

Računski izpit iz Matematike 1

13. februar 2020

Čas pisanja: **90 minut**. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 za pomoč. Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, pametnega telefona in ostalih elektronskih naprav je **strogo prepovedano**.

1. naloga (25 točk)

Naj bo $\mathbf{a} = [1, -1]^T$. Preslikava $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je dana s predpisom

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\mathbf{x}^T - \mathbf{x}\mathbf{a}^T.$$

a) (5 točk) Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.

Rešitev: Vzemimo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ter računamo po definiciji

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= \mathbf{a}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})^T - (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})\mathbf{a}^T \\ &= \alpha(\mathbf{a}\mathbf{u}^T - \mathbf{u}\mathbf{a}^T) + \beta(\mathbf{a}\mathbf{v}^T - \mathbf{v}\mathbf{a}^T) \\ &= \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

b) (10 točk) Zapiši matriko, ki predstavlja ϕ v standardnih bazah $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Rešitev: Poračunamo slike standardnih baznih vektorjev $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ in jih izrazimo s standardnimi baznimi vektorji $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = E_{12} - E_{21} \\ \phi(\mathbf{e}_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = E_{12} - E_{21} \end{aligned}$$

Matriko, ki predstavlja ϕ v standardni bazi, je potem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) (10 točk) Poišči bazi za jedro $\ker(\phi)$ in sliko $\text{im}(\phi)$.

Rešitev: Po Gaussovi eliminaciji dobimo

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

od koder lahko hitro ugotovimo, da je baza za jedro $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, baza za sliko pa $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (5 točk) Diagonaliziraj matriko A .

Rešitev: Karakteristični polinom je $(1 - \lambda)^2 - 9$. Za lastne vrednosti in lastne vektorje dobimo

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 4 & : \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -2 & : \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) (5 točk) Na kratko utemelji, zakaj je matrika $A \oplus A$ simetrična (tu je mišljena Kroneckerjeva vsota).

Rešitev: Vemo, da za poljubne matrike A in B velja

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

Potem lahko za dan A zapišemo

$$(A \oplus A)^T = (A \otimes I + I \otimes A)^T = A^T \otimes I^T + I^T \otimes A^T = A \otimes I + I \otimes A = A \oplus A,$$

ker sta A in I simetrični matriki.

c) (15 točk) Določi matriko ranga 1, ki se v Frobeniusovi normi najmanj razlikuje od matrike $A \oplus A$.

Opozorilo : Prosimo, da ne računate matrike $A \oplus A$. Kdor bo eksplicitno računal matriko $A \oplus A$, dobi -5 točk.

Rešitev: Ker je $A \otimes A$ simetrična matrika, so singularne vrednosti in singularni vektorji matrike $A \oplus A$ enaki lastnim vrednostim in (normiranim) lastnim vektorjem. Za aproksimacijo ranga 1 potrebujemo največjo lastno vrednost in pripadajoč lastni vektor, vemo pa, da so lastne vrednosti $A \otimes A$ vsote dveh lastnih vrednosti matrike A , lastni vektorji pa Kroneckerjevi produkti lastnih vektorjev A . Tako lahko ugotovimo, da je največja lastna vrednost $A \otimes A$ enaka $\lambda_1 + \lambda_1 = 8$, pripadajoč lastni vektor pa

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Za najboljšo aproksimacijo ranga 1 tako dobimo

$$8 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Faktor $1/2$ se pojavi, ker je lastni vektor $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1$ potrebno normirati, da dobimo singularni vektor.

3. naloga (25 točk)

Izračunaj volumen in masno središče območja

$$D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, z \leq \sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2\}$$

Namig: Uporabi cilindrične koordinate.

Rešitev : V cilindričnih koordinatah lahko območje D opišemo kot

$$D = \{(\phi, r, z) : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq r - r^2\},$$

Prostornino lahko potem izračunamo z integralom (kjer upoštevamo, da je $|J| = r$)

$$\begin{aligned} V = \int_D 1 \, dx dy dz &= \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{r-r^2} r \, dz dr d\phi \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 r^2 - r^3 \, dr = \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

Za x -koordinato težišča lahko zapišemo integral

$$\begin{aligned} x^* = \frac{1}{m} \int_D x \, dx dy dz &= \frac{24}{\pi} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{r-r^2} r^2 \cos(\phi) \, dz dr d\phi \\ &= \frac{12\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 r^3 - r^4 \, dr = \frac{3\sqrt{2}}{5\pi}, \end{aligned}$$

kjer lahko zaradi homogenosti enačimo $m = V$. Zaradi simetrije lahko sklepamo, da je $y^* = x^*$, za z -koordinato težišča pa imamo integral

$$\begin{aligned} z^* = \frac{1}{m} \int_D z \, dx dy dz &= \frac{24}{\pi} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{r-r^2} r z \, dz dr d\phi \\ &= 3 \int_0^1 r \cdot \frac{(r - r^2)^2}{2} \, dr = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Pri vseh integralih smo nekaj vmesnih korakov seveda izpustili.

4. naloga (25 točk)

Dana sta vektorja $\mathbf{n}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Izmed vektorjev $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki ležijo na hiperravnini z enačbo $\mathbf{n}^\top \mathbf{x} = 1$, želimo poiskati tisti vektor, ki se po evklidski normi najmanj razlikuje od $\mathbf{a}$ (torej tistega, za katerega bo $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2$ minimalen).

a) (10 točk) Odvajaj ustrezno Lagrangeovo funkcijo.

Rešitev : Lagrangeova funkcija za ta problem je

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 - \lambda(\mathbf{n}^\top \mathbf{x} - 1)$$

Odvod po $\mathbf{x}$ je

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 2(\mathbf{x} - \mathbf{a})^\top - \lambda \mathbf{n}^\top$$

Odvod po λ je seveda

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{n}^\top \mathbf{x}$$

kar vemo že vnaprej.

b) (15 točk) Izpelji formulo za iskani $\mathbf{x}$ (v formuli seveda nastopata $\mathbf{n}$ in $\mathbf{a}$).

Rešitev : Iz enačbe $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0$ lahko $\mathbf{x}$ izrazimo kot

$$\mathbf{x} = \frac{\lambda}{2} \mathbf{n} + \mathbf{a}$$

Če ta izraz vstavimo v pogoj $\mathbf{n}^\top \mathbf{x} = 1$, dobimo

$$\frac{\lambda}{2} \mathbf{n}^\top \mathbf{n} + \mathbf{n}^\top \mathbf{a} = 1,$$

od koder lahko λ izrazimo kot

$$\lambda = 2 \cdot \frac{1 - \mathbf{n}^\top \mathbf{a}}{\mathbf{n}^\top \mathbf{n}}$$

Pri tem smemo deliti z $\mathbf{n}^\top \mathbf{n} = \|\mathbf{n}\|^2$, ker je to število (in očitno tudi $\|\mathbf{n}\| \neq 0$, saj sicer ne more veljati $\mathbf{n}^\top \mathbf{x} = 1$), ne moremo pa v običajnem smislu deliti z $\mathbf{n}$ ali $\mathbf{n}^\top$, ker sta to vektorja. Končni rezultat je potem

$$\mathbf{x} = \frac{1 - \mathbf{n}^\top \mathbf{a}}{\mathbf{n}^\top \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{a}$$