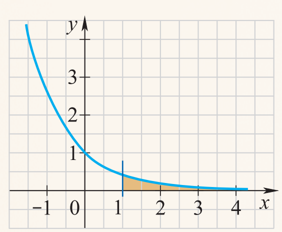
$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{-\varepsilon} + 1\right) - \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Limita ne obstaja, zato ploščine krivočrtnega lika med krivuljo in abscisno osjo ni mogoče izračunati.

3. Poglejmo še integral z neskončnim integracijskim intervalom $\int\limits_1^\infty e^{-x}\,dx$.

$$\int\limits_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int\limits_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty} (-e^{-x})\Big|_1^b = -\lim_{b \to \infty} (e^{-b} - e^{-1}) =$$

$$= e^{-1} - \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{e^b}\right) = e^{-1}$$



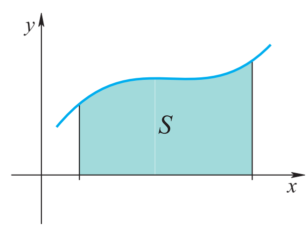
Uporaba določenega integrala v geometriji

Ploščina krivočrtnega lika, ki ga z abscisno osjo oklepa krivulja

Že iz definicije vemo, da določeni integral pomeni ploščino med krivuljo in abscisno osjo.

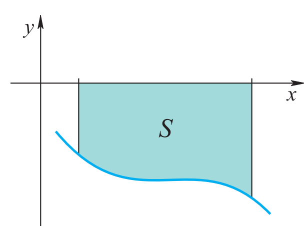
Če je funkcija na celotnem intervalu $[a, b]$ pozitivna, je ploščina kar

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$



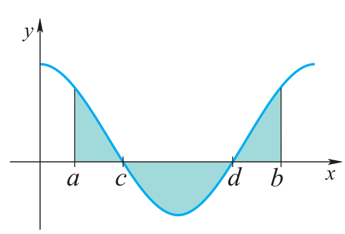
Če je funkcija na celotnem intervalu $[a, b]$ negativna, dobimo

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx.$$



Lahko se zgodi, da na intervalu $[a, b]$ funkcija spreminja predznak. Potem za izračun ploščine potrebujemo njene ničle, da lahko določimo spodnje in zgornje meje integrala.

$$S = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^d f(x)\,dx\right| + \int_d^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

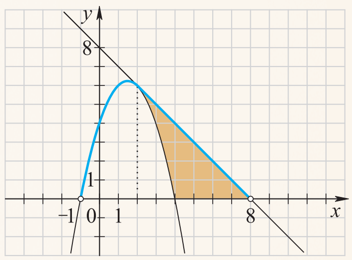


ZGLEDI

1. Izračunajmo ploščino lika med parabolo $y=-x^2+3x+4$, njeno tangento v točki $T(2, y)$ in abscisno osjo, kot kaže slika.

Potrebujemo ordinato točke T; $y(2)=-2^2+3\cdot 2+4=6$; $T(2, 6)$.

Enačbo tangente dobimo z odvajanjem
$y'=-2x+3$, $k_t=y'(2)=-4+3=-1$.
Tangenta: $y-6=-1(x-2)$ oz. $y=-x+8$
$y=-x^2+3x+4=-(x^2-3x-4)=-(x-4)(x+1)$



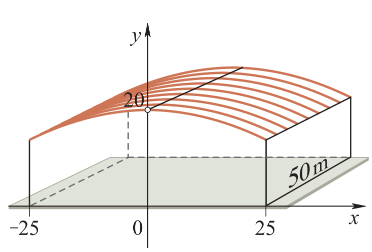
Označeni lik razdelimo na dva dela; od ploščine trikotnika $\frac{6\cdot 6}{2}=18$ odštejemo ploščino lika pod parabolo na intervalu [2, 4].

$$S=\int_2^8(-x+8)\,dx-\int_2^4(-x^2+3x+4)\,dx=18-\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right)\Big|_2^4=$$
$$=18-\left(-\frac{64}{3}+\frac{48}{2}+16\right)+\left(-\frac{8}{3}+\frac{12}{2}+8\right)=18+\frac{56}{3}-24-16+7=\frac{32}{3}=$$
$$=10\frac{2}{3}$$

2. Arhitekt je narisal načrt za novo skladišče, ki bo imelo kvadratni tloris (50 m × 50 m), ob sredini bo visoko 20 m, streha pa bo izbočena navzgor, in sicer se bo njena višina spreminjala po formuli:
$y=20-0{,}01x^2 \qquad -25\le x\le 25$

Kolikšna bo prostornina novega skladišča?

Skladišče si bomo predstavljali kot »prizmo«, ki ima osnovni ploskvi sprednjo in zadnjo steno, višino pa predstavlja dolžina skladišča.
Prostornina vseh »prizem« je enaka produktu ploščine osnovne ploskve in višine.

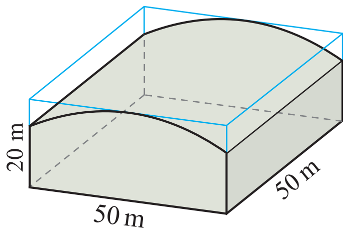


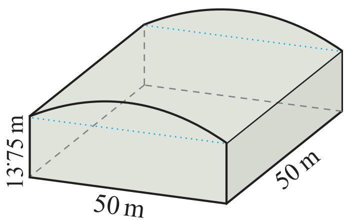
Izračunajmo najprej ploščino osnovne ploskve (to je površino sprednje stene):

$$\int_{-25}^{25}(20-0{,}01x^2)\,dx=2\int_0^{25}(20-0{,}01x^2)\,dx=2\left(20x-0{,}01\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{25}=$$
$$=2\left(20\cdot 25-0{,}01\frac{25^3}{3}\right)=2\left(500-\frac{625}{12}\right)=\frac{5375}{6}=895{,}8\overline{3}$$

$$V=\frac{5375}{6}\cdot 50=44\,791{,}\overline{6}$$

Prostornina skladišča bo okoli 44 800 m^3.





Za koliko odstotkov bi bila prostornina večja, če bi imelo skladišče ravno streho, in sicer tako visoko, kot je zdaj na sredini, oz. za koliko bi bila prostornina manjša, če bi bila ravna streha na isti višini, kot je zdaj ob strani?

Skladišče z ravno streho na višini 20 m bi imelo prostornino:

$V = 50\text{ m} \cdot 20\text{ m} \cdot 50\text{ m} = 50\,000\text{ m}^3$,

kar je za $\frac{5208{,}33}{44\,791{,}67} = 11{,}6\,\%$ več kot po načrtu.

Izračunajmo višino strehe ob straneh:

$f(25) = 20 - 0{,}01 \cdot (25)^2 = 13{,}75$

Ob strani je streha na višini 13,75 m.

Skladišče z ravno streho na višini 13,75 m bi imelo prostornino:

$V = 50\text{ m} \cdot 13{,}75\text{ m} \cdot 50\text{ m} = 34\,375\text{ m}^3$,

kar je za $\frac{10\,416{,}67}{44\,791{,}67} = 23{,}3\,\%$ manj kot po načrtu.

3. Z določenim integralom pokažimo, da je ploščina kroga s polmerom r enaka πr^2.

Najprej zapišemo enačbo krožnice v eksplicitni obliki: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Če integriramo funkcijo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $[-r, r]$, dobimo pol ploščine kroga, vendar zaradi simetrije in večje enostavnosti računanja raje pišemo:

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

V poglavju o nedoločenih integralih smo že uporabili novo spremenljivko $x = r\sin t$.

Diferenciramo $dx = r\cos t\, dt$ in spremenimo integracijski meji: če je $x = 0$, je $t = \arcsin 0 = 0$; če je $x = r$, je $t = \arcsin\frac{r}{r} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t\, dt = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 4r^2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = 2r^2\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\, dt\Big) =$$

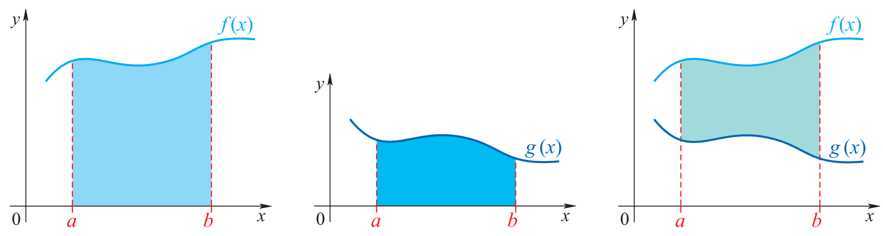
$$= 2r^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2 + \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \pi r^2$$

Ploščina med krivuljama na intervalu

Doslej smo računali ploščine likov, ki so jih grafi različnih funkcij na danem intervalu oklepali z abscisno osjo. Nič težje ne bo računanje ploščine likov na danem intervalu med grafoma dveh različnih funkcij.

Naj bosta funkciji f in g na intervalu $[a, b]$ pozitivni in za vsak x s tega intervala naj bo vrednost funkcije f večja ali kvečjemu enaka vrednosti funkcije g. To pomeni, da graf funkcije f leži nad grafom funkcije g.

Izračunajmo ploščino lika, ki ga oklepata grafa funkcij f in g na intervalu $[a, b]$.

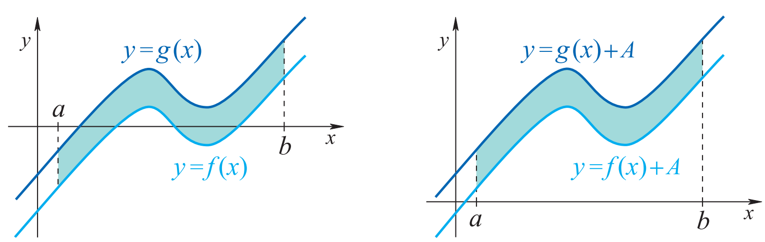


Ploščina med grafom funkcije f in abscisno osjo je $\int_a^b f(x)\,dx$, ploščina med grafom funkcije g in abscisno osjo je $\int_a^b g(x)\,dx$, ploščina lika med obema grafoma pa je enaka razliki:

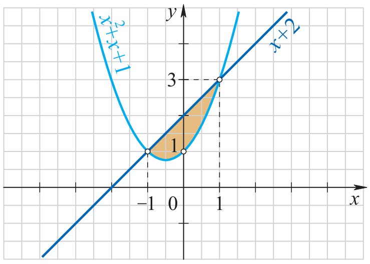
$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

Ta formula za računanje ploščine med dvema krivuljama je pravilna, tudi če funkciji na intervalu $[a, b]$ nista povsod pozitivni. Obema namreč lahko prištejemo tako veliko konstanto A, da se grafa premakneta nad abscisno os, ploščina lika med krivuljama pa ostane enaka:

$$S = \int_a^b (f(x) + A)\,dx - \int_a^b (g(x) + A)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



ZGLEDA



1. Izračunajmo ploščino lika, ki ga določata krivulji $y=x^2+x+1$ in $y=x+2$.

Izračunajmo, v katerih točkah se sekata parabola in premica:

$x^2+x+1=x+2$

$x^2-1=0$

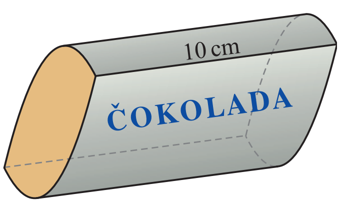
$(x-1)(x+1)=0$

$x_1=1,\ x_2=-1$

Računali bomo torej določeni integral na intervalu [−1, 1]:

$$S=\int_{-1}^{1}((x+2)-(x^2+x+1))\,dx=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx=(-\tfrac{x^3}{3}+x)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=(-\tfrac{1}{3}+1)-(\tfrac{1}{3}-1)=\tfrac{4}{3}$$



2. Čokolado so začeli prodajati v 10 cm dolgi embalaži nenavadne oblike.

Presek škatle določata krivulji:

$y=4x-x^2$

$y=x^2-2x$

Kolikšna količina čokolade gre v tako embalažo?

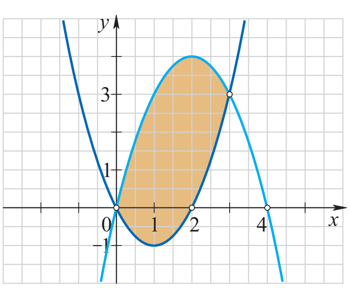
Presečišče krivulj:

$4x-x^2=x^2-2x$

$2x^2-6x=0$

$x(x-3)=0$

$x_1=0,\ x_2=3$



Volumen embalaže bomo izračunali po formuli za volumen prizme (produkt ploščine osnovne ploskve in višine).

Ploščina osnovne ploskve je enaka:

$$S=\int_{0}^{3}((4x-x^2)-(x^2-2x))\,dx=\int_{0}^{3}(-2x^2+6x)\,dx=(-2\tfrac{x^3}{3}+6\tfrac{x^2}{2})\Big|_{0}^{3}=$$

$$=-18+27=9$$

Volumen je tedaj enak:

$V=9\ \text{cm}^2\cdot 10\ \text{cm}=90\ \text{cm}^3$

V embalažo gre 90 cm^3 čokolade.
Koliko gramov je to?

Ker je gostota čokolade ρ enaka
$1{\cdot}24\ \text{kg/l}=1{\cdot}24\ \text{kg/dm}^3=1{\cdot}24\ \text{g/cm}^3$, gre v embalažo
$m=\rho\cdot V=111{\cdot}6$ g čokolade.

NALOGE

840. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta graf funkcije f in abscisna os.

a) $f(x)=9-x^2$
b) $f(x)=x^3+4x^2$
c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-4$
č) $f(x)=(x+1)^3$; $x\in[-1, 0]$
d) $f(x)=-x^3-x^2+8x+12$
e) $f(x)=x^3+3x^2-4$
f) $f(x)=(x-1)^4-1$
g) $f(x)=\frac{2-x}{x+2}$
h) $f(x)=\cos x$; $x\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

841. Za katero realno število k ima lik na intervalu $[-1, 3]$ med premico $y=kx+2$ in abscisno osjo ploščino 14?

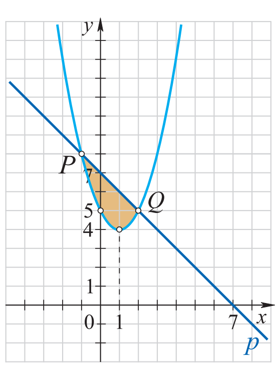
842. Iz množice funkcij $f(x)=ax^2-6ax+5a$; $a\in\mathbb{R}^-$ narišite graf tiste funkcije, ki z abscisno osjo oklepa lik s ploščino 32.

843. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje z enačbami $y=x^2+x+1$, $x=0$, $x=1$ in $y=0$. Narišite sliko.

844. V koordinatnem sistemu narišite grafe funkcij f in g ter izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta.

a) $f(x)=-x$ in $g(x)=-x^2+2x$
b) $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$ in $g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$
c) $f(x)=x^2-2x$ in $g(x)=4-x^2$
č) $f(x)=-x^2+4x-3$ in $g(x)=x^2-3$

845. Na sliki sta narisani premica p in krivulja z enačbo $y=(x-1)^2+4$, ki se sekata v točkah P in Q.



a) Zapišite enačbo premice p.
b) Poiščite koordinati točk P in Q.
c) Izračunajte ploščino osenčenega območja.

846. Dani sta enačbi parabole $y=x^2-4x+5$ in premice $x-y+1=0$.

a) Izračunajte njuni presečišči.
b) Narišite ju v istem koordinatnem sistemu.
c) V presečiščih parabole in premice zapišite enačbi tangent na parabolo.
č) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta parabola in premica.

847. Dana je funkcija $f(x)=x^3+1$.

a) Narišite graf funkcije f.
b) Pod katerim kotom seka graf funkcije abscisno os? Rezultat zaokrožite na minuto natančno.
c) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije f in premici z enačbama $x=3$ in $x-2y+1=0$.

848. Dan je polinom $p(x)=x^3-6x^2+9x-4$.

a) Zapišite presečišča grafa polinoma s koordinatnima osema in koordinati ekstremov.
b) Narišite graf polinoma.
c) Na katerem intervalu je graf polinoma nad premico $x-y-4=0$?
č) Na intervalu, ki vsebuje lokalni minimum polinoma p, izračunajte ploščino lika med grafom polinoma p in dano premico.

849. Dan je polinom $p(x)=-3x^3+3x^2+3x-3$.

a) Zapišite ničle polinoma in presečišče grafa polinoma z ordinatno osjo.
b) Izračunajte odvod polinoma p ter zapišite intervala, na katerih je polinom padajoča funkcija.
c) Zapišite koordinati ekstremov in narišite graf polinoma.
č) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta graf polinoma in abscisna os.

850. Dan je polinom $p(x) = a(x-1)^2(x+2)$; $a \in \mathbb{R}$.

a) Pokažite, da je za $a = 3$ ordinata lokalnega maksimuma polinoma p enaka 12.

b) Za katero realno število a je ploščina lika med ničlama $x_1 = 1$ in $x_2 = -2$ grafa polinoma p in abscisno osjo enaka 27?

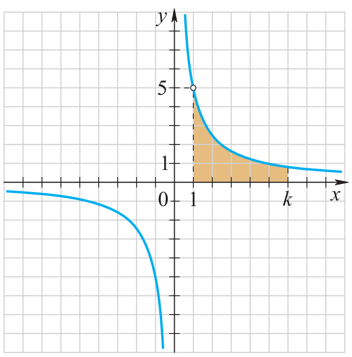
c) Narišite graf polinoma iz točke a.

851. a) Narišite graf funkcije $f(x) = \frac{-1}{x} - 1$.

b) V katerih točkah grafa funkcije f je tangenta na graf vzporedna simetrali lihih kvadrantov?

c) Izračunajte ploščino lika med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[-4, -1]$. Rezultat zaokrožite na štiri mesta.

852. Poiščite obrazec, ki opisuje ploščino lika s slike v odvisnosti od parametra k. Za kateri k bo ploščina lika enaka 6?



853. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje z enačbami $y = \frac{2}{x}$, $x = 1$, $x = 5$ in $y = 0$. Narišite sliko.

854. Dani sta funkciji $f(x) = \frac{6}{x}$ in $g(x) = -x + 7$.

a) Izračunajte presečišči in kota med grafoma funkcij f in g.

b) V istem koordinatnem sistemu narišite njuna grafa.

c) Kolikšna je ploščina lika, ki ga omejujeta dana grafa? Rezultat zaokrožite na tri mesta.

855. Narišite graf funkcije $f(x) = -\frac{3}{x^2}$ in izračunajte ploščino lika med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[\frac{1}{3}, 6]$.

856. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije f in koordinatni osi:

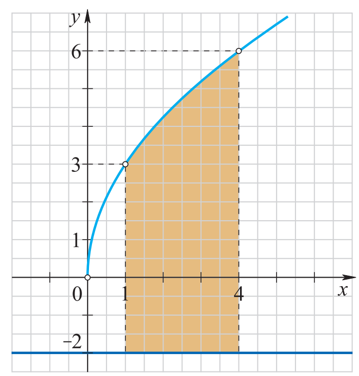
a) $f(x) = e^{x+1} - 1$

b) $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

857. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo krivulja z enačbo $y = 3^x - 3$ in koordinatni osi, ter rezultat zaokrožite na 3 mesta.

858. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo krivulja z enačbo $y = 2^{x+2} - 1$ in koordinatni osi, ter rezultat zaokrožite na 4 mesta.

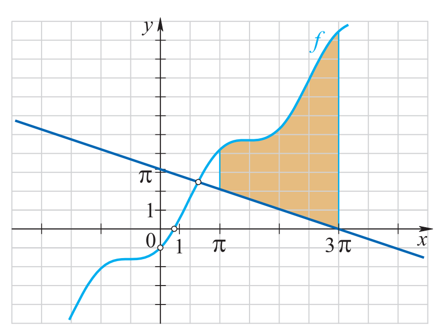
859. Izračunajte ploščino lika s slike.



860. V istem koordinatnem sistemu narišite krivulji $y = \sqrt{x}$ in $y = 2^x - 1$ in izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta. Rezultat zapišite v natančni obliki in ga nato zaokrožite na tri mesta.

861. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo krivulji z enačbami $y = \sin x$, $y = \cos x$ in abscisna os na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Narišite sliko.

862. Izračunajte ploščino lika s slike, če je $f(x) = x - \cos x$ in $y = -\frac{1}{3}x + \pi$ enačba premice.



863. Dana je funkcija $f(x) = |4\sin x|$.

a) Na intervalu $[-\pi, 2\pi]$ narišite graf funkcije f.

b) Izračunajte ploščino lika, ki ga oklepata graf funkcije f in abscisna os na danem intervalu.

864. V istem koordinatnem sistemu narišite lik, ki ga določajo krivulja $y = \tan x$ in premici $y = \sqrt{3}$ ter $x = 0$. Izračunajte ploščino dobljenega lika. Rezultat zaokrožite na tri mesta.

865. Funkcija $g(x) = 2\sin 2x$ je odvod funkcije f.

a) Graf funkcije f gre skozi točko $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$. Zapišite predpis za funkcijo f in narišite njen graf.

b) Za kateri $k \in \mathbb{R}^+$ ima lik med grafom funkcije $k \cdot f(x)$ in abscisno osjo na intervalu $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ploščino 2?

866. Dana je funkcija $f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) \to \mathbb{R}$; $f(x) = 1 + \cos x$.

a) Narišite graf funkcije f.

b) V katerih točkah grafa funkcije f so tangente na graf vzporedne abscisni osi?

c) Izračunajte ploščino lika, ki ga na danem intervalu oklepata graf funkcije f in abscisna os.

867. Funkcija $g(x) = \frac{1}{1-\cos 2x}$ je odvod funkcije f.

a) Graf funkcije f gre skozi točko $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$. Zapišite predpis za funkcijo f.

b) Za kateri $k \in \mathbb{R}$ ima lik med grafom funkcije $k \cdot g(x)$ in abscisno osjo na intervalu $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ ploščino $\frac{1}{3}$?

868. Dana je funkcija $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$.

a) Narišite graf funkcije f.

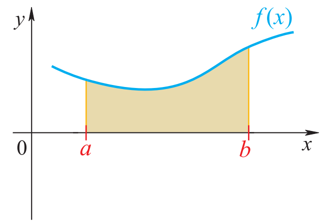
b) Za katere x je $f(x) = 1$?

c) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta graf funkcije f in premica $y = 1$.

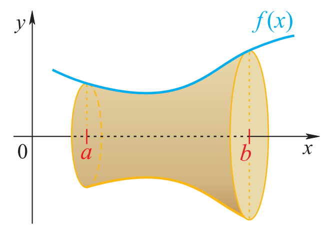
869. Izračunajte ploščino med krivuljama $y = \cos 2x$ in $y = \cos^2 x$ na intervalu med zaporednima maksimumoma. Pokažite, da imata funkciji maksimume v istih točkah.

Prostornina rotacijskega telesa

Naj bo funkcija f pozitivna na intervalu $[a, b]$.



Zavrtimo lik, ki ga na tem intervalu omejujeta abscisna os in graf funkcije $y = f(x)$, okoli abscisne osi za 360°. Dobimo vrtenino.

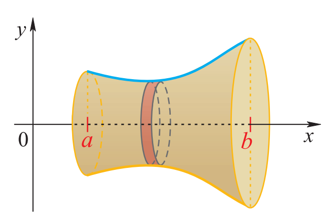


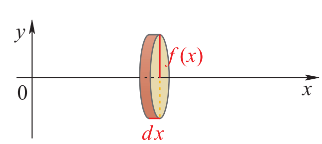
Prostornina vrtenine je enaka:

$$\boldsymbol{V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Prostornina valja: $V = \pi r^2 \cdot v$

Formulo lahko izpeljemo podobno kot formulo za računanje ploščine. Vrtenino razrežemo na tanke »rezine«, zelo podobne valjem, katerih polmer osnovne ploskve je enak funkcijski vrednosti $f(x)$, višina posameznega valja pa je enaka širini rezine dx. Prostornina rezine je potem majhen del celotne prostornine ali $dV = \pi(f(x))^2 dx$.





Integrirati pomeni združevati.

Če seštejemo prostornine vseh teh delov (»rezin«) oz. če integriramo $\int_a^b dV$, dobimo iskano formulo za celotno prostornino vrtenine $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$.

ZGLEDI

1. Izračunajmo prostornino krogle s polmerom 1.

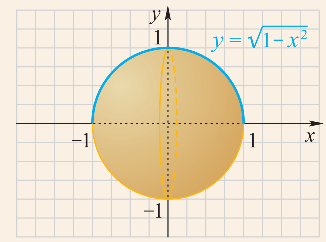
Kroglo dobimo, če polkrog zavrtimo za 360° okoli abscisne osi. Vzemimo polkrog, ki je na intervalu [–1, 1] omejen z abscisno osjo in krivuljo $y=\sqrt{1-x^2}$.

$$V=\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\int_{-1}^{1}y^2dx=\pi\int_{-1}^{1}[\sqrt{1-x^2}]^2dx\;=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\pi(x-\tfrac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1}=\pi[(1-\tfrac{1}{3})-(-1+\tfrac{1}{3})]=$$

$$=\pi(\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{3})=\tfrac{4\pi}{3}$$

V geometriji smo že srečali formulo za prostornino krogle z radijem r: $V=\frac{4\pi r^3}{3}$.



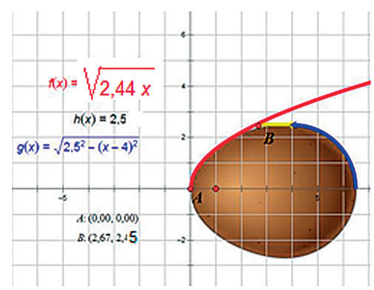
Enačba krožnice s polmerom 1 v središčni legi je $x^2+y^2=1$, enačba krivulje v zgornji polovici je

$y=\sqrt{1-x^2}$,

v spodnji polovici pa

$y=-\sqrt{1-x^2}$.

2. Kurje jajce na sliki ima zanimivo geometrijsko obliko – zlepljeno je iz paraboloida, valja in polovice krogle. S pomočjo računalniškega programa lahko to prikažemo in izračunamo njegovo prostornino.

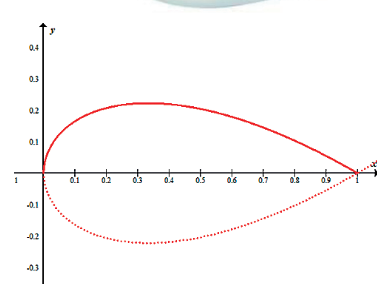


Parabola s temenom v izhodišču ima enačbo $y^2=2{\cdot}44x$,
konstantna funkcija je $h(x)=2{\cdot}5$,
premaknjena krožnica pa $(x-4)^2+y^2=6{\cdot}25$.

$$V=\pi[\int_{0}^{2\cdot67}2{\cdot}44x\,dx+\int_{2\cdot67}^{4}2{\cdot}5^2\,dx+\int_{4}^{6\cdot5}(6{\cdot}25-(x-4)^2)\,dx]=$$

$$=\pi[1{\cdot}22x^2\Big|_{0}^{2\cdot67}+6{\cdot}25x\Big|_{2\cdot67}^{4}+(-x^2+8x-9{\cdot}75)\Big|_{4}^{6\cdot25}]=86\text{ cm}^3$$

3. Žarnica ima podobno obliko kot vrtenina, ki jo dobimo z vrtenjem krivulje $y=\sqrt{\frac{x}{3}}\,(1-x)$ med obema ničlama. Izračunajmo prostornino žarnice, če je enota 1 dm.



Najprej izračunamo ničli: $\sqrt{\frac{x}{3}}\,(1-x)=0,\ x_1=0,\ x_2=1$.

$$V=\pi\int_{0}^{1}(\sqrt{\tfrac{x}{3}}\cdot(1-x))^2\,dx=\pi\int_{0}^{1}\tfrac{x}{3}(1-x)^2\,dx=\tfrac{\pi}{3}\int_{0}^{1}(x-2x^2+x^3)\,dx=$$

$$=\tfrac{\pi}{3}(\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{2x^3}{3}+\tfrac{x^4}{4})\Big|_{0}^{1}=\tfrac{\pi}{3}(\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4})=\tfrac{\pi}{3}\cdot\tfrac{1}{12}=\tfrac{\pi}{36}$$

Prostornina žarnice, zaokrožena na cela mesta, je 87 cm³.

NALOGE

870. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga na intervalu $[-3, 6]$ omejujeta abscisna os in premica $x-3y+6=0$, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$.

871. Izračunajte prostornine teles, ki jih dobimo, če like, ki jih omejujejo koordinatni osi in grafi danih funkcij, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$.

a) $f(x)=4-2x$
b) $f(x)=x^3+1$
c) $f(x)=\sqrt{x+4}$
č) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$

872. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga omejujeta abscisna os in parabola $y=-x^2+8x-12$, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$. Rezultat zaokrožite na tri mesta. Narišite sliko.

873. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga omejujeta krivulji $y=x^2$ in $y=\sqrt{x}$, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$. Narišite sliko.

874. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga na intervalu $[1, 4]$ omejujeta abscisna os in krivulja z enačbo $y=\frac{1}{x}$, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$.

875. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga na intervalu $[1, 3]$ omejujeta abscisna os in krivulja z enačbo $y=\frac{x+1}{x}$, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$. Rezultat zaokrožite na tri mesta.

876. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x)=-x^2+2$ in $f(x)=|x|$, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$. Narišite sliko.

877. Izračunajte prostornini teles, ki ju dobimo, če lika, ki ju na danih intervalih omejujejo abscisna os in krivulji z danima enačbama, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$.

a) $y=\cos x$ na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
b) $y=1+\sin x$ na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

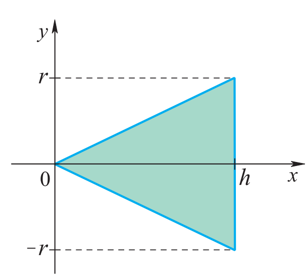
878. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga omejujeta krivulja z enačbo $y^2=4x+4$ in premica $x=3$, zavrtimo okoli abscisne osi za $180°$.

879. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga omejujeta abscisna os in graf polinoma $y=x^3+3x^2-4$, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$. Rezultat zaokrožite na desetinko natančno. Narišite sliko.

880. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga omejujeta krivulja $y=(x+2)^2$ in simetrala sodih kvadrantov, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$. Narišite sliko.

881. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga omejujejo abscisna os ter grafa funkcij $f(x)=(x+1)^3+1$ in $f(x)=-x+2$, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$. Narišite sliko.

882. Trikotnik na sliki z višino h in stranico r zavrtimo za $180°$ okoli abscisne osi. Poiščite formulo, ki opisuje volumen dobljenega telesa v odvisnosti od višine h in stranice r.



883. Izračunajte prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik, ki ga na intervalu $[-1, 1]$ omejujeta abscisna os in krivulja z enačbo $y = e^{\frac{x}{2}}$, zavrtimo okoli abscisne osi za $360°$. Rezultat zaokrožite na dve mesti.

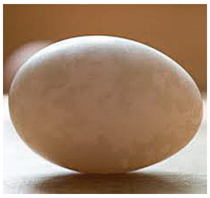
884. Izračunajte prostornino krogle s polmerom R. Kroglo dobimo z vrtenjem polkroga s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom R okoli abscisne osi za $360°$.

885. Izračunajte prostornino vrtenine, ki jo dobimo z vrtenjem elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ okoli abscisne osi za $360°$.

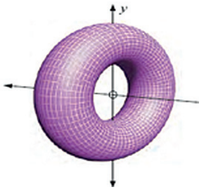
886. Izračunajte prostornino rotacijskega telesa, če se okoli abscisne osi za 360° zavrti lik, ki ga določajo dane krivulje:

a) $y=x^2$, $y=0$, $x=2$
b) $y=\sqrt{9-x^2}$, $y=0$
c) $y=x^3$, $y=0$, $x=0$
č) $y=x^2+1$, $y=x+3$
d) $y=-\sqrt{x}$, $y=-2$, $x=0$
e) $y=4-x^2$, $y+x=2$
f) $y=2x$, $y=x$, $x=1$
g) $y=x-x^2$, $y=0$

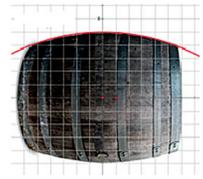
887. Račje jajce ima obliko elipsoida, ki nastane z vrtenjem elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ okoli abscisne osi. Izračunajte prostornino jajca, če je enota centimeter.



888. Izračunajte prostornino torusa, če se okoli abscisne osi zavrti krožnica $x^2+(y-3)^2=1$.

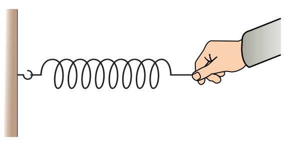


889. Izračunajte prostornino soda, ki je visok 12 dm, premer na obeh koncih je 8 dm, na sredini pa 10 dm. Pomagajte si s tehnologijo.



Uporaba določenega integrala v fiziki

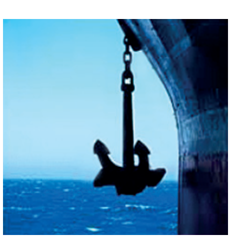
(izbirna vsebina)



$$A(x)=\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

$$s(t)=s(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt,$$

$$v(t)=v(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt$$



ZGLEDI

1. Vzmet se pod vplivom sile $F=3$ N raztegne za 2 cm. Izračunajmo delo, ki je bilo opravljeno, če smo vzmet raztegnili za 5 cm.

Po Hookovem zakonu $F(x)=kx$ dobimo, če je bil raztezek v okviru veljavnosti zakona, koeficient vzmeti: $F(2)=k\cdot 2=3,\ k=\frac{3}{2}$.

$$A=\int_0^5 \frac{3}{2}x\,dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^5=\frac{3\cdot 5^2}{4}=\frac{75}{4}\ \text{Ncm}=\frac{3}{16}\ \text{Nm}$$

2. Pospešek delca je dan z enačbo $a(t)=\cos(\pi t)$, njegova začetna hitrost pa je enaka $\frac{1}{2\pi}$. Izračunajmo pot, ki jo preleti delec v prvi sekundi.

Ker je pospešek odvod hitrosti po času $a=\frac{dv}{dt}$, $dv=a\,dt$, je hitrost delca integral pospeška:

$$v(t)=v(0)+\int_0^t \cos(\pi t)\,dt=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\Big|_0^t=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sin(\pi t)\Big)$$

Opravljeno pot delca izračunamo z integralom

$$s(1)-s(0)=\int_0^1 \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sin\pi t\Big)\,dt,$$

vendar moramo biti pri računanju določenega integrala pozorni na predznak funkcije. Na intervalu [0, 1] je funkcija nenegativna.

$$s(1)-s(0)=\int_0^1 \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sin\pi t\Big)\,dt=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}t+\frac{1}{\pi}\cos\pi t\Big)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot(-1)\Big)-\frac{1}{\pi^2}\doteq 0{'}043$$

Izračunali smo, da delec v 1 sekundi opravi pot 43 mm.

3. Koliko dela opravi ladijski motor, ko v pristanišču z morskega dna dvigne sidro 8 metrov visoko? Vzgon zanemarimo. Ladijsko sidro ima maso 1500 kg in visi na železni verigi, katere en meter tehta 20 kg.

Opravljeno delo je odvisno od sile, ki deluje na sidro po poti navzgor. Ta sila se v našem primeru spreminja, saj se dolžina verige z dviganjem sidra zmanjšuje, s tem pa se zmanjšuje tudi njena teža.

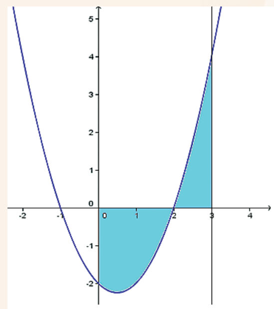
Sila je torej funkcija višine h. Masa sidra naj bo m_1, masa enega metra verige pa m_2.

$$A = \int_0^8 m_1 g\,dh + \int_0^8 m_2 g(8-h)\,dh =$$

$$= 9{\cdot}8 \int_0^8 (1500 + 20(8-h))\,dh = (14\,540h - 10h^2)\Big|_0^8 = 115\,680 \text{ Nm}$$

4. Delec leti po premici s hitrostjo $v(t) = t^2 - t - 2$ v cm/s. Izračunajte:

a) začetno hitrost delca,
b) v katerem trenutku je pospešek enak nič,
c) kolikšno pot je preletel v treh sekundah,
č) kolikšen je pospešek v tretji sekundi.



a) Začetna hitrost delca je $v(0) = -2$ cm/s (delec leti v nasprotni smeri).

b) $v'(t) = 2t - 1 = 0$, pospešek je nič po $0{\cdot}5$ sekunde.

c) Graf nam ponazarja spremembo hitrosti delca v času $v = \frac{ds}{dt}$; $ds = v\,dt$. Ker je del grafa pod abscisno osjo, moramo biti pri računanju integrala pazljivi.

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(z)\,dz$$

$$s(3) = \int_0^3 v(t)\,dt = \int_0^2 |\,v(t)\,|\,dt + \int_2^3 v(t)\,dt =$$

$$= \int_0^2 |t^2 - t - 2|\,dt + \int_2^3 (t^2 - t - 2)\,dt =$$

$$= \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 2t\right)\Big|_2^3 = \frac{31}{6}$$

V treh sekundah preleti delec $\frac{31}{6}$ cm.

č) Pospešek v tretji sekundi je pospešek $a(3) = v'(3) = 4$ cm/s^2.

5. Valj bencinskega motorja ima premer 6 cm in višino 8 cm. Pod pritiskom eksplozivne mešanice goriva in zraka se v valju bat premakne in opravi neko delo. V sodobnih motorjih pritisk plina na bat v valju že lahko presega 2500 barov. Denimo, da je v našem primeru pritisk plina $p = 2000$ barov. Kolikšno delo opravi bat motorja?

Najprej ponovimo enote: 1 bar = 1 N/m^2, 1 N = 1 kg ms^{-2}.

$$A = \int_0^x p\pi r^2\,dx = \int_0^8 2000\pi 3^2\,dx = 18\,000\pi \cdot 8 =$$

$$= 452\,390 \text{ N/m}^2 \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{cm} = 0{\cdot}45 \text{ Nm}$$

En bat v enem ciklu opravi delo $0{\cdot}45$ Nm.

NALOGE

890. Pri premem gibanju za razdaljo x opazovane točke od koordinatnega izhodišča, njeno hitrost v in njen pospešek a velja: $v = \frac{dx}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$ in $x = \int v\,dt$, $v = \int a\,dt$.

Točka P se giblje po abscisni osi tako, da se hitrost v v odvisnosti od časa t spreminja po predpisu $v = 5t - t^2$. Za $t = 0$ je $x = 15$. Zapišite formuli, ki opisujeta

a) pospešek a točke P v odvisnosti od časa t,

b) razdaljo x točke P od koordinatnega izhodišča v odvisnosti od časa t.

891. Točka T se giblje po abscisni osi in v času $t = 0$ prečka koordinatno izhodišče. Njena hitrost se spreminja po formuli $v = 12 - 3t^2$; čas $t > 0$ je dan v sekundah, hitrost v pa v metrih na sekundo.

a) Poiščite pospešek a točke T v času $t = 4$ s.

b) Poiščite razdaljo x točke T od koordinatnega izhodišča:

– ko točka miruje,

– ko je $t = 5$ s.

892. Jekleno žico dolžine $l = 1{\cdot}5$ m s polmerom $r = 0{\cdot}1$ mm obremenimo tako, da se raztegne za $x_1 = 2$ mm. Koliko dela moramo opraviti, da jo raztegnemo še za 8 mm?

Opravljeno delo izračunamo z določenim integralom $A = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$, pri čemer je $F = E \cdot \frac{S \cdot x}{l}$ za to delo potrebna sila, $E = 2 \cdot 10^5$ N/mm^2 je prožnostni modul jekla, $S = \pi r^2$ pa je prečni presek žice.

893. Knjižničar Boštjan je prestavil pet knjig enciklopedije glasbe z vrhnje police pol metra niže. Kolikšno delo je pri tem opravil, če je masa vsake knjige $1{\cdot}2$ kg?

894. Vedro, ki je napolnjeno z 10 litri vode, s konstantno hitrostjo potegnemo iz šest metrov globokega vodnjaka. Vedro tehta $2{\cdot}5$ kg in pušča. Ravno ko je na vrhu, iz njega izteče še zadnja kapljica vode. Kolikšno delo smo opravili pri dviganju vedra? En meter vrvi, na katero je pritrjeno vedro, tehta 400 gramov.

895. Vzmet je dolga 1 m. Če jo obremenimo za 24 N, se raztegne za $0{\cdot}4$ metra. Izračunajte koeficient vzmeti in opravljeno delo, če smo vzmet raztegnili do dolžine dveh metrov.

896. Delno napolnjen plavalni bazen začnejo ob 7.00 zjutraj polniti z virom, ki se mu s časom zmanjšuje dotok. Višina vode v bazenu se spreminja z enačbo $\frac{dH}{dt} = k\sqrt{t}$. Na začetku polnjenja je bilo v bazenu $1{\cdot}5$ dm vode. Če je $H'(4) = 6$, izračunajte:

a) koeficient k,

b) funkcijo H,

c) $H(4)$,

č) $H'(9)$,

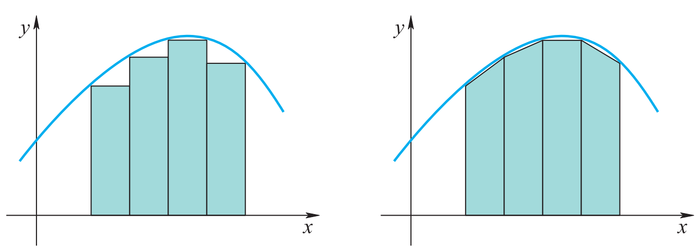
d) čas, ob katerem bo bazen napolnjen do višine 2 m.

Numerično računanje določenega integrala (izbirna vsebina)

Trapezna metoda za računanje približne vrednosti integralov

Kadar računamo ploščino krivočrtnega lika med grafom funkcije in abscisno osjo na danem intervalu $[a, b]$, lahko dobimo približno vrednost tako, da pod krivuljo včrtamo nekaj pravokotnikov, ki jim znamo izračunati ploščine, in te ploščine seštejemo.

Če pa krivočrtni lik namesto s pravokotniki približno »pokrijemo« s trapezi, izračunamo njihove ploščine in jih seštejemo, bomo dobili boljši približek za celotno ploščino oz. za vrednost določenega integrala $S = \int_a^b f(x)\,dx$.



To numerično metodo za računanje približne vrednosti integrala imenujemo **trapezna metoda**. Poglejmo si jo bolj podrobno.

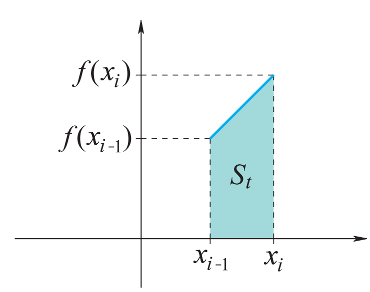
Trapezna metoda za računanje približne vrednosti določenega integrala je ena od numeričnih metod.

Interval $[a, b]$ razdelimo na n manjših podintervalov:

$[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, b]$

Nad intervali narišemo trapeze. i-ti trapez nad podintervalom $[x_{i-1}, x_i]$ ima osnovnici dolgi $f(x_{i-1})$ in $f(x_i)$, njegova višina je enaka širini intervala $(x_i - x_{i-1})$.

Ploščina takega trapeza je: $S_t = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$.

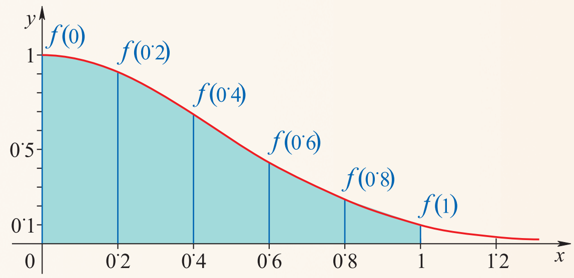


Vsota ploščin vseh trapezov skupaj pa nam da približno vrednost določenega integrala:

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{f(x_1)+f(a)}{2} \cdot (x_1 - a) + \ldots + \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) + \ldots + \frac{f(b)+f(x_{n-1})}{2} \cdot (b - x_{n-1})$$

ZGLED

S trapezno formulo poiščimo približek za $\int_0^1 10^{-x^2}\,dx$.



Interval [0, 1] razdelimo na pet delov, na pet podintervalov: [0, 0,2], [0,2, 0,4], [0,4, 0,6], [0,6, 0,8], [0,8, 1].

Izračunajmo vrednosti funkcije $f(x) = 10^{-x^2}$ na krajiščih teh intervalov:

$x = 0$ $\qquad f(0) = 10^{-0^2} = 1$

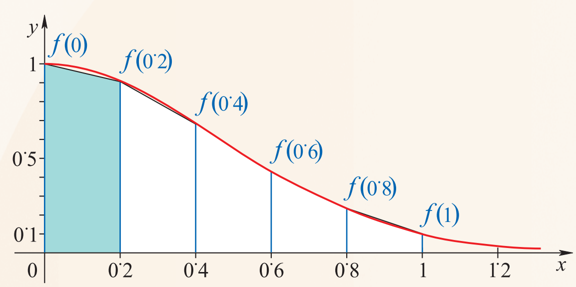
$x = 0{,}2 = \frac{1}{5}$ $\qquad f(0{,}2) = 10^{-0{,}04} = \sqrt[25]{\frac{1}{10}} = 0{,}912$

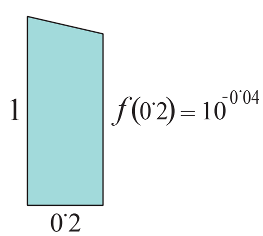
$x = 0{,}4 = \frac{2}{5}$ $\qquad f(0{,}4) = 10^{-0{,}16} = \sqrt[25]{\left(\frac{1}{10}\right)^4} = 0{,}692$

To računanje si lahko olajšamo s programom *Excel*.

Izračunajmo zdaj ploščine teh petih trapezov.

Prvi trapez:





osnovnici: $f(0) = 1$ in $f(0{,}2) = 0{,}912$

višina je širina intervala: $0{,}2$

ploščina: $S = \frac{a+c}{2}\cdot v = \frac{1+0{,}912}{2}\cdot 0{,}2 = 0{,}1912$

Ostalih ploščin trapezov ne bomo računali na zamuden način, ampak bomo raje uporabili program *Excel*. Z malo dela dobimo rezultat pri petih delilnih intervalih in še izboljšan rezultat pri desetih delilnih intervalih.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2				TRAPEZNA METODA							
3											
4				=D8*(C8-C7)/C9		=1/POWER(10;POWER(E7;2))					
5											
6				interval	*x*	*f(x)*	delna pl.		PLOŠČINA	0,563889	
7		*a*=	0		0	1	0,1912			=SUM(G7:G11)	
8		*b*=	1	1	0,2	0,912011	0,16038				
9		*n*=	5	2	0,4	0,691831	0,11283				
10				3	0,6	0,436516	0,06656		=(F7+F8)*(E8-E7)/2		
11				4	0,8	0,229087	0,03291				
12				5	1	0,1					
13											
14											
15				interval	*x*	*f(x)*	delna pl.		PLOŠČINA	0,565033	
16		*a*=	0		0	1	0,09886				
17		*b*=	1	1	0,1	0,977237	0,09446				
18		*n*=	10	2	0,2	0,912011	0,08624				
19				3	0,3	0,812831	0,07523				
20				4	0,4	0,691831	0,06271				
21				5	0,5	0,562341	0,04994				
22				6	0,6	0,436516	0,03801				
23				7	0,7	0,323594	0,02763				
24				8	0,8	0,229087	0,0192				
25				9	0,9	0,154882	0,01274				
26				10	1	0,1					

NALOGE

897. S trapezno formulo s korakoma $h=0{,}5$ in $h=0{,}25$ izračunajte integral $\int_0^2 (x+1)^2\,dx$ ter dobljeni vrednosti primerjajte z natančno vrednostjo integrala.

898. S trapezno formulo s korakom $h=0{,}5$ izračunajte integral $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ ter dobljeno vrednost primerjajte z natančno vrednostjo integrala.

899. S trapezno formulo s korakom h izračunajte naslednje integrale:

a) $\int_0^3 (2x+1)^2\,dx;\ h=0{,}5$

b) $\int_1^{10} \log x\,dx;\ h=1$

c) $\int_{-2}^{1} \frac{1}{9-x^2}\,dx;\ h=0{,}25$

NE POZABI

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$$

Nedoločeni integrali najpomembnejših funkcij:

$\int 1\,dx = x + C,$	ker:	$(x + C)' = 1$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$	ker:	$(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C)' = x^n;\ n \neq -1$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$	ker:	$(-\cos x + C)' = \sin x$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$	ker:	$(\sin x + C)' = \cos x$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C,$	ker:	$(\tan x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C,$	ker:	$(-\cot x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C,$	ker:	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C,$	ker:	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C,$	ker:	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C,$	ker:	$(\ln\lvert x\rvert + C)' = \frac{1}{x}$
$\int e^x\,dx = e^x + C,$	ker:	$(e^x + C)' = e^x$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$	ker:	$(\frac{a^x}{\ln a} + C)' = a^x$

Pravila za računanje integralov:

1. Integral vsote je enak vsoti integralov.
$$\int (f+g)(x)\,dx = \int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

2. Konstantni faktor pred funkcijo, ki jo integriramo, lahko pišemo pred integralski znak.
$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Integriranje z uvedbo nove spremenljivke:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) = F(g(x))$$

$$u = g(x)$$

$$du = g'(x)\,dx$$

$$F'(u) = f(u)$$

NE POZABI

Določeni integral pozitivne funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

je enak ploščini krivočrtnega lika med grafom funkcije f in abscisno osjo.

Lastnosti določenega integrala:

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;\ c \in [a, b]$
3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
4. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
5. Če je m najmanjša vrednost funkcije f, M pa največja vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$, potem velja ocena:

   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$
6. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
7. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Povprečna vrednost funkcije f na $[a, b]$: $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Newton-Leibnizova formula ali osnovni izrek integralskega računa:

Določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ je enak razliki vrednosti nedoločenega integrala $F(x)$ na zgornji in spodnji meji:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a),\text{ če je } F'(x) = f(x)$$

Če rešujemo določeni integral z uvedbo nove spremenljivke, spremenimo tudi meje integriranja:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

NE POZABI

- Računanje ploščine krivočrtnega lika med grafom funkcije in abscisno osjo:

  $$S = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

- Računanje ploščine krivočrtnega lika med grafoma dveh funkcij:

  $$S = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx, \text{ če je } f(x) > g(x) \text{ za vsak } x \in [a, b]$$

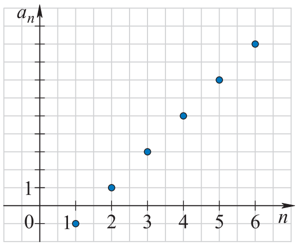
- Računanje prostornine rotacijskih teles:

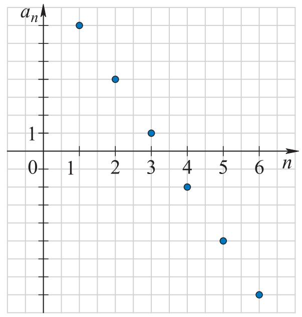
  $$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

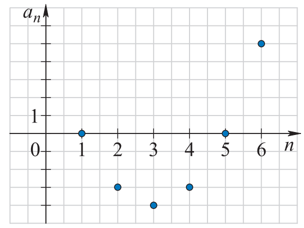
- Uporaba določenega integrala v fiziki

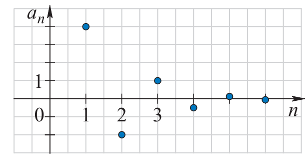
Zaporedja in njihove lastnosti

1. **a)** $-1, 1, 3, 5, 7, 9$ **b)** $7, 4, 1, -2, -5, -8$ **c)** $0, -3, -4, -3, 0, 5$ **č)** $4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$



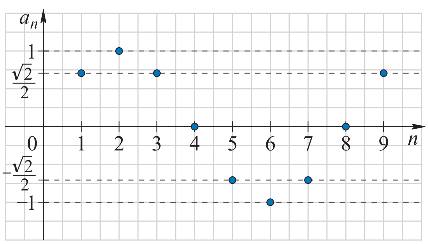




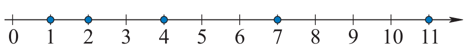


2. **a)** $-3, 0, 5, 12, 21, 32 \ldots$ **b)** $-2, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3} \ldots$ **c)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \frac{3}{32} \ldots$ **č)** $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36} \ldots$
d) $0, 1, \log_2 3, 2, \log_2 5, \log_2 6 \ldots$ **e)** $0, -1, 0, 1, 0, -1 \ldots$ **f)** $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \ldots$ **g)** $1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots$
h) $1, 2, 2, 4, 8, 32 \ldots$

3. $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$



4. **a)** $a_n = 5n$ **b)** $a_n = 4n - 3$ **c)** $a_n = (-1)^n \cdot n^2$ **č)** $a_n = 2 \cdot (-2)^{n-1}$
d) $a_n = n \cdot (n+1)$ **e)** $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ **f)** $a_n = \sqrt[n]{n}$ **g)** $a_n = 8 \cdot (\frac{1}{2})^n$
h) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ **5.** **a)** $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 1$ **b)** $a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + n$
6. **a)** $a_n = \frac{2}{n}$ **b)** $a_n = (-1)^n \cdot n$ **7.** $a_n = 18 - 3n,\ a_{17} = 18 - 3 \cdot 17 = -33$
8. $a_n = n(n+3),\ a_{10} = 130$
9. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}$. V $[\frac{3}{2}, 2]$ ležita 2 člena, v $[1, \frac{3}{2}]$ pa neskončno mnogo.
10. 1, 2, 4, 7, 11. Prvih 10 členov.



11. $a_n = n^2,\ s = 385$ **12.** **a)** Naraščajoče zaporedje, navzdol omejeno z -3. **b)** Padajoče zaporedje, navzgor omejeno z 0. **c)** Alternirajoče zaporedje, navzdol omejeno z $-\frac{1}{2}$, navzgor z $\frac{1}{4}$. **č)** Naraščajoče zaporedje, navzdol omejeno z $\frac{1}{6}$. **d)** Zaporedje je navzdol omejeno z -4. **e)** Zaporedje je navzgor omejeno s 6 in navzdol z -6. **13.** **a)** Naraščajoče zaporedje. $a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+4}{n+1+2} - \frac{3n+4}{n+2} = \frac{2}{(n+2)(n+3)} > 0$ **b)** Padajoče zaporedje. $a_{n+1} - a_n = \frac{n+4}{n+1} - \frac{n+3}{n} = -\frac{3}{n(n+1)} < 0$ **c)** Padajoče zaporedje. $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+1}{(n+1)^2} - \frac{n+1}{n^2} = -\frac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^2} < 0$ **č)** Naraščajoče zaporedje. $a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{n+1+1} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2+3n+1}{(n+2)(n+1)} > 0$

14. **a)** $M = 4,\ m = 1$, dokaza za omejenost navzdol: $a_n = \frac{n+3}{n} > \frac{n}{n} = 1$. **b)** $M = 2,\ m = \frac{1}{2}$, dokaz za omejenost navzgor: $a_n = \frac{2n}{n+3} < \frac{2n}{n} = 2$. **c)** $M = 7,\ m = 1$, dokaz za omejenost navzdol: $a_n = \frac{2n+5}{2n-1} > \frac{2n+5}{2n} > \frac{2n}{2n} = 1$. **č)** $M = 2,\ m = \frac{1}{3}$, dokaz za omejenost navzgor: $a_n = \frac{4n-3}{2n+1} < \frac{4n-3}{2n} < \frac{4n}{2n} = 2$. **15.** **a)** Ker je $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+1} - (-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n(n+1)}$, je zaporedje naraščajoče. Zato je navzdol omejeno z $a_1 = -1$. Ker so vsi členi negativni, je navzgor omejeno z 0. **b)** Ker je $a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n} = -\frac{2}{n(n+1)}$, je zaporedje padajoče. Ker je $a_n = \frac{n+2}{n} > \frac{n}{n} = 1$, je navzdol omejeno z 1, ker pa je $a_n = \frac{n+2}{n} < \frac{n+2n}{n} = \frac{3n}{n} = 3$, je navzgor omejeno s 3.
c) Ker je $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$, je zaporedje naraščajoče in omejeno $m = \frac{1}{2}, M = 1$
č) Ker je $a_{n+1} - a_n = \frac{-2(n+1)+3}{n+3} - \frac{-2n+3}{n+2} = \frac{-7}{(n+3)(n+2)} < 0$, je zaporedje padajoče in omejeno $m = -2, M = \frac{1}{3}$

16. **a)** $a_n = \frac{2}{n}$ **b)** $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3}{n}$ **17.** $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ **18.** $a_n = 3 + \frac{1}{n}$ **19.** **a)** $T_n(\cos\frac{(n-1)\cdot\pi}{4}, \sin\frac{(n-1)\cdot\pi}{4})$
b) $T_n(2^{n-1} \cdot \cos\frac{(n-1)\cdot\pi}{4}, 2^{n-1} \cdot \sin\frac{(n-1)\cdot\pi}{4})$ **20.** $F(5) = 21,\ F(6) = 26,\ F(n) = 5n - 4$

Aritmetično zaporedje

21. **a)** $4, 6, 8, 10, 12, 14$ **b)** $7, 3, -1, -5, -9, -13$ **c)** $-5, -4\frac{1}{3}, -3\frac{2}{3}, -3, -2\frac{1}{3}, -1\frac{2}{3}$ **22.** $a_{13} = -9\frac{1}{2}$ **23.** $a_8 = 29$, $a_{11} = 41$, $a_n = 4n - 3$ **24.** $a_5 = 0,\ a_9 = -\frac{1}{2},\ a_n = \frac{5-n}{8}$. Število $-\frac{15}{8}$ je dvajseti člen zaporedja, število -5 pa 45. člen zaporedja.
25. **a)** $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_5 = 13,\ a_{2n+1} = 6n + 1$ **b)** $a_n = 5n - 12,\ a_{10} = 38,\ a_{2n-1} = 10n - 17$ **c)** $a_4 = 3{,}5,\ a_{20} = -36{,}5,\ a_1 = 11$, $a_n = 13{,}5 - 2{,}5n,\ a_{2n} = -5n + 13{,}5$ **č)** $d = \frac{1}{2},\ a_1 = \frac{3}{2},\ a_n = 1 + \frac{n}{2},\ a_{3n-1} = \frac{3n}{2} + \frac{1}{2}$ **26.** $a_4 = a + 5b,\ a_8 = a + 13b,\ a_n = a + (2n-3)b$

27. **a)** 2 **b)** $\frac{5}{2}$ **28.** Splošni člen je $a_n = 21 - 5n$, zaporedje je navzgor omejeno s 16 in padajoče.
29. Splošni člen je $a_n = 3n - 14$, zaporedje je navzdol omejeno z -11 in naraščajoče. **30.** Splošni člen zaporedja je $a_n = \frac{n}{3}$. Od 30 je manjših prvih 89 členov zaporedja. **31.** $a_1 = 16^{\frac{3}{4}} = 8$, $a_2 = 0{,}\overline{2} \cdot \sqrt[3]{27^2} = \frac{2}{9} \cdot 9 = 2$, $a_3 = \sqrt[3]{-8} \cdot 0{,}25^{-\frac{1}{2}} = -2 \cdot 2 = -4$; $d = -6$, $a_5 = -16$
32. $2 \cdot 3^{x-1} = \frac{20}{9}$, $3^{2x} = \frac{100}{9}$, $2 \cdot 3^{x+1} = \frac{180}{9}$, $d = \frac{80}{9}$ **33.** **a)** $x = 2$ **b)** $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 3$ **c)** $x = 1$ **č)** $x = 8$ **d)** $x = 3$ **e)** $x = 2$ **f)** $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ **g)** $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ **34.** $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$; $a_n = 5 - 2n$
35. **a)** $a_n = 4n + 1$ **b)** $a_n = 5n - 7$ **36.** Od vključno devetnajstega člena dalje so členi zaporedja večji od 100. **37.** $-2, 1, 4 \ldots$ ali $4, 1, -2 \ldots$ **38.** $d = 4$; 123, 127, 131, 135, 139, 143, 147, 151 **39.** $d = -13$ **40.** $n = 71$, $a_n = -3 + 7n$, $n \le 71$
41. $n = 39$ **42.** 60° in 76° **43.** 12, 16, 20 **44.** 6 cm in 14 cm **45.** **a)** 390 **b)** -100 **c)** $\sum_{n=8}^{20} (5n-3) = \sum_{n=1}^{20} (5n-3) - \sum_{n=1}^{7} (5n-3) = 990 - 119 = 871$ **46.** $S_{20} = 1030$ **47.** $n = 16$ **48.** $d = -3$, $a_{25} = -29$
49. $a_1 = 7$, $a_{31} = 157$ **50.** $a_1 = 1$, $n = 1000$ in $a_1 = -\frac{2}{3}$, $n = 1005$ **51.** Sešteti moramo vsaj 11 členov zaporedja. **52.** $S_{50} = 6225$
53. $n = 53$, $S_n = 28\,832$ **54.** $x = 205$ **55.** Splošni člen zaporedja je $a_n = N - (n-1) = N - n + 1$. V zaporedju je N členov. Ploščina lika je $S = S_n = \frac{N(N+1)}{2}$. **56.** $d = 3$, $n = 12$ **57.** $d = 4$ **58.** Ker je $a_1 = 1$, $d = 1$ in $S_{365} = 66\,795$, bo Lojze privarčeval 66 795 evra.
59. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $a_n = 2n - 1$, $s_{10} = 100$ **60.** $a_1 = 100$, $a_4 = 10$, $a_n = 130 - 30n$, $s_{20} = -3700$
61. $a_n = s_n - s_{n-1} = n^2 - 4n - ((n-1)^2 - 4(n-1)) = 2n - 5$, $a_1 = -3$, $d = 2$ **62.** 7, 168 **63.** **a)** $x = 2$; 1, 10, 19 ali $x = 3$; 6, 15, 24 **b)** $x = 0$; $-3, -1, 1$ ali $x = 4$; 13, 3, -7 **64.** 460 **65.** **a)** $-8, -\frac{15}{2}, -7, -\frac{13}{2}$ **b)** $n = 16$ **66.** $a_{20} = -51$, np$= 7$, $S_7 = 91$
67. $a_1 = 2$, $d = 5$, $S_{10} = 49$ **68.** Da. $a_1 = -2$, $d = 1$ **69.** 5, 12, 19, 26, 33, 40 **70.** $a_1 = 38$, $d = -5$ in $a_1 = 3$, $d = 5$
71. 3, 5, 7, 9, 11, 13 **72.** 72 **73.** 116 **74.** 60°, 100° **75.** 334 cm^2 **76.** 22,5 s **77.** 20 **78.** $\frac{1007}{1008}$

Geometrijsko zaporedje

79. **a)** 1, 3, 9, 27, 81 … **b)** 2, -4, 8, -16, 32 … **c)** $-8, -12, -18, -27, -\frac{81}{2} \ldots$ **č)** $-25, 5, -1, 0{,}2, -0{,}04 \ldots$
80. **a)** Količnik je $k = 3$, splošni člen je $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, zaporedje je navzdol omejeno z 2 in naraščajoče. **b)** Količnik je $k = \frac{1}{3}$, splošni člen je $a_n = 18 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1}$, zaporedje je omejeno z 18 in 0 ter padajoče. **c)** Količnik je $k = \frac{2}{3}$, splošni člen je $a_n = -27 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$, zaporedje je omejeno z -27 in 0 ter je naraščajoče. **č)** Količnik je $k = -\frac{1}{3}$, splošni člen je $a_n = 3 \cdot (-\frac{1}{3})^{n-1}$, zaporedje je omejeno s 3 in -1 ter alternirajoče. **d)** Količnik je $k = 2$, splošni člen je $a_n = -\frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$, zaporedje je navzgor omejeno z $-\frac{1}{4}$ ter padajoče.
81. $a_9 = 128$ **82.** $a_5 = 64$, $a_{10} = 2048$, $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$ **83.** $a_4 = -\frac{9}{32}$, $a_8 = -\frac{729}{8192}$, $a_n = \frac{2}{3} \cdot (-\frac{3}{4})^{n-1}$. Število $\frac{27}{128}$ je peti člen zaporedja, število $\frac{81}{512}$ pa ni člen zaporedja. **84.** Splošni člen zaporedja je $a_n = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-2}$. Neskončno mnogo členov zaporedja je večjih od 50. **85.** **a)** $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_5 = 243$ **b)** $a_n = 2^{-n+3}$, $a_{10} = 2^{-7}$ **c)** $a_4 = -15$, $a_6 = -93{,}75$, $a_1 = \frac{24}{25}$, $a_n = \frac{24}{25} \cdot (-2{,}5)^{n-1}$ **č)** $k = 2$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$ ali $k = -2$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_n = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^{n-1}$ **86.** $a_4 = \frac{a^4}{b^2(a+b)^3}$, $a_8 = \frac{a^8}{b^6(a+b)^7}$, $a_n = ab(\frac{a}{b(a+b)})^{n-1}$
87. $a_1 = \tan \frac{9\pi}{4} = 1$, $a_2 = \cos \frac{7\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ in $a_3 = (\sin \frac{2\pi}{3})^2 = \frac{3}{4}$; $k = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $a_4 = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$ **88.** **a)** $\cos 5\pi = -1$, $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$; $k = \frac{1}{2}$ **b)** $\log \frac{1}{100} = -2$, $\ln e \cdot \log_4 2 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\log_3 \sqrt[4]{3} \cdot \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$; $k = -\frac{1}{4}$
89. **a)** $x = 4$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = \frac{25}{16}$ **č)** $x = -2$ **d)** $x = 2$ **90.** $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -9$, $a_n = -(-3)^{n-1}$ $a_n = -9(-\frac{1}{3})^{n-1}$
91. **a)** $a_n = 3^{n-1}$ **b)** $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ in $a_n = \frac{8}{9} \cdot (-3)^{n-1}$ **c)** $a_n = 8 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1}$, $a_n = -8 \cdot (-\frac{3}{2})^{n-1}$ **92.** $\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}{\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$
93. **a)** 18 **b)** 3 **94.** Do osmega člena so členi zaporedja večji od $\frac{1}{100}$. **95.** $k = \frac{3}{2}$, 72, 108, 162 oz. $k = -\frac{3}{2}$, -72, 108, -162 **96.** $k = -\frac{1}{4}$ **97.** $a_n = 3^n$ Takih števil je 12. **98.** To sta zaporedji 4, 8, 16 … in 16, 8, 4 …
99. $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $k = \frac{3}{4}$ **100.** Splošni člen aritmetičnega zaporedja je $a_n = 4n - 2$, geometrijskega pa $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$.
101. Aritmetično zaporedje je 3, 6, 9; geometrijsko pa 3, 6, 12 in aritmetično zaporedje je 12, 6, 0; geometrijsko pa 12, 6, 3.
102. 8, 32, 128 **103.** 81 cm, 18 cm, 4 cm **104.** $a_1 = a$, $a_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $a_3 = \frac{a}{2}$, $a_n = a \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$ **105.** $S_1 = 3\sqrt{3}\, m^2$, $q = \frac{1}{4}$, $S_n = 3\sqrt{3}\,(\frac{1}{4})^{n-1}$ **106.** $a_1 = 1m$, $a_2 = 0{,}8m$, $a_3 = 0{,}64m$, $a_5 = 0{,}4096m$, $a_n = 0{,}8^{n-1}$. Po devetem odboju žoga odskoči manj kot 20 cm.
107. 4, 8, 12, 16 **108.** **a)** 9840 **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** $\sum_{n=5}^{10} \frac{5^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{10} \frac{5^n}{4^n} - \sum_{n=1}^{4} \frac{5^n}{4^n} \doteq 34{,}36$ **109.** $a_1 = 1$, $k = 2$, $S_{13} = 8191$
110. $S_{10} = 147\,620$ **111.** $n = 8$ **112.** $x = 32\,768$ **113.** $k = 3$, $a_4 = 27$ **114.** 2, 6, 18 ali 18, 6, 2 **115.** $a_1 = 1458$, $a_7 = 31\,250$ **116.** $-1, 3, -9, 27, -81$ **117.** $a_n = 16 \cdot (\frac{3}{2})^{n-1}$; 16, 24, 36, 54, 81 **118.** $k = 3$, $n = 5$

119. Sešteti moramo vsaj 10 členov zaporedja. **120.** 9, 27, 81 za $d=30$ ali 81, 27, 9 za $d=-42$ **121.** $a_1=3$, $d=3$
122. **a)** $x_1=100$, $x_2=10$ **b)** Aritmetično zaporedje: $a_1=100$, $a_2=10$, $a_n=190-90n$, $s_5=-400$, $s_{10}=-3050$. Geometrijsko zaporedje: $a_1=100$, $a_2=10$, $a_n=100\cdot(\frac{1}{10})^{n-1}=10^{-n+3}$, $s_5=111{,}11$, $s_{10}=111{,}1111111$. **c)** Zaporedje delnih vsot geometrijskega zaporedja je naraščajoče, pri aritmetičnem zaporedju pa zaporedje delnih vsot narašča do s_2, od s_3 dalje pa pada. **123.** $a_1=1$, $a_2=\sqrt{2}$, $a_3=2$, $a_4=2\sqrt{2}$, $a_5=4$, $a_n=(\sqrt{2})^{n-1}=2^{\frac{n-1}{2}}$, $S_n=\frac{\sqrt{2}^n-1}{\sqrt{2}-1}$ **124.** $k=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, $S_3=540-216\cdot\sqrt{3}$ **125.** Naloga ima dve rešitvi: $a_1=4$, $k=2$, $S_{10}=4092$ ter $a_1=-16$, $k=-\frac{1}{2}$, $S_{10}=-\frac{341}{32}$. **126.** $\frac{5}{4}$ **127.** $x=-2$ **128.** $k_{1,2}=\pm2$, $S_{11}=10\,415$ ali $S_{11}=3475$
129. $\frac{100}{3}$ **130.** Prva rešitev: $k=2$; 4, 8, 16; druga rešitev: $k=-\frac{1}{2}$; -16, 8, -4 **131.** $x=\frac{1}{3}$, $x=-3$ (ni rešitev)
132. **a)** $\frac{a_5}{a_3}=(\frac{2}{3})^2$, $\frac{a_8}{a_5}=(\frac{2}{3})^3$ **b)** $k=\frac{2}{3}$, $a_{10}=4\cdot(\frac{2}{3})^7$ **c)** Ne, ker $\frac{32}{27}:a_1=\frac{2^3}{3^4}\neq(\frac{2}{3})^m$ **133.** Prva rešitev: 2, 2, $S=2^{10}(2^{11}-1)$; druga rešitev: 2, -2, $S=-\frac{2^9(2^{11}+1)}{3}$ **134.** 1 860 040 **135.** 4, 8, 16, 32 **136.** 3, 6, 12, 24, 48, 96 **137.** 27 cm^3
138. Ne. Konja je preplačal za $485{,}75$ evrov.

Matematična ali popolna indukcija

139. **a)** 14 850 **b)** 5240 **c)** 52 500 **140.** / **141.** / **142.** **a)** $S_1=1$, $S_2=4$, $S_3=13$, $S_4=30$; $S_n=\frac{3^{n-1}}{2}$
b) $S_1=1$, $S_2=4$, $S_3=16$, $S_4=64$; $S_n=4^{n-1}$ **c)** $S_1=\frac{2}{3}$, $S_2=\frac{4}{5}$, $S_3=\frac{6}{7}$, $S_4=\frac{8}{9}$; $S_n=\frac{2n}{2n+1}$
č) $S_1=2$, $S_2=-6$, $S_3=12$, $S_4=-20$; $S_n=(-1)^{n-1}\cdot n(n+1)$ **d)** $S_1=\frac{1}{4}$, $S_2=\frac{2}{6}$, $S_3=\frac{3}{8}$, $S_4=\frac{4}{10}$; $S_n=\frac{n}{2n+2}$ **143.** / **144.** $S_n=-n$
145. **a)** 30 **b)** 506 **146.** / **147.** / **148.** /
149. 1, $1+6\cdot1$, $1+6\cdot1+6\cdot2$, $1+6\cdot1+6\cdot2+6\cdot3$, …, $1+6\cdot\frac{n(n-1)}{2}$ $\Rightarrow$ $F(n)=1+3n(n-1)$

Limita zaporedja

150. **a)** $(0{,}5,\ 1{,}5)\cup(1,\ 3)=(0{,}5,\ 3)$ **b)** $(1{,}5,\ 2{,}5)\cap(2{,}5,\ 3{,}5)=\varnothing$ **c)** $(4{,}9,\ 5{,}1)\cap(4{,}9,\ 5{,}3)=(4{,}9,\ 5{,}1)$ **151.** **a)** da **b)** da **c)** ne **č)** da **d)** ne **e)** da **f)** da **g)** ne **152.** **a)** Zaporedje je padajoče ter konvergentno. Navzgor je omejeno z 1, navzdol z 0. **b)** Zaporedje je padajoče in ni konvergentno. Navzgor je omejeno z 10, navzdol ni omejeno. **c)** Zaporedje je naraščajoče ter konvergentno. Navzgor je omejeno z $\frac{1}{2}$, navzdol z $\frac{1}{3}$. **č)** Zaporedje ni ne padajoče ne naraščajoče. Ni konvergentno in navzgor omejeno z 1, navzdol z -1. **153.** V $\mathcal{O}_{0,1}(0)$ ležijo vsi členi zaporedja od šestega dalje. **154.** V $\mathcal{O}_{0,25}(1)$ ležijo vsi členi zaporedja od desetega dalje. **155.** Zunaj okolice $\mathcal{O}_{0,4}(2)$ ležijo prvi štirje členi zaporedja. **156.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$. Zaporedje je: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ … Vsi členi od sedmega dalje se od limite razlikujejo za manj kot $\frac{1}{100}$.
157. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}3^{2-n}=0$, $N=7$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}-2^{4-n}=0$, $N=11$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}$, $N=21$ **č)** $\lim\limits_{n\to\infty}16\cdot(-\frac{1}{4})^{n-1}=(-4)^{3-n}=0$, $N=7$
158. **a)** $\frac{3}{5}$ **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **č)** 2 **d)** $\frac{1}{5}$ **e)** -100 **159.** **a)** 0 **b)** 0 **c)** 1 **č)** Limita zaporedja ne obstaja. **d)** 2 **e)** 1 **160.** **a)** 0 **b)** Limita zaporedja ne obstaja. **c)** $-\frac{3}{2}$ **161.** **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-n}{n}=-1$ **b)** Vsi členi od dvestoprvega dalje se od limite razlikujejo za manj kot $\frac{1}{100}$. **162.** **a)** Zaporedje je naraščajoče: $a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)-1}{(n+1)+1}-\frac{3n-1}{n+1}=\frac{4}{(n+2)(x+1)}>0$. **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}=3$ **c)** 7 **163.** **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{1-n^2}=-2$ **b)** Vsi členi od petinštiridesetega dalje so v okolici $\mathcal{O}_{0,001}(-2)$. **164.** Za $n>6$ je $a_n\in\mathcal{O}_{0,0005}(0)$. **165.** **a)** $a_1=\sqrt{2}-1\doteq0{,}4142$, $a_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}\doteq0{,}3178$, $a_3=2-\sqrt{3}\doteq0{,}2679$, $a_4=\sqrt{5}-2\doteq0{,}2361$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$ **c)** 5 **166.** **a)** padajoče, $m=0$ **b)** 0 **c)** a_{1251} **167.** **a)** / **b)** 0 **c)** a_{300} **168.** **a)** 1 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **č)** $\sqrt{2}$ **d)** 0 **e)** $\frac{1}{4}$ **f)** $\frac{2}{3}$ **g)** 0 **h)** ne obstaja **i)** 0 **169.** **a)** 1 **b)** e^{π^2} **c)** e^{-3} **č)** e **d)** e^{-4}
170. $a_n\leq4\cdot a_{n+1}\leq4$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}(2a_n+4)=4$ **171.** **a)** 1 **b)** 5 **172.** **a)** 0 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** 1

Neskončne vrste

173. **a)** 54 **b)** $\frac{8}{3}$ **c)** $\frac{9}{4}$ **č)** $16+8\sqrt{2}$ **d)** $\frac{6}{7}$ **e)** $\frac{a}{3}$ **f)** $2+\frac{1}{2}=2{,}5$ **174.** **a)** $k=\frac{5}{8}$; $3+\frac{15}{8}+\frac{75}{64}+\ldots$ **b)** $a_1=18$; $18-\frac{9}{4}+\frac{9}{32}-\ldots$ **c)** $a_1=-5$; $-5-2-\frac{4}{5}-\ldots$ **175.** $a_1=16$, $k=\frac{3}{4}$, $16+12+9+\ldots$; $a_1=112$, $k=-\frac{3}{4}$, $112-84+63-\ldots$
176. **a)** $x=\frac{2}{3}$ **b)** $x=2$ **177.** $x=\frac{1}{3}$ **178.** $3{,}\overline{2}=3\frac{2}{9}$, $2{,}\overline{18}=2\frac{2}{11}$, $4{,}0\overline{144}=4\frac{8}{555}$ **179.** $x=-\frac{2}{3}$

180. Vrsta bo konvergirala za $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, njena vsota bo $\frac{2}{1-2x}$. **181.** **a)** $x < -\frac{2}{3} \vee x > \frac{2}{3}$ **b)** $\frac{9x}{3x-2}$ **c)** $x = 1$
182. $\frac{144}{1-\frac{3}{4}} = 576$, $100 + 2 \cdot \frac{100}{1-\frac{9}{10}} = 100 + 2 \cdot 1000 = 2100$ **183.** $S_o = \frac{9\pi}{1-\frac{2}{3}} = 27\pi$, $S_s = \frac{\frac{81x}{4}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{729\pi}{20}$ **184.** **a)** $S_p = \frac{144}{1-\frac{1}{2}} = 288$
b) $S_k = \frac{72\pi}{1-\frac{1}{2}} = 144\pi$ **185.** $S_o = \frac{4 \cdot 9}{1-\frac{1}{2}} = 72$ cm, $S = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9^2 \cdot \sin 60°}{1-\frac{1}{4}} = 54 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **186.** **a)** 1 **b)** $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{6}$
187. $o = 4a(2 + \sqrt{2})$, $S = 2a^2$

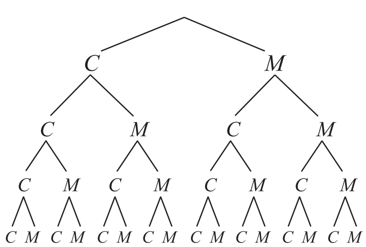
Navadno in obrestno obrestovanje

188. **a)** 267 evrov **b)** 538 evrov **189.** 5˙6 evra (Leto 2003 ima 365 dni.) **190.** 511 evrov (Leto 2004 ima 366 dni.)
191. **a)** 315 evrov **b)** 337˙56 evra **c)** 22˙56 evra **192.** **a)** 13 300 evrov **b)** 16 775˙91 evra **c)** 1796 evrov
č) 1849 evrov **193.** **a)** 153 153˙79 evra **b)** 195 467˙36 evra **c)** 249 471˙38 evra **194.** **a)** 3820 evrov
b) 3881 evrov **c)** Polletno obrestovanje prinese za 61 evrov več obresti. **195.** 2255˙67 CHF **196.** 8000 evrov
197. 12 934˙45 evra **198.** Kapital bi se podvoji v približno 10 letih. **199.** 12 let **200.** 8 % **201.** 4 %
202. 5 let **203.** 3333 dolarjev **204.** 6081 evrov **205.** 472˙29 evra **206.** 2582˙79 evra **207.** 6072 evrov
208. Skoraj 8 let. **209.** 2˙1-odstotni **210.** Približno 5-odstotne. **211.** 9˙1-odstotna naložba je boljša izbira.
212. $a = 536$, $A = 7481$ **213.** **a)** Uboga vdova bi bila bogata; imela bi nepredstavljivo veliko vsoto denarja $2˙3\ 10^{32}$ evrov.
b) Uboga vdova bi imela 1˙62 evra. **214.** 7441 €, 5537 € **215.** 5˙1-odstotna **216.** 22˙3-odstotni **217.** 4862 evrov
218. 2350 €, 2409 € **219.** 18 832˙53 evra **220.** 744˙39 evra **221.** 4˙5 let **222.** 5076 evrov
223. **a)** Vrednost prve ponudbe čez 6 let je 42 883˙06 evra, vrednost druge pa 40 811˙48 evra. Ugodnejša je druga možnost.
b) 41 086 evrov, obročna znese 40 771 evrov in je ugodnejša. **224.** 10 347 evrov **225.** 125 evrov **226.** 35 evrov
227. 13 523 evrov **228.** **a)** 304 evre **b)** 160 evrov **229.** 272 mesecev **230.** Da, anuiteta znaša 133˙38 evra.
231. $a = 103$

število obrokov	7		anuiteta	103		
obrestna mera	0,74%					
dolg	700	obstoječi				novo stanje
		dolg	obresti	anuiteta	razdolžnina	dolga
	1. obrok	700	5	103	98	602
	2. obrok	602	4	103	99	503
	3. obrok	503	4	103	99	404
	4. obrok	404	3	103	100	304
	5. obrok	304	2	103	101	203
	6. obrok	203	2	103	101	102
	7. obrok	102	1	103	102	0

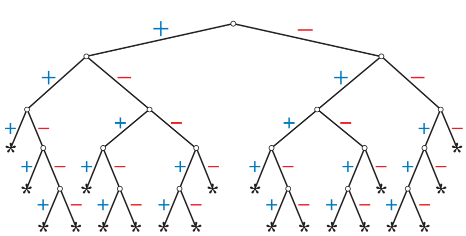
Osnovni izrek kombinatorike

232. **a)** 6 **b)** 20 **c)** 120 **č)** 26 **233.** 48 **234.** 12
235. 10; zzz, zzpz, zpzz, pzzz, ppzzz, zppzz, zzppz, pzzpz, zpzpz, pzpzz **236.** **a)** $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ **b)** 9 **237.** 8
238. 105 **239.** 27
240. 16



241. **a)** 192 **b)** 48 **c)** 0 **242.** **a)** 16 **b)** 8 **c)** 3
č) 2 **d)** 11 **e)** 4 **243.** **a)** $23 \cdot 9 \cdot 10^3$ **b)** $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 23$
c) $23^2 \cdot 1000$ Z zadnjim tipom. **244.** 32 **245.** 240 **246.** 15 840
247. 7 **248.** **a)** 120 **b)** 24 **249.** 30 **250.** 108
251. **a)** 75 **b)** 91 **252.** **a)** 120 **b)** 72 **c)** 48

253. 20



254. 24 **255.** 256 **256.** 128. **257.** 10
258. 3 **259.** 126 **260.** 26

Permutacije

261. **a)** 720 **b)** 4320 **262.** **a)** 7! **b)** 4! · 3! **c)** 4! · 3! **263.** **a)** 12! **b)** 3! · 5! · 4! · 3! **c)** 3! · 9! **264.** **a)** 240 **b)** 48 **265.** 720 **266.** 576 **267.** 7! **268.** **a)** 3600 **b)** 2520 **269.** **a)** 15! **b)** $(8!)^2$ **c)** 8! · 7! **č)** 13! **270.** 210 **271.** 24 **272.** 48 **273.** **a)** 15! **b)** 9! · 6! · 2! **c)** 6! · 10! **274.** **a)** 2 · 7! · 8! **b)** 15! **275.** **a)** 120 (KRONA, KORAN, NAROK, ORKAN) **b)** 120 (DINAR, DRINA, NADIR, RADIN) **c)** 60 (KAMRA, MARKA, KARMA, KRAMA) **276.** 1680 **277.** 348 **278.** **a)** 16! **b)** 7! · 9! · 2 **279.** 462 **280.** 2 · 7! **281.** **a)** 9! **b)** 5! · 2! · 2! · 3! **c)** 2 · 7! **282.** **a)** $\frac{23!}{8!\cdot 15!}$ **b)** 23! **283.** **a)** 14! **b)** 4! · 7! · 3! · 3! **c)** 7! · 3! · 4! · 2 **284.** Ni dovolj, služiti bi morali 7 let. **285.** $\frac{24!}{6!^4}$ **286.** $\frac{16!}{6!\cdot 5!\cdot 5!}$ **287.** $\frac{18!}{6!^3}$ **288.** **a)** 8! **b)** 6 · 5 · 6! **289.** $(6!)^2 = 518\,400$ **290.** 5040 **291.** 150 **292.** 126 **293.** 2520

Variacije

294. 30 **295.** 1 173 326 **296.** 64 **297.** **a)** $V_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ **b)** ${}^{(p)}V_6^4 = 6^4$ **298.** 60 **299.** **a)** $V_{25}^5 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ **b)** ${}^{(p)}V_{25}^5 = 25^5$ **300.** **a)** 8! **b)** 6720 **c)** 4! · 4! · 2 **č)** 336 **301.** 216 **302.** $2 \cdot V_7^3 = 420$ **303.** **a)** 72 **b)** 375 **304.** **a)** 216 **b)** 120, 40 **305.** **a)** 42 **b)** 49 **306.** $6^4 = 1296$ **307.** $\frac{15!}{8!\cdot 7!}$ **308.** $V_6^4 = 360$ **309.** **a)** 120 **b)** 625 **310.** **a)** 80 **b)** 3236 **c)** 1600 **č)** 800 **d)** 1120 **311.** $V_{10}^3 = 720$ **312.** $V_5^3 = 60$ **313.** **a)** 7 **b)** 20 **c)** 6 **č)** 10 **314.** 21 **315.** 12 **316.** 6 **317.** 20 160 **318.** 1000, 10 000 **319.** $n = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = V_{25}^{10} = 11\,861\,676\,290\,000$ **320.** $V_{12}^5 = 95\,040$ **321.** **a)** $n = 60$ **b)** $n = 360$ **322.** $n = V_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ **323.** 900

324. 7 8 9 $\sqcup$ $\sqcup$

8 (7, 6, …, 0) 8 možnosti
7 (6, 5, …, 0) 7 možnosti
6 (5, 4, …, 0) 6 možnosti
5 (4, 3, …, 0) 5 možnosti
4 (3, 2, …, 0) 4 možnosti
3 (2, 1, 0) 3 možnosti
2 (1, 0) 2 možnosti
1 (0) 1 možnost
1 + 2 + … + 8 = 36

325. $n_1 = V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$, $n_2 = {}^{(p)}V_4^2 = 16$

326. **a)** Med 1 000 000 in 9 999 999 je 9 000 000 števil. Na prvem mestu sme biti vse razen 0 ali 7, na vseh ostalih mestih pa vse, razen 7. Torej je števil s sedmicami $8 \cdot 9^6$, vseh, brez sedmic je $n = 9\,000\,000 - 8 \cdot 9^6 = 4\,748\,472$. **b)** $9^5 \cdot 57$

Kombinacije

327. 495 **328.** 36 **329.** 63 **330.** 21 **331.** 6720 **332.** 20 **333.** $\binom{10}{6} = 210$ **334.** 495; Ne. **335.** 80 **336.** 32 **337.** 105 **338.** 21 **339.** 21 **340.** 84 **341.** 35 **342.** 84 **343.** 28 **344.** Je mogoče, ker je vseh različnih trojk 20. **345.** **a)** $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} \cdot \binom{4}{4} = 20$ **b)** 4200 **c)** 20 **346.** **a)** 28 **b)** 1 313 400 **c)** $\binom{15}{5} = 3003$ **č)** $\binom{50}{10} = 10\,272\,278\,170$ **347.** **a)** $\binom{n+2}{3}$ **b)** $n + 1$ **c)** $\frac{n+1}{k+1}$ **č)** $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!}$ **348.** **a)** 20 **b)** 4 **c)** 7 **349.** 715 **350.** **a)** $C_{52}^8 = 752\,538\,150$ **b)** $C_{52}^8 - C_{39}^8$ **c)** $C_{48}^7 \cdot C_4^1$ **č)** $C_4^3 \cdot C_{48}^5$ **d)** $C_{26}^4 \cdot C_{26}^4$ **e)** C_{20}^8 **f)** C_{13}^8 **g)** $4 \cdot C_{13}^8$ **351.** **a)** 60 **b)** 15 **c)** 145 **352.** 450 **353.** 2090 **354.** 36 **b)** $C_6^1 \cdot C_4^2 + C_4^3$ **c)** $C_{10}^3 - C_4^3$ **355.** 435 897 **356.** **a)** 3840 **b)** 3 624 960 **c)** 28 800 **č)** 28 800 **357.** **a)** 15 **b)** 15 **c)** 225 **č)** 480 **d)** 120 **e)** 210 **358.** 70 **359.** $C_n^2 = 45$, $n = 10$ **360.** $C_7^2 \cdot C_3^2 = 63$ **361.** **a)** 220 **b)** 43 470 **c)** 54 740 **č)** 54 996 **d)** 15 120 **362.** $2^5 - 1 = 31$ **363.** 57 **364.** 21 **365.** **a)** 36 **b)** 80 **c)** 100 **366.** **a)** 465 **b)** 3630 **c)** 2310 **č)** 3465 **367.** 11 **368.** 4 **369.** 4 **370.** 1296 **371.** 45, 21 **372.** Če so 4 fantje: $C_5^4 = 5$, če so 3 fantje in 1 dekle: $C_5^3 \cdot C_3^1 = 30$, če sta dva fanta in dve dekleti: $C_5^2 \cdot C_3^2 = 30$, če je 1 fant in 3 dekleta: $C_5^1 \cdot C_3^3 = 5$. V vsakem primeru gre še za presedanje oz. $4! = 24$, zato je vseh načinov 1680. **373.** **a)** C_{34}^6 **b)** $C_{11}^2 \cdot C_{23}^4$ **374.** 3420 **375.** 496 **376.** 22 **377.** 437 000 **378.** 96 **379.** **a)** 560 **b)** 224 **c)** 32 **č)** 1684 **d)** 168 **e)** 4 **f)** 560 **g)** 165

Binomski izrek

380. **a)** $b^4+4\sqrt{2}\,b^3+12b^2+8\sqrt{2}\,b+4$ **b)** $a^5+10a^4+40a^3+80a^2+80a+32$
c) $x^6+18x^5y+135x^4y^2+540x^3y^3+1215x^2y^4+1458xy^5+729y^6$ **č)** $u^7-21u^6v+189u^5v^2-945u^4v^3+2835u^3v^4-5103u^2v^5+5103uv^6-2187v^7$
d) $4(17+12\sqrt{2})$ **e)** $-4+4i$ **f)** $-72-42i\sqrt{6}$ **g)** $36x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080\,x^2y^3+810xy^4-143y^5$
381. **a)** $13\,440x^4y^6$ **b)** $2016x^4y^2\sqrt{y}$ **c)** $3003(\frac{2}{3})^5a^{20}$ **č)** $167\,076b^2c^2$ **d)** $486\,486a^5$ **e)** $138\,996de^5$
382. **a)** 90 **b)** 15 **c)** 189 **č)** 1120 **d)** 1 966 080 **383.** **a)** 2^n **b)** 0 **c)** 2^{100} **č)** 0
384. $r=7$, $n=15$ **385.** / **386.** 1013 **387.** 13 **388.** **a)** 16, 32, 64 **b)** 2^n

Kombinatorika in preslikave

389. 120, MARK, MRAK, MORA, MOKA, OKRA, ROKA, ROMA, AMOR, KARO, KOMA … **390.** 36 **391.** 64
392. 9

Osnove verjetnostnega računa

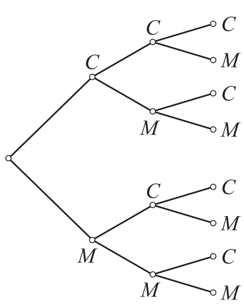
393. a, b, c **394.** b **395.** c **396.** {1C, 1M, 2C, 2M, 3C, 3M, …, 6C, 6M} **397.** 240
398. **a)** vsi urejeni pari v preglednici

	1	2	3	4	5
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)

b) 1, 5, 22, 1, 7, 12, 13, 11, 5

	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

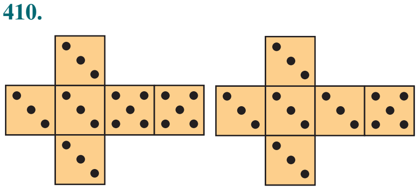
399. {CCC, CCM, CMC, CMM, MCC, MCM, MMC, MMM}



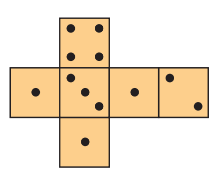
400. S = {črm, črz, črb, čmz, čmb, čzb, rmz, rmb, rzb, mzb}
401. **a)** {(1, 1), (1, 2), …, (4, 4)}, vseh je $^{(p)}V_4^2=16$
b) {(1, 1), (1, 2), …, (1, 5), …, (4, 5)}, vseh je 20
c) vsa števila od 000, 001, …, 999

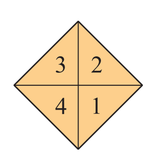
Verjetnost dogodka

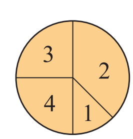
402. 350 **403.** **a)** 40 **b)** 120 **c)** 120 **č)** 80 **404.** 0˙54; 8 % **405.** 0 **406.** **a)** $\frac{4}{15}$ **b)** $\frac{11}{15}$
c) $\frac{1}{10}$ **407.** $\frac{7}{15}$ **408.** **a)** 0˙53, 0˙21, 0˙26 **b)** $\frac{9}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{4}{16}$ **c)** Da. **409.** 4
410.

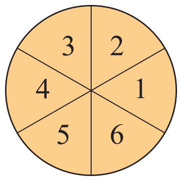


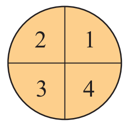
411. Odgovor c. **412.** $\frac{4}{35}$
413. (empirična, teoretična)
a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$ **c)** od Urše $\frac{7}{24}$, $\frac{3}{8}$

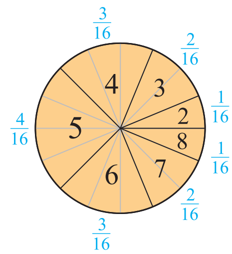


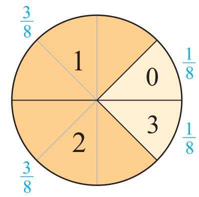




414. **a)** 

b) 

c) 

č) 

415. $\frac{1}{4}$ **416.** 0 **417.** $\frac{1}{7}, \frac{11}{21}, \frac{5}{7}$ **418.** **a)** $\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, 0, \frac{9}{20}$ **b)** $P(D) = \frac{3}{20}$ **419.** Odgovor c.

420. $\frac{1}{6} = P(A) < P(B) = \frac{1}{4}$ **421.** **a)** $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{7}{20}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **č)** 0 **d)** $\frac{3}{5}$ **e)** $\frac{3}{4}$

422. 2, 2, 4, 4, 5, 6; 1, 2, 4, 5, 6, 6 **423.** **a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{2}{9}$ **c)** $\frac{2}{9}$ **č)** $\frac{4}{9}$ **424.** $\frac{8}{15}$ **425.** **a)** $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{3}{20}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **č)** $\frac{3}{20}$ **d)** $\frac{13}{20}$ **426.** 0'8 **427.** $\frac{1}{720}$ **428.** $\frac{1}{3}$ **429.** $\frac{12}{25}$ **430.** 0'27 **431.** $\frac{19}{30}$

432. 24 **433.** **a)** A1 B2, A1 B3, A2 B2, A2 B3, A3 B2, A3 B3 **b)** $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ **c)** 9

č) Ker ni kartice s številom 0. **d)** Ker je zdaj več elementarnih dogodkov, ugodnih pa toliko kot prej. **e)** $P(C) = \frac{2}{9}$

434. $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ **435.** 0'15 **436.** 0'0016 0'0064 0'2064 0'7936 **437.** 0'5 **438.** $\frac{1}{6}$

439. $\frac{2}{195}$ **440.** **a)** $\frac{5}{9}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{2}{21}$ **441.** 0'126

Računanje verjetnosti

442. $\frac{8}{15}$ **443.** $\frac{7}{10}$ **444.** 0'4 **445.** $P(A) = \frac{P_6^{4,2}}{P_8^{4,4}} = \frac{3}{14}$ **446.** 0'6 **447.** Verjetnosti zmag so enake: $P(A) = \frac{5}{9}$, $P(C) = \frac{5}{9}$, $P(B) = \frac{5}{9}$. **448.** 98% **449.** 0'9998 **450.** $\frac{13}{15}$ **451.** $\frac{11}{20}$ **452.** $\frac{4}{9}$ **453.** 0'15 **454.** $\frac{1}{6}$

455. **a)** $\frac{1}{216}$ **b)** $\frac{5}{9}$ **c)** $\frac{125}{216}$ **č)** $\frac{91}{216}$ **d)** $\frac{5}{12}$ **e)** $\frac{25}{72}$ **456.** **a)** $\frac{14}{45}$ **b)** $\frac{17}{45}$ **c)** $\frac{5}{9}$ **č)** $\frac{1}{45}$ **d)** $\frac{2}{15}$ **e)** 0 **f)** $\frac{31}{45}$ **457.** $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8} = \frac{3}{8}$ **458.** $P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

459. **a)** $P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$ **b)** $\frac{11}{12}$ **460.** **a)** $P(A) = \frac{6!4!2}{10!} = \frac{1}{105} = 0'0095$

b) $P(B) = \frac{6!4!2}{10!} = 0'0095$ **c)** $P(C) = \frac{4!7!}{10!} = \frac{1}{30}$ **č)** $P(Č) = \frac{4!6! \cdot 3}{10!} = \frac{1}{70}$ **d)** $P(D) = \frac{2! \cdot 2 \cdot 4! \cdot 2 \cdot 2}{10!} = 0'0001$

461. $P(A) = 1 - \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{13}{15}$ **462.** $P(A) = \frac{4!6!}{10!} = \frac{1}{210}$ **463.** **a)** $\frac{27}{37}$ **b)** $\frac{12}{37}$ **c)** $\frac{27}{37}$ **č)** $\frac{1}{37}$ **d)** $\frac{24}{37}$

e) $\frac{1}{11}$ **f)** $\frac{5}{12}$ **464.** $P(A) = \frac{17+5-3}{30} = \frac{19}{30}$ **465.** **a)** $P(A) = \frac{C_7^2 + C_8^2}{C_{15}^2} = 0'47$ **b)** $P(B) = 1 - \frac{C_8^2}{C_{15}^2} = \frac{11}{15}$

c) $P(C) = \frac{8 \cdot 7}{C_{15}^2} = \frac{8}{15}$ **č)** $P(Č) = \frac{C_8^2}{C_{15}^2} = \frac{4}{15}$ **466.** **a)** $P(A) = \frac{3}{25}$ **b)** $P(B) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ **c)** $P(C) = \frac{8}{25}$

č) $P(Č) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ **d)** $P(D) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ **467.** **a)** $P(A) = \frac{7}{28}$ **b)** $P(B) = \frac{9}{28}$ **c)** $P(C) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$

č) $P(Č) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ **468.** 0'0025 **469.** $P(A) = \frac{6}{4!} = \frac{1}{4}$ **470.** $n = C_7^2 = 21$, $P(A) = \frac{4}{21}$

471. $m = P_4^{2,2} = 6$, $n = 2^4$ **a)** $P(A) = \frac{6}{2^4} = \frac{3}{8}$ **b)** $P(B) = \frac{6+4+1}{16} = \frac{11}{16}$

472.

C C C M C M
C C M C M M
C M C M M M
M C C
M M C

$P(A) = \frac{6}{7}$

473. **a)** $P(A) = \frac{7 \cdot 4 \cdot 5 + 7 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 5 + 7 \cdot 5 \cdot 5}{C_{30}^3} = \frac{555 \cdot 6}{30 \cdot 29 \cdot 28} = 0'137$

b) $P(B) = \frac{C_7^3 + C_4^3 + C_4^3 + C_5^3 + C_5^3 + C_3^3}{C_{30}^3} = \frac{(35+4+4+10+10+1) \cdot 6}{30 \cdot 29 \cdot 28} = 0'0158$

c) $P(C) = \frac{35 \cdot 6}{30 \cdot 29 \cdot 28} = 0'0086$ **č)** $P(Č) = 0'0345$

d) $P(D) = 1 - \frac{C_{26}^3}{C_{30}^3} = 0'36$ **e)** $P(E) = \frac{C_2^2 \cdot 5}{C_3^3} = 0'0012$

f) $P(F) = 0$ **g)** $P(H) = 0'3990$

474. **a)** $P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ **b)** $P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ **c)** $P(C) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ **č)** $P(Č) = \frac{10+6-2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$ **d)** $P(D) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

e) $P(E) = \frac{13}{30}$ **475.** **a)** $P(A) = \frac{6}{C_{12}^2} = \frac{1}{11}$ **b)** $P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 2}{12 \cdot 11} = \frac{5}{11}$ **c)** $P(C) = \frac{2 \cdot C_6^2}{C_{12}^2} = \frac{5}{11}$

č) Dogodki tvorijo popoln sistem.

Verjetnost produkta dogodkov

476. c, č **477.** a **478.** **a)** $\frac{1}{36}$ **b)** $P(B)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **č)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{2}{9}$ **e)** $\frac{1}{9}$

479. $P(A)=0{\cdot}43^2=0{\cdot}185$ **480.** $P(A)=\frac{4\cdot4\cdot4}{32\cdot31\cdot30}=\frac{1}{465}$ **481.** $\frac{1}{36}$ **482.** $\frac{4}{11}$ **483.** $\frac{1}{18}$

484. $P(A)=0{\cdot}47\cdot0{\cdot}78=0{\cdot}37$ **485.** $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{9}{25}$, $P(C)=\frac{16}{25}$ **486.** $P(A)=\frac{9}{20}$, $P(B)=\frac{10}{11}$, $P(C)=\frac{9}{13}$

487. $P(A)=\frac{14}{67}=0{\cdot}209$ **488.** $\frac{C_{16}^2-3\cdot8}{C_{16}^2}=\frac{4}{5}$ **489.** **a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** število 1, $P(1)=\frac{5}{18}$

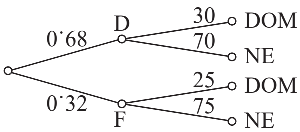
490. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$ **491.** $P(A)=\frac{C_6^2}{C_{100}^2}=\frac{1}{330}$ **492.** Da. **493.** Da.

494. Dogodka A in B sta neodvisna, dogodka A in C sta odvisna, prav tako sta odvisna dogodka B in C.

495. **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{2}{17}$ **c)** $P(S)=\frac{17}{30}$ je različen od $P(S|V)=\frac{3}{4}$; dogodka sta odvisna.

496. $f\,f\,p\,p$ / $f\,p\,f\,p$ $P(A)=\frac{1}{3}$ **497.** $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

498. **a)** $P(A)=0{\cdot}32\cdot0{\cdot}25+0{\cdot}68\cdot0{\cdot}30=0{\cdot}284$ **b)** $P(B)=\frac{0{,}68\cdot0{,}70}{0{,}68}=0{\cdot}70$ **499.** $\frac{1}{3}$



500. $\frac{4}{7}$ **501.** $\frac{2}{3}$ **502.** $\frac{1}{6}$ **503.** $\frac{2}{5}$ **504.** $0{\cdot}5$ **505.** $\frac{1}{10}$

506. $\frac{1}{6^4}$ **507.** $N=16$ **508.** **a)** $\frac{14}{45}$ **b)** $\frac{31}{45}$ **509.** **a)** $0{\cdot}002$ **b)** $0{\cdot}026$

510. **a)** $\frac{1}{220}$ **b)** $\frac{3}{44}$ **c)** $\frac{3}{11}$ **511.** **a)** $\frac{7}{36}$ **b)** $\frac{10}{36}$ **c)** $\frac{4}{36}$

č) $\frac{13}{36}$ **d)** $\frac{2}{5}$ **e)** $\frac{4}{7}$ **512.** **a)** $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{4}{5}$ **č)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{2}{3}$ **513.** **a)** $0{\cdot}25$ **b)** $\frac{1}{4}$

c) $\frac{17}{24}$ **514.** $\frac{1}{35}$ **515.** **a)** $0{\cdot}497$ **b)** $0{\cdot}47$ **c)** $0{\cdot}222$ **č)** $0{\cdot}467$ **516.** $\frac{1}{5}$ **517.** $\frac{7}{15}$

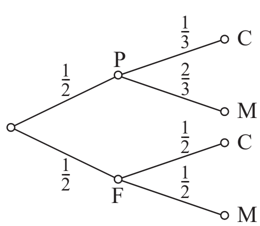
518. **a)** $0{\cdot}38$ **b)** $0{\cdot}08$ **c)** $0{\cdot}16$ **č)** $0{\cdot}07$ **519.** **a)** $0{\cdot}5$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{1}{6}$, $0{\cdot}5$ **c)** $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{5}$

č) A in B sta neodvisna. **d)** A in C sta odvisna. **520.** **a)** $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ **521.** **a)** $\frac{7}{30}$ **b)** $\frac{1}{10}$

522. $P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

$P(\text{po}\cap C)=\frac{1}{4}$

$P(\text{po}\,/\,C)=\frac{P(\text{po}\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\frac{3}{5}$



523. 20, 20, 20, 20 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
50, 50
50, 20
20, 50
20, 20, 50
20, 20, 20, 50

524.
$P(A)=2x$, $P(B)=3x$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$
$\frac{2}{3}=2x+3x-6x^2$
$18x^2-15x+2=0$ $x_{1,2}=\frac{1}{6},\frac{2}{3}$
$P(A)=\frac{1}{3}$
$P(B)=\frac{1}{2}$

525. $\frac{601}{625}$ **526.** **a)** $0{\cdot}000125$ **b)** $0{\cdot}0285$ **c)** $0{\cdot}05$ **č)** $0{\cdot}1235$ **d)** $0{\cdot}122$ **e)** $0{\cdot}02625$ **527.** $\frac{1}{3}$

č) $P(C)=\frac{8}{9}$ **528.** **a)** $\frac{3}{C_8^3}$ **b)** $\frac{3}{(C_8^3)^2}$ **c)** $\frac{1}{(C_8^3)^3}$ **č)** $\frac{1}{(C_8^3)^3\cdot10^6}$ **d)** $\frac{1}{(C_5^3)^3}$ **e)** $\frac{1}{C_{50}^5\cdot C_8^2}$ **f)** $\frac{1}{C_{50}^5\cdot C_8^1}$

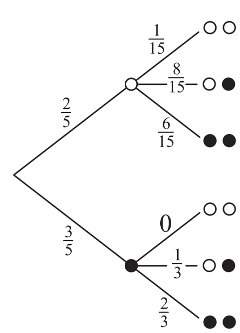
g) $\frac{1}{C_{50}^4}$ **h)** $\frac{1}{C_{50}^1\cdot C_8^2}$ **i)** $\frac{1}{C_{39}^7}$ **j)** $\frac{1}{C_{39}^5\cdot32}$ **k)** $\frac{1}{C_{39}^4}$ **l)** $\frac{1}{C_{39}^3\cdot32}$

Popolna verjetnost

529. **a)** $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{6}{7}$ **b)** $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{4}$

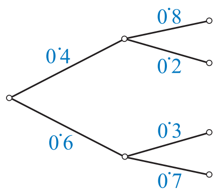
č) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ **530.** $0{\cdot}015$ **531.** $0{\cdot}565$, $0{\cdot}33$ **532.** $0{\cdot}04$

533. **a)** $0{\cdot}196$ **b)** $0{\cdot}09$ **c)** $0{\cdot}563$ **534.** $0{\cdot}964$ **535.** **a)** $\frac{41}{75}$ **b)** $\frac{5}{17}$ **c)**



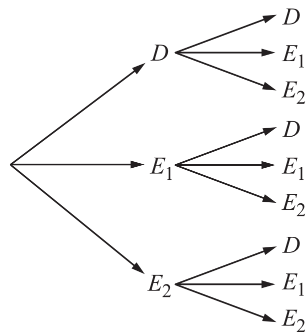
536. $0{\cdot}17$

537. $0{\cdot}5$



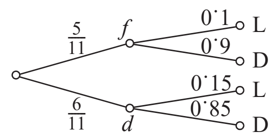
538. **a)** $\frac{7}{10}$ **b)** $\frac{19}{40}$ **c)** $\frac{18}{19}$ **539.** $0{\cdot}06$

540. **a)** $\{(D, D), (D, E_1), (D, E_2), (E_1, D), (E_1, E_1), (E_1, E_2), (E_2, D), (E_2, E_1), (E_2, E_2)\}$



b) $P(A) = \frac{3}{9}$ **c)** $P(B) = \frac{4}{9}$

541. $f : d = 5 : 6$

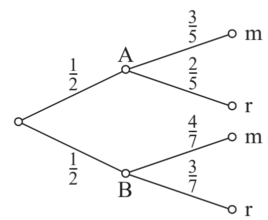


$P(L) = \frac{5}{11} \cdot 0{\cdot}1 + \frac{6}{11} \cdot 0{\cdot}15 = 0{\cdot}127$

$P(d\,/\,L) = \frac{P(d)P(L/d)}{P(L)} = \frac{9}{14}$

542. $P(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{41}{70}$

$P(A\,/\,m) = \frac{P(A \cap m)}{P(m)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{41}{70}} = \frac{21}{41}$



Zaporedje neodvisnih poskusov

543. **a)** 59 % **b)** 84 % **c)** 95 % **544.** $0{\cdot}164$ **545.** $0{\cdot}02$ % **546.** $1{\cdot}6$ % **547.** $99{\cdot}3$ %
548. $17{\cdot}7$ % **549.** $2{\cdot}4$ % **550.** $0{\cdot}3$ % **551.** $0{\cdot}1$ % **552.** $0{\cdot}206$ **553.** $\frac{31}{32}$ **554.** 0

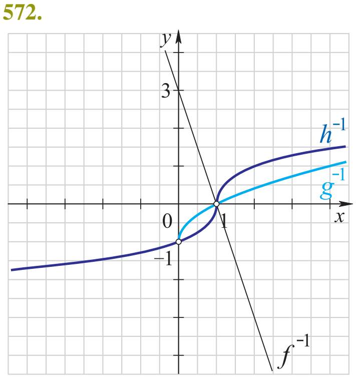
Normalna porazdelitev

555. **a)** 33 % **b)** 31 % **c)** 47 % **č)** 8 % **d)** 68 % **556.** **a)** $47{\cdot}7$ % **b)** 34 % **557.** $8{\cdot}1$ %
558. 32 % **559.** $0{\cdot}8$ % **560.** $9{\cdot}2$ % **561.** $2{\cdot}3$ % **562.** Odlično (80 ali več), prav dobro (od 74 do 79), dobro (od 66 do 73), zadostno (od 60 do 65), nezadostno (64 ali manj). **563.** $9{\cdot}2$ % **564.** Srednjih 50 % kupcev porabi med $58{\cdot}22$ € in $90{\cdot}78$ €. **565.** **a)** $0{\cdot}768$ **b)** $0{\cdot}6915$ **c)** 173 **566.** **a)** $0{\cdot}0054$ **b)** $0{\cdot}9522$ **c)** $0{\cdot}106$ **č)** $0{\cdot}5$ **d)** $0{\cdot}1587$ **567.** 114 mg/dl **568.** **a)** 139 **b)** 97

Računanje s funkcijami

569. **a)** $D_f = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ **b)** $D_g = (-1, 1) \cup (1, \infty)$ **c)** $D_h = (-\infty, -2] \cup (4, \infty)$ **570.** **a)** $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 2, f(x^{-1}) = \frac{2}{x} - 4$ in $(f(x))^{-1} = \frac{1}{2x-4}$ **b)** $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}\,, g(x^{-1}) = \frac{1}{x^3} - 1, (g(x))^{-1} = \frac{1}{x^3-1}$ **571.** a) $f^{-1}(x) = \log_3(x-1), f(x^{-1}) = 3^{\frac{1}{x}} + 1$ in $(f(x))^{-1} = \frac{1}{3^x+1}$
b) $g^{-1}(x) = e^x, g(x^{-1}) = \ln\frac{1}{x} = -\ln x$ in $(g(x))^{-1} = \frac{1}{\ln x}$

572.



$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$
$g\colon [-1, \infty) \to [0, \infty);\ g(x) = (x+1)^2$
$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ h(x) = x^3 + 1$
$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = -3x + 3$
$g^{-1}\colon [0, \infty) \to [-1, \infty);\ g(x) = \sqrt{x} - 1$
$h^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ h(x) = \sqrt[3]{x-1}$

573. **a)** $x = \frac{5}{3}$ **b)** $x = 1$ **c)** $x = 1$
č) $x = \frac{5}{2}$ **d)** $x = -\frac{3}{2}$ **e)** $x_1 = -3, x_2 = 3$

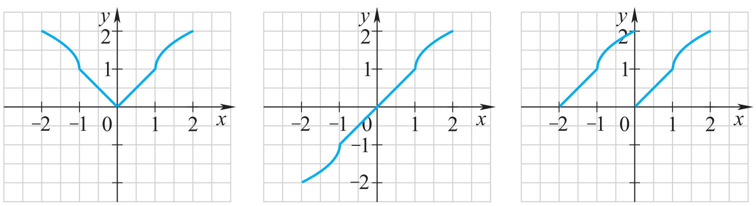
574. $(f+g)(x) = -\frac{x}{2} + 1,\ (f-g)(x) = \frac{5}{2}x + 5,$
$(f \cdot g)(x) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x - 6,\ (\frac{f}{g})(x) = \frac{-2(x+3)}{3x+4}\,;$
$h(x) = 2g(x) = -3x - 4$

575. **a)** $(f+g)(-1)=-3$, $(f-g)(1)=-3$, $(f\cdot g)(3)=0$, $(g-f)(4)=-3$ in $(\frac{f}{g})(0)=\frac{3}{2}$ **b)** $f(x)=x^2-2x-3$, $g(x)=x-2$, $(f+g)(x)=x^2-x-5$, $(f-g)(x)=x^2-3x-1$, $(g-f)(x)=-x^2+3x+1$, $(f\cdot g)(x)=x^3-4x^2+x+6$, $(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^2-2x-3}{x-2}$ **576.** **a)** $(f+g)(x)=x^2+2^x$ **b)** $4g(x)=4\cdot 2^x-4=2^{x+2}-4$ **c)** $(g-f)(x)=2^x-x^2-2$ **č)** $(f\cdot g)(x)=x^2 2^x+2^x-x^2-1$ **d)** $(\frac{g}{f})(x)=\frac{2^x-1}{x^2+1}$; $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$

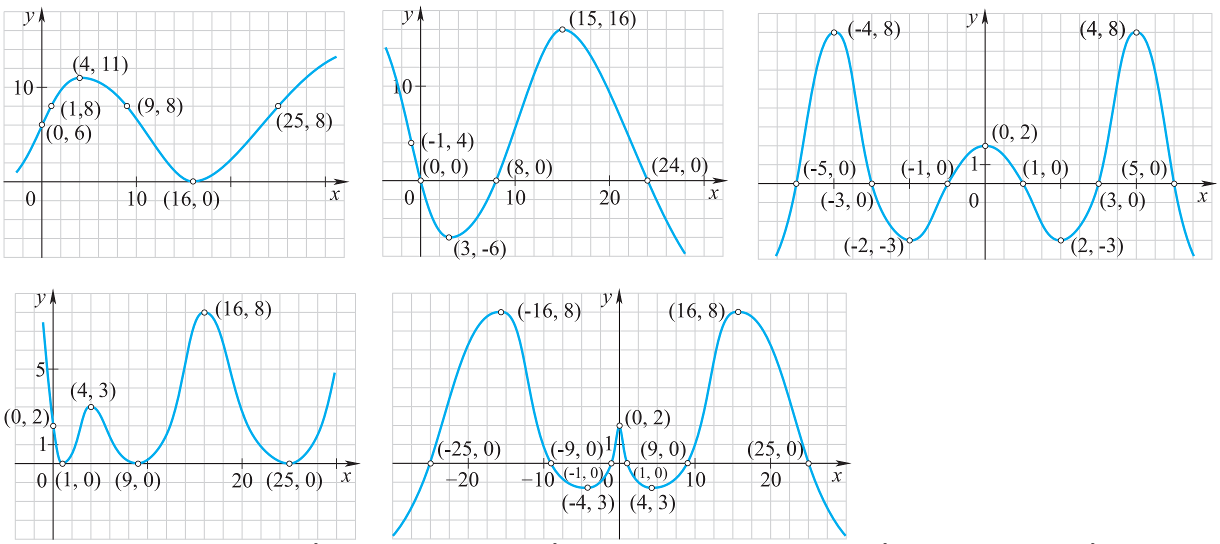
577. **a)** $(f\cdot g)(x)=x^5-5x^4+6x^3-x^2+5x-6$, $(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^3-1}{x^2-5x+6}$; $D_{f\cdot g}=\mathbb{R}$, $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{2, 3\}$ **b)** $(f\cdot g)(2)=0$, $(\frac{f}{g})(-1)=-\frac{1}{6}$

578. **a)** $(f+g)(x)=\cos^2x+\sin^2x=1$ **b)** $(f-g)(x)=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$ **c)** $2g(x)=2\sin^2x$ **č)** $(f\cdot g)(x)=\cos^2\cdot\sin^2x=\frac{1}{4}\sin^2 2x$ **d)** $(\frac{f}{g})(x)=\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\cot^2x$; $D_{\frac{f}{g}}=\{\mathbb{R}-k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$ **579.** **a)** $D_f=(-\infty, 0)$, $Z_f=[0, \infty)$ **b)** $D_f=[-7, 7)$, $Z_f=[0, \infty)$ **c)** $D_f=\mathbb{R}$, $Z_f=[1, \sqrt{3}\,]$ **580.** $D_f=(e^{-1}, \infty)$ **581.** Ena ničla je na intervalu (1, 2), druga pa na $(-2, -\frac{1}{2})$. **582.** 4

583.

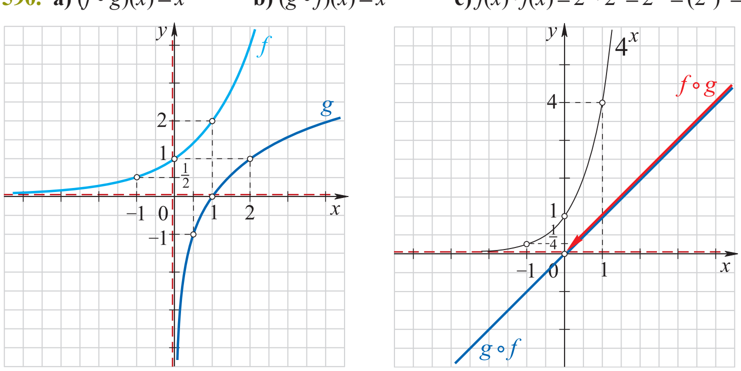


584.



585. 0 **586.** **a)** $(f\circ g)(x)=x^2+2$ **b)** $(g\circ f)(x)=x^2+6x+8$ **587.** **a)** $(f\circ g)(x)=x^2$ **b)** $(g\circ f)(x)=x^2+2x$ **c)** $(f\circ f)(x)=\sqrt{\sqrt{x+1}+1}$ **č)** $(g\circ g)(x)=(x^4-1)^4-1$ **588.** **a)** $(f\circ g)(x)=1-x$ **b)** $(g\circ f)(x)=\frac{x}{x-1}$ **c)** $(f\circ f)(x)=x$ **č)** $(g\circ g)(x)=\frac{x-1}{x}$ **589.** $(f\circ g)(x)=\log(-x^2-4x+12)$, $D_{f\circ g}=(-6, 2)$

590. **a)** $(f\circ g)(x)=x$ **b)** $(g\circ f)(x)=x$ **c)** $f(x)\cdot f(x)=2^x\cdot 2^x=2^{2x}=(2^2)^x=4^x$



591. $f(g(x))=\cos(3x^2)$, $g(f(x))=3\cos^2x$

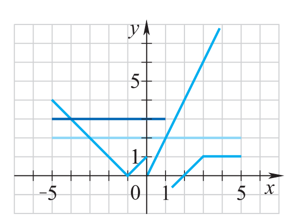
592. **a)** $k=0$ **b)** $k=1$ **c)** $n=0$

593. $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$

594. **a)** $\lambda(50, 0)=-18\,°\text{C}$, $\lambda(100, 11)=-2{\cdot}5\,°\text{C}$

b) $\lambda(v, 11)=\begin{cases} 11; & 0\le v<6{\cdot}5 \\ 22{\cdot}55-5{\cdot}29\sqrt{v}+0{\cdot}278v; & 6{\cdot}5\le v<72 \\ -2{\cdot}2; & v\ge 72 \end{cases}$

c)



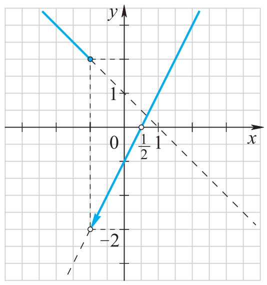
595. **a)** 1, 1, 2, 3 **b)** 0, 1, 1, 3 **c)** 2, 3, 3, 3

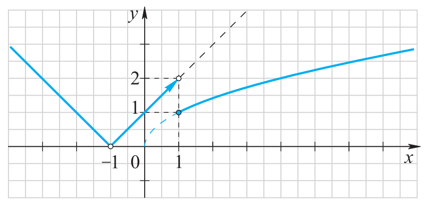
596. **a)** $f(-1)=f(0)=3$, $f(1)=-1$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $g(-1)=g(0)=0$, $g(1)=2$, $g(2)=4$, $g(3)=6$ **b)** $f(g(1))=0$, $f(h(1))=0$, $h(f(1))=2$, $f(f(2))=3$, $g(g(3{\cdot}5))=14$

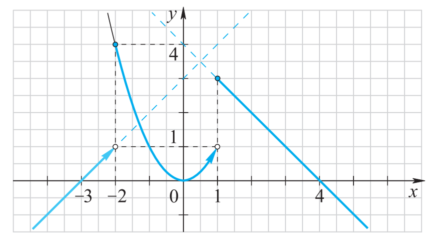
Limita in zveznost

597. **a)** Funkcija je zvezna na $\mathbb{R}$. **b)** Funkcija je zvezna na $\mathbb{R}$. **c)** Funkcija je zvezna na $\mathbb{R}$.
č) Funkcija je zvezna na $\mathbb{R}$. **d)** Funkcija ni zvezna v točki $x=-2$. **e)** Funkcija ni zvezna v točkah -1 in 3.
f) Funkcija ni zvezna v točki $x=-2$ **g)** Funkcija ni zvezna v točki $x=1$ **h)** Točk nezveznosti funkcija nima.
i) Funkcija ni zvezna v točki $x=0$ **j)** Funkcija ni zvezna v točki $x=0$ **k)** Funkcija ni zvezna v točkah $x=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

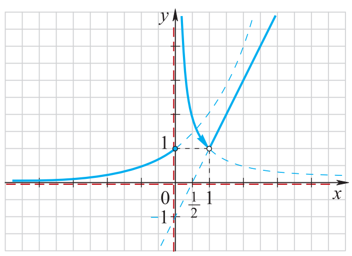
598. **a)** Funkcija ni zvezna v točki $x=-1$. **b)** Funkcija ni zvezna v točki $x=1$. **c)** Funkcija ni zvezna v točkah $x=-2$ in $x=1$.

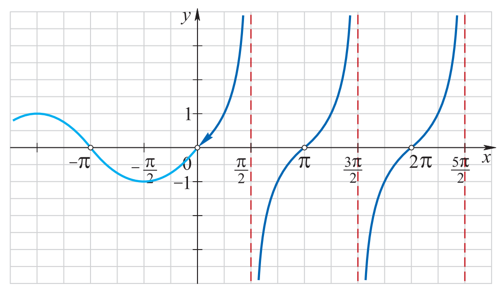




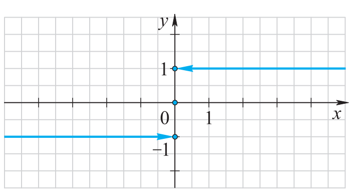


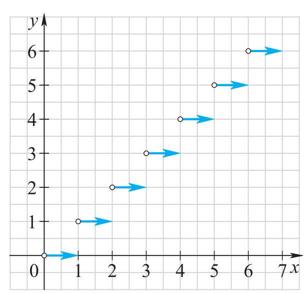
č) Funkcija ni zvezna v točki $x=0$. **d)** Funkcija ni zvezna v točkah $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\{0, 1, 2, 3 \dots\}$.





599. **a)** Funkcija ni zvezna v točki 0. **b)** Funkcija ni zvezna v točkah $x=n$; $n\in\mathbb{N}$.



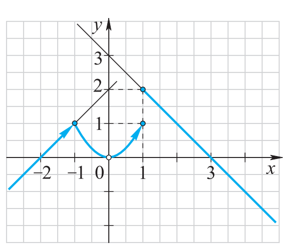


600. $a=4$ **601.** $k=10$
602. $a=\frac{2}{3}$, $b=2$ **603.** $a=2$, $b=1$

Računanje limite

604. **a)** zvezna, 5 **b)** v -3 zvezna, 6, v 3 ni zvezna, nima limite **c)** ni zvezna, 0 **č)** zvezna, -1 **d)** zvezna, 2
e) ni zvezna, 5 **f)** ni zvezna, nima limite

605. **a)**



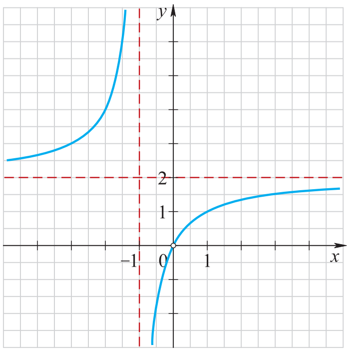
b) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$ in $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, ne obstaja.

606. **a)** 1 **b)** 2 **c)** -3 **č)** $-\frac{1}{4}$ **d)** 0 **e)** $-\frac{1}{2}$ **607.** **a)** 2
b) 5 **c)** -1 **č)** $-\frac{3}{4}$ **d)** $-\frac{3}{2}$ **e)** $-\frac{3}{2}$ **f)** $-\frac{3}{4}$ **g)** $-\frac{11}{17}$
608. **a)** 2 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{2}$ **č)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **d)** $-\frac{1}{4}$ **e)** $\frac{3}{2}$ **f)** $\frac{2}{3}$
609. **a)** 2 **b)** 1 **c)** 6 **č)** 2 **d)** ne obstaja **610.** **a)** 2 **b)** 1
c) 2 **č)** 1 **d)** 2 **e)** 2 **f)** 0

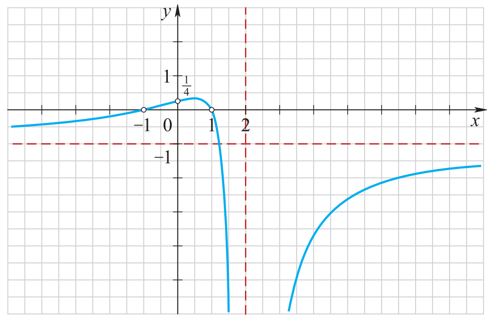
611. **a)** 6 **b)** $\frac{1}{8}$ **c)** $-\frac{19}{12}$ **č)** $-\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{10}$ **e)** $\frac{17}{4}$ **612.** $T=500$ **613.** **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{5}$
c) $-\frac{1}{2}$ **č)** $-\frac{1}{5}$ **614.** **a)** ∞ **b)** $-\infty$ **c)** Limita ne obstaja. **č)** $-\infty$ **d)** Limita ne obstaja. **e)** $-\infty$

615. **a)** 1 **b)** 0 **c)** $-\frac{1}{2}$ **č)** -1 **d)** -16 **e)** 1 **f)** $\frac{7}{2}$ **g)** -2 **h)** -2 **i)** 1 **616.** **a)** 0 **b)** 0 **c)** 0 **č)** 2 **d)** 2 **e)** 1

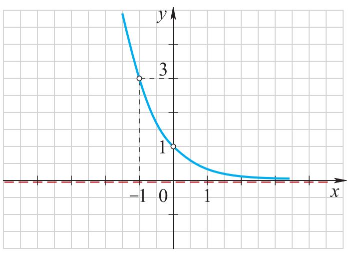
617. **a)** $y=2$



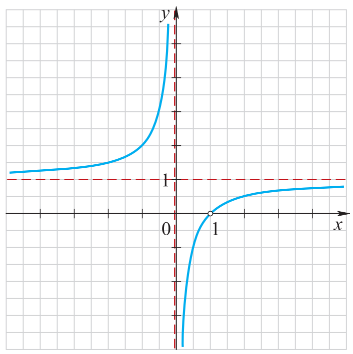
b) $y=-1$



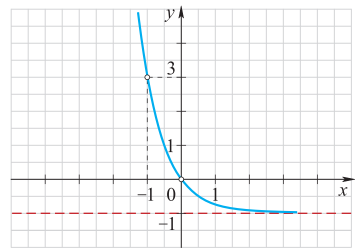
c) $y=0$



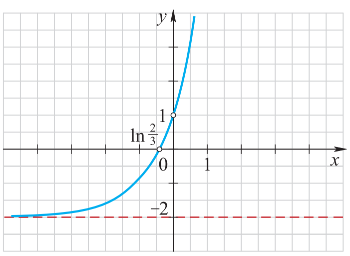
č) $y=1$



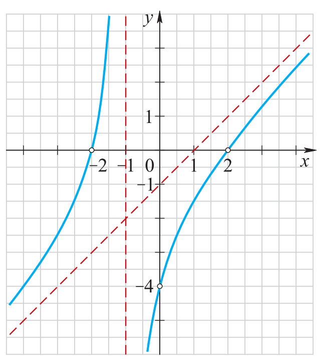
d) $y=-1$



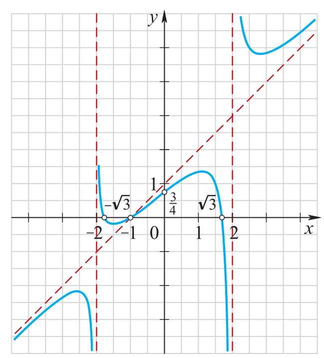
e) $y=-2$



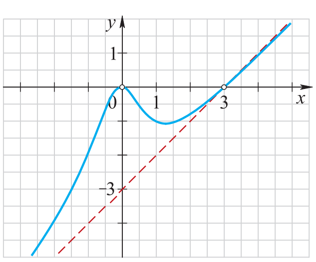
618. **a)** $y=x-1$



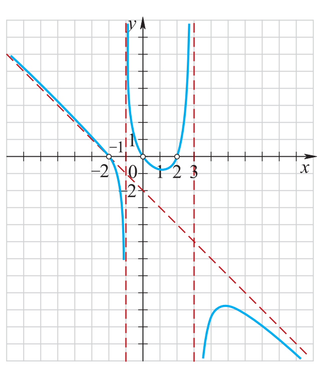
b) $y=x+1$



c) $y=x-3$

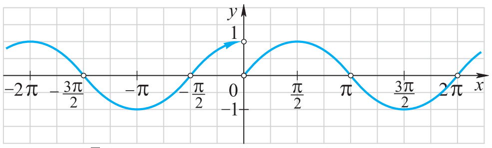


č) $y=-x-2$



619. **a)** $\frac{2}{11}$ **b)** 1 **c)** 0 **č)** -1 **d)** $-\infty$ **e)** 0 **f)** $-\infty$ **g)** ∞ **h)** ne obstaja

620. **a)** **b)** $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$, $f(0)=0$ **c)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}} f(x)=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ne obstaja



621. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** 2 **c)** $\frac{1}{2}$ **č)** $\frac{3}{2}$ **d)** 1 **e)** 4

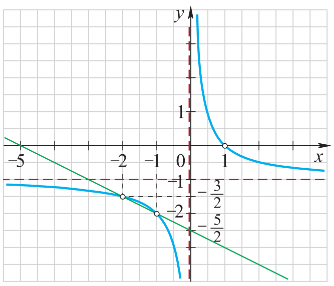
622. $\varphi=\frac{\pi}{6}$ **623.** **a)** 1 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{2}$ **č)** −1 **d)** 1 **e)** 1 **f)** −1

624. **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{9}{2}$ **c)** $\frac{1}{20}$ **č)** $\frac{2}{3}$ **625.** **a)** e^{-3} **b)** e **c)** 0 **č)** e^{-1} **626.** **a)** 0 **b)** 0 **c)** 5 **č)** 0 **627.** $y=3$ **628.** $k=2$

Definicija odvoda

629. **a)** $\varphi=63°26'$ **b)** $\varphi=135°$ **c)** $\varphi=108°26'$ **č)** $\varphi=0°$ **d)** $\varphi=90°$ **e)** $\varphi=33°41'$

630. $\frac{x}{-5}+\frac{y}{-\frac{5}{2}}=1$, $M(-5, 0)$, $N(0, -\frac{5}{2})$



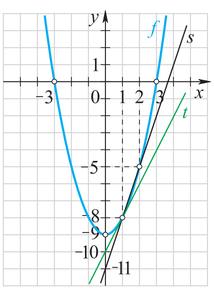
631. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(3+h)^3-1-3^3+1}{h}=27+9h+h^2, f'(3)=27$

632. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x-h-x^2+x}{h}=2x-1+h, f'(x)=2x-1, f'(2)=3$

633. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}=\frac{-2x+h}{x^2(x+h)^2}, f'(x)=\frac{-2}{x^3}, f'(-2)=\frac{1}{4}$

634. **a)** $k=4$ **b)** $k=1$ **c)** $k=-1$ **č)** $k=-\frac{2}{27}$

635. Enačba sekante s je $y=3x-11$, enačba tangente t pa $y=2x-10$. **636.** **a)** $f'(x)=5$ **b)** $f'(x)=-1$ **c)** $f'(x)=3x^2-4$



č) $f'(x)=2x+6$ **d)** $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ **e)** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **637.** **a)** $f'(x)=5$ **b)** $f'(x)=\sqrt{3}$ **c)** $f'(x)=2x-3$ **č)** $f'(x)=\frac{1}{3}$ **d)** $f'(x)=3x^2-2x$ **e)** $f'(x)=-10x^4+8x^3+3x^2+1$ **f)** $f'(x)=8x-4$ **g)** $f'(x)=k$ **h)** $f'(x)=2ax+b$ **i)** $f'(x)=2ax-2ap$

638. $p'(x)=12x^3+x^2-x+2, p'(-1)=-8$ **639.** $f'(x)=2x-3$, za $x=4$ je $f'(4)=5$

640. **a)** $f'(x)=-2x^{-3}+2x$ **b)** $f'(x)=1+x^{-2}$ **c)** $f'(x)=-ax^{-2}$ **č)** $f'(x)=4x^{-3}+\frac{x}{2}$ **d)** $f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-3}$ **e)** $f'(x)=\frac{1}{k}-\frac{k}{x^2}+\frac{2x}{k^2}-\frac{2k^2}{x^3}$

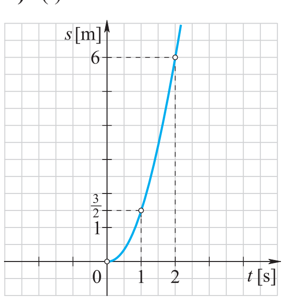
641. **a)** $f'(x)=6x-1$ **b)** $f'(x)=3x^2-10x+7$ **c)** $f'(x)=8(4x+3)$ **č)** $f'(x)=6\cdot(2x-1)^2$ **d)** $f'(x)=(x-1)(9x-1)$ **e)** $f'(x)=-2(2x^3+3x^2-6x-2)$

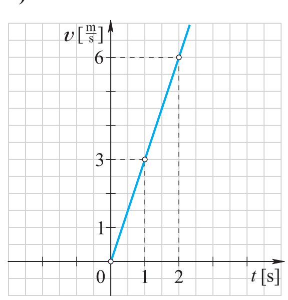
642. **a)** $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ **b)** $f'(x)=\frac{11}{(3x+2)^2}$ **c)** $f'(x)=\frac{3x^2-2x+1}{(3x-1)^2}$ **č)** $f'(x)=\frac{3}{(3x-2)^2}$ **d)** $f'(x)=\frac{2x}{(9-x^2)^2}$ **e)** $f'(x)=\frac{-36}{(6x-1)^3}$ **f)** $f'(x)=\frac{0{\cdot}4-4\sqrt{2}}{(x+4)^2}$ **g)** $f'(x)=\frac{-2(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$

643. $f'(x)=-\frac{2(x^4-4x^3-x+1)}{x^2(x-2)^2}, f'(1)=6$

644. $f'(x)=15(5x-2)^2$, za $x=\frac{2}{5}$ je $f'(\frac{2}{5})=0$. **645.** **a)** $f'(x)=4\cdot(3x^2-8\sqrt{2}x+8)$ **b)** $f'(x)=12x\cdot(3x^2-4)$ **c)** $f'(x)=\frac{2\cdot(3x-8)}{(1-3\cdot x)^3}$ **č)** $f'(x)=\frac{(x+1)\cdot(1-x)}{x^2}$ d) $f'(x)=\frac{(2x-1)(4x-7)}{(x^2+x-2)^2}$ **e)** $f'(x)=3akx^2+2anx+2bkx+bn+ck$

646. **a)** $v(t)=at$ **b)**

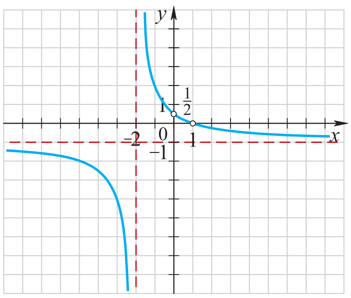




c) Po 3 sekundah je hitrost 9 m/s, prevožena pot pa 13·5 m, po 10 sekundah je hitrost 30 m/s, prevožena pot pa 150 m.

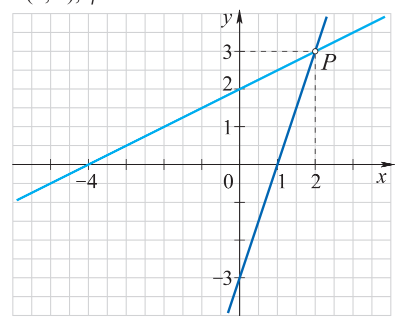
Uporaba odvoda

647. **a)** $y=x+1$ **b)** $y=3x+1$ **c)** $y=-6x+3$ **č)** $y=\frac{x}{16}+\frac{3}{16}$ **d)** $y=-\frac{5}{2}x+\frac{23}{2}$ **e)** $y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$
648. $T_1(0,-3)$, $y=x-3$, $T_2(3,0)$, $y=10x-30$ **649.** $y=-21x+24$ **650.** Enačba tangente je $y=-\frac{2}{3}x+3$, enačba normale pa $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}$. **651.** $\frac{x}{-\frac{5}{3}}+\frac{y}{5}=1$. Abscisno os seka v točki $M(-\frac{5}{3},0)$, ordinatno os pa v točki $N(0,5)$. **652.** **a)** $A(0,0)$, $B(-\frac{4}{3},0)$, $C(0,4)$ **b)** $S=\frac{8}{3}$ **653.** Implicitna oblika je $9x+7y-50=0$, eksplicitna oblika je $y=-\frac{9}{7}x+\frac{50}{7}$, odsekovna oblika pa $\frac{x}{\frac{50}{9}}+\frac{y}{\frac{50}{7}}=1$. **654.** $T_0(1,1)$, $y=10x-9$ **655.** $T_1(-2,1)$, $y=3x+7$, $T_2(0,3)$, $y=3x+3$ **656.** $y=-x$
657. $T_1(2,3)$ $y=-x+5$ in $T_2(0,1)$ $y=-x+1$ **658.** $T_1(1,3)$, $T_2(-1,-3)$ **659.** $T_0(3,-12)$ **660.** $q=4$, $T_0(0,7)$
661. $k=\frac{1}{2}$ **662.** $\varphi=84°48'=84{\dot{}}81°$ **663.** V točki $T_1(4,0)$ pod kotom $\varphi_1=83°40'$, v $T_2(-\frac{1}{2},0)$ pa pod kotom $\varphi_2=96°20'$.
664. Presečišči sta $T_1(-3,\frac{5}{3})$, $T_2(2,\frac{5}{2})$, $\varphi=7°42'$. **665.** $\varphi=14°2'$
666.

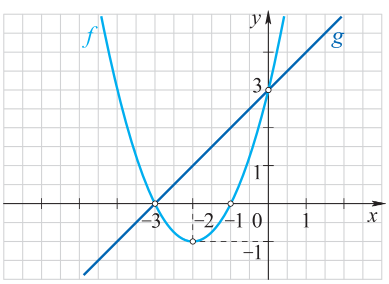


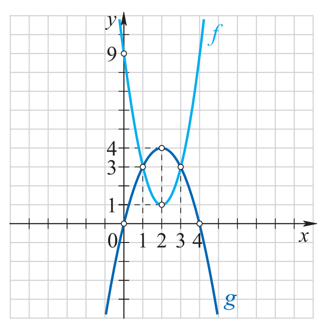
Graf funkcije seka abscisno os v točki $(1,0)$ pod kotom $\varphi=161°34'$, ordinatno os pa v točki $(0,\frac{1}{2})$ pod kotom $\psi=53°8'$.

667. $T_1(1,-14)$, $T_2(3,-18)$ **668.** $P(2,3)$, $\varphi=45°$



669. **a)** $T_1(0,3)$, $\varphi_1=30°58'$; $T_2(-3,0)$, $\varphi_2=71°34'$ **b)** $T_1(1,3)$, $\varphi_1=40°36'$; $T_2(3,3)$, $\varphi_2=40°36'$





670. $f(x)=x^3$, $g(x)=(x-2)^2$, $P(1,1)$, $\varphi=45°$ **671.** **a)** $T_1(-1,1)$, $\varphi_1=33°41'$; $T_2(1,1)$, $\varphi_2=33°41'$ **b)** $T(2,3)$, $\varphi=52°8'$
c) $T_1(0,16)$, $\varphi_1=85°24'$; $T_2(2,0)$, $\varphi_2=86°25'$, $T_3=(-6,-128)$, $\varphi_3=0°36'$ **č)** $T_1(-2,\frac{1}{2})$, $\varphi_1=28°4'$; $T_2(1,-1)$, $\varphi_2=90°$
672. $y=-16x+12$, $y=16x+12$ **673.** $y=6x+1$
674. Funkcija ni ne injektivna ne surjektivna. Definicijsko območje funkcije so vsa realna števila, zaloga vrednosti pa interval $(-\infty,3]$. Ničle so $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=7$ in $x_4=11$, presečišče z ordinatno osjo pa $(0,1{\dot{}}5)$. Funkcija je naraščajoča na $(-4,1)$ in $(5,9)$, padajoča pa na $(-\infty,-4)$, $(1,5)$ in $(9,\infty)$, pozitivna na $(-1,3)$ in $(7,11)$, negativna pa na $(-\infty,-1)$, $(3,7)$ in $(11,\infty)$. Funkcija f je navzgor omejena s 3, navzdol ni omejena, ni liha ne soda in ni periodična. Ekstremi so v točkah: $(-4,-3)$ in $(5,-2)$ (lokalna minimuma) ter $(1,2)$ (lokalni maksimum) in $(9,3)$ (globalni maksimum). **675.** **a)** Narašča na $(-2,2)$, pada na $(-\infty,-2)$ in $(2,\infty)$.
b) Narašča na $(-\infty,-\frac{1}{2})$ in $(\frac{3}{2},\infty)$, pada na $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$. **c)** Narašča na $(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$, pada na $(-\infty,1-\sqrt{3})$ in $(1+\sqrt{3},\infty)$.
č) Narašča na $(1,\infty)$, pada na $(-\infty,-1)$ in $(-1,1)$. **d)** Narašča na $(-\infty,-1)$, $(-\frac{1}{2},0)$ in $(\frac{1}{2},\infty)$, pada na $(-1,-\frac{1}{2})$ in $(0,\frac{1}{2})$.
e) Pada na $(\frac{12}{5},4)$, narašča na $(-\infty,0)$, $(0,\frac{12}{5})$ in $(4,\infty)$. **f)** Narašča na $(-\infty,-1)$ in $(1,\infty)$, pada na $(-1,1)$.
g) Narašča na $(-\infty,-1-\sqrt{2})$ in $(-1+\sqrt{2},\infty)$, pada na $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$. **h)** Narašča na $(-\infty,-\sqrt{6})$ in $(\sqrt{6},\infty)$, pada na $(-\sqrt{6},\sqrt{6})$.
676. Definicijsko območje funkcij f, h in g je $\mathbb{R}$, funkcije so naraščajoče, ker je odvod vedno pozitiven.
677. Odvod je vedno negativen. **678.** $a>-2$ **679.** **a)** $f'(x)=3x^2-6x$. Maksimum je v $(0,4)$, minimum pa v $(2,0)$.

b) $f'(x)=3x^2-12x$. Maksimum je v (0, 2), minimum pa v (4, –30). **c)** $f'(x)=-3x^2+4x+15$. Minimum je v $(-\frac{5}{3}, -\frac{400}{27})$, maksimum pa v (3, 36). **č)** $f'(x)=4x^3-6x$. Maksimum je v $(0, \frac{5}{4})$, minimuma pa v $(\frac{\sqrt{6}}{2}, -1)$ in $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -1)$. **d)** $f'(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$. Maksimum je v (0, 0), minimuma pa v $(\sqrt{6}, -3)$ in $(-\sqrt{6}, -3)$. **e)** $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$. Maksimum je v $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, minimum pa v $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

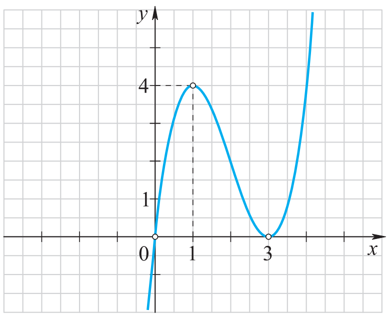
f) $f'(x)=\frac{x^5+32}{x^5}$. Maksimum je v $(-2, -\frac{5}{2})$. **g)** $f'(x)=\frac{4-x^2}{(x^2+2x+4)^2}$. Maksimum je v $(2, \frac{1}{6})$, minimum pa v $(-2, -\frac{1}{2})$.

h) $f'(x)=-\frac{x^2-10x+9}{(x^2-9)^2}$. Maksimum je v $(9, \frac{1}{18})$, minimum pa v $(1, \frac{1}{2})$. **680. a)** Maksimum je v (3, 20), minimum pa v (–3, –16).

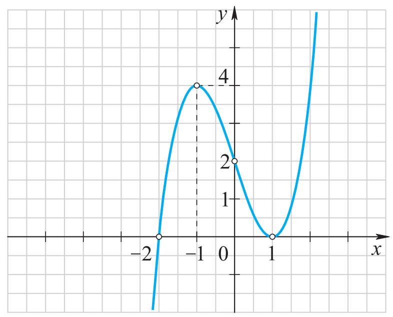
b) Maksimum je v (–2, 38), minimum pa v (–5, –151). **c)** Maksimum je v (–1, 4), minimum pa v (1, 0).

681.

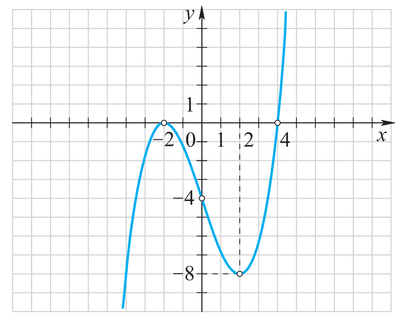
a) Ničle so $x_1=0$, $x_{2,3}=3$, presečišče z ordinatno osjo (0, 0), maksimum je v (1, 4), minimum v (3, 0).



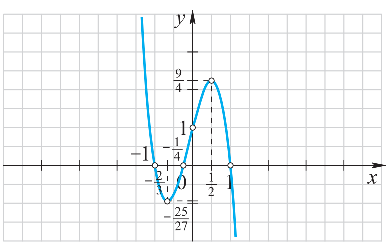
b) Ničle so $x_{1,2}=1$, $x_3=-2$, presečišče z ordinatno osjo (0, 2), maksimum je v (–1, 4), minimum je v (1, 0).



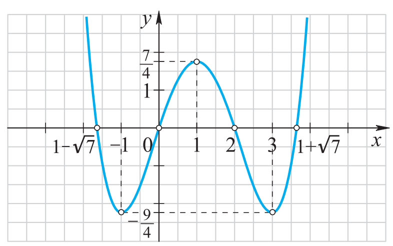
c) Ničle $x_1=4$, $x_{2,3}=-2$, presečišče z ordinatno osjo (0, –4), maksimum je v (–2, 0), minimum v (2, –8).



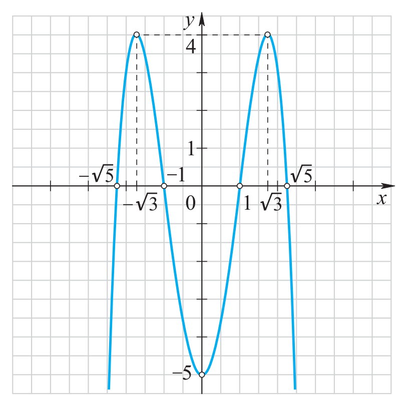
č) Ničle $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-\frac{1}{4}$, presečišče z ordinatno osjo (0, 1), minimum je v $(-\frac{2}{3}, -\frac{25}{27})$, maksimum v $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$.



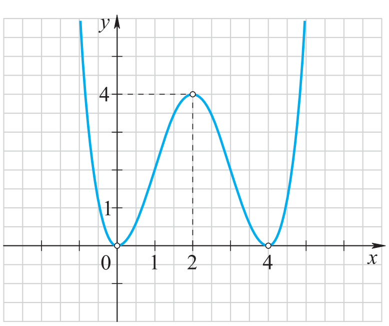
d) Ničle so $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=1-\sqrt{7}$, $x_4=1+\sqrt{7}$, presečišče z ordinatno osjo (0, 0), maksimum je v $(1, \frac{7}{4})$, minimuma pa v $(-1, -\frac{9}{4})$ in $(3, -\frac{9}{4})$.



e) Ničle so $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-\sqrt{5}$, $x_4=\sqrt{5}$, presečišče z ordinatno osjo v (0, –5), minimum je v (0, –5), maksimuma pa v $(\sqrt{3}, 4)$ in $(-\sqrt{3}, 4)$.

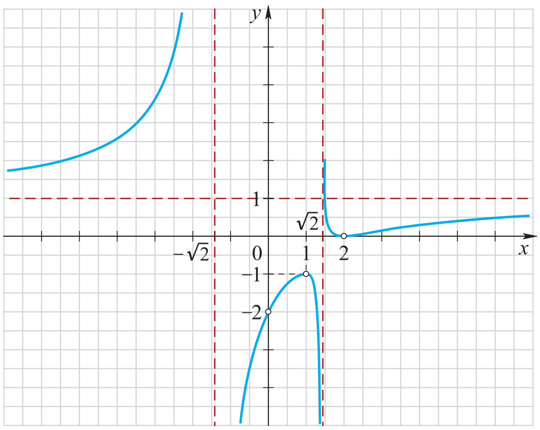


f) Ničle $x_{1,2}=0$, $x_{3,4}=4$, minimuma sta v (0, 0) in (4, 0), maksimum je v (2, 4).

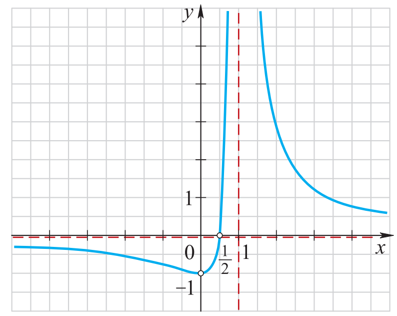


682.

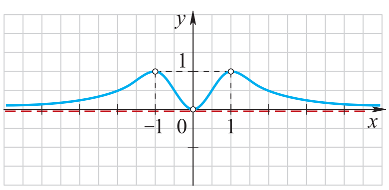
a) Ničla $x_{1,2} = 2$, presečišče z ordinatno osjo je $(0, -2)$, pola $x_1 = -\sqrt{2}$ in $x_2 = \sqrt{2}$, asimptota $y = 1$, maksimum $(1, -1)$,



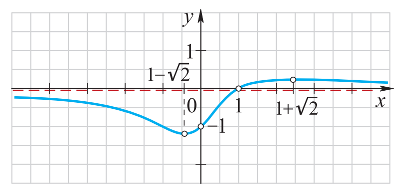
b) Ničla $x_1 = \frac{1}{2}$, presečišče z ordinatno osjo je $(0, -1)$, pol $x_{1,2} = 1$, asimptota $y = 0$, minimum v $(0, -1)$.



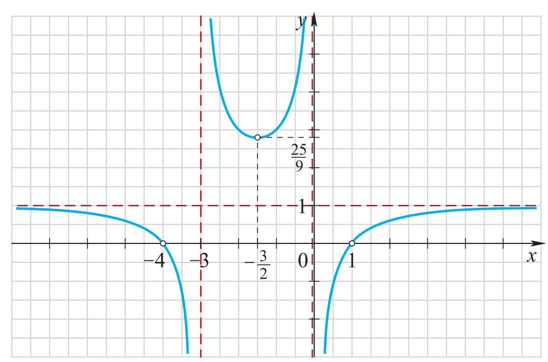
c) Ničle $x_{1,2} = 0$, presečišče z ordinatno osjo $(0, 0)$, polov ni, asimptota $y = 0$, maksimuma $(-1, 1)$ in $(1, 1)$, minimum $(0, 0)$.



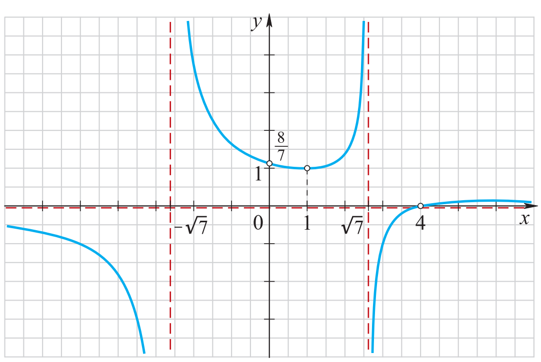
č) Ničla $x_1 = 1$, presečišče z ordinatno osjo je $(0, -1)$, polov ni, asimptota $y = 0$, maksimum $(1 + \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2})$ in minimum v $(1 - \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}+1}{2})$.



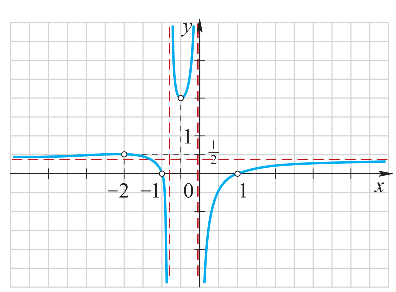
d) Ničli $x_1 = -4$ in $x_2 = 1$, pola $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, asimptota $y = 1$, minimum v $(-\frac{3}{2}, \frac{25}{9})$.



e) Ničla $x_1 = 4$, presečišče z ordinatno osjo je $(0, \frac{8}{7})$, pola $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = -\sqrt{7}$, asimptota $y = 0$, maksimum $(7, \frac{1}{7})$ in minimum v $(1, 1)$.



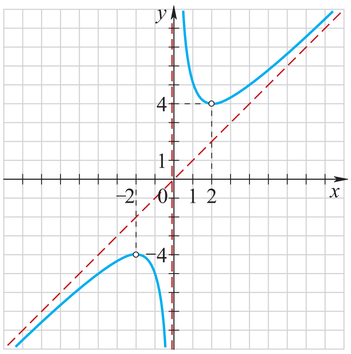
f) Ničli $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$, pola $x_1 = -\frac{4}{5}$, $x_2 = 0$, asimptota $y = \frac{2}{5}$, maksimum $(-2, \frac{1}{2})$, minimum $(-\frac{1}{2}, 2)$.



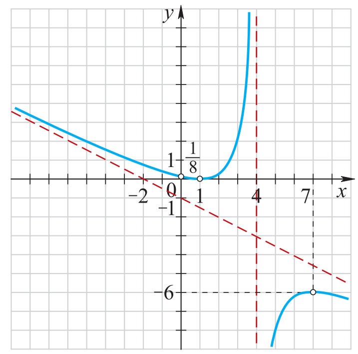
683. Odvod je vedno negativen.

684.

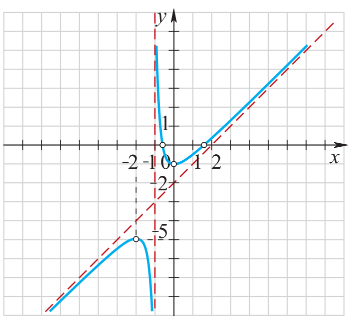
a) Definicijsko območje je $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, ničel ni, pol $x = 0$, asimptota $y = x$, maksimum je v $(-2, -4)$, minimum pa v $(2, 4)$.



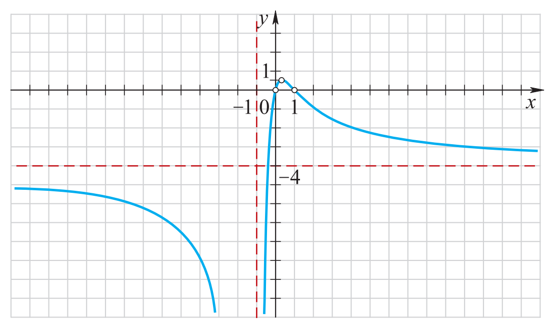
b) Definicijsko območje je $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$, ničla $x_{1,2} = 1$, pol $x_1 = 4$, asimptota $y = -\frac{1}{2}x - 1$, maksimum $(7, -6)$, minimum $(1, 0)$.



c) Definicijsko območje je $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, ničli $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, pol $x_1 = -1$, asimptota $y = x - 2$, maksimum $(-2, -5)$, minimum $(0, -1)$.



688. Ker je odvod funkcije $f'(x) = \frac{4(1-3x)}{(x+1)^3}$, ima funkcija ekstrem, ki je lokalni maksimum v $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Ker pa je $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ in $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = -4$ ter ima funkcija f v $x = -1$ pol druge stopnje, so rešitev neenačbe $f(x) \le \frac{1}{2}$ vsa realna števila.

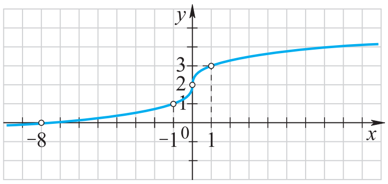


685. $t_1 = 3$ s, $t_2 = 4$ s **686.** **a)** (f, c), (g, a), (h, b) **b)** (f, b), (g, c), (h, a) **687.** Funkcija ima 3 lokalne maksimume in 3 lokalne minimume. **689.** $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 11$ **690.** 1 **691.** graf C … f, graf B … f', graf C … f'' **692.** **a)** Narašča na intervalu $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$, pada na $(-1, 1) \cup (4, \infty)$. **b)** Konveksna je na intervalu $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$, konkavna na intervalu $(-1, 1) \cup (4, \infty)$. **693.** $100 = 50 + 50$ **694.** $18 = 9 + 9$ **695.** Kvadrat s stranico $a = \frac{o}{4}$. **696.** $r = \frac{o}{4}$, $S = \frac{o^2}{4}$ **697.** $a = 12$ dm, $b = 6$ dm, $c = 4$ dm **698.** **a)** $a = \frac{2}{3}$, $v = \frac{2}{3}$ **b)** $a = v = \frac{2}{3}$ **699.** $r : v = 1 : 2$ **700.** $a = \frac{o}{2}$, $b = \frac{v}{2}$ **701.** $a = \frac{6\sqrt{3}}{3}$, $b = 2$ cm **702.** $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$ **703.** $T(1, 1)$ **704.** $T_1(\sqrt{5}, 1)$ $T_2(-\sqrt{5}, 1)$. Nasvet: Točka hiperbole, ki je najbližja krožnici, je tudi najbližja središču krožnice. **705.** $-\frac{3\pi}{2}$

Odvodi drugih elementarnih funkcij

706. a) $f'(x) = 16x(2x^2+1)^3$ **b)** $f'(x) = \frac{4(x^2-1)(x^2+1)^3}{x^5}$ **c)** $f'(x) = 15x^4(1-5x^2)(5x^2-3)^2$ **č)** $f'(x) = \frac{12x}{(3-2x^2)^4}$ **d)** $f'(x) = \frac{15(4x^3+1)(6x^3+2x-3)^4}{x^6}$ **e)** $f'(x) = 4k(kx+n)^3$ **f)** $f'(x) = \frac{6(2x^2+1)(2x^2-1)^2}{x^4}$ **g)** $f'(x) = 2x(x^2+2)(15x^6+18x^4-6x^2-4)$ **h)** $f'(x) = \frac{2x+7}{(1-x)^4}$ **707.** $a_1 = \frac{3}{8}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ **708.** **a)** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ **b)** $f'(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$ **c)** $f'(x) = 2x + 3\sqrt{x} + 1$ **č)** $f'(x) = 4x\sqrt[3]{x^2}$ **d)** $f'(x) = 41x^2\sqrt[12]{x^5}$ **e)** $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{7}{6}x^{-\frac{13}{6}} + \frac{1}{x^2}$ **709.** $y = \frac{x}{2} + 4$ **710.** Enačba tangente je $y = -x - 4$, enačba normale pa $y = x - 2$.

711. Abscisno os seka v točki (–8, 0) pod kotom $\varphi = 4°46'$, ordinatno os pa v točki (0, 2) pod kotom 0°.



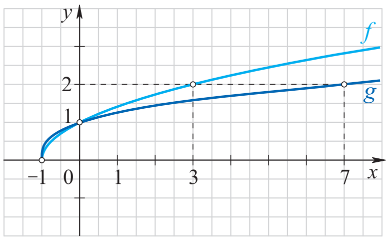
712. **a)** $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **b)** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}$ **c)** $f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x-6}}$

č) $f'(x) = \sqrt{1-2x} - \frac{x}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1-3x}{\sqrt{1-2x}}$ **d)** $f'(x) = 6x\sqrt[3]{8-x} - \frac{x^2}{\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \frac{x(48-7x)}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$

e) $f'(x) = \frac{2x+3}{(2x-1)^2\sqrt{2x+1}}$ **f)** $f'(x) = \frac{x-4}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ **g)** $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x^2-1}}\,\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$

h) $f'(x) = (nx+m)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{nx+m}}{nx+m}$ **713.** Enačba normale je $y = 12x - 110$.

714. **a)** $P_1(-1, 0)$ in $P_2(0, 1)$ **b)** **c)** $\varphi = 8°8'$ **715.** $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}} = \sqrt{3}$, $T(2, \sqrt{3})$



716. $f'(x) = \frac{1}{2(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}$. V točki $T(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ pod kotom $\varphi = 29°21'$.

717. $f'(x) = \frac{3a}{\sqrt[3]{(1-x)^4}}$, $a = \frac{8}{3}$ **718.** **a)** $D_f = [0, \infty)$, narašča na $(0, \infty)$.

b) Narašča na $(-1, -\frac{4}{5})$ in $(0, \infty)$, pada na $(-\frac{4}{5}, 0)$.

719. **a)** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{16}{x^3} = \frac{x^{\frac{5}{2}}-32}{2x^3}$. Minimum je v $(4, 2\frac{1}{2})$. **b)** $f'(x) = \frac{x^2-12}{3\cdot\sqrt[3]{x^2-12}}$.

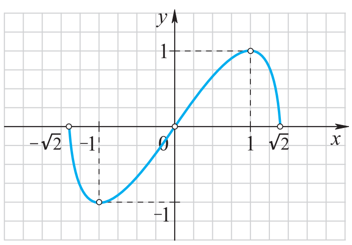
Maksimum je v $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, minimum v $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

720. **a)** Definicijsko območje je $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

b) Ničle so $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$.

c) $f'(x) = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$. Maksimum je v (1, 1), minimum pa v (–1, –1).

č)



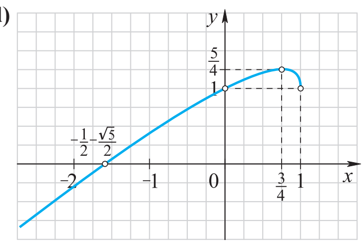
721. **a)** $D_f = (-\infty, 1]$

b) Ničla je $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, presečišče z ordinatno osjo je (0, 1).

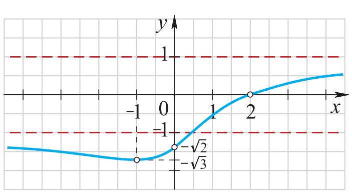
c) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ Maksimum je v $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$.

č) Funkcija narašča na $(-\infty, \frac{3}{4})$ in pada na $(\frac{3}{4}, 1)$.

d)



722. Definicijsko območje so vsa realna števila, ničla $x = 2$, presečišče z ordinatno osjo je $(0, -\sqrt{2})$. Ker je $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ in $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, sta asimptoti $y = 1$ in $y = -1$. $f'(x) = \frac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+2)^3}}$ in minimum je v točki $(-1, -\sqrt{3})$.

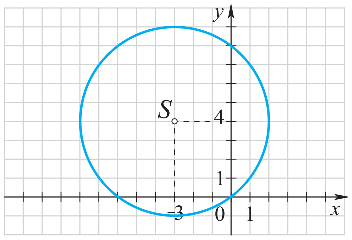


723. **a)** $y' = -\frac{x}{y}$ **b)** $y' = \frac{x+1}{y}$ **c)** $y' = \frac{x+1}{3y}$ **č)** $y' = -\frac{1+y}{1+x}$ **d)** $y' = \frac{4(x-1)}{9(y+2)}$ **e)** $y' = \frac{-3x^2y+2x+9y+2}{x^3-9x}$ **724.** $\frac{2}{3}$

725. $-\pi$ **726.** $g'(1) = 2$ **727.** $\frac{1}{4}$ **728.** Funkcija pada na (–1, 1), narašča na $(1, \infty)$, $D_f = (-1, \infty)$. **729.** $A(3, 2)$

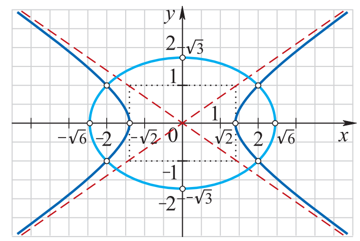
730. $\frac{1}{2}$

731. **a)** Središče krožnice je $S(-3, 4)$, polmer $r = 5$.
b) $(0, 0)$, $(0, 8)$, $(-6, 0)$
c)

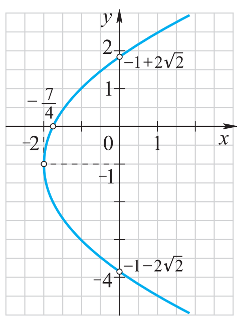


č) $\varphi = 36°52'$

732. **a)** Prva enačba določa hiperbolo, druga elipso.
b) $(2, 1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$, $(2, -1)$
c) $\varphi = 90°$



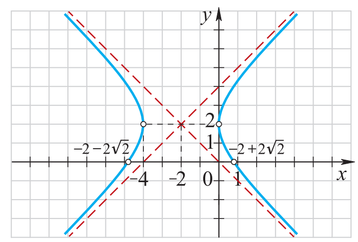
733. **a)** Teme parabole je $T(-2, -1)$, enačba simetrale pa $y = -1$.
b) $(0, -1+2\sqrt{2})$, $(0, -1-2\sqrt{2})$, $(-\frac{7}{4}, 0)$
c)



č) $\varphi = 63°26'$

734. **a)** Krivulja je elipsa s središčem v točki $S(3, -1)$ in temeni $(6, -1)$, $(0, -1)$, $(3, 1)$, $(3, -3)$. **b)** $x = 6$

735. **a)** Krivulja je hiperbola s središčem v točki $(-2, 2)$.
b) Temeni sta $(-4, 2)$ in $(0, 2)$, asimptoti pa $y = -x$ in $y = x + 4$.
c)



č) V točki $(-2+2\sqrt{2}, 0)$ seka krivulja abscisno os pod kotom $\varphi_1 = 125°16'$, v točki $(-2-2\sqrt{2}, 0)$ pa pod kotom $\varphi_1 = 54°44'$.

736. **a)** $x + 3y - 4 = 0$ **b)** $3x - 3\sqrt{8}\,y + 15 = 0$ **c)** $4x + 3y + 25 = 0$ **č)** $x - y + 2 = 0$

737. **a)** $f'(x) = 3\cos x - 2\sin x$ **b)** $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{-4}{\sin^2 2x}$ **c)** $f'(x) = \cos 2x$ **č)** $f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ **d)** $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$ **e)** $f'(x) = \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{(\sin x - \cos x)^2}$ **f)** $f'(x) = -\sin^{-2} x$ **g)** $f'(x) = \frac{2\sin x + \cos x}{\cos 3x}$

738. $f'(x) = -\frac{1}{\sin x + 1}$, $f'(\frac{\pi}{3}) = 2\sqrt{3} - 4$

739. $y = 4x + \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$

740. Enačba tangente je $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3+\sqrt{3}\pi}{6}$, enačba normale pa $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{2}$.

741. $\varphi = 68°39'$

742. **a)** $f'(x) = 3\cos 3x - 3$ **b)** $f'(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ **c)** $f'(x) = -3\cos^2 x \sin x$ **č)** $f'(x) = \cos x(1 - 3\sin^2 x)$ **d)** $f'(x) = \cot^2 x - 2\sin x + 1$ **e)** $f'(x) = -\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$ **f)** $f'(x) = \frac{-\cos x(4\sin^2 x + \cos 2x)}{\sin^2 x}$ **g)** $f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}$ **h)** $f'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$ **i)** $f'(x) = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **j)** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\tan 2x}} \cdot \frac{2}{\cos^2 2x}$

743. $f'(x) = 4\sin x\cos^3 x$, $f'(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

744. $f'(x) = \frac{-2\cos 2x}{\sin^2 2x}$. V točkah $T(\frac{\pi}{8} + k\pi, \sqrt{2})$; $k \in \mathbb{Z}$ imajo tangente smerni koeficient $k = -2\sqrt{2}$.

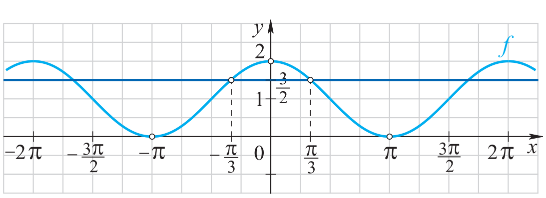
745. $f'(x) = \frac{4\sin^3 x}{\cos^5 x}$, $y = 8x + 2\pi + 1$

746. $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

747. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$, $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

748. $f'(x) = 2(\cos 2x - \sin 2x)$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

749. Krivulji se sekata v točkah $T_1(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{3}{2})$; $k \in \mathbb{Z}$ in $T_1(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{3}{2})$; $k \in \mathbb{Z}$ pod kotom $\varphi = 40°54'$.



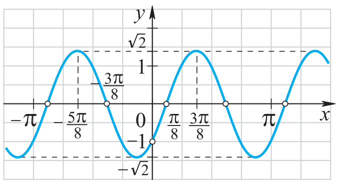
750. **a)** Pada na $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, narašča na $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. **b)** Pada na $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, narašča na $(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

751. Odvod je na danem intervalu pozitiven.

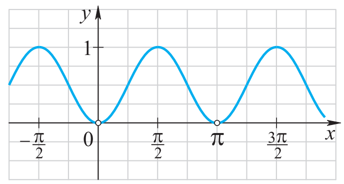
752. **a)** $f'(x) = 2\cos 2x - 1$. Lokalni maksimumi so za $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, lokalni minimumi pa za $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. **b)** $f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}$. Maksimumi so za $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, lokalni minimumi pa za $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. **c)** $f'(x) = -\frac{\cos x + \sin x - 1}{(\cos x - \sin x)^2}$. Maksimum so za $x = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, lokalni minimumi pa za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. **č)** $f'(x) = -\frac{\cos x + \sin x - 1}{(\sin x - \cos x)^2}$. Maksimum so za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, minimum pa v $x = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

753.

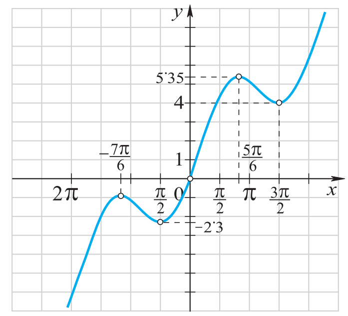
a) $f'(x)=2\cos 2x+2\sin 2x$. Ničle so $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$, maksimumi so v točkah $(\frac{3\pi}{8}+k\pi, \sqrt{2})$; $k\in\mathbb{Z}$, minimum pa v $(-\frac{\pi}{8}+k\pi, -\sqrt{2})$; $k\in\mathbb{Z}$.



b) Definicijsko območje je $D_f=\mathbb{R}$, ničle $\pi+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$, maksimumi so v $(\frac{\pi}{2}+k\pi, 1)$; $k\in\mathbb{Z}$, minimumi pa v $(\pi+k\pi, 0)$; $k\in\mathbb{Z}$.

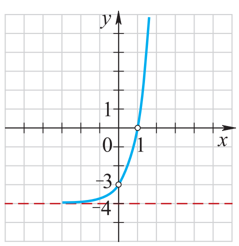


c) Definicijsko območje je $D_f=\mathbb{R}$, ničla je $x=0$, abscise lokalnih maksimumov so v $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$, lokalnih minimumov v $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.



754. **a)** $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ **b)** $f'(x)=\frac{3}{1+9x^2}$ **c)** $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{2x-4x^2}}$ **č)** $f'(x)=\frac{-1}{x^2-2x+2}$ **d)** $f'(x)=\frac{3\cos x}{\sqrt{1-9\sin^2 x}}$
e) $f'(x)=\frac{-1}{x^2+1}$ **f)** $f'(x)=2x\arctan\frac{1}{x}-1$ **g)** $f'(x)=2-\frac{4x\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$ **h)** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **i)** $f'(x)=-\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$
j) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$ **755.** $\varphi=60°$. Namig: Središče polkroga povežite s krajiščema krajše osnovnice trapeza. S tem dobite tri enakokrake trikotnike, od koder lahko poiščemo zveze $a=2R$, $v=R\sin 2\varphi$, $c=-2R\cos 2\varphi$; $45°<\varphi<90°$. **756.** $r=\sqrt{3}\,R$, $v=\sqrt{\frac{3}{2}}\,R$

757. $\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot 360°$ ali $\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot 2\pi$ **758.** $r=\frac{4}{4+\pi}$ **759.** **a)** $f'(x)=4e^{4x}$ **b)** $f'(x)=3\ln x+3$ **c)** $f'(x)=\frac{x\ln x-x-1}{x(\ln x)^2}$
č) $f'(x)=xe^x(x+2)$ **d)** $f'(x)=\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$ **e)** $f'(x)=2\cdot\ln 3\cdot 3^x$ **f)** $f'(x)=-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+2xe^{x^2}-\frac{3}{2}\sqrt{x}-2^x\ln 2$ **760.** $T(0, 5)$, $k=3\ln 2$, $\varphi=64°19'$ **761.** $T(1, 0)$, $\varphi=63°26'$ **762.** $f'(x)=4^x\ln 4$. Graf funkcije seka abscisno os v točki $(1, 0)$ pod kotom $\varphi=79°47'$, ordinatno os pa v točki $(0, -3)$ pod kotom $\psi=35°48'$.



763. $f'(x)=10^x+x10^x\ln 10$, $\varphi=45°$
764. $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, $k=\frac{1}{e}$, $T_0(-1, \frac{1}{2e})$, $y=\frac{x}{e}+\frac{3}{2e}$
765. $f'(x)=\frac{2}{x(\ln x-1)^2}$, $f'(e^2)=\frac{2}{e^2(\ln e^2-1)^2}=\frac{2}{e^2}$
766. $f'(x)=-e^{-2x}(\sin x+2\cos x)$, $T_0(\frac{\pi}{2}, 0)$. Smerni koeficient tangente je $f'(\frac{\pi}{2})=-e^{-\pi}$, normale pa $f'(\frac{\pi}{2})=e^{\pi}$. Enačba normale je $y=e^{\pi}x-e^{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}$.

767. **a)** $f'(x)=\frac{1}{x}$ **b)** $f'(x)=-\frac{2}{1-2x}$ **c)** $f'(x)=e^{x^2}(2x^4+3x^2)$ **č)** $f'(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ **d)** $f'(x)=2\cdot 10^{2x+1}\ln 10$
e) $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ **f)** $f'(x)=-2x\ln 2x-x+\frac{2}{x}$ **g)** $f'(x)=\frac{-1}{\sin x\cos x}$ **h)** $f'(x)=2\sin x\, e^{-2x}(\cos x-\sin x)$
i) $f'(x)=-ka^{-kx}\ln a$ **768.** $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}}$, $f'(\frac{10}{9})=\frac{3\cdot\sqrt[3]{e}}{2}$ **769.** $T(-1, 0)$, $\varphi=45°$ **770.** $f'(x)=\frac{x+1}{x^2+2x-3}$, $T(2, \frac{1}{2}\ln 5)$
771. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$, $k=-3$, $T_0(-2, 0)$. Eksplicitna oblika je $y=-3x-6$, implicitna oblika je $3x+y+6=0$, odsekovna pa $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-6}=1$.
772. **a)** $D_f=\mathbb{R}$, narašča na $(-\infty, \frac{1}{3})$, pada na $(\frac{1}{3}, \infty)$. **b)** $D_f=(0, \infty)$, pada na $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ in narašča na $(e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$.
773. Funkcija $h'(x)=\cot x$ je pozitivna na $(0, \frac{\pi}{2})$ in negativna na $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. **774.** Definicijsko območje: $\mathbb{R}$, odvod je vedno pozitiven.

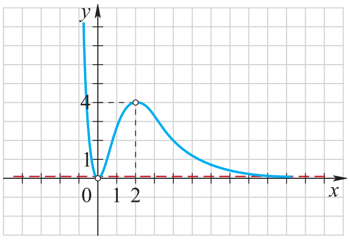
775. **a)** $f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$. Minimum je v $(0, 2)$. **b)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}$, $f'(x)=e^{\frac{1}{x}\ln x}(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2})=x^{\frac{1}{x}}\cdot x^{-2}(1-\ln x)$. Maksimum je v $(e, \sqrt[e]{e})$.
c) $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$. Minimum je v $T(e, e)$.

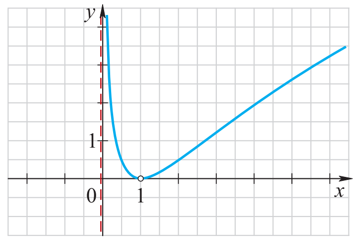
776.

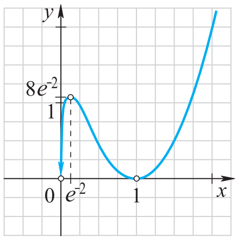
a) Definicijsko območje je $D_f = \mathbb{R}$, ničli sta $x_{1,2} = 0$, asimptota $y = 0$, maksimum je v (2, 4), minimum pa v (0, 0).

b) Definicijsko območje je $D_f = (0, \infty)$, ničla $x_1 = 1$, pol $x = 0$, lokalni minimum v (1, 0).

c) Definicijsko območje je $D_f = (0, \infty)$, ničla $x_1 = 1$, lokalni maksimum je v $(e^{-2}, 8e^{-2})$, lokalni minimum v (1, 0).





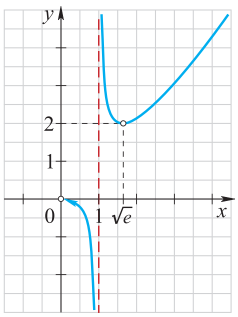


777. **a)** $D_f = (0, 1) \cup (1, \infty)$. Funkcija f ima pol $x = 1$ in nima ničle.

b) $f'(x) = \frac{x(2\ln x - 1)}{e(\ln x)^2}$. Minimum je v točki $(e^{\frac{1}{2}}, 2)$.

c) Funkcija pada na intervalih (0, 1) in $(1, e^{\frac{1}{2}})$, narašča pa na $(e^{\frac{1}{2}}, \infty)$.

č)



Višji odvodi

778. $f^{(5)}(x) = 2\cdot 5! = 240$, $f^{(6)}(x) = 0$ **779.** **a)** $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$ **b)** $g^{(n)}(x) = e^x(n + x)$

780. **a)** $(\sin x)^{(365)} = (\sin x)^{(364+1)} = (\sin x)' = \cos x$ **b)** $(\cos x)^{(2014)} = (\cos x)^{(2012+2)} = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$

Diferencial funkcije

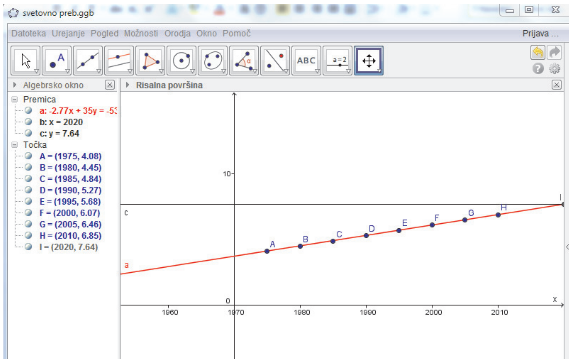
781. **a)** $\sqrt{9{,}06} \doteq 3{,}010$ **b)** $\sqrt[3]{28} \doteq 3{,}037$ **c)** $\sin 30{,}5° \doteq 0{,}5076$ **č)** $\tan 45{,}5° \doteq 1{,}017$ **d)** $2^{0{,}01} \doteq 1{,}007$

e) $\ln 1{,}05 \doteq 0{,}050$ **782.** Če pišemo $\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{100}$, je približna sprememba obsega kroga $\frac{\Delta o}{o} = \frac{2\pi\Delta r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{100}$ oz. 1 % in sprememba ploščine kroga $\frac{\Delta S}{S} = \frac{2\pi r\Delta r}{\pi r^2} = 2 \cdot \frac{\Delta r}{r} = \frac{2}{100}$ oz. 2 %. **783.** 8 cm/s **784.** $2{,}9\ \text{cm}^2/\text{s}$

Modeliranje z odvodom

785. Število bolnikov se spreminja s polinomom tretje stopnje $n(t) = 0{,}0037t^3 - 0{,}052t^2 + 0{,}45t + 3{,}82$. Največje naraščanje bolezni je bilo na začetku in na koncu leta 2010, kar kaže odvod. Leta 2006 je bilo naraščanje najmanjše. Po tem modelu bi bilo leta 2014 že čez 10 milijonov bolnikov, vendar napoved ni zanesljiva. **786.** **a)** 15000 **b)** −12000 **c)** −300 **č)** Po približno 12 letih.
d) Polovico prvotne cene. V takem primeru se bolj splača kupiti rabljen avto. **787.** /

788. Prilagoditvena krivulja je premica, torej je naraščanje prebivalstva linearno (v normalni situaciji bi bila prilagoditvena krivulja logistična krivulja). Na grafu prilagoditvene krivulje lahko preberemo napoved: leta 2020 bo na svetu 7˙64 milijarde prebivalcev.



Desetletje	1980–1990	1990–2000	2000–2010	2010–2020
$\frac{\Delta n}{\Delta t}$	0˙82	0˙80	0˙78	0˙76

Trend naraščanja v zadnjih štiridesetih letih rahlo upada.

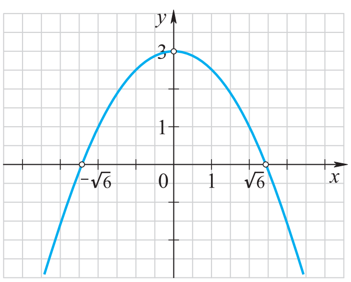
789. /

Nedoločeni integral

790. **a)** x^2+C **b)** $2x^3+C$ **c)** $6x^2-3x+C$ **č)** $x+C$ **d)** $\sin x-\cos x+C$ **e)** e^x+C

791. $F(x)=\int f(x)dx=\int 8x^3\,dx=2x^4+C$

792. $F(x)=-\frac{x^2}{2}+C,\ C\in\mathbb{R},\ f(x)=-\frac{x^2}{2}+3$



793. $g(x)=\frac{1}{x}-1$ **794.** **a)** $\frac{x^5}{5}-\frac{1}{x}+C$ **b)** $-\frac{1}{4x^4}+kx+C$
c) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\cdot\sqrt[3]{x}+C$ **č)** $2\sqrt{x}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$ **d)** $\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+C$
e) $\frac{4}{7}x\cdot\sqrt[4]{x^3}+\ln|x|+C$ **f)** $-6x^{-\frac{1}{6}}+C$ **g)** $\frac{12}{7}\cdot\sqrt[12]{x^7}+C$
795. $f(x)=-\cos x+1$ **796.** $f(x)=\ln|x|-2x+2$

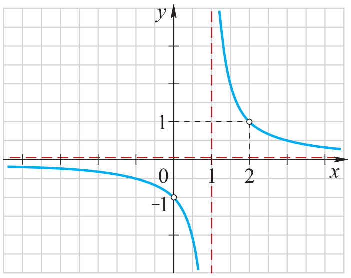
797. **a)** $2x-x^2-\ln|x|+C$ **b)** $\frac{4}{5}x^5-12x-10x^{-2}+C$ **c)** $2x^4-4x^3+3x^2-x+C$ **č)** $\frac{x^4}{4}+\frac{a+b}{3}x^3+\frac{ab}{2}x^2+C$
d) $\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}+\frac{3}{7}x^2\cdot\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x}+C$ **e)** $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-15\sqrt[3]{x}-4\sqrt{x}+C$ **f)** $2x^2+\frac{3}{x}+C$ **g)** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4\sqrt{x}-2x^{-\frac{1}{2}}+C$
h) $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$ **798.** $F(x)=9x+15x^2+\frac{25}{3}x^3+\frac{6}{5}$ **799.** $a=6,\ b=2;\ F(x)=3x^2+2x$ **800.** **a)** $\sin x+C$
b) $\cot x+C$ **c)** $\tan x+C$ **č)** $\tan x+C$ **d)** $\tan x+C$ **e)** $-\cot x+C$ **f)** $e^t+\frac{3^t}{\ln 3}+C$ **g)** $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln|x|+C$

801. Da. $\int 5^x\cdot 3^{-x}\,dx=\int(\frac{5}{3})^x\,dx=\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\frac{5}{3}}+C$ **802.** **a)** $e^x-\ln|x|+C$ **b)** $-\tan x-\cot x+C$ **c)** $\tan x-\cot x+C$ **č)** $x+C$
d) $-x+\tan x+C$ **e)** $\frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2}x+C$

Integracijska praksa

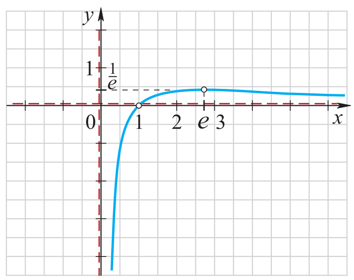
803. **a)** $-\frac{1}{20}(5-2x)^{10}+C$ **b)** $\frac{1}{3}(x^3+2)^3+C$ **804.** **a)** $\frac{1}{2a(2ax+b)^2}+C$ **b)** $-\frac{1}{2x-1}+C$ **c)** $-\frac{1}{2(1+x^2)}+C$
805. **a)** $-\frac{5}{6}(1-x)^{\frac{6}{5}}+C$ **b)** $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3-9)^3}+C$ **c)** $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C$ **806.** **a)** $\frac{1}{2}\ln|x^2+6x-7|+C$ **b)** $2\ln|x+1|+C$
c) $\ln|x^2+x|+C$ **807.** **a)** $x+3\ln|x-1|+c$ **b)** $x+\ln|x^2-1|+c$ **c)** $\frac{1}{3}x(x^2-9x+57)-55\log(x+3)+C$
č) $\frac{1}{2}(-\log(x^2+1)+x(x-4)+28\arctan x+C$ **808.** $F(x)=-\frac{2(8-3x)^{\frac{3}{2}}}{9}+12$ **809.** $f(x)=\frac{(x^3-1)^3}{3}+\frac{4}{3}$

810. $\int f(x)\,dx = \ln|x-1| + C$, $y = -x-1$, $\varphi = 135°$



811. **a)** $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$ **b)** $-\cos(x+\pi) + C$ **c)** $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$ **č)** $-\ln|\cos x| + C$ **d)** $\ln|\sin x + x| + C$
e) $3\sqrt[3]{\sin x} + C$ **f)** $-\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{7} - 2x) + C$ **g)** $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$ **h)** $\frac{1}{4}\cos 2x + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C$ **i)** $\frac{1}{2}\ln|\cos x + 2| + C$
j) $\frac{1}{2}(x - \sin\frac{2x}{2}) + C$ **812.** **a)** $-e^{-x} + C$ **b)** $2x - \frac{1}{3}e^{3x} + C$ **c)** $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ **č)** $2\sqrt{e^x + 1} + C$ **d)** $\frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$
e) $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$ **f)** $-\frac{1}{4}(\ln x)^{-4} + C$ **g)** $\frac{1}{2}(2 + \ln|x|)^2 + C$ **h)** $-\frac{1}{\ln|x|} + C$ **i)** $\frac{1}{4}\ln^4|x| + C$

813. **a)** $D_f = (0, \infty)$
b) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Maksimum je v točki $T(e, \frac{1}{e})$.
c) Ničla funkcije f je $x = 1$.
č) Ker je $F'(x) = \frac{\ln x}{x}$, je funkcija F nedoločeni integral funkcije $f \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$.



814. **a)** $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$ **b)** $\frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{3} + C$ c) $\frac{1}{12}\arctan\frac{3x+2}{4} + C$ **č)** $\frac{1}{2}\arctan 2x + C$ **d)** $\arctan(\sin x) + C$
e) $2\arctan\sqrt{x} + C$ **f)** $\frac{1}{2}\arctan 2x + C$ **815.** **a)** $\frac{1}{2}\arcsin 2x + C$ **b)** $\arcsin(\frac{x+1}{2}) + C$ **c)** $\arcsin(2x-1) + C$
č) $\arcsin\frac{x}{3} + C$ **d)** $\frac{1}{4}\arcsin 2x + C$ **e)** $\frac{1}{5}\arcsin\frac{1+5x}{4} + C$ **f)** $\frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$ **816.** **a)** $\sqrt{2x-1} - 2\arctan\frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C$
b) $2\sqrt{1+e^x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C$ **c)** $2\sqrt{1+\ln x} + \ln\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1} + C$ **817.** **a)** $\mathrm{arssin}\,x - \sqrt{1-x^2} + C$
b) $\frac{1}{2}(x^4 - 1) - \frac{1}{2}\arctan\sqrt{x^4-1} + C$ **c)** $\frac{1}{3}(2x^2-1)^3 + \sqrt{2x^2-1} + C$ **818.** **a)** $-2\arctan\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} + C$ **b)** $\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x} + C$
c) $\frac{1}{4}\arcsin\sqrt{x} - \frac{1}{4}(1-2x)\sqrt{x}\sqrt{1-x} + C$ **č)** $\frac{1}{8}\arcsin x - \frac{x}{4}\sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{x}{8}\sqrt{1-x^2} + C$ **819.** **a)** $\ln|x-3| + 3\ln|x+2| + C$
b) $2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C$ **c)** $\ln\left|\frac{x-4}{x+1}\right| + C$ **820.** **a)** $\frac{3}{4}e^{2x}(2x-1) + C$ **b)** $\frac{1}{3}x^3\ln|x| - \frac{1}{9}x^3 + C$
c) $2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} + C$ **č)** $-e^{-x}(x+1) + C$ **d)** $-\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\sin 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C$ **e)** $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$
821. **a)** $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$ **b)** $-2(\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}) + C$ **c)** $-e^x(\sin x - \cos x) + C$ **822.** $y = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}$

Določeni integral

823. **a)** 6 **b)** −1 **c)** −2 **č)** 2 **d)** 5 **e)** 0 **f)** 2 **g)** −6 **h)** −2 **i)** 1 **j)** −8
k) 12 **l)** 0 **m)** 6 **824.** **a)** 7 **b)** 0 **c)** −4 **č)** $\frac{19}{2}$ **d)** 2 **e)** 2 **f)** 15 **825.** **a)** $\frac{27}{2}$
b) $\frac{39}{2}$ **c)** 1 **č)** $3 - e^2$ **826.** **a)** −20 **b)** $\frac{64}{9}$ **c)** $\frac{1}{2} + \frac{e^2}{2}$ **č)** $\frac{1}{n+1}$ **d)** $14 + 16\sqrt{2}$ **e)** $\frac{124}{3}$
f) $\frac{7}{4}$ **g)** 8 **h)** $\frac{17}{3}$ **827.** **a)** Da. **b)** Da. **c)** Ne. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = 2$ **č)** Da. **d)** Da. **828.** **a)** $\frac{1}{3}$

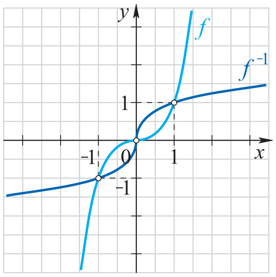
b) $\frac{20}{9}$ **c)** $\frac{4}{3}\ln 2$ **829.** **a)** -52 **b)** 39 **c)** $\frac{7}{72}$ **č)** 0 **d)** $\ln 3$ **e)** $1-\sqrt[5]{16}$ **f)** 98 **g)** $\frac{R^3}{3}$

830. Da. **831.** **a)** $\frac{2e-1}{2}$ **b)** $(e-1)^5$ **c)** $\frac{3}{2}$ **č)** $\ln 3$ **d)** 2 **e)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **f)** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **g)** $\frac{3}{8}$

h) $\frac{1}{3}$ **i)** $\frac{4}{3}$ **832.** **a)** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{3}$ **c)** $-\frac{1}{3}$

833. **a)** $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

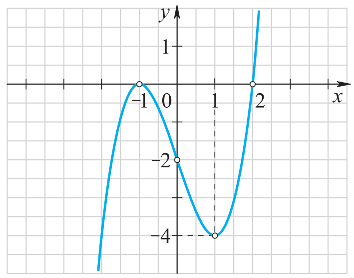
b)



c) $3\cdot\sqrt[3]{4}-64$

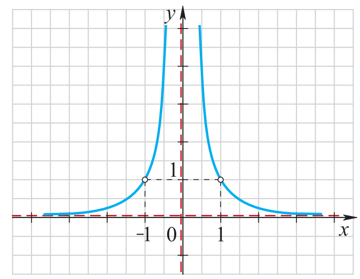
834. **a)** $a=0,\ b=-3,\ c=-2$

b)



c) $S=\frac{27}{4}$

835. **a)**

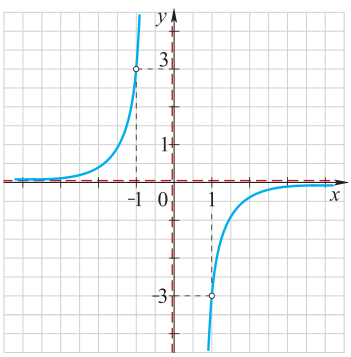


b) $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4},\ y=-4x-\frac{31}{4}$

c) $P_1(-\frac{3}{10},\ \frac{100}{9}),\ P_2(\frac{1}{3},9),\ P_3(3,\ \frac{1}{9})$

č) $\frac{3}{5}$

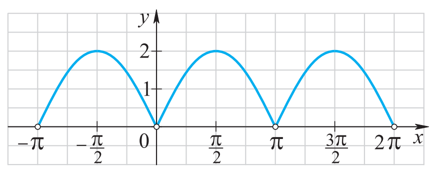
836. **a)** $D_f=\mathbb{R}-\{0\},\ Z_f=\mathbb{R}-\{0\}$



b) $f'(x)=\frac{9}{x^4}>0$ za x … 0.

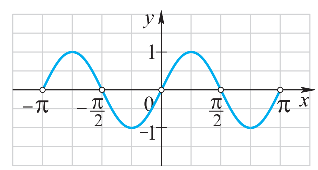
c) $a=1$

837. **a)**



b) $S=\int_{-\pi}^{2\pi}|\sin x|\,dx=3\cdot\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=6$

838. **a)**



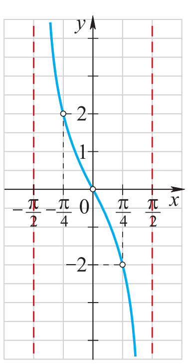
b) $x_1=-\frac{2\pi}{3},\ x_2=-\frac{\pi}{3},\ x_3=\frac{\pi}{3},\ x_4=\frac{2\pi}{3}$

c) $(-\frac{1}{2}\cos 2x+C)'=-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin 2x=\sin 2x$

č) $\frac{1}{4}$

839. **a)** Ker je $f(x)=-2\tan x$, je $f(-\frac{\pi}{4})=2,\ f(\frac{\pi}{4})=-2$ in $f(\frac{\pi}{3})=2\sqrt{3}$.

b)



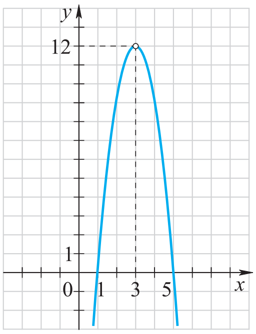
c) $y=-8x+\frac{8\pi}{3}+2\sqrt{3}$

č) $-\ln 2$

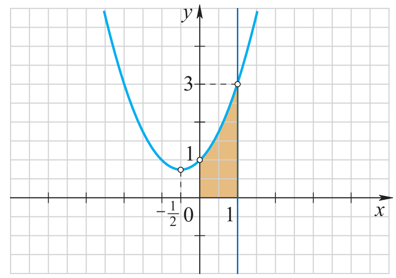
Uporaba določenega integrala v geometriji

840. **a)** $S=36$ **b)** $S=\frac{64}{3}$ **c)** $S=18$ **č)** $S=\frac{1}{4}$ **d)** $S=52\frac{1}{12}$ **e)** $S=6\frac{3}{4}$ **f)** $S=\frac{8}{5}$ **g)** $S=4\ln 2-2$
h) $S=2$ **841.** $k=\frac{3}{2}$

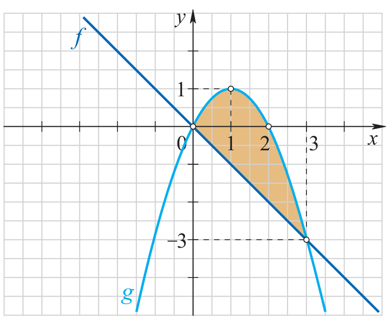
842. $a=-3,\ f(x)=-3x^2+18x-15=-3(x-3)^2+12$

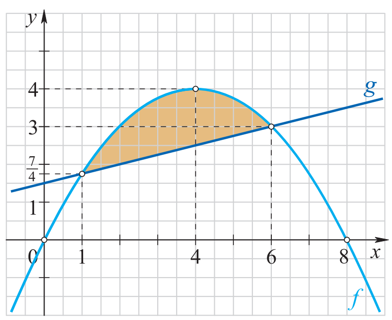


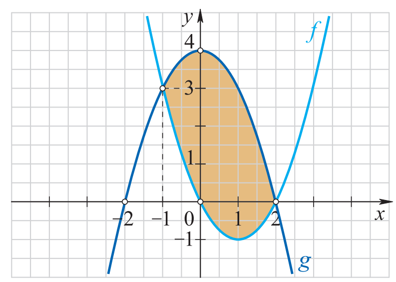
843. $S=\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx=1\frac{5}{6}$



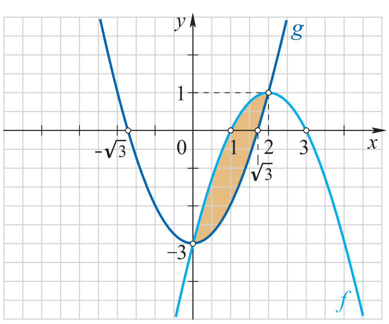
844. **a)** $S=\int_0^3 ((-x^2+2x)-(-x))\,dx=4\frac{1}{2}$ **b)** $S=\int_1^6 (f(x)-g(x))\,dx=5\frac{5}{24}$ **c)** $S=\int_{-1}^2 (g(x)-f(x))\,dx=9$







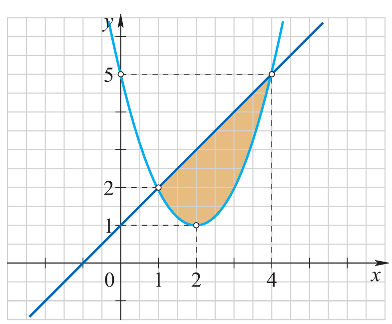
č) $S=\int_0^2 (f(x)-g(x))\,dx=2\frac{2}{3}$



845. **a)** $x+y=7$ **b)** $P(-1,8),\ Q(2,5)$ **c)** $\int_{-1}^2 (7-x-((x-1)^2+4))\,dx=4{\cdot}5$

846. **a)** $A(4,5),\ B(1,2)$

b)

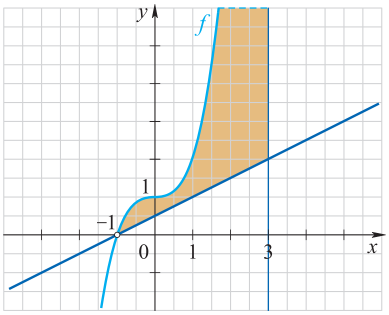


c) $P_1(4,5),\ y=4x-11;\ P_2(1,2),\ y=-2x+4$

č) $S=4\frac{1}{2}$

847.

a)



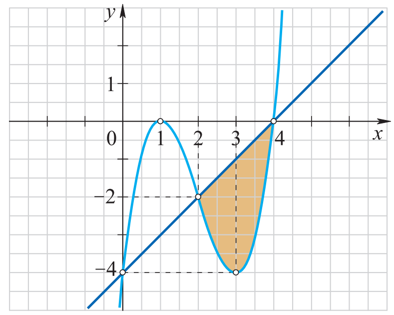
b) $\varphi = 71°34'$

c) $S = \int_{-1}^{3} (x^3 + 1 - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}))\,dx = 20$

848.

a) Presečišča s koordinatnima osema so (1, 0), (4, 0), (0, –4). Lokalni maksimum je v (1, 0), lokalni minimum pa v (3, –4).

b)



c) $x \in (0, 2) \cup (4, \infty)$

č) $S = \int_{2}^{4} (x - 4 - (x^3 - 6x^2 + 9x - 4))\,dx = 4$

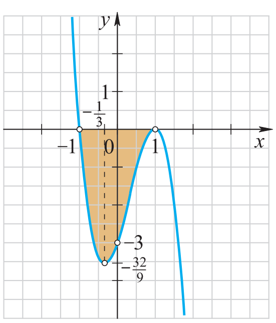
849.

a) $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1$, $p(0, -3)$

b) $p(x) = -9x^2 + 6x + 3$. Polinom pada na $(-\infty, -\frac{1}{3})$ in $(1, \infty)$.

c) Lokalni maksimum je v (1, 0), lokalni minimum pa v $(-\frac{1}{3}, -\frac{32}{9})$.

č) $S = -\int_{-1}^{1} (-3x^3 + 3x^2 + 3x - 3)\,dx = 4$

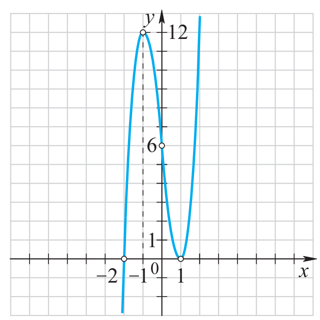


850.

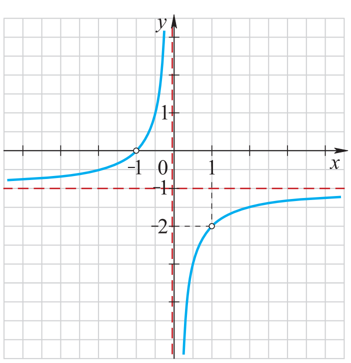
a) $p'(x) = 3a(x-1)(x+1)$, $p(-1) = 12$

b) $a = 4$

c)



851. **a)**

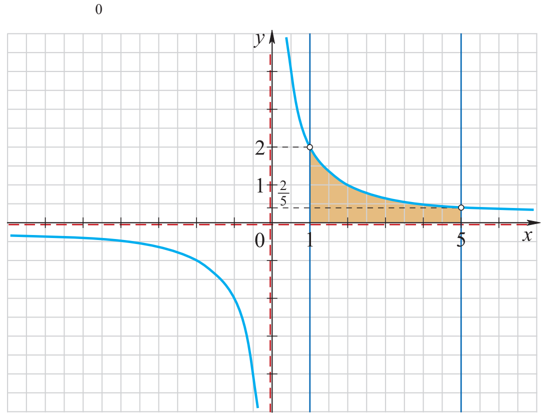


b) (1, –2), (–1, 0)

c) $S = 3 - 2\ln 2 \doteq 1{\cdot}614$

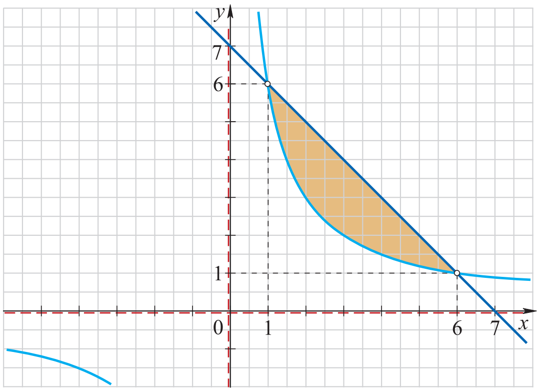
852. Ploščina lika je $S = \int_{2}^{k} \frac{5}{x}\,dx = 5\ln\frac{k}{2}$. Za $k = 2e^{1{\cdot}2} \doteq 6{\cdot}640$ je ploščina lika 6.

853. $S = \int_{0}^{5} \frac{2}{x}\,dx = 2\ln 5$



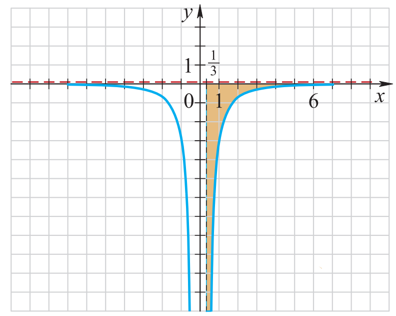
854. **a)** $P_1(6, 1)$, $\varphi = 35°32'$; $P_2(1, 6)$, $\varphi = 35°32'$

b)



c) $S = \int_1^6 (-x + 7 - \frac{6}{x})\,dx = \frac{35}{2} - 6\ln 6 \doteq 6{\cdot}75$

855. $S = -\int_{\frac{1}{3}}^{6} \frac{-3}{x^2}\,dx = 8\frac{1}{2}$



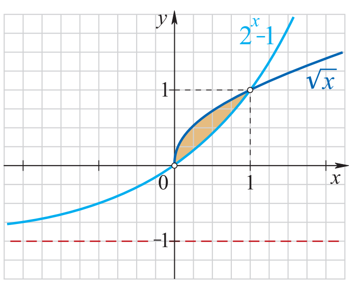
856. **a)** $e - 2$ **b)** $\ln\sqrt{2}$

857. $S = -(\frac{2}{\ln 3} - 3) \doteq 1{\cdot}18$

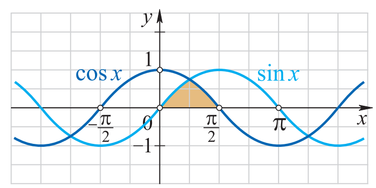
858. $S = \frac{3}{\ln 2} - 2 \doteq 2{\cdot}328$

859. $S = 2 \cdot 3 + \int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 6 + 14 = 20$

860. $\int_0^1 (\sqrt{x} - (2^x - 1))\,dx = \frac{5}{3} - \frac{1}{\ln 2} \doteq 0{\cdot}224$

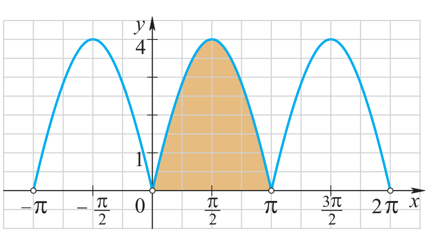


861. $S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2 - \sqrt{2}$

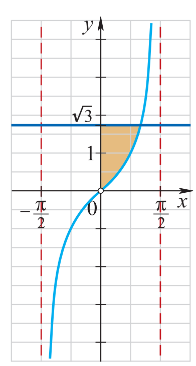


862. $S = \int_\pi^{3\pi} (x - \cos x)\,dx - \int_\pi^{3\pi} (\pi - \frac{1}{3}x)\,dx = 4\pi^2 - \frac{2\pi^2}{3} = \frac{10\pi^2}{3}$

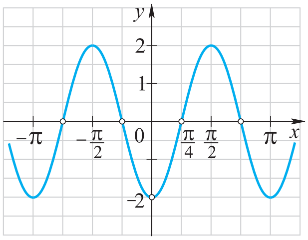
863. **a)** **b)** $S = 3\int_0^\pi 4\sin x\,dx = 24$



864. $S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3} - \tan x)\,dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \ln 2 \doteq 1{\cdot}12$

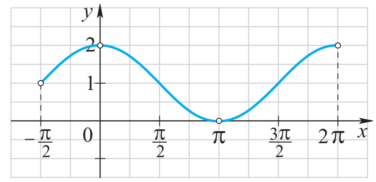


865. **a)** $f(x) = -\cos 2x$



b) $k = 2$

866. **a)**

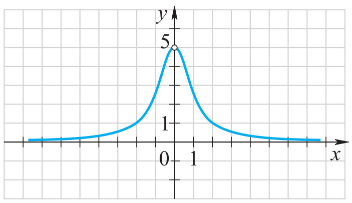


b) $x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi$

c) $S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (1 + \cos x)\, dx = \frac{5\pi}{2} + 1$

867. **a)** $f(x) = -\frac{1}{2}\cot x + \frac{3}{2}$ **b)** $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

868. **a)**



b) $x_1 = -2,\ x_2 = 2$

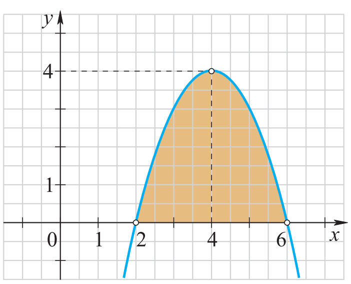
c) $S = \int_{-2}^{2} \frac{5}{x^2+1} = [5 \arctan x]_{-2}^{2} = 10 \arctan 2 \doteq 11{\cdot}07$

869. $\frac{\pi}{2}$

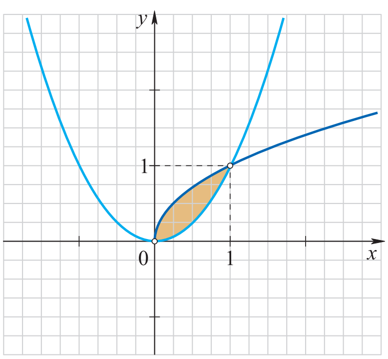
870. $V = 63\pi$

871. **a)** $V = \frac{32\pi}{3}$ **b)** $V = \frac{9\pi}{14}$ **c)** $V = 8\pi$ **č)** $V = \frac{6\sqrt[3]{4}\pi}{5}$

872. $V = \frac{512}{15}\ \pi \doteq 107$

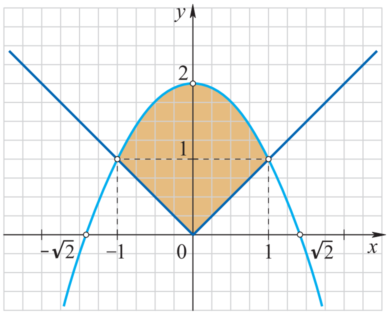


873. $V = \frac{3}{10}\pi$



874. $V = \frac{3}{4}\pi$ **875.** $V = (2 \ln 3 + \frac{8}{3})\pi \doteq 15{\cdot}3$

876. $V = 2\pi \int_{0}^{1} ((-x^2 + 2)^2 - x^2)\, dx = \frac{76}{15}\pi$

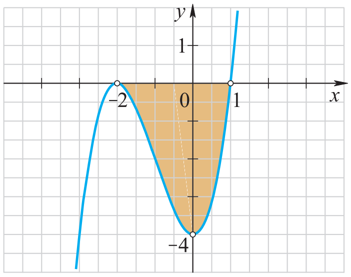


877. **a)** $V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \pi[\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2}]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}$

b) $V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 + \sin x)^2\, dx = [\frac{3x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - 2\cos x]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 3\pi^2$

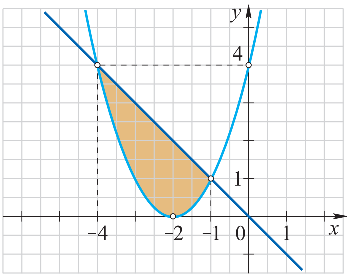
878. $V = \pi \int_{-1}^{3} (4x + 4)^2\, dx = 32\pi$

879.

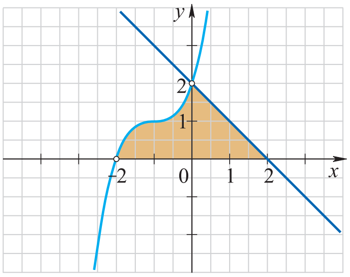


$$V=\pi\int_{-2}^{1}(x^3+3x^2-4)^2\,dx=\frac{729}{35}\pi=65{\cdot}4$$

880. $V=\frac{72}{5}\pi$



881.



$$V=\pi\int_{-2}^{0}((x+1)^3+1)^2\,dx+\pi\int_{0}^{2}(2-x)^2\,dx=\frac{104}{21}\pi$$

882. $V=\pi\int_0^h(\frac{r}{h}x)^2\,dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\,[\frac{x^3}{3}\,]_0^h=\frac{\pi r^2 h}{3}$

883. $V=(e-e^{-1})\pi\doteq 7{\cdot}4$

884. $V=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{4\pi R^3}{3}$

885. $V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4\pi ab^2}{3}$

886. **a)** $\frac{32\pi}{5}$ **b)** 36π **c)** $\frac{128\pi}{7}$ **č)** $\frac{117\pi}{5}$ **d)** 8π **e)** $\frac{108\pi}{5}$ **f)** π **g)** $\frac{\pi}{30}$ **887.** 48 cm^3

888. $12\pi^2$ **889.** 55 l

Uporaba določenega integrala v fiziki

890. **a)** $a=5-2t$ **b)** Izračunajmo $x=\int v dt=\int(5t-t^2)dt=\frac{5t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+C$. Ker za $t=0$, je $x=15$, dobimo $C=15$.

Zapišemo $x=\frac{5t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+15$. **891.** **a)** Izračunamo $a=\frac{dv}{dt}=-6t$. Za $t=4$ s je $a=-6\cdot 4$ ms^{-2} $=-24$ ms^{-2}.
b) Točka miruje, ko je $v=0$. Torej iz $0=12-3t^2$ je za $t>0$ rešitev enačbe $t=2$ s. Izračunajmo razdaljo točke T od koordinatnega izhodišča $x=\int v dt=\int(12-3t^2)dt=12t-t^3+C$. Ker za $t=0$, je $x=0$, dobimo $C=0$. Zapišemo $x=12t-t^3$ in od tod za $t=2$ s izračunamo $x=16$ m, za $t=5$ s pa $x=-65$ oz. $x=65$ m (razdalja je nenegativno število).

892. $A=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx=\int_2^{10}E\cdot\frac{S\cdot x}{l}\,dx=\int_2^{10}E\cdot\frac{\pi r^2\cdot x}{l}\,dx=\frac{E\pi r^2}{l}\cdot\int_2^{10}x\,dx=\frac{E\pi r^2}{l}\cdot[\frac{x^2}{2}\,]\Big|_2^{10}=80{\cdot}4$ kgm^2/s^2 $=80{\cdot}4$ J **893.** 30 Nm

894. $A=462$ Nm **895.** $k=60$ kg/s^2, $A=30$ Nm **896.** **a)** $k=3$ **b)** $H(t)=2t^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}$ **c)** $17{\cdot}5$ **č)** 9 **d)** $0{\cdot}4$ h

Numerično računanje določenega integrala

897. Za $h=0{\cdot}5$ je vrednost integrala $8{\cdot}75$, za $h=0{\cdot}25$ je vrednost integrala $8{\cdot}6875$, točna vrednost integrala pa je $\frac{26}{3}\doteq 8{\cdot}67$.

898. Za $h=0{\cdot}5$ je vrednost integrala približno $2{\cdot}21$, točna vrednost integrala pa je $2\arctan 2\doteq 2{\cdot}21$. **899.** **a)** $57{\cdot}5$ **b)** $6{\cdot}06$
c) $0{\cdot}231$