

Name and surname: _____

Student ID: _____

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL

27. januar 2026

Vse naloge je treba v celoti utemeljiti, razen v primeru, ko je navedeno drugače.

1. **(10 točk)** Dokažite, da za poljubna vektorja $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ in $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ velja $\|\vec{x}\vec{y}^T\|_F = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.

2. **(8 točk)** Zapišite primer vektorskega podprostora v $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ dimenzije 5, ki vsebuje matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utemeljitev ni potrebna.

3. **(10 točk)** Zapišite primer takšnih nesimetričnih matrik $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ in $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, da ima matrika $A \otimes B$ Frobeniusovo normo največ $\sqrt{5}$ in natanko dve različni lastni vrednosti, obe z večkratnostjo 3. Utemeljitev ni potrebna.

$$A = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

4. (10 točk) Naj bodo $\tau, \psi, \varphi: V \rightarrow V$ linearne preslikave na n -razsežnem vektorskem prostoru V .

A. Predpostavimo, da je $\tau^2 = \tau \circ \tau = 0$. Pokažite, da $\text{im}(\tau) \subseteq \ker(\tau)$.

B. V primeru, ko je $V = \mathbb{R}_4[x]$, zapišite primer preslikave ψ , za katero velja $\dim(\ker(\psi)) \leq 3$ in $\psi^2 = 0$. Zapišite eksplicitno formulo in dokažite, da zadošča obema lastnostma.

5. (15 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična pozitivno definitna matrika in naj bo matrika $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obrnljiva. Pokažite, da je matrika BAB^T prav tako simetrična pozitivno definitna.

6. (15 točk) Za poljubna $b, c \in \mathbb{R}$ naj bo $M = \begin{bmatrix} 2 & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

A. Zapišite primer funkcije f , točke $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_f$ in neničelnih $b, c \in \mathbb{R}$, tako da velja $H_f(\mathbf{a}) = M$.

B. Naj bo $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija in naj bo $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_g$ stacionarna/kritična točka funkcije g , tako da velja $H_g(\mathbf{a}) = M$.

B1. V primeru, ko je $b \neq 0$ in $c = 0$, ali je $\mathbf{a}$ lahko lokalni *maksimum* funkcije g ? Če da, zapišite primer takšne Hessejeve matrike $H_g(\mathbf{a})$. Če ne, pojasnite zakaj.

B2. V primeru, ko je $c \neq 0$, ali je $\mathbf{a}$ lahko lokalni *minimum* funkcije g ? Če da, zapišite primer takšne Hessejeve matrike $H_g(\mathbf{a})$. Če ne, pojasnite zakaj.

7. (15 točk) Naj bo

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z): x \geq 0, y \geq |x|, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Skicirajte projekcijo množice $\mathcal{D}$ na ravnino $z = 0$ in izrazite integral

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

v valjnih/cilindričnih koordinatah. (Integrala ne računajte.)

8. (17 točk) Naj bo A simetrična pozitivno definitna matrika velikosti $n \times n$ in naj bosta $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Želimo poiskati najmanjšo vrednost funkcije $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x}$ pod omejitvama $\|\vec{x}\|^2 \geq 4$ in $\vec{c}^T \vec{x} = 1$.

A. Zapišite Lagrangevo funkcijo tega problema.

B. Zapišite Karush–Kuhn–Tuckerjeve pogoje za ta problem.

C. Pokažite, da je rešitev Karush–Kuhn–Tuckerjevih pogojev enaka rešitvi navedenega problema. (Pri tem ne rešujte nobenega od obeh problemov.)