

Ime in priimek:

Polovka

Vpisna številka:

	naloge 1-4	naloge 5-8	Skupaj
točke	10 16+40	70	126

~~10~~ (-42)

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL

26. januar 2023

Pri vsaki od nalog 1.-4. obkrožite vse pravilne odgovore in odgovorite na podvprašanja. Za vsak pravilno obkrožen odgovor boste dobili 4 točke, za vsak napačno obkrožen odgovor pa -2 točki. Pri teh nalogah odgovorov ni potrebno utemeljevati.

1. Kaj bo $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simetrična matrika z normiranimi lastnimi vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$, ki zaporedoma pripadajo lastnim vrednostim -1, 1 in 2. Označimo z $U = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ matriko, ki ima po

stolpcih zapisane vektorje $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$, in $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

(4 točke) Izračunajte Frobeniusovo normo matrike U . $UU^T = I$

$$\|U\|_F^2 = \text{tr}(UU^T) = \text{tr}(I) = 3 \Rightarrow \|U\|_F = \sqrt{3}$$

Kar A simetrična, $\Rightarrow I$.

$$A = UDU^T$$

Schur

$$A = \sqrt{D} U^T U \sqrt{D}$$

SVD

ortogonalna

(4 točke) Izračunajte Frobeniusovo normo matrike A .

$$\|A\|_F^2 = \text{tr}(AA^T) = \text{tr}(UDU^TUDU^T) = \text{tr}(D^2) = 1+1+4=6$$

$$\|A\|_F^2 = \|D\|_F^2 = 6$$

$$\|A\|_F = \sqrt{6}$$

(4 točke) Zapišite vse lastne vrednosti matrike $A \otimes D$.

$$\left. \begin{array}{l} A: -1, 1, 2 \\ D: -1, 1, 2 \end{array} \right\} \rightarrow A \otimes D: \underline{-1, -1, -2}, \underline{-1, 1, 2}, \underline{-2, 2, 4}$$

$$(4, 2, 2, 1, 1, -1, -1, -2, -2)$$

Katere od naslednjih trditev so resnične za poljuben izbor vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ z omenjenimi lastnostmi?

A. $A = UD'U^{-1}$, kjer je $D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

F. UDU^{-1} je Schurov razcep matrike A .

G. UDU^{-1} je razcep singularnih vrednosti matrike A .

B. $\det(A) = -2$

H. Najboljša aproksimacija matrike A ranga 1 v Frobeniusovi normi je enaka $2\vec{c}\vec{c}^T$.

C. Matrika U ni nujno obrnljiva.

I. Najboljša aproksimacija matrike A ranga 2 v Frobeniusovi normi je enaka matriki A .

D. Matrika U je ortogonalna.

E. Za matriko A obstaja razcep Choleskega.

2. Katere od naslednjih matrik so ortogonalne na matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

v Frobeniusovem skalarnem produktu?

A. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Katere od naslednjih trditev so resnične za vsak vektorski podprostor $V \subseteq \mathbb{R}_6[x]$ dimenzije 6?

- A. V je vektorski prostor.
 B. $V = \mathbb{R}_6[x]$
 C. Če so $v_1, \dots, v_6 \in V$, potem je V enak linearni ogrinjači $\mathcal{L}\{v_1, \dots, v_6\}$.
 D. Če je $\{v_1, \dots, v_6\}$ baza V , je baza tudi $\{v_1, \dots, v_5, v_6 + v_1\}$.
 E. Če je $\{v_1, \dots, v_6\}$ baza V in $u \in \mathbb{R}_6[x]$ poljuben element, ki ni v V , potem je $\{v_1, \dots, v_6, u\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}_6[x]$.
 F. Če so $v_1, \dots, v_4 \in V$, potem je linearna ogrinjača $U = \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_4\}$ vektorski podprostor dimenzije 4 v vektorskem podprostoru V .
 G. Vsaka baza V vsebuje polinom stopnje 6.
 H. Obstaja injektivna linearna preslikava $\tau: \mathbb{R}_6[x] \rightarrow \frac{\mathbb{R}^6}{\mathbb{C}}$.
 I. Ne obstaja injektivna preslikava $\varphi: \frac{\mathbb{R}^6}{\mathbb{C}} \rightarrow \frac{\mathbb{R}^6}{\mathbb{C}}$.

4. Opazujemo vrednosti poljubne dvakrat zvezno odvedljive funkcije $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ na ploskvi $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$. Vemo, da na tej ploskvi doseže f svojo največjo vrednost v točki $a = (1, 0, 1)$ in svojo najmanjšo vrednost v točki $b = (0, \sqrt{2}, 0)$. Katere od naslednjih trditev so resnične?

- (grad g) = $(2x, 4y, 6z)$
 A. Gradient funkcije f v točki a in gradient funkcije f v točki b sta oba enaka 0.
 B. Gradient funkcije f v točki a in gradient funkcije f v točki b sta vzporedna.
 C. Gradient funkcije f v točki a in gradient funkcije f v točki b sta pravokotna.
 D. Gradient funkcije f v točki a je vzporeden vektorju $(1, 2, 3)^T$.
 E. Gradient funkcije f v točki a je vzporeden vektorju $(1, 0, 6)^T$.
 F. f ima v točki a lokalni maksimum.
 G. f ima v točki b lokalni minimum.
 H. O lokalnih ekstremih funkcije f v točki a ne moremo trditi ničesar.
 I. $f(a) \geq f(b)$

(grad g)(a) = $(2, 0, 6)$
 (grad g)(b) = $(0, 4\sqrt{2}, 0)$ $\nabla \perp$

$3C = PCP^{-1}$
 $\det(3C) = 3^3 \det C$
 $\det(PCP^{-1}) = \det C \rightarrow \det C = 0$
 ni dovolj

Pri vsaki od nalog 5-7. dobro utemeljite vse svoje odgovore in korake pri sklepanju. Za odgovore brez utemeljitev ne boste prejeli točk.

5. (20 točk) Naj bo A simetrična pozitivno definitna $n \times n$ matrika in I identična matrika velikosti $n \times n$.

A. Pokažite, da je matrika $A \otimes (2I)$ tudi simetrična pozitivno definitna matrika.

$A \dots$ l.v.r. $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$
 $2I$ l.v.r. $2, \dots, 2 > 0$
 $A \otimes (2I)$ ima l.v.r. $2\lambda_1, \dots, 2\lambda_n > 0$
 $2\lambda_{n+1}, \dots, 2\lambda_{2n} > 0$
 $\Rightarrow A \otimes 2I$ PD

B. Naj bo $A = LL^T$ razcep Choleskega matrike A . Zapišite in utemeljite razcep Choleskega matrike $A \otimes (2I)$.

$A = LL^T$ L sp. Δ
 $2I = (\sqrt{2} I) (\sqrt{2} I)^T$
 $A \otimes 2I = (LL^T) \otimes (\sqrt{2} I)(\sqrt{2} I)^T =$
 $= (L \otimes \sqrt{2} I) (L \otimes \sqrt{2} I)^T \leftarrow \text{to je Cholesky}$

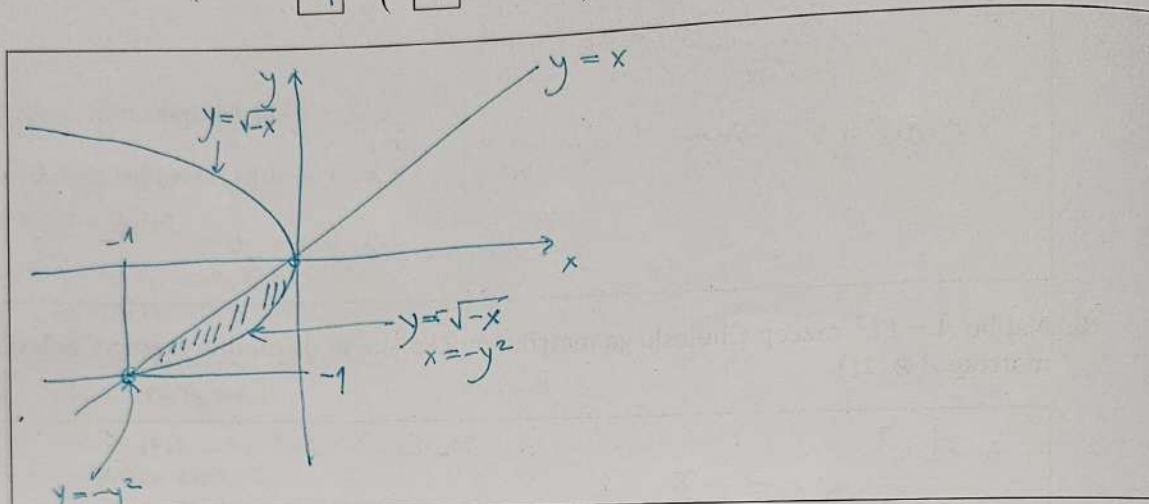
6. (10 točk) Naj bo V vektorski prostor, B in C dve njegovi poljubni bazi in $\tau: V \rightarrow V$ neničelna linearna preslikava. Naj bo B matrika, ki pripada τ iz baze B v bazo B in naj bo C matrika, ki pripada τ iz baze C v bazo C . Ali je lahko $B = 3C$?

Če da, navedite primer takšnega vektorskega prostora V in preslikave τ . Če ne, zapišite utemeljitev.

$B = PCP^{-1}$, kjer $P = [p_1 \dots p_n]$
 $\Rightarrow B$ in C podobni
 $\Rightarrow$ imata iste l.vrednosti
 Ker če $C = 3B$, bi imela C l.vrednosti $3 \times$ (l.v.r. B)
 $\Rightarrow$ vsaj 0
 $\Rightarrow \tau$ ničelna $\rightarrow$

7. (20 točk) Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omejeno območje, ki ga omejujeta krivulji $y = x$ in $x = -y^2$. V spodnjih deset kvadratkov zapišite ustrezne meje integralov in funkcij, ki jih integriramo. Poleg tega razločno narišite sliko območja D in utemeljite vse korake pri določanju mej v integralih.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\boxed{-1}}^{\boxed{0}} \left(\int_{\boxed{-\sqrt{-x}}}^{\boxed{x}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\boxed{-1}}^{\boxed{0}} \left(\int_{\boxed{y}}^{\boxed{-y^2}} f(x, y) dx \right) dy.$$



8. (20 točk) Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Želimo poiskati najmanjšo vrednost $\|\vec{x}\|^2$ med vsemi vektorji, za katere je $A\vec{x} \geq \vec{b}$.

(5 točk) Zapišite Lagrangeovo funkcijo omenjenega problema in njeno definicijsko območje.

$$L(\vec{x}, \vec{\mu}) = \|\vec{x}\|^2 - \vec{\mu}^T (\vec{b} - A\vec{x})$$

$(\vec{\mu} \leq 0 \text{ ali ne})$

(5 točk) Zapišite prirejeno funkcijo omenjenega problema in njeno definicijsko območje.

$$K(\vec{\mu}) = \inf_{\vec{x}} \{ \|\vec{x}\|^2 - \vec{\mu}^T (\vec{b} - A\vec{x}) \} =$$

$$\boxed{\vec{\mu} \leq 0} \quad = -\vec{\mu}^T \vec{b} + \inf_{\vec{x}} \{ \|\vec{x}\|^2 + \vec{\mu}^T A \vec{x} \}$$

(10 točk) Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje omenjenega problema.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 \rightarrow 2\vec{x}^T + \vec{\mu}^T A = \vec{0}^T$$

onj. $\rightarrow A\vec{x} \geq \vec{b}$
 prirej. $\rightarrow \vec{\mu} \leq 0$
 dopol. prirej. $\rightarrow \vec{\mu}^T (\vec{b} - A\vec{x}) = 0$