

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

	naloge 1-3 (x)	naloge 4-8 (y)	Skupaj (max{0, x} + y)
točke	6 · 4 = 24	55	79

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL

5. september 2025

Pri vsaki od nalog 1.-4. obkrožite vse pravilne odgovore in odgovorite na podvprašanja. Za vsak pravilno obkrožen odgovor boste dobili 4 točke, za vsak napačno obkrožen odgovor pa -2 točki. Pri teh nalogah odgovorov ni potrebno utemeljevati.

1. Naj bo $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Katere od naslednjih trditev so resnične za vsako spodnje trikotno obrnljivo 3×3 matriko P , katere determinanta je enaka 4?

$$\|D\|_F = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}, \quad \text{tr}(PDP^{-1}) = \text{tr}(D) = 7 > 0$$

- A. $\det(PDP^{-1}) = -16 \cdot 8$ ☒ E. sled matrike PDP^{-1} je pozitivna
 B. $\|D\|_F = 7$ F. P je pozitivno definitna
 C. $\|PDP^{-1}\|_F = \sqrt{21}$ ☒ G. PDP^{-1} je obrnljiva
 D. sled matrike P je pozitivna ☒ H. PDP^{-1} ima razcep Choleskega
- $\hookrightarrow$ l.vr. 1, 2, 4 $\Rightarrow$ PD

2. Katere od naslednjih matrik so ortogonalne na matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

v Frobeniusovem skalarnem produktu?

- ☒ A. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Naj bosta $F, p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljivi funkciji in naj F doseže minimalno vrednost na območju $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: p(\mathbf{x}) = 0\}$ v točki $\mathbf{a}$. Katere od naslednjih trditev so vedno resnične?

- ☒ A. $(\text{grad } F)(\mathbf{a})$ je vzporeden $(\text{grad } p)(\mathbf{a})$ E. $F(\mathbf{a}) \leq p(\mathbf{x})$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
 B. $(\text{grad } F)(\mathbf{a})$ je pravokoten $(\text{grad } p)(\mathbf{a})$ F. $F(\mathbf{a}) \leq p(\mathbf{x})$ za vse $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$
 C. $(\text{grad } F)(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ G. $F(\mathbf{a}) \leq F(\mathbf{x})$ za vse $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
 D. $(\text{grad } p)(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ ☒ H. $F(\mathbf{a}) \leq F(\mathbf{x})$ za vse $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

Pri vsaki od nalog 4.-8. dobro utemeljite vse svoje odgovore in korake pri sklepanju. Za odgovore brez utemeljitev ne boste prejeli točk.

4. (5 točk) Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Zapišite primer takšne neničelne matrike $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, da bo imela matrika $A \otimes B$ vse lastne vrednosti večje kot 10? Utemeljite, zakaj B ustreza tem pogojem.

$B = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$, se l. ved. maggior bits > 10
 denimo $B = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$

3 točke, če je kakšna l-vrednost = 10

5. (10 točk) Naj bo A simetrična pozitivno definitna $n \times n$ matrika in B simetrična negativno definitna $n \times n$ matrika.

A. Ali je matrika $A - B$ pozitivno semidefinitna? Če je, zapišite dokaz. Če ni, napišite protiprimer.

- $\vec{x}^T (A-B) \vec{x} = \underbrace{\vec{x}^T A \vec{x}}_{>0 \text{ za vse } \vec{x} \neq 0 \text{ (A PD)}} - \underbrace{\vec{x}^T B \vec{x}}_{<0 \text{ za vse } \vec{x} \neq 0 \text{ (B ND)}}$ > 0 za vse $\vec{x} \neq 0$
- $(A-B)^T = A^T - B^T = A - B \Rightarrow A-B$ simetrična

B. Ali je matrika $A - B$ pozitivno definitna? Če je, zapišite dokaz. Če ni, napišite protiprimer.

Da, dokaz zgraj.

6. (15 točk) Naj bo $U = \text{Lin}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2 \times 3})$ množica vseh linearnih preslikav iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ in naj bo $V = \text{Lin}(\mathbb{R}^{2 \times 3}, \mathbb{R})$ množica vseh linearnih preslikav iz $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ v $\mathbb{R}$.

A. Zapišite primer neničelnega elementa iz U . Svojega izbora ni potrebno utemeljevati.

lahko primer iz B. Ali kar koli drugega.

B. Ali obstaja injektivna linearna preslikava v U ? Če da, zapišite primer. Če ne, utemeljite, zakaj ne.

$T \in U \Leftrightarrow T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$ linearna

Primer:

$$T(x) = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

$$\text{če } T(x) = T(y) \Rightarrow \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & y & y \\ y & y & y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = y$$

$\Rightarrow T$ res injektivna

C. Zapišite primer neničelnega elementa iz V . Svojega izbora ni potrebno utemeljevati.

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}\right) = x \quad \text{ali kar koli drugega}$$

D. Ali obstaja injektivna linearna preslikava v V ? Če da, zapišite primer. Če ne, utemeljite, zakaj ne.

$$T \in V \Leftrightarrow T: \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$$

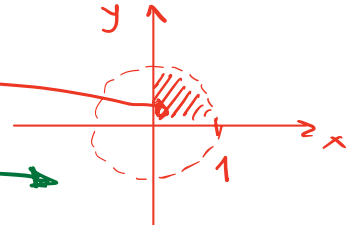
$$\dim(\ker(T)) = 6 - \underbrace{\dim(\text{im}(T))}_{\geq 5} \geq 1$$

$$T \text{ slika v } \mathbb{R}, \dim(\mathbb{R}) = 1$$

$$\Rightarrow \dim(\text{im}(T)) \leq 1$$

$\Rightarrow T$ ni injektivna

7. (10 točk) Zapišite integral

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^x (x^2 + y^2) dz \right) dy \right) dx = \rightarrow$$


v valjnih/cilindričnih koordinatah. (Integrala NI potrebno računati.)

$0 \leq x \leq 1$
 $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$
 $0 \leq z \leq x$

$x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$
 $z = z$

$0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
 $0 \leq z \leq r \cos \varphi$

$\rightarrow = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{r \cos \varphi} r^2 \cdot r \cdot dz \right) d\varphi \right) dr$

ta dva zamenjiva
 det Jacobijeve matrike valjnih koordinat

točke: $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$
 2 2 2 2 2

8. (15 točk) Naj bo A simetrična $n \times n$ matrika in naj bosta $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Želimo poiskati najmanjšo vrednost funkcije $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x}$ na preseku območij $\vec{c}^T \vec{x} \leq 4$ in $\|\vec{x}\|_2 = 1$.

A. Zapišite Lagrangeovo funkcijo zgornjega problema. $\vec{c}^T \vec{x} - 4 \leq 0$ (μ) $\vec{x}^T \vec{x} - 1 = 0$ (λ)

5 točk

$$L(\vec{x}, \lambda, \mu) = \vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x} - \lambda (\vec{x}^T \vec{x} - 1) - \mu (\vec{c}^T \vec{x} - 4)$$

B. Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za zgornjega problema.

1 $\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \vec{0} : 2\vec{x}^T A - \vec{b}^T - 2\lambda \vec{x}^T - \mu \vec{c}^T = \vec{0}^T / ^T$ 3 točk
 (ali pa $2A\vec{x} - \vec{b} - 2\lambda \vec{x} - \mu \vec{c} = \vec{0}$)

2 $\vec{c}^T \vec{x} \leq 4$ 5 $\|\vec{x}\|_2 = 1$ } 3 točk

3 $\mu \leq 0$ } 2 točk

4 $\mu (\vec{c}^T \vec{x} - 4) = 0$ } 2 točk

nak odvečen pogoj (npr $\lambda \leq 0$) -1 točk