

Računski izpit iz Matematike 1

17. avgust 2020

Čas pisanja: 70 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na ucilnica.fri.uni-lj.si. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1	
2	
3	
Σ	

1. naloga (35 točk)

Zapišimo polinom $p \in \mathbb{R}_2[x]$ kot $p(x) = ax^2 + bx + c$. Preslikavi $\eta: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ in $\theta: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sta dani s predpisoma

$$\eta(X) = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \theta(p) = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}.$$

a) (10 točk) Preveri, da je η linearna preslikava. (Linearnosti θ ni potrebno preverjati.)

Rešitev: Preveriti moramo, da η ohranja linearne kombinacije. Označimo $\mathbf{a}^T = [x^2, x, 1]$ in $\mathbf{b}^T = [1, 1, 1]$. Potem je $\eta(X) = \mathbf{a}^T X \mathbf{b}$ in velja

$$\eta(\alpha X + \beta Y) = \mathbf{a}^T (\alpha X + \beta Y) \mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}^T X \mathbf{b} + \beta \mathbf{a}^T Y \mathbf{b} = \alpha \eta(X) + \beta \eta(Y)$$

za poljubni matriki $X, Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ in skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η je torej linearna. (10 točk)

b) (15 točk) Določi $\dim(\ker \eta)$ ter $\dim(\ker \theta)$.

Rešitev: Velja

$$\eta(E_{11}) = x^2, \quad \eta(E_{21}) = x \quad \text{in} \quad \eta(E_{31}) = 1,$$

kjer so E_{ij} standardne bazne matrike $\mathbb{R}^{3 \times 3}$. Ker $\text{im } \eta$ vsebuje bazo $\mathbb{R}_2[x]$, je $\text{im } \eta = \mathbb{R}_2[x]$. Torej $\dim(\text{im } \eta) = 3$ in $\dim(\ker \eta) = \dim(\mathbb{R}^{3 \times 3}) - \dim(\text{im } \eta) = 9 - 3 = 6$ (10 točk)

Pri θ takoj vidimo, da je edina rešitev enačbe $\theta(p) = 0$ (z matriko 0 na desni) polinom $p = 0$. Torej je $\dim(\ker \theta) = 0$ (5 točk)

c) (10 točk) Ali je 3 lastna vrednost $\theta \circ \eta$?

Rešitev: Pišimo

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$(\theta \circ \eta)(X) = \theta(\eta(X)) = \begin{bmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ d+e+f & d+e+f & d+e+f \\ g+h+i & g+h+i & g+h+i \end{bmatrix}.$$

Posebej je

$$(\theta \circ \eta) \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da je 3 lastna vrednost $\theta \circ \eta$ (10 točk)

2. naloga (35 točk)

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ omejeno območje nad ravnino $z = 0$, ki ga dobimo, če valj $x^2 + y^2 = 1$ odrežemo s sfero $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, tj. območje med krogom $x^2 + y^2 \leq 1$ v xy -ravnini ter grafom funkcije $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

Izračunaj maso telesa, ki ga določa D , če je gostota v točki (x, y, z) enaka

$$\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2.$$

Rešitev: Izračunajmo pripadajoč trojni integral v cilindričnih koordinatah. Gostota je enaka

$$\rho(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = 1 + r^2.$$

..... (5 točk)
Masa je torej

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{2-r^2}} (1+r^2)r dz = 2\pi \int_0^1 r(1+r^2)\sqrt{2-r^2} dr \\ &= -\pi \int_2^1 (3-t)\sqrt{t} dt = \pi \int_1^2 (3t^{1/2} - t^{3/2}) dt = \frac{4\pi}{5} (3\sqrt{2} - 2), \end{aligned}$$

kjer smo v drugi vrstici uvedli novo spremenljivko $t = 2 - r^2$. (15 točk za meje + 15 točk za izračun)

3. naloga (30 točk)

a) (20 točk) Naj bo $d > 0$ realno število, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pa simetrična pozitivno definitna matrika. Poišči/opiši najmanjšo in največjo vrednost $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ pri pogoju $\|\mathbf{x}\| = d$.

Namig: Naloge se loti z Lagrangeovo metodo.

Rešitev: Pripadajoča Lagrangeova funkcija je

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda(\|\mathbf{x}\|^2 - d^2) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} - \lambda(\|\mathbf{x}\|^2 - d^2),$$

kjer smo vez $\|\mathbf{x}\| = d$ zaradi lažjega računanja zamenjali z $\|\mathbf{x}\|^2 = d^2$ (5 točk)

Kandidati za ekstreme so stacionarne točke Lagrangeeve funkcije. Najprej odvajamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} &= 2\mathbf{x}^T A - 2\lambda \mathbf{x}^T, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \|\mathbf{x}\|^2 - d^2.\end{aligned}$$

Če odvod po $\mathbf{x}$ enačimo z 0^T , dobimo $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, tj. $\mathbf{x}$ je lastni vektor matrike A za lastno vrednost λ . Če odvod po λ enačimo z 0, ugotovimo še, da je ta lastni vektor dolžine d . Stacionarne točke L so torej lastni vektorji matrike A dolžine d (10 točk)

Vstavimo tak lastni vektor $\mathbf{x}$ (s pripadajočo lastno vrednostjo λ) v f :

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda \|\mathbf{x}\|^2 = \lambda d^2.$$

Med temi (največ n) vrednostmi je najmanjša $\lambda_{\min} d^2$, največja pa $\lambda_{\max} d^2$, kjer sta $\lambda_{\min}$ in $\lambda_{\max}$ najmanjša in največja lastna vrednost matrike A (5 točk)

b) (10 točk) Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije f pri pogoju $\|\mathbf{x}\| = d$ v konkretnem primeru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad d = 2.$$

Rešitev: Po (a) moramo poiskati le lastne vrednosti matrike A . V tem primeru sta to $\lambda_1 = \lambda_{\min} = 2 - \sqrt{2}$ ter $\lambda_2 = \lambda_{\max} = 2 + \sqrt{2}$. Najmanjša in največja vrednost funkcije f je torej $\lambda_{\min} d^2 = 8 - 4\sqrt{2}$ ter $\lambda_{\max} d^2 = 8 + 4\sqrt{2}$ (10 točk)