

Računski izpit iz Matematike 1 (30. januar 2020)

1. [25 točk] Preslikava $\phi: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ je dana s predpisom

$$\phi(p)(x) = p(x) + xp'(x).$$

- (a) Prepričaj se, da je ϕ linearna preslikava.
(b) Zapiši matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}_3[x]$.
(c) Poišči lastne vrednosti preslikave ϕ . Ali lahko ϕ diagonaliziramo?

Rešitev: (a) Ker velja

$$\begin{aligned}\phi(\alpha p + \beta q)(x) &= (\alpha p + \beta q)(x) + x(\alpha p + \beta q)'(x) \\ &= \alpha p(x) + \alpha x p'(x) + \beta q(x) + \beta x q'(x) = \alpha \phi(p)(x) + \beta \phi(q)(x)\end{aligned}$$

je ϕ linearna.

- (b) Vzemimo $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_3[x]} = \{1, x, x^2, x^3\}$ za standardno urejeno bazo. Ker je

$$\phi(1) = 1, \phi(x) = 2x, \phi(x^2) = 3x^2 \text{ in } \phi(x^3) = 4x^3,$$

je

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (c) Ker je A_ϕ diagonalna, lahko ϕ seveda diagonaliziramo. Lastne vrednosti so na diagonalni: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 4$.

2. [25 točk]

- (a) Utemelji: Če sta λ in μ lastni vrednosti matrike A , potem je $\lambda(\lambda + \mu)$ lastna vrednost matrike $A \otimes A + A^2 \otimes I$.
(b) Naj bo $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike $A \otimes A + A^2 \otimes I$.

Rešitev: (a) Naj bosta $\mathbf{v}$ in $\mathbf{u}$ lastna vektorja A ; $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $A\mathbf{u} = \mu\mathbf{u}$. Tedaj:

$$\begin{aligned}(A \otimes A + A^2 \otimes I)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) &= (A \otimes A)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) + (A^2 \otimes I)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) \\ &= (A\mathbf{v}) \otimes (A\mathbf{u}) + (A^2\mathbf{v}) \otimes \mathbf{u} \\ &= (\lambda\mathbf{v}) \otimes (\mu\mathbf{u}) + (\lambda^2\mathbf{v}) \otimes (\mathbf{u}) = (\lambda\mu + \lambda^2)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}),\end{aligned}$$

torej je $\lambda\mu + \lambda^2$ lastna vrednost matrike $A \otimes A + A^2 \otimes I$ za lastni vektor $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$.

- (b) Matrika A ima lastna vektorja $\mathbf{v} = [1, -1]^T$ ter $\mathbf{u} = [1, 1]^T$ s pripadajočima lastnima vrednostma $\lambda = -4$ in $\mu = 2$. Po (a) delu naloge so lastne vrednosti $A \otimes A + A^2 \otimes I$ torej $-4(-4 - 4) = 16$, $-4(-4 + 2) = -8$, $2(2 - 4) = -4$ ter $2(2 + 2) = 8$ s pripadajočimi lastnimi vektorji

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. [25 točk] Izračunaj dvakratni integral

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 - y) dy \right) dx.$$

Rešitev: Integracijsko območje je polovica kroga nad x -osjo s polmerom 1 in središčem v koordinatnem izhodišču. To območje ima zelo enostaven opis v polarnih koordinatah: $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \pi]$. Integral v polarnih koordinatah je torej

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 - y) dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi (r^2 \cos^2 \varphi - r \sin \varphi) r d\varphi \right) dr \\ &= \pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali $\int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi = \pi$ in $\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 0$.

4. [25 točk] Delec z maso m zaprt v pravokotnik s stranicama dolžin x in y ima na neizotropni ravnini energijo osnovnega stanja dano z

$$E(x, y) = \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} \right).$$

Kolikšni naj bosta dolžini stranic tega pravokotnika, da bo pri njegovi fiksni ploščini $A_0 = xy > 0$ energija osnovnega stanja minimalna?

Namig: Poišči minimum funkcije $E(x, y)$ pri pogoju $xy = A_0$.

Rešitev: Temu problemu vezanih ekstremov pripada Lagrange-ova funkcija

$$L(x, y, \lambda) = E(x, y) - \lambda g(x, y) = \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} \right) - \lambda(xy - A_0).$$

Stacionarne točke te funkcije bodo kandidati za vezane ekstreme. Poiščimo jih!

$$L_x = -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{2}{x^3} - \lambda y = 0,$$

$$L_y = -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{4}{y^3} - \lambda x = 0,$$

$$L_\lambda = A_0 - xy = 0.$$

Iz prvih dveh enačb eliminiramo λ :

$$\lambda = -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{2}{x^3 y} = -\frac{\hbar^2}{4m} \cdot \frac{4}{xy^3},$$

da dobimo

$$2x^3 y = xy^3.$$

Rešitve, pri katerih je $x = 0$ ali $y = 0$, niso dopustne (zaradi $A_0 = xy > 0$) in zadnja enačba se poenostavi v

$$2x^2 = y^2.$$

Torej $y = \pm x\sqrt{2}$. Ko to vstavimo v enačbo vezi, dobimo

$$A_0 = \pm x^2 \sqrt{2}.$$

Smiselno je le + predznak (saj $A_0 > 0$) in sledi $x = \sqrt{A_0/\sqrt{2}}$ ter $y = x\sqrt{2} = \sqrt{A_0\sqrt{2}}$.