

MAT1 cheat-sheet

1. del

Linearna algebra

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Vektorski produkt (× - cross product):

$$\text{Ex. Compute } (1, 0, -1) \times (2, 3, -1) = 0(\hat{i}) + (-1)(\hat{j}) - 2(\hat{k})$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0(\hat{i}) + (-1)(\hat{j}) - 2(\hat{k}) = -\hat{j} - 2\hat{k}$$

Množenje matrik (dot product):

- Produkt $C = AB$ je 3×3 matrika, ki jo dobimo s (seštevanjem zmnožkov isto indeksnih elementov v vrsticah A s stolpci B (v vrstici oz. stolpcu, kjer je vrednost, ki jo računamo)):

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 3 & 0 \times (-2) & -2 \times 1 \\ -1 \times 3 & 2 \times (-2) & 0 \times 1 \\ 0 \times 3 & 6 \times (-2) & 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & -12 & 2 \end{bmatrix}$$

Kvadratna formula za reševanje kvadratne enačbe:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad D = b^2 - 4ac$$

Pogosti koreni:

$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$
1	1.4142	1.7321	2	2.2361
$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{10}$
2.4495	2.6458	2.8284	3	3.1623

Osnove

Prostor:

- Ničelni prostor: $N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; A\vec{x} = \vec{0}\}$ (št. linearno odvisnih stolpcev (proste spremenljivke))
- Stolpcični prostor: $C(A) = \mathcal{L}\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\} = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ (št. linearno neodvisnih stolpcev (vezane spremenljivke))
- $N(A^\top) = C(A)^\perp$ in $N(A)^\perp = C(A^\top)$

Lastne vrednosti (karakteristični polinom): $\Delta A(x) = \det(A - xI)$

Lastni vektorji: $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

Izračunavanje inverza matrike:

$$\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} I & | & A^{-1} \end{bmatrix}$$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je ortogonalna:

- $Q = [\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n]$, $\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j = 0$
- $\vec{q}_i \cdot \vec{q}_i = 0$ (paroma ortogonalni)
- $\|\vec{q}_i\| = 1$ (enotski vektor)

$$Q^\top Q = I \Leftrightarrow Q^{-1} = Q^\top.$$

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \dots \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \dots \det(A) = a_{11} \det(A_{x_1}) - a_{12} \det(A_{x_2}) + a_{13} \det(A_{x_3}).$$

A je obrnljiva:

- $\det(A) \neq 0$
- $\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
- $\lambda_i \neq 0$

A simetrična diagonalizirana: $A = PDP^{-1} = QDQ^\top$.

A je simetrična $A = A^\top$:

- vse lastne vrednosti so realne
- lastni vektorji so ortogonalni
- polna množica neodvisnih lastnih vektorjev

A je antisimetrična:

- $A = -A^\top$ $A^\top = -A$
- $\text{tr}(A) = 0$ (diagonalni elementi so 0)

Sled matrike

$\text{tr}(A)$ = vsota diagonalnih elementov matrike ($\sum_{i=1}^n a_{i,i}$)

Lastnosti za $A, B, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$
- $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A)$
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(A)$ (če je P obrnljiva)
- $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA)$ (vrstni red ostane)

Rang oz. stolpcični prostor $C(A)$

$\text{rank}(A) = \text{rk}(A)$ je (velja naslednje):

- število pivoov v reducirani vrstični kanonični obliki
- število linearno neodvisnih vrstic
- število linearno neodvisnih stolpcev
- dimenzija linearne lupine vrstic A
- dimenzija linearne lupine stolpcev A
- $\dim C(A) = n - \dim N(A)$
- velikost največje invertibilne kvadratne podmatrike A

Polni stolpcični rang $\Leftrightarrow$ vsi stolpci so linearno neodvisni.

Podobnost matrik

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sta podobni, če obstaja takšna obrnljiva/invertibilna matrika $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je

$$A = PBP^{-1}$$

Podobne matrike imajo isto:

- sled
- determinanto
- karakteristični polinom
- lastne vrednosti
- rang

Matrika je diagonalizibilna, če je podobna neki diagonalni matriki $A = PDP^{-1}$ ($\sqrt{A} = P\sqrt{D}P^{-1}$). Diagonalne vrednosti matrike D so lastne vrednosti matrike A in stolpci matrike P so lastni vektorji matrike A .

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sta ortogonalno podobni, če je $A = QBQ^{-1} = QBQ^\top$, kjer je $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalna matrika.

Reševanje: diagonaliziraj matriko

1. Lastne vrednosti:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$\lambda_1, \dots$ (razvrstimo od najmanjše do največje)

2. Lastni vektorji za lastne vrednosti:

$\lambda_m = \dots$

$$N(A - \lambda_m I) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_m & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_m & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_m \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ vstavimo dobljene λ

Načini:

1. Gauss: dobimo $v_m = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (proste spremenljivke določimo v sami, tj. $-1, 1, \dots$) (to je, ko je v N rešitvi že ena vrednost (vezana spremenljivka) pred njo v isti vrstici)

- V primeru neenačb jih izrazimo s pomočjo generaliziranega lastnega vektorja $v = [x_1, x_2, \dots, v_n]^\top$: $v_{1,2} =$

$$\begin{bmatrix} -x_3 + x_4 \\ x_3 - 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Za ti v_1 in $v_2 \leftarrow$ določimo proste spremenljivke

2. Vektorski produkt (cross product):

Vzamemo 2 nenavkrižne vrstice matrike $N(A - \lambda_m I)$, eg. r_1 in r_2 in izvedemo $v_n = r_1 \times r_2$. Če je dobljeni vektor neničelen, je lastni vektor.

Lastnosti:

- Pravilo za determinante zgornje trikotnih matrik:

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

- $A = QDQ^\top$

$$-Q = [q_1, q_2, \dots, q_m]$$

$$-D = \text{diag}(\text{lastne vrednosti})$$

- $P = [u_1, u_2, \dots, u_m] \leftarrow$ lastni vektorji

Reševanje: ortogonalna baza

- Gledamo: $B_{N(A - \lambda_i I)} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ je baza za $N(A - \lambda_i I)$

2. Normaliziramo vektorje:

Preverimo, če so lastni vektorji ortogonalni (pravokotni): izračunamo dot product parov lastnih vektorjev, eg. valjati mora $v_1 \cdot v_2 = 0$.

- Če so ortogonalni (100% če je matrika je simetrična $A^\top = A$), jih samo normaliziramo:

$$q = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\|v\|} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

- Če niso ortogonalni, uporabimo GRAM-SCHMIDTOVO ortogonalizacijo:

(Uporabimo le, če nimamo simetrične matriko, saj so pri njih vektorji že ortogonalni med sabo)

- Prvi v skupini/paru (začnemo s tistim v_n , ki proizvede manjši koren)

$$u_1 := v_1 \quad q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\|u_1\|} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{bmatrix}$$

$\|u_n\| = \sqrt{u_{11}^2 + u_{12}^2 + \dots + u_{1n}^2}$ (vsota kvadratov vseh komponent)

- Vsi naslednji v skupini/paru:

$$u_n := v_n - \frac{u_1^\top \cdot v_n}{u_{n-1}^\top \cdot u_{n-1}} u_{n-1} \quad q_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} = \frac{1}{\|u_n\|} \begin{bmatrix} u_{n,1} \\ u_{n,2} \\ \vdots \\ u_{n,n} \end{bmatrix}$$

baza $B'_{N(H - \lambda_{1,2} I)} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ je baza za $N(H - \lambda_{1,2} I)$

Reševanje: podana imamo lastno vrednost in vektorja, najti moramo matriko A

Podano imamo lastno/e vrednost/i A in vektorja v, A, ki slikata enega v drugega, t.j. $Av_1 = v_2$ in $Av_2 = v_1$. Poišči tako matriko A. (to deluje le ker je matrika simetrična)

- Seštejemo in odštejemo enačbi.

seštevamo	odštevamo
$Av_1 + Av_2 = v_2 + v_1$	$Av_1 - Av_2 = v_2 - v_1$
$A(v_1 + v_2) = (+1)(v_2 + v_1)$	$A(v_1 - v_2) = (-1)(v_1 - v_2)$
$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = -1$
$u_1 = v_2 + v_1 = \dots$	$u_2 = v_1 - v_2 = \dots$

- Zdaj moramo najti prostor za znane lastne vrednosti. Rešimo kot sistem enačb (seštejemo in odštejemo u_1 in u_2 kot neznana vektorja).

seštevamo	odštevamo
$u_1 \cdot x + u_2 \cdot x = 0 + 0$	$u_1 \cdot x - u_2 \cdot x = 0 - 0$

Iz rešitev dobimo nov vektor, določimo proste spremenljivke -> lastni vektorji u_3 in u_4 .

Vse lastne vektorje normaliziramo (da nam ni potrebno računati P^{-1}).

- Sedaj imamo vse lastne vektorje in vse lastne vrednosti. Uporabimo $A = QDQ^\top$

D = diagonalna lastnih vrednosti

$$Q = [q_1, q_2, q_3, q_4]$$

in izračunamo A.

Schurov razcep

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ima $\mathbb{R}$ lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, obstaja ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da je $Q^\top A Q$ zgornja (ali spodnja) trikotna $n \times n$ matrika z diagonalnimi elementi λ_i . Matrika A je oblike $QDQ^\top$, kjer je D diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi A na diagonalni in Q je ortogonalna matrika. Če ima matrika A lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, potem je $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ in $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.

Če je U ortogonalna, velja $U^\top U = I$

Reševanje: Schurov razcep

Postopek:

- Lastni vektorji, lastne vrednosti, ortogonalna baza
Normaliziramo vse lastne vektorje z normalno normalizacijo in vzamemo najboljšega (najenostavnejšega) za q_1 .

- Izberemo Q_1 (baza je q_1 (prvi stolpec v Q_1)):

$$Q_1 = [q_1, u_2, u_3, \dots]$$

Izbira u_n :

- V primeru, da je $q_1 = [0, 0, 1]$ (ena enka in drugi dve 0) izberemo enako za ostalo, le ne smejo biti med seboj vzporedne (ne imeti enke na istih mestih)
- Družace:

- Za q_1 : postavimo v obliko $q_1^{(1)} \cdot x + q_1^{(2)} \cdot y + q_1^{(3)} \cdot z = 0$
- Za enako determinanto (eg. $\frac{1}{3}$): $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$

In šeimo nastal sistem enačb kolikokrat potrebujemo n-jev.

Ko dobimo prvo iz sistema enačb, lahko naslednjo izračunamo tudi z: $u_3 = u_1 \times u_2$

- Izračunamo:

$$T_1 = Q_1^\top A Q_1 = \dots \text{ (poskušamo dobiti zgornje-trikotno matriko)}$$

- Če še ni zgornje trikotna:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^\top \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

Ponovno izračunamo lastne vrednosti, lastne vektorje in ortogonalno bazo kot v koraku 1. za matriko B_2 .

$$(B_2 - \lambda I) = \dots$$

$$N(B_2 - \lambda_m I) = \dots$$

$$\text{Izberemo } Q_2 = [q_2 \ u_n \ \dots]$$

$$T_2 = Q_2^\top B_2 Q_2$$

$$4. \text{ Končni rezultat: } T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^\top Q_2 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} = \dots \quad Q = Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \dots$$

Frobeniusova norma

Skalarni (notranji) produkt $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ z lastnostmi:

- $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$
- $\langle \alpha A + \beta B, C \rangle = \alpha \langle A, C \rangle + \beta \langle B, C \rangle$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\langle A, A \rangle \geq 0$
- $\langle A, A \rangle = 0$ če je $A = 0$

Dodatno:

- $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \text{vec}(A)^\top \text{vec}(B)$
- $\|A + B\|_F^2 = \langle A + B, A + B \rangle_F$
- $\|A\|_F^2 = \langle A, A \rangle = \text{tr}(A^\top A)$
- $\|A\|_F = \|\text{vec}(A)\|$
- $\langle A, BC \rangle = \langle B^\top A, C \rangle = \langle AC^\top, B \rangle$
- $\langle xA, B \rangle = x \langle A, B \rangle$

$$\vec{x}\vec{x}^\top = \|x\| = 1, \text{ če je } \vec{x} \text{ enotski vektor}$$

$A^\top A = A^2$, če je A simetričen

Frobeniusova norma je definirana kot:

$$\|A\|_F = \|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^\top A)} = \sqrt{\text{tr}(A A^\top)}$$

Reševanje: Frobeniusova norma

Postopek:

- Če je matrika diagonalna (v njej so ne-diagonalni elementi ničelni): rang n vsebuje n največjih absolutnih vrednosti.

- Če simetrična:

Izračunamo lastne vrednosti, lastne vektorje in ortogonalno bazo.

Najboljša aproksimacija ranga k (Eckart-Young) v Frobeniusovi normi je trunciran SVD:

$$M_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^\top$$
$$M_1 = \sigma_1 q_1 q_1^\top$$
$$M_2 = M_1 + \sigma_2 q_2 q_2^\top$$

σ_i : lastne vrednosti $u_i, v_i^\top$ oz. q_i : normalizirani lastni vektorji (lahko tudi rezultati q -jev od Kroneckerjevega produkta)

Enoličnost: če je $\sigma_k > \sigma_{k+1}$ je matrika enolična.

Če ni enolična, pomeni, da ima neskončno mnogo matrik ranga 1, ki so enako najboljše. To so torej tiste, ki imajo več enakih največjih absolutnih vrednosti.

Kroneckerjev produkt

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$$

Lastnosti:

- $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
- $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha = \alpha A, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha (A \otimes B)$
- $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ in $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$
- $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$
- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
- $A \otimes (B \otimes C) = (AC) \otimes (BD)$
- $\|A \otimes B\|_F = \|A\|_F \|B\|_F$
- Če sta A in B inverzni, potem je tudi $A \otimes B$ inverzna: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, potem $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
- Če $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ima lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ in B ima lastne vrednosti $\mu_1, \dots, \mu_n$, potem je množica lastnih vrednosti $A \otimes B$ enaka $\{\lambda_i \mu_j\}$
- Če $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, potem $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$
- Če $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, potem $\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n$
- $\text{rank}(A \otimes B) = \text{rank}(A) \text{rank}(B)$

- Če

A
∈

R

n
×
n

,
B
∈

R

n
×
p

 in

C
∈

R

p
×
r

, potem

vec
(
A
B
C
)
=
(

C

⊤

⊗
A
)
vec
(
B
)

.
- Če sta

A

 in

B

 ortogonalni, je ortogonalna tudi

A
⊗
B

.

Pazi: za večino matrik

A
⊗
B

 ni enak

B
⊗
A

.

Upoštevajamo, da za poljubna vektorja

a
∈

R

m

 in

b
∈

R

n

 velja:

$$a\otimes b=\begin{bmatrix}a_1b\\a_2b\\\vdots\\a_mb\end{bmatrix}=\text{vec}\left(\begin{bmatrix}a_1b&&&\\&a_2b&&\\&&\ddots&\\&&&a_mb\end{bmatrix}\right)=\text{vec}(ba^\top)$$

Tip:

(
α
A
)
⊗
(
β
B
)
=
α
β
(
A
⊗
B
)

Kroneckerjeva vsota

B

⊤

⊕
A
=
B

⊤

⊗
I
+
I
⊗
A

$$\begin{aligned}\text{vec}(A\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}B)&=\text{vec}(A\boldsymbol{X}I)+\text{vec}(I\boldsymbol{X}B)=\\&=(I\otimes A)\text{vec}(\boldsymbol{X})+(B^\top\otimes I)\text{vec}(\boldsymbol{X})=\\&=(B^\top\oplus A)\text{vec}(\boldsymbol{X})\end{aligned}$$

Reševanje: Kroneckerjev produkt

Podatki naloge:

S
:=
enačba

Predpostavimo, da imamo lastne vektorje kot pare za

A

 in

B

 (

B

 je lahko tudi

A

):

- A
v
=
λ
v
- B
u
=
q
u

in vektor

v
⊗
u

.

Postopek:

- Rešimo (razvijemo)

S
(
v
⊗
u
)
=
enačba
(
v
⊗
u
)
=
…
=
(
λ
…
q
)
(
v
⊗
u
)

na tak način, da lahko zamenjamo leve pare iz predpostavke z desnimi.
- Če moramo potem matrično (vsakega z vsakim) izračunati še lastne vrednosti in lastne vektorje

S

, lahko jih damo v tabelo:

 (q j , u i) ∖ λ<!-- λ --> i , v i) 	1. vred., in 1. vek.	1. vred., in 1. vek.	1. vred., in 1. vek.
1. vred., 1. vek.		1. vred., 1. vek.	1. vred., 1. vek.
1. vred., 1. vek.		1. vred., 1. vek.	1. vred., 1. vek.

Lastne vrednosti izračunamo po

(
λ
…
q
)

 iz 1., lastne vektorje pa kot

(
v
⊗
u
)

.

Note: če je

B
=
A
−
α
I

 (− ali +), je potem

B
=
Q
(
D
−
α
I
)

Q

⊤
 ima

B

:

- lastne vrednosti

μ

i

=

λ

i

−
α
- iste lastne vektorje kot

A

Pozitivna semidefinitnost. Razcep Choleskega.

Matrična kvadratna forma

Kvadratna forma

A
∈

R

n
×
n

:

$$\vec{x}^\top A \vec{x} = \begin{bmatrix}x_1 & \dots & x_n\end{bmatrix} \begin{bmatrix}A_{11} \\ \vdots \\ A_{n1}\end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

A
=
Q

D

Q

⊤

→

x

⊤

A
x
=

u

⊤

D
u

, kjer je:

- u
=

Q

⊤

x
- u

⊤

D
u
=

λ

1

u

1

+
…
+

λ

n

u

n

Simetrična matrika

A
∈

R

n
×
n

 je:

- PSD** (pozitivno semidefinitna), če je

x

⊤

A
x
≥
0

 za vse

x
∈

R

n

 oz.

↔
 so vse lastne vrednosti

A

 ne-negativne.
- PD** (pozitivno definitna), če je

x

⊤

A
x
>
0

 za vse neničelne

x
∈

R

n

 oz.

↔
 so vse lastne vrednosti

A

 pozitivne (

det
(
A
)
>
0
)

).
- NSD** (negativno semidefinitna), če je

x

⊤

A
x
≤
0

 za vse

x
∈

R

n

 oz.

↔
 so vse lastne vrednosti

A

 ne-pozitivne.
- ND** (negativno definitna), če je

x

⊤

A
x
<
0

 za vse neničelne

x
∈

R

n

 ali

↔
 so vse lastne vrednosti

A

 negativne.
- Indefinitna**, če je

x

⊤

A
x
>
0

 za nek

x
∈

R

n

 in

y

⊤

A
y
<
0

 za nek

y
∈

R

n

 oz.

↔
 ima

A

 pozitivne in negativne lastne vrednosti.

Sylvestrov kriterij

Simetrična matrika

A

 je **PD**, če in samo če je determinanta vsake vodilne glavne podmatrice pozitivna, in **PSD**, ko je negativna. Simetrična matrika

A

 je **ND**, če in samo če je determinanta

k
×
k

 vodilne glavne podmatrice pozitivna, če je

k

 sodo, in negativna, če je

k

 liho:

$$\begin{bmatrix}+ & & & \\ & - & & \\ & & + & \\ & & & \ddots\end{bmatrix}$$

Razcep Choleskega

Matrika

A

 mora biti simetrična in pozitivno definitna.

QR razcep:

Q

 je ortogonalna matrika

B

 in

R

 je zgornja trikotna matrika koeficientov.

(kjer je

L
=
[

Δ

0

Δ

]

 spodnje trikotna matrika)

Note: če je matrika zgornje ali spodnje trikotna, so diagonalni elementi lastne vrednosti te matrike. Za obrnljivo, (simetrično) in PD matriko

A
∈

R

n
×
n

 imamo algoritem razcepa:

Reševanje: Razcep Choleskega

Postopek:

- Izrazimo komponente:

$$A_1:=A=\begin{bmatrix}a_{11}&&&\\&\ddots&&\\&&&b\\&&&&B\end{bmatrix}$$

- Definiramo:

$$L_1:=\begin{bmatrix}\sqrt{a_{11}}&&&\\&\ddots&&\\&&&\tilde{b}\\&&&&L_{n-1}\end{bmatrix}$$

- Ponovimo to na:

$$A_2:=B-\frac{1}{a_{11}}\tilde{b}\tilde{b}^\top\in\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

(ponavljamo, dokler ne pridemo do 1·1 matrike)
Če so

L

1

,

L

2

,
…
,

L

3

 matrike, dobljene na ta način, potem:

L
=
[

L

1

1

L

1

1

L

1

1

]

(
gnezdimo
prve
stolpce

L

n

matrik)

Če eden od teh korakov ne uspe, potem matrika

A

 ni PD.

Vektorski prostori in podprostori

Vektorski prostor

Vektorski prostor

V

 je množica vektorjev

v
∈
V

 skupaj z dvema notranjima operacijama:

- seštevanje (

u
,
v
∈
V
⇒
u
+
v
∈
V

) in
- množenje s skalarjem (

v
∈
V
,
α
∈

R

⇒
α
v
∈
V

),

tako da velja:
(VS1)

u
+
v
=
v
+
u

 in

(
u
+
v
)
+
w
=
u
+
(
v
+
w
)
,

(VS2) obstaja ničelni vektor **0** in

v
+
0
=
0
+
v
=
v
,

(VS3) za vsak

v
∈
V

 obstaja inverzni vektor

−
v
,

 tako da

v
+
(
−
v
)
=
(
−
v
)
+
v
=
0
,

(VS4)

1
⋅
v
=
v
,

(VS5)

(
α
β
)
⋅
v
=
α
⋅
(
β
⋅
v
)
,

(VS6)

(
α
+
β
)
⋅
v
=
α
⋅
v
+
β
⋅
v
,

(VS7)

α
⋅
(
u
+
v
)
=
α
⋅
u
+
α
⋅
v
,

za vse

u
,
v
,
w
∈
V

 in

α
,
β
∈

R

.
Naj bo

V

 vektorski prostor. Potem:

- 0
∈
V
,
- ničelni vektor

0

 je enoličen (edinstven),
- 0
⋅
v
=
0

 za vsak

v
∈
V
,
- α
⋅
0
=
0

 za vsak

α
∈

R

.

Linearna kombinacija vektorjev: vektor oblike

a

1

v

1

+
…
+

a

n

v

n

 za poljubno izbiro skalarjev

a

1

,

a

2

,
…
,

a

n

∈

R

.
Linearna kombinacija, ki uporablja samo ničelne skalarje, se imenuje trivialna linearna kombinacija.

Vektorski podprostori

Podmnožica

U

 vektorskega prostora

V

 je vektorski podprostor, če je *zaprta za linearne kombinacije* (seštevanje in množenje s skalarjem)

α
u
+
β
v
∈
U
.

Naj bo

V

 vektorski prostor in

U

 vektorski podprostor

V

:

- 0
∈
U
.
- U

 je vektorski prostor.

Linearna ogrinjača

L

{

v

1

,
…
,

v

n

}

 je množica vseh linearnih kombinacij. Je najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje vektorje

v

1

,
…
,

v

n

.

Baza vektorskega prostora

Vektorji

v

1

,
…
,

v

n

 so linearno neodvisni, če je edina linearna kombinacija, ki je enaka

0
,

a

1

v

1

+
…
+

a

n

v

n

=
0
⇒

a

1

=
…
=

a

n

=
0
.

Torej, vsaka množica vektorjev, ki vsebuje ničelni vektor

0

, je linearno odvisna.

Množica vektorjev

B
=
{

v

1

,
…
,

v

n

}
⊆
V

 je baza

V
,

 če so

v

1

,
…
,

v

n

 linearno neodvisni in

L

=
{

v

1

,
…
,

v

n

}

 razpenja

V
.

 Število elementov v kateri koli bazi vektorskega prostora

V

 je

dim
V
:

- dim

R

n

=
n
- dim

R

n
×
m

=
n
m
- dim

R

n

[
x
]
=
n
+
1

Reševanje: podprostor

- Podmnožica

U
⊆
V

 je **podprostor**, če:

- Ohranja ničelni vektor (matriko/polinom) (

0
∈
S
)

.
Ali
0
∈
U
?

 (*Preveri z vstavljanjem ničle v pogoj.*)
- Je zaprta za seštevanje: če

A
,
B
∈
U
,

 potem

A
+
B
∈
U
.

Ali za

u
,
v
∈
U

 velja

u
+
v
∈
U
?
- Je zaprta za množenje s skalarjem: če

A
∈
U

 in

α
∈

R

, potem

α
A
∈
U
.

Ali za

u
∈
U
,
α
∈

R

 velja

α
u
∈
U
?

Namig: Če je pogoj linearen (npr.

A
N
=
N
A
)
,

 je verjetno podprostor. Če je nelinearen (npr.

p
(
0
)
=
1
)
,

 verjetno ni.

Pogosta napaka: Pozabil preveriti ničlo ali vzel specifičen primer namesto splošnega dokaza.

- Iskanje baze:

- Prostor, npr.

R

n
×
n

 ima dimenzijo

n

2

. Standardna baza za

R

n
×
n

 so matrike

E

p
q

 (1 na mestu

(
p
,
q
)
,

 0 drugje). Dimenzijo podprostora izračunamo s štejem prostih parametrov/spremenjlivk, bazo pa sestavimo iz primernih linearno neodvisnih matrik, ki generirajo podprostor (npr. prilagojene

E

p
q

).
- Drugače pa:
 - Parametriziraj splošni element (npr. matrika z nez-nankami

a
,
b
,
c
,
d
)

.
 - Postavi pogoje kot sistem linearnih enačb.
 - Reši sistem (uporabi Gaussovo eliminacijo).
 - Izrazi kot linearno kombinacijo neodvisnih vektorjev (baza).
 - Dimenzija = število prostih parametrov (ali elementov v bazi).
- Za neskončne dimenzije: Če baza nima konca (npr.

{

x

n

}
)
,

dim
=

ℵ

0

,
- Preverjanje linearne neodvisnosti: Reši

∑

α

i

b

i

=
0
;

 samo trivialna rešitev.

Linearne preslikave

Preslikava

τ
:
V
→
U

 (vektorska prostora) je linearna, če velja

- τ
(
u
+
v
)
=
τ
(
u
)
+
τ
(
v
)

 in
- τ
(
α
v
)
=
α
τ
(
v
)

Preslikava je linerana natanko takrat, ko

τ
(
α
v
+
β
w
)
=
α
τ
(
v
)
+
β
τ
(
w
)
.

Za vsako

τ
:
V
→
U

 velja

τ
(
0
)
=
0
.

Operacije z linearnimi preslikavami

- Vsota:

τ
+
φ
:
V
→
U

 kot

(
τ
+
φ
)
(
v
)
=
τ
(
v
)
+
φ
(
v
)
- Večkratnik:

γ
τ
:
V
→
U

 kot

(
ω
τ
)
(
v
)
=
ω
τ
(
v
)
- Kompozicija:

θ
∘
τ
:
V
→
W

 kot

(
θ
∘
τ
)
(
v
)
=
θ
(
τ
(
v
)
)

Matrika, ki pripada linearni preslikavi

Naj imamo

V

 in

U

 vektorska prostora dimenzij

m

 in

n

 ter izberimo bazi:

- B
=
{

b

1

,

b

2

,
…
,

b

n

}

 za

V
- C
=
{

c

1

,

c

2

,
…
,

c

n

}

 za

U

Sliko, kot linearno kombinacijo vektorjev

C
=
{

c

1

,

c

2

,
…
,

c

n

}
,

 zapišemo kot

τ
(

b

j

)
=

α

1
j

c

1

+
…
+

α

n
j

c

n

. Matrika, ki pripada linearni transformaciji

τ
 iz baze

B

 v bazo

C
:

$$A_{\tau,B,C}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1m}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&&\alpha_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\dots&\alpha_{nm}\end{bmatrix}$$

Stolpci

=
τ
(

u

i

)

 in vrstice

=

c

j

.

Če je

v
=
∑

j
=
1

n

β

j

b

j

 in

τ
(
v
)
=
∑

i
=
1

n

γ

i

c

i

, potem

$$\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1m}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&&\alpha_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\dots&\alpha_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

Matrika

A

τ
,
B
,
C

 je odvisna od izbire baz

B

 in

C

 vektorskih prostorov

V

 in

U

. Matriko, ki pripada linearni transformaciji

τ
:
V
→
V

 iz baze

B

 v bazo

B

, pišemo tudi kot

A

τ
,
B
,
B

.

Ta matrika linearne preslikave ima lastnosti:

- A

τ
+
φ
,
B
,
C

=

A

τ
,
B
,
C

+

A

φ
,
B
,
C
- A

α
τ
,
B
,
C

=
α

A

τ
,
B
,
C
- A

θ
τ
,
B
,
D

=

A

θ
,
B
,
D

⋅

A

τ
,
B
,
C
- A

θ
−
1
,
B
,
C

=
(

A

θ
,
B
,
C

)

−
1

Lastne vrednosti lin. preslikave

Vse matrike, ki ustrezajo linearni preslikavi

τ
,

 imajo enake lastne vrednosti kot

τ
.

τ
(
v
)
=
λ
v
=
λ
J
(
v
)
,

kjer je

J

 identitetna preslikava

J
:
V
→
V

 oz.

(
τ
−
λ
J
)
(
v
)
=
0
→
 jedro

τ
−
λ
J
.

Linearna preslikava je diagonalizabilna

↔
 obstaja baza

B

 prostora

V
,

 ki jo sestavljajo lastni vektorji

τ
.

Jedro in slika

Jedro (

ker
(
τ
)
=
ker
τ
)

 je množica vseh vektorjev

v
∈
V
,

 za katere velja

τ
(
v
)
=
0
.

Slika je množica

im
(
τ
)
=
{
τ
(
v
)
:
v
∈
V
}
⊆
U
.

ker

τ
 je vektorski podprostor

V

 in

im
τ
 je vektorski podprostor

U
.

Linearna preslikava je:

- injektivna, če in samo če

ker
τ
=
{
0
}

 ali

τ
(
u
)
=
τ
(
v
)
⇒
u
=
v
- surjektivna, če in samo če

im
τ
=
U

Lastnosti (

τ
:
V
→
U

 linearna preslikava in

A

τ
,
B
,
C

 (pišemo tudi kot

A

τ
) matrika, ki pripada

τ
)
:

2. del

Jacobijeva matrika, odvajanje vektorskih funkcij

Funkcija več spremenljivk

$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$ je funkcija več spremenljivk z domeno D_f . Nivojska krivulja funkcije $f = f(x, y)$ je množica vseh točk $f(x, y) = 0$.

Parcialni odvod funkcije glede na spremenljivko x_i v točki $\vec{a}$ je $f_{x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\vec{a})}{h}$, in $(grad\ f)(\vec{a}) = [f_{x_1}(\vec{a}), \dots, f_{x_n}(\vec{a})]$ je gradientni vektor. Smerni odvod funkcije v točki v smeri vektorja $\vec{c}$ je $f_{\vec{c}}(\vec{a}) = (grad\ f)(\vec{a}) \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\vec{a}) \frac{c_i}{|\vec{c}|}$.

Parcialni odvodi drugega reda: $f_{x_i x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \right)$ iz česar dobimo $n \times n$ Hessejevo matriko: $H_f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x})_{i,j=1,\dots,n}$

Če so vsi parcialni odvodi drugega reda $f_{x_i x_j}(\vec{x})$ zvezni v točki $\mathbf{x}$, potem je Hessejeva matrika simetrična.

Vektorske funkcije več spremenljivk

$F : D_F \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{x} \rightarrow [f_1(\vec{x}) \ \dots \ f_m(\vec{x})]^\top = \vec{F}(\vec{x})$.
 $m \times n$ **Jacobijeva matrika** vseh parcialnih odvodov prvega reda funkcij $f_1, \dots, f_m$ (odvod $\vec{F}$ preko $\vec{x}$) opisuje lokalno dilatacijo volumna:

$$J_F(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

Lastnosti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}} &= I_n & \frac{\partial (\vec{x} \vec{x}^\top)}{\partial \vec{x}} &= \frac{\partial (\vec{a} \vec{a}^\top)}{\partial \vec{x}} = \vec{a}, \text{ če je } \vec{a} \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial (A\vec{x})}{\partial \vec{x}} &= A^\top & \frac{\partial (\vec{x}^\top A)}{\partial \vec{x}} &= A \\ \frac{\partial (\vec{x}^\top \vec{x})}{\partial \vec{x}} &= \frac{\partial ||\vec{x}||^2}{\partial \vec{x}} = 2\vec{x}^\top & \frac{\partial (\vec{x}^\top A\vec{x})}{\partial \vec{x}} &= 2\vec{x}^\top A, \text{ če je } A \text{ simetrična} \\ \frac{\partial (\vec{x}^\top A\vec{x})}{\partial \vec{x}} &= 2\vec{x}^\top A, \text{ če je } A \text{ simetrična} & \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{x}} &= \frac{\partial (\vec{F} \circ \vec{G})}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{G}(\vec{x})} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{x}} \end{aligned}$$

Reševanje: Jakobijeva matrika

$$\begin{aligned} 1. \quad F(r) &= F(r, \varphi) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & J_F &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{bmatrix} \\ 2. \quad F(r) &= F(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^\top \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & J_F &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \rightarrow \\ y \rightarrow \\ z \rightarrow \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Reševanje: Jakobijeva determinanta

Determinanto izračunamo po formuli za determinanto matrik. Trik:

$$\bullet \det(J_F) = \begin{vmatrix} \dots & r \ast \dots & r \ast \dots \\ \dots & r \ast \dots & r \ast \dots \\ \dots & 0 & r \ast \dots \end{vmatrix} = r^2 \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix}$$

determinanto različnih stolpcev, v vsakem členu determinante množimo 1 element iz vsakega stolpca (dobimo faktor)

Ostalo

Pogosti odvodi

Osnovni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} c &= 0, \quad c = \text{konst.} & \frac{\partial}{\partial x} x^n &= nx^{n-1} \\ \frac{\partial}{\partial x} (cf) &= c \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} (f+g) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} (f-g) &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} (fg) &= \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x} g - f \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2} & \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} (f+g)^n &= n(f+g)^{n-1} (f+g)' \end{aligned}$$

Pomembni:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x) &= 1 & \frac{d}{dx} (\log(f(x))) &= \frac{d}{dx} (\ln(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)} \\ \frac{d}{dx} (e^x) &= e^x & \frac{d}{dx} (\sin x) &= \cos x \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) &= -\frac{1}{x^2} & \frac{d}{dx} (\cos x) &= -\sin x \end{aligned}$$

Ostali:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (a^x) &= a^x \ln a & \frac{d}{dx} (\ln |x|) &= \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \\ \frac{d}{dx} \sqrt{x} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{d}{dx} (|x|) &= \text{sign}(x) \\ \frac{d}{dx} (\log_a x) &= \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0 & \frac{d}{dx} (\tan x) &= \sec^2 x = \tan^2 x + 1 \\ \frac{d}{dx} (\cot x) &= -\csc^2 x & \frac{d}{dx} (\sec x) &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx} (\csc x) &= -\csc x \cot x & \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx} (\cos^{-1} x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx} (\sinh x) &= \cosh x & \frac{d}{dx} (\cosh x) &= \sinh x \\ \frac{d}{dx} (\tanh x) &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x & \frac{d}{dx} (\sinh^{-1} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \frac{d}{dx} (\cosh^{-1} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \frac{d}{dx} (\tanh^{-1} x) &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

Pogoste trigonometrične formule

Identiteta: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) & \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) &= \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} & \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) &= \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ 1 + \cot^2 \theta &= \csc^2 \theta & \sin(\theta \pm \gamma) &= \sin \theta \cos \gamma \pm \cos \theta \sin \gamma \\ \sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta & \cos(\theta \pm \gamma) &= \cos \theta \cos \gamma \mp \sin \theta \sin \gamma \\ \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \gamma \\ \frac{a}{\sin \theta} &= \frac{b}{\sin \gamma} = \frac{c}{\sin \delta} & a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta \\ \tan^2 \theta + 1 &= \sec^2 \theta & c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta \end{aligned}$$

Dvojni in trojni integrali

Dvojni integral nad pravokotnikom

$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y$ kjer je $R = [a, b] \times [c, d]$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $\Delta y = \frac{d-c}{m}$ in x_{ij}^*, y_{ij}^* so izbrane točke v mn manjših pravokotnikih. To je enako volumnu omejenega telesa pravokotnika pod grafom $f(x, y)$, če je f nenegativna. Fubinijev izrek (na pravokotniku):

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Dvojni integral

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ je omejeno območje, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Izberemo pravokotnik R tako, da je $D \subseteq R$, in definiramo dvojni integral f nad območjem D kot $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy$, kjer je $F(x, y) = f(x, y)$ ko je $(x, y) \in D$ in 0 sicer.

Fubinijev izrek (nepravokotna območja):

- Če je $D = \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ potem je

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

- Če je $D = \{(x, y); \vartheta_1(y) \leq x \leq \vartheta_2(y), c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2$ potem je

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\vartheta_1(y)}^{\vartheta_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Trojni integrali

... so definirani podobno. Po Fubinijevem izreku lahko trojni integral izrazimo kot trikratno integriranje nad ustreznimi intervali.

Menjava spremenljivk

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna na $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in $x = \varphi(u, v), y = \vartheta(u, v), z = \psi(u, v)$ tako da je $\det J_{\varphi, \vartheta} \neq 0$, potem:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \underbrace{f(\varphi(u, v), \vartheta(u, v))}_{\text{y}} \underbrace{|\det J_{\varphi, \vartheta}|}_{\text{det J}} du dv$$

kar se lahko razširi na $\mathbb{R}^3$ in dobimo

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D \underbrace{f(\varphi(u, v, w), \vartheta(u, v, w), \psi(u, v, w))}_{\text{y}} \underbrace{|\det J_{\varphi, \vartheta, \psi}|}_{\text{det J}} du dv dw$$

Pogoste substitucije:

- Polarne koordinate v $\mathbb{R}^2$
 $x = r \cos \varphi \quad r \geq 0 \quad \text{polmer kroga}$
 $y = r \sin \varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \text{kot v xy ravnini}$
 $\det J_{\text{polar}} = r$
- Valjne/cilindrične (3D polarne) koordinate v $\mathbb{R}^3$; $x^2 + y^2 = r^2$
 $x = r \cos \varphi \quad r \geq 0 \quad \text{polmer v xy ravnini}$
 $y = r \sin \varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \text{kot v xy ravnini}$
 $z = z \quad z \in \mathbb{R} \quad \text{višina}$
 $\det J_{\text{cilindric}} = r$
- Krogeljne/sferične koordinate v $\mathbb{R}^3$
 $x = r \cos \varphi \cos \vartheta \quad r \geq 0 \quad \text{polmer krogle}$
 $y = r \sin \varphi \cos \vartheta \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \text{kot v xy ravnini}$
 $z = r \sin \vartheta \quad \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{kot od z osi}$
 $\det J_{\text{spherical}} = r^2 \cos \vartheta$

če podana z enačbo, jo preoblikujemo (primer):

$$\frac{x^2}{x=0} + \frac{y^2}{y=0} + \frac{(z-1)^2}{z=1} \leq \frac{1}{r=1}$$

stožec: $z^2 = x^2 + y^2$
krogla: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (krogla s polmerom 2)

- Torusne (donut) koordinate v $\mathbb{R}^3$
 $x = (R + \rho \cos \varphi) \cos \vartheta \quad \rho \in [0, r] \quad \text{razdalja od središča cevi}$
 $y = (R + \rho \cos \varphi) \sin \vartheta \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad \text{kot v prečnem prerezu cevi}$
 $z = \rho \sin \varphi \quad \vartheta \in [0, 2\pi] \quad \text{kot okoli osi torusa}$
 $\det J_{\text{torus}} = \rho(R + \rho \cos \varphi)$

zunanja polovica torusa je enaka notranji polovici zaradi simetrije: $V_e = V_n$

Ostale oblike:

Gostota:

- V vsaki točki enaka oddaljenosti od izhodišča (eg. $\rho(x, y, z) = r$):

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

- Homogeno telo:

$$\rho(x, y, z) = 1$$

Masa: $m = \iint_D \text{gostota } dxdy = \dots \cdot \det(J_F) \dots$

Koordinate masnega središča:

- $x^* = \frac{1}{m} \iint_D \rho(x, y) dx dy$
- $y^* = \frac{1}{m} \iint_D \rho(x, y) dx dy$

Ostalo

Integrali

- x : spremenljivka
- c : fiksna konstanta (znana vrednost ali parameter, ki množi integrant)
- n : eksponent
- a : poljubna konstanta
- e : Eulerjevo število (2.71828...)
- $|x|$: absolutna vrednost
- $f(x), g(x)$: poljubni funkciji

Osnovni

$$\begin{aligned} \int c dx &= cx + C & \int \frac{1}{x} dx &= \int x^{-1} dx = \ln |x| + C \\ \int \log_a(x) dx &= x \log_a(x) - x \log_a(e) & \int \frac{1}{x^n} dx &= \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} \\ \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 & \int e^x dx &= e^x + C \\ \int c f(x) dx &= c \int f(x) dx & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1 \\ \int [f(x) + g(x)] dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx & \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int [f(x) - g(x)] dx &= \int f(x) dx - \int g(x) dx & \int \cos x dx &= \sin x + C \end{aligned}$$

Note: množenje/deljenje je nedoločen integral

Ostali

$$\begin{aligned} \int \sin(x) dx &= -\cos(x) & \int \frac{1}{1 - \cos(x)} dx &= \frac{-\sin(x)}{1 - \cos(x)} \\ \int \cos(x) dx &= \sin(x) & \int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \\ \int \tan(x) dx &= -\ln |\cos(x)| = \ln |\sec(x)| & \int x e^x dx &= (x-1) e^x \\ \int \cot(x) dx &= \ln |\sin(x)| & \int x e^{ax} dx &= \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} \\ \int \sec(x) dx &= \ln |\sec(x) + \tan(x)| & \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} \\ \int \csc(x) dx &= -\ln |\csc(x) + \cot(x)| & \int (x+a)^n dx &= \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \\ \int \sin^{-1}(x) dx &= x \sin^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2} & \int x(x+a)^n dx &= \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x - a)}{(n+1)(n+2)} \\ \int \cos^{-1}(x) dx &= x \cos^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2} & \int \frac{ax+b}{cx+d} dx &= \frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln |cx+d| \\ \int \tan^{-1}(x) dx &= x \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) & \int \frac{1}{(x+a)^2} dx &= -\frac{1}{x+a} \\ \int \cot^{-1}(x) dx &= x \cot^{-1}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) & \int \frac{1}{ax+b} dx &= \frac{1}{a} \ln |ax+b| \\ \int \frac{1}{\sin(x)} dx &= \ln \left| \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \right| & \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \\ \int \frac{1}{\cos(x)} dx &= \ln \left| \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \right| & \int \sqrt{x-ax} dx &= \frac{2}{3} (x-a)^{\frac{3}{2}} \\ \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx &= -\cot(x) & \int \sqrt{ax+bdx} &= \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \\ \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx &= \tan(x) & \int \sqrt{x^2+adx} &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln |x+ \\ \int \frac{1}{1 + \sin(x)} dx &= \frac{-\cos(x)}{1 + \sin(x)} & \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \\ \int \frac{1}{1 + \cos(x)} dx &= \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} & \int x \sqrt{x-ax} dx &= \frac{2}{3} a(x-a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} (x-a) \\ \int \frac{1}{1 - \sin(x)} dx &= \frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)} & \int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}} \\ \int \sin(2\theta) &= -\frac{1}{2} \cos(2\theta) \end{aligned}$$

Hiperbolične funkcije

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= 2 \sinh(x) & e^x + e^{-x} &= 2 \cosh(x) \end{aligned}$$

Koti

	Stopinje	Radiani	sin	cos	tan
0	0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-1	∞
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0	∞
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	0	0	-1	∞
300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
360	2π	0	1	0	0

Integracija po delih (Per Partes)

Osnovna formula: $\int u dv = uv - \int v du$

Kako izbrati u in dv?

Ko imamo produkt dveh funkcij v integralu (npr. $\int f(x)g(x)dx$):

- Izberi u tako, da se po odvajanju (du) poenostavi.

- dv je preostanek, ki ga je enostavno integrirati (v = $\int dv$).

Pravilo LIATE za izbiro u (po prioriteti, od najvišje do najnižje):

- Logaritmi (npr. $\ln x$)
- Inverzne trigonometrične funkcije (npr. $\arcsin x$)
- Algebraične funkcije (npr. polinomi kot x^2)
- Trigonometrične funkcije (npr. $\sin x, \cos x$)
- Eksponentne funkcije (npr. e^x)

Izberi u iz višje kategorije v LIATE, dv pa iz nižje.

Koraki izračuna:

- Določi u in dv.
- Izračunaj:
 - $du = \frac{du}{dv} dx$ (odvod u)
 - $v = \int \frac{dv}{dv}$ (integral dv)

3. Vstavi v formulo: $uv - \int v du$.

4. Če je potrebno, ponovi postopek za preostali integral

Uvedba nove spremenljivke (U-Substitucija)

Osnovna ideja:

Metoda substitucije poenostavi integral z zamenjavo zapletenega dela z novo spremenljivko *u*. Primerna je, ko vidiš kompozitno funkcijo (npr. *f(g(x))*) in njen odvod v integrandu.

Določimo nove spremenljivke *u* = *g(x)* in *du* = *g'(x)dx*, potem:
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Kako izbrati *u*?

- Izberi *u* kot “notranjo” funkcijo, ki se pojavlja v kompoziciji (npr. če vidiš $\sqrt{x^2+1}$, poskusi *u* = *x*² + 1).
- Preveri, ali je odvod *u(du/g'(x))* prisoten v integralu (pogosto kot multiplikator).
- Če je integral oblike $\int f'(x) \cdot [f(x)]^n dx$, je *u* = *f(x)* idealen (npr. za moči).

Koraki izračuna:

- Doloci *u* = *g(x)* (izberi primerno substitucijo).

- Izračunaj *du* = *g'(x)dx*.
- Zamenjaj v integralu: izrazi vse v terminih *u* (vključno *z dx* = *du/g'(x)*, če je potrebno).
- Za določene integrale: prilagodi meje (*u(a)* in *u(b)*).

- Izračunaj novi integral v *u*.
- Na koncu:

- Za določene: rezultat je številka, brez vrnitve v *x*.
- Za nedoločene: vrni nazaj v *x* (reši *u* = *g(x)* za *x*, če je potrebno) in dodaj +*C*.

Primer (določen integral):

Izračunaj $\int_0^1 xe^{x^2} dx$.

- u* = *x*² → *du* = 2*x**dx* → *dx* = *du/(2x)*, ampak bolje: opazi, da je *x dx* = (1/2)*du*.
- Meje: ko *x* = 0, *u* = 0; ko *x* = 1, *u* = 1.
- Integral: $\int_0^1 e^{x^2} \cdot x dx = \int_0^1 e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1)$

Nasveti:

- Če *du* ne pokrije celotnega integrala, poskusi drugo *u* ali prilagodi (npr. pomnoži/z delj *s* konstanto).

- Za trigonometrične substitucije (npr. *u* = *tan*θ) je to razširitev – uporabi, ko vidiš $\sqrt{a^2 - x^2}$ itd.
- Vedno preveri z diferenciacijo: odvaj rezultat in preveri, ali dobiš nazaj originalni integrand.
- Za določene integrale z mejo neskončnostjo: preveri, ali meje v *u* konvergirajo.
- Če substitucija ne deluje, poskusi integracijo po delih ali drugo metodo!

Klasifikacija lokalnih ekstremov

f : ℝ^{*n*} → ℝ, *ā* ∈ *ℳ_f*:

- ā* je lokalni maksimum funkcije *a*, če za vse *x̄* ≠ *ā* (∀||*x̄* − *ā*|| < ε za majhen ε) velja *f(x̄)* < *f(ā)*.
- ā* je lokalni minimum funkcije *a*, če za vse *x̄* ≠ *ā* (∀||*x̄* − *ā*|| < ε za majhen ε) velja *f(x̄)* > *f(ā)*.

Če ima *f* zvezne parcialne odvode, potem je vsak lokalni ekstrem stacionarna točka funkcije *f*, (grad *f*)(*ā*) = 0̄.

Izrek:

- Če je *H_f(ā)* PD, potem ima *f* lokalni minimum v *ā*.
- Če je *H_f(ā)* ND, potem ima *f* lokalni maksimum v *ā*.
- Če je *H_f(ā)* nedoločena, potem *f* nima lokalnega ekstrema v *ā*, *ā* je sedlo.

- Če ima *H_f(ā)* lastno vrednost 0 (*det H_f* = 0), potem ne moremo sklepati o tipu kritične točke samo iz *H_f(ā)*.

Posledica (po Sylvestrovem kriteriju):

- det(*H_f*(*a, b*)) > 0 (če so vse lastne vrednosti neničelne in enako predznačene):

Izračunamo vrednost drugega parcialnega odvoda:
 - f_{xx}*(*a, b*) > 0: lokalni minimum (vse lastne vrednosti so pozitivne)
 - f_{xx}*(*a, b*) ≤ 0: lokalni maksimum (vse lastne vrednosti so negativne)
- det(*H_f*(*a, b*)) < 0 (če so vse lastne vrednosti neničelne in različno predznačene):

ni ekstrema, imamo sedlo
- det(*H_f*(*a, b*)) = 0 (če je vsaj ena od lastnih vrednosti 0):

ne moremo sklepati

Funkcija je:

- konveksna na *ℳ* za vse *x̄,ȳ* ∈ *ℳ* in vse *t* ∈ [0,1], če je *f*(*t**x̄* + (1 − *t*)*ȳ*) ≤ *t f(x̄)* + (1 − *t*)*f(ȳ)*.
- konkavna v *ℳ*, če je −*f* konveksna.

Za dvakrat odvedljivo *f* : *ℳ* ⊆ ℝ^{*n*} → ℝ je:

- konveksna samo, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ PSD matrika na *ℳ*
- konkavna samo, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ NSD na *ℳ*.

Reševanje: klasifikacija lokalnih ekstremov

f(*x, y*) = ...

- Gradient: (dobimo stacionarne točke)

grad(*f*) =

[

∂
k

∂

g

i

]

{\displaystyle \left[{\frac {\partial k}{\partial g_{i}}}\right]}
- Hessejeva matrika: (da ugotovimo tip teh stacionarnih točk)

H_k(*x, y*) = *J_{grad(k)}*(*x, y*) =

[

∂

x

2

k

∂

x

2

∂

x

2

k

∂
x
∂
y

∂

x

2

k

∂

y

2

]

[

x
→

y
→

]

{\displaystyle \left[{\frac {\partial ^{2}k}{\partial x^{2}}}{\frac {\partial ^{2}k}{\partial x\partial y}}{\frac {\partial ^{2}k}{\partial y^{2}}}\right]\left[{\begin{array}{l}x\rightarrow \\y\rightarrow \end{array}}\right]}
- Za vsako točko vstavimo njene koordinate v izračunano Hessejevo matriko (in izvedemo Sylvestrov kriterij)

Ekstremne vrednosti funkcije ob pogojih enakosti

Cilj: Imeti *f, g_i, h_j* : ℝ^{*n*} → ℝ, želimo minimizirati_ *x̄* *f(x̄)* ob pogojih *g_i(x̄)* = 0, *i* = 1,2,...,*m* in *h_j(x̄)* ≤ 0, *j* = 1,2,...*r*.

Nastavimo *ℳ_{g_i}* = {*x* ∈ ℝ^{*n*}; *g_i(x̄)* = 0}, *ℳ_{h_j}* = {*x* ∈ ℝ^{*n*}; *g_j(x̄)* = 0}, *ℳ* = *ℳ_f* ∩ (∩^{*m*}_{*i*=1} *ℳ_{g_i}*) ∩ (∩^{*r*}_{*j*=1} *ℳ_{h_j}*).

Problem (*P**) je zdaj min_{*x* ∈ *ℳ*} *f(x̄)*.

Lagrangevo funkcijo definiramo kot

$$\begin{aligned} L(\vec x,\vec \lambda,\vec \mu) &= f(\vec x) - \vec \lambda^{\top} \vec G(\vec x) - \vec \mu^{\top} \vec H(\vec x) = \\ &= f(\vec x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\vec x) - \sum_{j=1}^r \mu_j h_j(\vec x) \end{aligned}$$

kjer so *λ_i*, *μ_j* Lagrangeovi multiplikatorji.

Prirjena funkcija problema je: *K*(*λ̄, μ̄*) = inf_{*x*} *L(x̄, λ̄, μ̄)* = inf_{*x*} {*f(x̄)* − *λ̄[⊤] Ḡ(x̄)* − *μ̄[⊤] H̄(x̄)*}

K(*λ̄, μ̄*) je konkavna funkcija (neodvisno od lastnosti funkcij *f, g_i, h_j* originalnega problema).

Reševanje: najmanjša in največja vrednost funkcije

Določitev *f*(*x*) (po vrstnem redu):

- je podan explicitno
- implicitno (največji/najmanjši):
 - razdalja od izhodišča: npr. *f*(*x*) = *x*² + *y*²
 - volumen: *V*

- skupna površina: *P*

Določitev pogojev:

- je podan explicitno
- implicitno:

- skupna površina: *P*
- dolžina: *ℓ*

Postopek:

- V notranjosti domene: parcialni/delni odvodi ($\frac{\partial f}{\partial x_i}=0$...)

Po izračunu preverimo še, če je dejansko v notranjosti (je manjša od vrednosti pogoja).

Opcijsko: lahko bi še preverili, če gre za lokalni ekstrem ali sedlo z matriko odvodov drugega reda (Hessejevo matriko).

- Na robu domene (samo ta del, če zahteva točke najbolj oddaljene od izhodišča, saj so te točke vedno na robu, ali pa npr. ogrodje, saj bi to maksimum doseglo na robu, ali pa je definirana z ℝ^{*n*}):

- Vsaj ena od koordinat (*x, y, z*) glede na *f*(*x, y, z*) postane 0.
- Lagrangejeva funkcija (izračunamo delne odvode)

L = *f*(*x*)− pogoji (λ μ)

- Dobljene enačbe poenostavimo in iz njih pridobimo stacionarne točke (globalni ekstremi).
- Za te točke izračunamo vrednost *f*.
- Določimo največje vrednosti ali/in najmanjše vrednosti.

V primeru, da sistem enačb ni enostavno rešljiv in enačba nekaj = λ*x* postane Δ*x* = λ*x*

A =

[

]

[

x
→

y
→

z
→

]

{\displaystyle \left[{\begin{array}{ccc} & & \end{array}}\right]\left[{\begin{array}{l}x\rightarrow \\y\rightarrow \\z\rightarrow \end{array}}\right]}

 (“nekaj” razdelimo po stolpcih *x, y* in *z*)

in ga rešimo s karakterističnim polinomom *A*, kjer je rešitev največja/najmanjša ničla polinoma.

Nekatere enačbe:

- kvader:

- V*(*x, y, z*) = *x* · *y* · *z* (robovi imajo skalar, če so vzporedni, eg. 2)
- P*(*x, y, z*) = 2(*xy* + *xz* + *yz*)
- pogoj: 4*a* + 4*b* + 4*c* = ℓ

- enakostranični trikotnik:

- pogoj: *P*(*a*) = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

- tristrana (enakostranični trikotnik) prizma:

- V*(*a, h*) = (ploščina osnove) · *h*
- pogoj: 6*a* + 3*h* = ℓ

Note: *f*(*x*) ali pogoje kdaj na začetku kvadriramo (²), če to poenostavi izračun (eg. $\sqrt{x^2+y^2}$). Če *x* = $\frac{1}{2}a$ ga poenostavimo na *x* = *aa*, saj je *x* vzporeden z *a* (geometrijsko). Poenostavitev:

||*x*|| = $\sqrt{x^{\top}x}$ ||*x*||² = *x[⊤] x*
a[⊤] b = 0, če sta *a* in *b* pravokotna med sabo

Dualna funkcija: Karush-Kuhn-Tuckerjevi pogoji

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec x} L(\vec x,\vec \lambda,\vec \mu^*) &= \frac{\partial L(\vec x,\vec \lambda^*,\vec \mu^*)}{\partial \vec x}(\vec x^*) = 0, \\ g_i(\vec x^*) &= 0 \quad \text{za} \quad i = 1,2,...,m, \\ h_j(\vec x^*) &\leq 0 \quad \text{za} \quad j = 1,2,...,r, \\ \mu_j^* &\leq 0 \quad \text{za} \quad j = 1,2,...,r, \\ \mu_j^* h_j(\vec x^*) &= 0 \quad \text{za} \quad j = 1,2,...,r. \end{aligned}$$

KKT

- Primarna izvedljivost:

- g_i*(*x̄*^{*}) = 0 *λ_i*
- h_j*(*x̄*^{*}) ≤ 0 *μ_j*

- Stacionarnost (izračunamo prve odvode): ∇_{*s*} *L(x̄, λ̄^{*}, μ̄^{*})* = $\frac{\partial L(\vec x,\vec \lambda,\vec \mu)}{\partial \vec s}(\vec x^*) = 0$

- Max: *L* = *f*(*x*) + ∑ *λ_ig_i*(*x*) + ∑ *μ_jh_j*(*x*)
- Min: *L* = *f*(*x*) − ∑ *λ_ig_i*(*x*) − ∑ *μ_jh_j*(*x*)

(uporabljamo to konvencijo z *μ_j* ≤ 0)

- Dvojna izvedljivost: *μ_j* ≤ 0

- Komplementarna ukleščenost: *μ_j*^{*}*h_j*(*x̄*^{*}) = 0

Reševanje: KKT

Note: velja za konveksne probleme (za zagotovljen globalni optimum).

Postopek:

- Preverimo izvedljivo območje (konveksno? zaprto?).

- Zapišemo vse KKT pogoje (zgoraj).

- Rešimo po primerih glede na to, katere omejitve so aktivne (*h_j* = 0): eg. nobena omejitev, točno 1 omejitev, točno 2 omejitvi, ..., vse omejitve.

Za vsak primer:

- Nastavimo:
 - aktivne *h_j* = 0, *μ_j* < 0
 - neaktivne *h_j* < 0, *μ_j* ≤ 0
- Rešimo sistem stacionarnosti (odvodi *L* = 0) za *x, μ* (in *λ*, če imamo *g_i*).
- Preverimo pogoje:
 - Primarna izvedljivost:
 - vse: *h_j* ≤ 0, *g_i* = 0
 - neaktivne: *h_j* < 0
 - Dvojna izvedljivost (*μ_j* ≤ 0).
 - Komplementarnost (že vgrajena v nastavitve).
 - Če ni protislovja, izračunamo *f*(*x*^{*}).
- Primerjamo kandidate in zaključimo:

- Zberemo vse veljavne točke (ki zadovoljijo vse KKT pogoje).
- Izračunamo *f* za vsako:
 - min: izberemo najmanjšo *f*
 - max: izberemo največjo *f*
- Zapišemo optimalno točko *x*^{*}, *f*(*x*^{*}) in multiplikatorje *μ*^{*}, *λ*^{*}.

Hitri nasveti in pasti:

- Protislovja: Če *μ_j* > 0 ali enačbe neskladne/protislovne, zavrzi primer.
- Linearne funkcije (graf je ravnina, ni ukrivljen (eg. ni *x*² ali sin*x*, itd.)): Brez notranjega ekstrema – optimum na meji.
- Konveksnost: Če je *f* konveksna in območje konveksno (med katerima koli točkama v *S* je pot (ravna črta), ki ne zapušča *S*), je KKT zadosten za globalni optimum.