

Ime in priimek: Polona

Vpisna številka: _____

skupno: 85 t

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL

12. februar 2026

Vse naloge je treba v celoti utemeljiti, razen v primeru, ko je navedeno drugače.

1. (10 točk) Naj bosta $\tau, \varphi: V \rightarrow V$ linearni preslikavi na vektorskem prostoru V .

A. Pokažite, da so vse lastne vrednosti preslikave τ enake 0, če velja $\tau^2 = 0$.

$$\begin{aligned} \tau(v) = \lambda v \Rightarrow \quad & 0 = \tau^2(v) = \tau(\tau(v)) = \tau(\lambda v) = \lambda \tau(v) = \lambda^2 v \\ & \text{Ker } v \neq 0, \text{ sledi } \lambda = 0. \\ & \Rightarrow \text{ke lastne vrednosti so } 0. \end{aligned}$$

B. V primeru $V = \mathbb{R}_4[x]$ navedite primer preslikave φ , ki ima vse lastne vrednosti enake 0, vendar $\varphi^2 \neq 0$. Dokažite obe lastnosti za izbrano preslikavo φ .

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= p' \\ \cdot \varphi(\varphi(x^4)) &= \varphi(4x^3) = 12x^2 \neq 0_v \\ \cdot \varphi(p) &= \lambda p \Rightarrow p' = \lambda p \Rightarrow \text{stopnje } d-1 \Rightarrow \text{stopnje } d \Rightarrow \begin{cases} 1) \lambda = 0 \checkmark \\ \text{ali} \\ 2) \varphi(x) = 0 + x \end{cases} \end{aligned}$$

2. (10 točk) Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrični nedefinitni matriki. Pokažite, da je tudi $A \otimes B$ simetrična nedefinitna matrika.

$$\begin{aligned} 1. (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T = A \otimes B \Rightarrow A \otimes B \text{ simetrična} \\ & \text{(lahko tudi rečete, da smo to dokali na predavanjih.)} \\ 2. \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ lastne vrednosti } A, \quad & \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \\ \mu_1, \dots, \mu_m \text{ lastne vrednosti } B, \quad & \mu_1 < 0, \mu_2 > 0 \\ \Rightarrow A \otimes B \text{ ima lastne vrednosti } \lambda_i \mu_j, \quad & i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \\ \lambda_1 \mu_1 > 0, \lambda_1 \mu_2 < 0 \quad & \\ \Rightarrow A \otimes B \text{ nedefinitna} \end{aligned}$$

3. (10 točk) Navedite primer matrik $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ in $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, za kateri je $A \otimes B$ pozitivno definitna matrika in $\|A \otimes B\|_F \leq 4$. Utemeljitev ni potrebna.

5 točk

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_F = \sqrt{3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10^{-1} & 10^{-2} \\ 10^{-2} & 10^{-1} \end{bmatrix} \rightarrow \text{PD}$$

$$\|B\|_F \leq 1 \Rightarrow \|A \otimes B\|_F \leq \sqrt{3} < 4$$

5 točk

4. (10 točk) Naj bo

$$M = S \begin{matrix} D \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \quad \text{in} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad U := \frac{1}{\sqrt{2}} S$$

Ali je matrika M ortogonalno podobna diagonalni matriki? Utemeljite odgovor.

$$U := \frac{1}{\sqrt{2}} S \text{ je ortogonalna} \quad U^T = U^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} S\right)^{-1} = \sqrt{2} S^{-1}$$

$$M = S D S^{-1} = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} S\right)}_U (D) \underbrace{\left(\sqrt{2} S^{-1}\right)}_{U^T} = U D U^T$$

$\Rightarrow$ DA.

Pazite: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} S\right)^{-1} = \sqrt{2} S^{-1}$

B. Izračunajte Frobeniusovo normo matrike M .

$$\|M\|_F = \|D\|_F = \sqrt{6^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Frob. norma se ohranja z ortog. podobnostjo.

C. Poiščite matriko N ranga 2, ki je najbližja matriki M v Frobeniusovi normi. (Lahko jo zapišete kot produkt matrik, ni jih treba zmnožiti.)

$$N = M_2 = U \begin{bmatrix} 6 & & & \\ & 4 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} U^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \dots$$

ali pa:

$$6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ -1 \ 0 \ 0] + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 1 \ 0 \ 0] = \dots$$

$\swarrow$ or, če le do sem

5. (15 točk) Za $b, c \in \mathbb{R}$ definirajmo

$$H = \begin{bmatrix} b & 1 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Naj bo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija in naj bo $\mathbf{a}$ stacionarna točka funkcije f s Hessejevo matriko $H_f(\mathbf{a}) = H$.

A. Zapišite pogoje za b in c , da bo funkcija f konveksna v točki $\mathbf{a}$.

f konveksna v $\mathbf{a} \Leftrightarrow H \text{ PSD}$

- $b > 0, bc > 1$ (v tem primeru je H PD)
- $bc - 1 = 0$ ali $c = \frac{1}{b}$ (v tem primeru ima H eno L vrednost 0)

1. vred $\begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} : \lambda, 0 \quad \lambda + 0 = b + \frac{1}{b} = \frac{b^2 + 1}{b}$

$\frac{b^2 + 1}{b} \geq 0 \Leftrightarrow b > 0$

B. Ali je lahko a lokalni ~~maksimum~~^{minimum} funkcije f , če je $bc < 1$? Če da, navedite primer takšne matrike $H_f(a)$. Če ne, pojasnite zakaj ne.

NE.
 H simetrična $\Rightarrow$ realne l. vred.
 $\det H = 3(bc-1) < 0$
 $\begin{matrix} >0 & <0 \end{matrix}$
 in era l. vred $= 3$
 $2. \text{vr.}(H) : 3, 2 > 0, \mu < 0 \Rightarrow$
 H je indefinitna $\Rightarrow$ NI ekstrema.

Aci PA: V a) delu smo pokazali, da je za PSD matrike H nujno $bc \geq 1$, protislovno s pogojem $bc < 1$.
 NI PD (zadosten pogoj za min)

niti PSD z $\det 0$ (in ne bi imeli dovolj podatkov za ekstrem)

C. Ali je lahko a sedlo/prevoj funkcije f , če je $bc < 1$? Če da, navedite primer takšne matrike $H_f(a)$. Če ne, pojasnite zakaj ne.

DA.
 H je lahko indefinitna; recimo:
 $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ima l. vred: $3, 1, -1$

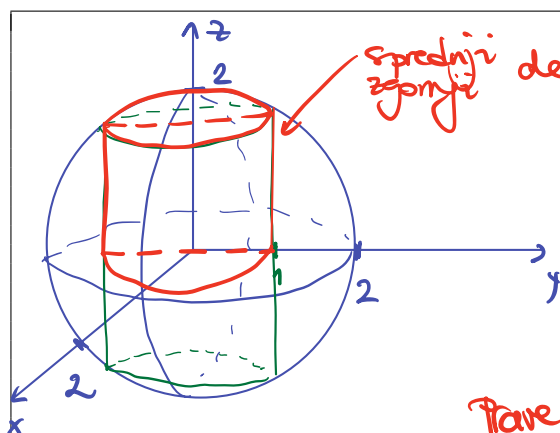
6. (15 točk) Naj bo

$$D = \{(x, y, z) : x \geq 0, z \geq 0, \boxed{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4}, \boxed{x^2 + y^2 \leq 1}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

1. 2. 3. 4.

Izpolnite vseh sedem pravokotnikov spodaj pri integriranju funkcije $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ po množici D v valjnih/cilindričnih koordinatah. Narišite množico D in utemeljite vse korake izračuna.

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} \left(\int_{\boxed{-\frac{\pi}{2}}}^{\boxed{\frac{\pi}{2}}} \left(\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\sqrt{4-r^2}}} \boxed{f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot r} dz \right) d\varphi \right) dr.$$



sprednji del 'valja' = kupolo

$$1. r \cos \varphi \geq 0 \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$2. z \geq 0$$

$$3. r^2 + z^2 \leq 4 \quad z^2 \leq 4 - r^2 \quad \left. \begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \end{matrix} \right\} 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$$

$$4. r^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$$

Prave meje za r, φ, z : 2,5 točke za vsako skico : 5 točk (lahko tudi projekcije)
 Integrand (= f + Jacobijeva det) : 2,5 točke

7. (15 points) Naj bo dan vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ in opazujemo optimizacijski problem

$$\min_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 - \vec{a}^T \vec{x}$$

pri pogoju

$$1 \leq \|\vec{x}\| \leq 2.$$

$1 - \|\vec{x}\|^2 \leq 0 \quad \leftarrow \mu_1$
 $\|\vec{x}\|^2 - 4 \leq 0 \quad \leftarrow \mu_2$

A. Zapišite Lagrangeovo funkcijo tega problema.

$$L(\vec{x}, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 - \vec{a}^T \vec{x} - \mu_1 (1 - \|\vec{x}\|^2) - \mu_2 (\|\vec{x}\|^2 - 4)$$

B. Zapišite prirejen problem omenjenega problema.

$$K(\mu_1, \mu_2) = \inf_{\vec{x}} \left(\frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 - \vec{a}^T \vec{x} - \mu_1 (1 - \|\vec{x}\|^2) - \mu_2 (\|\vec{x}\|^2 - 4) \right) =$$

$$= 4\mu_2 - \mu_1 + \inf_{\vec{x}} \left(\left(\frac{1}{2} + \mu_1 - \mu_2 \right) \|\vec{x}\|^2 - \vec{a}^T \vec{x} \right)$$

2,5 t

Prirejeni problem:

$$\max 4\mu_2 - \mu_1 + \inf_{\vec{x}} \left(\left(\frac{1}{2} + \mu_1 - \mu_2 \right) \|\vec{x}\|^2 - \vec{a}^T \vec{x} \right)$$

p.p. $\mu_1 \leq 0$
 $\mu_2 \leq 0$

C. Zapišite Karush–Kuhn–Tuckerjeve pogoje omenjenega problema.

$$1. \quad (1 + 2\mu_1 - 2\mu_2) \vec{x}^T - \vec{a}^T = 0^T$$

2,5 t

(ali $(1 + 2\mu_1 - 2\mu_2) \vec{x} = \vec{a}$)

$$2. \quad 1 \leq \|\vec{x}\| \leq 2$$

$$\mu_1 \leq 0$$

$$\mu_2 \leq 0$$

$$3. \quad \mu_1 (1 - \|\vec{x}\|^2) = 0$$

$$\mu_2 (\|\vec{x}\|^2 - 4) = 0$$

2,5 t