

Ime in priimek:

Polona

Vpisna številka:

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL

30. avgust 2023

(Na teoretičnem delu je 5 nalog, ki so skupaj vredne 105 točk. Za 100% je potrebno doseči 100 točk.)

1. (15 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{7 \times 5}$ matrika ranga 3 s petimi singularnimi vrednostmi

$$3 \geq 2 \geq \sqrt{3} \geq \sigma_4 \geq \sigma_5.$$

Izračunajte $\|AA^T\|_F$.

$A = U \Sigma V^T$, kjer $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$, saj $\text{rang } A = \text{rang } \Sigma$.
& U, V ortogonalni

~~$$\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^T A) = \text{tr}(V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T) = \text{tr}(V \Sigma^T \Sigma V^T) = \text{tr}(\Sigma^T \Sigma) = 3^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 16$$~~

~~$$\Rightarrow \|A\|_F = 4$$~~

~~Izračunajte $\|AA^T\|_F$.~~

$$\|AA^T\|_F = \|U \Sigma \Sigma^T V^T\|_F = \|\Sigma \Sigma^T\|_F =$$

$$= \sqrt{81 + 16 + 9} =$$

$$= \sqrt{106}$$

2. (15 točk) Naj bo A poljubna 2×3 matrika in

$$\mathcal{U} = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 2}; \text{tr}(AX) = 0\}.$$

Ali je $\mathcal{U}$ vektorski prostor? Odgovor dobro utemeljite.

DA: $X \in \mathcal{U}, Y \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{tr}(AX) = 0$
 $\text{tr}(AY) = 0$

$$\text{tr}(A(\alpha X + \beta Y)) = \text{tr}(\alpha AX + \beta AY) = \alpha \text{tr}(AX) + \beta \text{tr}(AY) = 0$$

linearnost sledi

3. (15 točk) Naj bo V vektorski prostor in $\tau: V \rightarrow V$ linearna preslikava, za katero velja $\tau^{2023} = 0$.

A. Pokažite, da je edina lastna vrednost preslikave τ enaka 0.

Naj $T(rv) = \lambda rv$ za $v \neq 0$.
 $\Rightarrow \underbrace{T^{2023}(rv)}_{=0 \text{ za nekak } v} = \lambda^{2023} rv \Rightarrow \lambda^{2023} v = 0$
 $\Rightarrow \lambda^{2023} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

B. Pokažite, da ~~je~~ je τ diagonalizabilna natanko tedaj, ko je $\tau = 0$.

$(\Leftarrow) T=0 \Rightarrow T$ diagonalizabilna
 (priпада matrica $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ u pol. bazi)

$(\Rightarrow)$ Naj B baza, u kateri T priпада
 diag. matrica $\Rightarrow D_{T,B} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow T(0)$

C. Zapišite primer neničelne linearne preslikave $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, za katero velja $\psi^2 = 0$.

4. (15 točk) Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

A. Pokažite, da je A pozitivno definitna matrika. Pri tem ne smete množiti matrik.

$$A = Q D Q^T \quad \text{D diag, } Q \text{ orthogonal}$$

$\uparrow$
 $\Rightarrow A$ nula l. vred. 3 in 4
 $\Rightarrow A$ je PD.

- B. Naj bo B matrika, za katero velja $B^2 = A$. Zapišite matriko B . Lahko kot produkt nekaterih matrik, ki jih ni potrebno množiti.

$$A = Q D Q^T$$

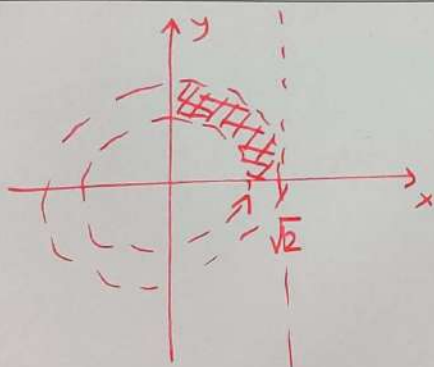
$$E = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{4} \end{bmatrix}, E^2 = D$$

$$B := Q E Q^T \quad (\Rightarrow B^2 = Q E Q^T Q E Q^T = Q E^2 Q^T = Q D Q^T = A)$$

5. (15 točk) Zapišite integral

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 (x^2+y^2) dz \right) dy \right) dx \quad - I$$

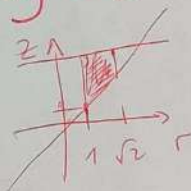
v valjnih/cilindričnih koordinatah. Integrala NI potrebno računati.



$$\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$$

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$$

$$y \geq 0$$



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \left(\int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_r^4 r^2 r dz \right) dr \right) d\varphi$$

6. (15 točk) Naj bo (u, v, w) koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ definiran z

$$x = u + e^{vw}, y = w + 2, z = 3u + 2v + e^{w^2}.$$

Določite determinanto Jacobijeve matrike $J_{u,v,w} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

$$J = \begin{matrix} & \begin{matrix} u & v & w \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & we^{vw} & ve^{vw} \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2we^{w^2} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\det J = -1 \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & we^{vw} \\ 3 & 2 \end{array} \right| = -2 + 3we^{vw}$$

7. (15 točk) Zapišite Karush–Kuhn–Tuckerjeve pogoje za naslednji problem

minimizirajte $x^3 y^2 z + \log(xyz)$

pri pogojih $x^2 + y^2 = 4$

$z \leq x + y$

$$L = x^3 y^2 z + \log(xyz) - \lambda (x^2 + y^2 - 4) - \mu (z - x - y)$$

$$\begin{cases} L_x = 3x^2 y^2 z + \frac{yz}{xyz} - 2\lambda x + \mu = 0 \\ L_y = 2x^3 y z + \frac{xz}{xyz} - 2\lambda y + \mu = 0 \\ L_z = x^3 y^2 + \frac{xy}{xyz} - \mu = 0 \end{cases}$$

$$\lambda \leq 0$$

$$\lambda (x^2 + y^2 - 4) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$z \leq x + y$$