

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

	naloge 1-3 (x)	naloge 4-9 (y)	Skupaj ($\max\{0, x\} + y$)
točke			

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL

31. januar 2025

Pri vsaki od nalog 1.-3. obkrožite vse pravilne odgovore in odgovorite na podvprašanja. Za vsak pravilno obkrožen odgovor boste dobili 4 točke, za vsak napačno obkrožen odgovor pa -2 točki. Pri teh nalogah odgovorov ni potrebno utemeljevati.

1. Katere od naslednjih matrik so gotovo simetrične pozitivno definitne?

- ☒ A. identična matrika

☐ B. ničelna matrika

☐ C. diagonalna matrika

☐ D. diagonalizabilna matrika

☐ E. simetrična matrika s sledjo 0

☐ F. simetrična obrnljiva matrika

☐ G. 4×4 simetrična matrika s singularnimi vrednostmi 1, 2, 3, 4

☒ H. 4×4 simetrična matrika z lastnimi vrednostmi 1, 2, 3, 4

☒ I. matrika AA^T , kjer je A 5×5 negativno definitna matrika

☐ J. $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{bmatrix}$ za vsako pozitivno število a

2. Katere od naslednjih trditev držijo v vsakem vektorskem prostoru V dimenzije 2025?

- ☐ A. Če so $v_1, \dots, v_k$ linearno odvisni vektorji v V , potem je $k \geq 2025$.
- ☒ B. Če so $w_1, \dots, w_m$ linearno neodvisni vektorji v V , potem je $m \leq 2025$.
- ☐ C. Če so $v_1, \dots, v_k$ linearno odvisni vektorji v V , potem lahko vsak vektor iz $\{v_1, \dots, v_k\}$ izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih.
- ☐ D. Če so $w_1, \dots, w_m$ linearno neodvisni vektorji v V , potem lahko vsak vektor iz V izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $w_1, \dots, w_m$.
- ☐ E. Če so $v_1, \dots, v_k$ linearno odvisni vektorji v V , potem je poljubna podmnožica $\{v_1, \dots, v_\ell\}$, $1 \leq \ell \leq k$, tudi množica linearno odvisnih vektorjev.
- ☒ F. Če so $w_1, \dots, w_m$ linearno neodvisni vektorji v V , potem je poljubna podmnožica $\{w_1, \dots, w_\ell\}$, $1 \leq \ell \leq m$, tudi množica linearno neodvisnih vektorjev.

3. Naj bosta $F, p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi funkciji in naj F doseže maksimalno vrednost na območju $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : p(\mathbf{x}) = 0\}$ v točki $\mathbf{a}$. Katere od naslednjih trditev so vedno resnične?

- ☒ A. $(\text{grad } F)(\mathbf{a})$ je vzporeden $(\text{grad } p)(\mathbf{a})$

☐ B. $(\text{grad } F)(\mathbf{a})$ je pravokoten $(\text{grad } p)(\mathbf{a})$

☐ C. $(\text{grad } F)(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

☐ D. $(\text{grad } p)(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

☐ E. $F(\mathbf{a}) \geq p(\mathbf{x})$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

☐ F. $F(\mathbf{a}) \geq p(\mathbf{x})$ za vse $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

☐ G. $F(\mathbf{a}) \geq F(\mathbf{x})$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

☒ H. $F(\mathbf{a}) \geq F(\mathbf{x})$ za vse $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

Pri vsaki od nalog 4.-9. dobro utemeljite vse svoje odgovore in korake pri sklepanju. Za odgovore brez utemeljitev ne boste prejeli točk.

4. (10 točk) Naj bo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ enotski vektor ter I_n identična matrika velikosti $n \times n$. Izračunajte Frobeniusovo normo matrike $I_n - \vec{x}\vec{x}^T$.

$$\begin{aligned} \vec{x}\vec{x}^T &= 1, \text{ ker je } \vec{x} \text{ enotski vektor} ; A^T A = A^2, \text{ ker je } A \text{ simetrična} ; A = I_n - \vec{x}\vec{x}^T ; \|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^2)} \\ A^2 &= (I_n - \vec{x}\vec{x}^T)(I_n - \vec{x}\vec{x}^T) = I_n^2 - I_n \vec{x}\vec{x}^T - \vec{x}\vec{x}^T I_n + \vec{x}\vec{x}^T \vec{x}\vec{x}^T = I_n - 2\vec{x}\vec{x}^T + \vec{x}\vec{x}^T = I_n - \vec{x}\vec{x}^T \\ \text{tr}(A^2) &= \text{tr}(I_n - \vec{x}\vec{x}^T) = \text{tr}(I_n) - \text{tr}(\vec{x}\vec{x}^T) = n - 1 \\ \|A\|_F &= \sqrt{n-1} \end{aligned}$$

5. (10 točk) Naj bo $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Zapišite primer takšne neničelne matrike $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, da bo imela matrika $A \otimes D$ vse lastne vrednosti z intervala $[-2, 2]$. Utemeljite, zakaj A ustreza tem pogojem.

$$\begin{aligned} \text{Lastne vrednosti } A \otimes D &\text{ so produkti lastnih vrednosti matrik } A \text{ in } D. \\ \text{Vse lastne vrednosti } \lambda_i \cdot \mu_j &\text{ morajo biti v intervalu } [-2, 2] \\ \mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 1 \quad \mu_3 = 4 &\Rightarrow \lambda_1 \cdot 0, \lambda_1 \cdot 1, \lambda_1 \cdot 4, \lambda_2 \cdot 0, \lambda_2 \cdot 1, \lambda_2 \cdot 4 \in [-2, 2] \\ \text{Primer: } \lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \\ A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. (10 točk) Ali za poljubne različne vektorje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ obstaja linearna preslikava $\tau: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ z lastnostjo

$$\tau(\mathbf{a}) = \mathbf{b}, \tau(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \text{ in } \tau(\mathbf{c}) = \mathbf{c}?$$

Če da, odgovor dobro utemeljite in zapišite primer kakšne matrike, ki pripada linearni preslikavi τ (v vaši izbrani bazi prostora $\mathbb{R}^3$). Če ne, zapišite primer vektorjev $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ in utemeljite, zakaj takšna linearna preslikava za njih ne obstaja.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\neq \mathbf{0} \quad \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \\ \tau(\mathbf{0}) &= \mathbf{b} \Rightarrow \text{Vsaka linearna preslikava mora ohranjati ničelni vektor.} \\ &\text{Za vsako lin. preslikavo mora veljati } \tau(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \\ &\text{Ker v našem primeru dobimo } \tau(\mathbf{0}) = \mathbf{b} \text{ in } \mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \\ &\text{verno, da takšna preslikava za poljubne vektorje} \\ &\text{ne more obstajati.} \end{aligned}$$

7. (10 točk) Naj ima dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ v točki $\mathbf{a}$ stacionarno točko in $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \neq 0$. Zapišite primer Hessejeve matrike v točki $\mathbf{a}$ takšne funkcije f , ki nima lokalnega ekstrema v $\mathbf{a}$ in utemeljite, zakaj ne.

Da v $\mathbf{a}$ ni ekstrema, matrika ne sme biti pozitivno (lokalni minimum) ali negativno (lok. maks.) definitna.

Primer: $H_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\det(H_f) = -2$, torej gre za sedlo.

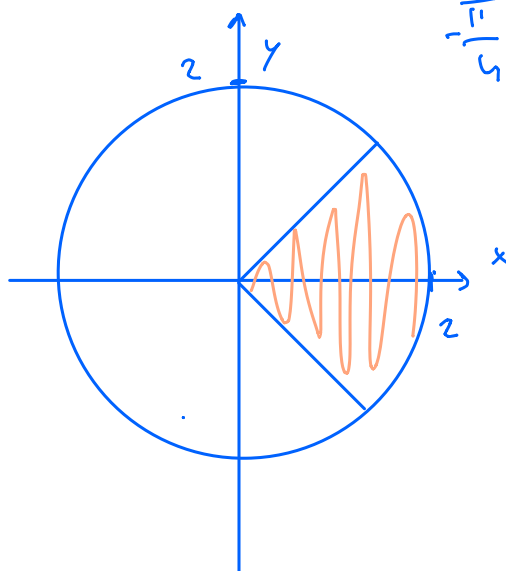
8. (15 točk) Zapišite vsoto dveh dvakratnih integralov

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-x}^x x dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x dy \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 \boxed{r^2 \cos \varphi} d\boxed{r} d\boxed{\varphi} \right)$$

v polarnih koordinatah (na desni strani). Izpolnite vseh sedem pravokotnikov, a integrala ne računajte. Spodaj narišite sliko in utemeljite vse korake.

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



$$0 \leq r \leq 2$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 r \cos \varphi \cdot r dr d\varphi$$

9. (10 točk) Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za naslednji problem

minimizirajte $_{x,y,z} xyz$

pri pogojih $x^2 + 2y^2 \geq 1$

$$x^2 + z^2 \leq 4$$

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz - \lambda_1(1 - x^2 - 2y^2) - \lambda_2(x^2 + z^2 - 4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz - 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = xz - 4\lambda_1 y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = xy - 2\lambda_2 z = 0$$

$$\lambda_1 \leq 0$$

$$\lambda_2 \leq 0$$

$$\lambda_1(1 - x^2 - 2y^2) = 0$$

$$\lambda_2(x^2 + z^2 - 4) = 0$$

$$x^2 + 2y^2 \geq 1$$

$$x^2 + z^2 \leq 4$$