

Ime in priimek

3. Računski izpit iz Matematike 1

5. september 2025

Čas pisanja: **90 minut**. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je **strogo** prepovedano.

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$C = A^2 \otimes I_3 + A \otimes B - I_2 \otimes B^2$$

kjer sta I_3 in I_2 identiteti na $\mathbb{R}^3$ oz. $\mathbb{R}^2$.

a) (8 točk) Diagonaliziraj matriki A in B .

Rešitev : Lastne vrednosti in lastni vektorji matrike A so

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

za matriko B pa imamo

$$\mu_1 = 2, \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$$

$$\mu_2 = -1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$$

$$\mu_3 = 1, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

kjer so $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ standardni bazni vektorji $\mathbb{R}^3$.

b) (9 točk) Naj bo $\mathbf{u}$ lastni vektor matrike A , $\mathbf{v}$ pa lastni vektor matrike B . Pokaži, da je $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ lastni vektor matrike C .

Rešitev : Po predpostavki imamo $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ in $B\mathbf{u} = \mu\mathbf{u}$ za neki lastni vrednosti λ in μ matrik A in B . Potem lahko izračunamo

$$\begin{aligned} C(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= (A^2 \otimes I + A \otimes B - I \otimes B^2)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \\ &= (A^2 \otimes I)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + (A \otimes B)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) - I \otimes B^2(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \\ &= A^2 \mathbf{u} \otimes I \mathbf{v} + A \mathbf{u} \otimes B \mathbf{v} - I \mathbf{v} \otimes B^2 \mathbf{u} \\ &= \lambda^2 (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + \lambda \mu (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) - \mu^2 (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \\ &= (\lambda^2 + \lambda \mu - \mu^2) (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \end{aligned}$$

kar pomeni, da je $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ lastni vektor matrike C za lastno vrednostjo $\lambda^2 + \lambda \mu - \mu^2$.

c) (8 točk) Izračunaj lastne vrednosti matrike C . Izračunaj še lastni vektor za največjo lastno vrednost matrike C .

Rešitev : Izračunamo vrednost $\lambda^2 + \lambda \mu - \mu^2$ za vse pare lastnih vrednosti λ in μ , ki smo jih zapisali pri a) nalogi. Rezultate zaradi preglednosti organiziramo v tabelo

$\lambda \backslash \mu$	2	-1	1
1	-1	-1	1
-3	-1	11	5

Največjo lastno vrednost dobimo pri paru $\lambda_2 = -3, \mu_2 = -1$, kar pomeni, da je ustrezni lastni vektor enak

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. naloga (25 točk)

Preslikava $\phi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ je dana s predpisom

$$\phi(p)(x) = 3x^2 p'(x+1) - 6 \int_0^x p(t) dt$$

a) (5 točk) Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.

Rešitev : Zaradi linearnosti odvajanja in integriramo hitro vidimo, da velja

$$\begin{aligned}\phi(\alpha p + \beta q) &= x^2(\alpha p + \beta q)'(x+1) - 6 \int_0^x (\alpha p + \beta q)(t) dt \\ &= \alpha x^2 p'(x+1) + \beta x^2 q'(x+1) - 6\alpha \int_0^x p(t) dt - 6\beta \int_0^x q(t) dt \\ &= \alpha \phi(p) + \beta \phi(q)\end{aligned}$$

za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in $p, q \in \mathbb{R}[x]$.

b) (12 točk) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi ϕ v standardnih bazah $\mathbb{R}_2[x]$ in $\mathbb{R}_3[x]$.

Rešitev : Potrebno je izračunati slike $\phi(p)$ za standardne bazne polinome $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}\phi(p_0)(x) &= -6x \\ \phi(p_1)(x) &= 0 \\ \phi(p_2)(x) &= 6x^2 + 4x^3\end{aligned}$$

Potem lahko matriko, ki v standardnih bazah pripada ϕ , zapišemo kot

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

c) (8 točk) Določi bazi za jedro $\ker(\phi)$ in sliko $\text{im}(\phi)$.

Rešitev : Gaussova eliminacija na A nam da

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kar pomeni, da je $\dim(\ker(\phi)) = 1$ z baznim vektorjem p_1 , in $\dim(\text{im}(\phi)) = 2$ z bazo $\{-6x, 6x^2 + 4x^3\}$

3. naloga (25 točk)

Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobimo kot presek krogle in rotacijskega hiperboloida

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 3 \text{ in } x^2 + y^2 - z^2 \geq 1.$$

Rešitev : Najlažje je, če uporabimo cilindrične koordinate. Iz skice (recimo, da skiciramo presek telesa z ravnino $y = 0$) oz. enačb lahko razberemo, da imamo pri danem $z \in [-1, 1]$ interval $r \in [\sqrt{1+z^2}, \sqrt{3-z^2}]$, za polarni kot ϕ pa ni omejitev. Prostornino lahko tako izračunamo z integralom

$$\begin{aligned} V &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=-1}^1 \int_{r=\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{3-z^2}} r \, dr \, dz \, d\phi = 2\pi \int_{z=-1}^1 \frac{r^2}{2} \Big|_{r=\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{3-z^2}} dz \\ &= \pi \int_{z=-1}^1 (3 - z^2) - (1 + z^2) \, dz = \pi \int_{z=-1}^1 2 - 2z^2 \, dz \\ &= \pi \left(2z - \frac{2z^3}{3} \right) \Big|_{z=-1}^1 = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

4. naloga (25 točk)

Dani so matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, kjer je $n > m$, ter vektorja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$. Predpostavimo še, da je A polnega ranga, kar zagotavlja, da je matrika $A^T A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ obrnljiva.

Poišči minimum funkcije $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$$

pri pogoju $\mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1$.

Rešitev : Lagrangeovo funkcijo lahko zapišemo kot

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) - \lambda(\mathbf{e}^T \mathbf{x} - 1)$$

Odvod $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}$ lahko izračunamo s pravili za vektorsko odvajanje, pri čemer nam rezultat nekoliko poenostavi dejstvo, da je matrika $A^T A$ simetrična. Dobimo enačbo za stacionarno točko

$$2\mathbf{x}^T A^T A - 2\mathbf{b}^T A - \lambda \mathbf{e}^T = 0$$

oziroma

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{e}$$

Ker je $A^T A$ obrnljiva matrika, lahko $\mathbf{x}$ iz te enačbe izrazimo kot

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} (A^T \mathbf{b} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{e})$$

Če vstavimo ta izraz v enačbo vezi, dobimo enačbo za λ

$$\mathbf{e}^T (A^T A)^{-1} (A^T \mathbf{b} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{e}) = 1$$

od koder lahko izrazimo

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\mathbf{e}^T (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} - 1}{\mathbf{e}^T (A^T A)^{-1} \mathbf{e}}$$

kar lahko nazaj vstavimo v enačbo za $\mathbf{x}$ za končen rezultat.