

Ime in priimek: Jolana

Vpisna številka: Obak

IZPIT IZ MATEMATIKE 1, TEORETIČNI DEL

20. januar 2023

(Na teoretičnem delu je 6 nalog, ki so skupaj vredne 105 točk.
Za 100% je potrebno izbrati 100 točk.)

1. (15 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ poljubna matrika in $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ identična matrika. Ali je

$$V := \{\alpha A + \beta I : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

vektorski prostor ali ne? Odgovor dobro utemeljite.

DA. $V_1 = \alpha_1 A + \beta_1 I$
 $V_2 = \alpha_2 A + \beta_2 I$

$$\lambda V_1 + \mu V_2 = \lambda(\alpha_1 A + \beta_1 I) + \mu(\alpha_2 A + \beta_2 I) \\ = (\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)A + (\lambda\beta_1 + \mu\beta_2)I \\ \in V$$

ALI PA: $V = \text{Lin}\{A, I\} \Rightarrow$ je vekt. pr.

2. (15 točk) Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

neničelne

Zapišite primer matrike X , za katero velja $\langle A, X \rangle_F = 0$.

$$X = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

vsota zvezdic je 0.

3. (30 točk) Naj bo

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ter U in V poljubni 5×5 ortogonalni matriki. Označimo

$$A = USV^T \text{ in } B = USU^T.$$

Za vsako od naslednjih petih lastnosti v levem stolpcu tabele razmislite, ali jo lahko določite za matriki A in B . V kolikor se je iz zgornjih podatkov ne more določiti, jasno prekrižajte polje. V kolikor jo lahko, izračunajte vrednosti in jih zapišite v posamezno polje.

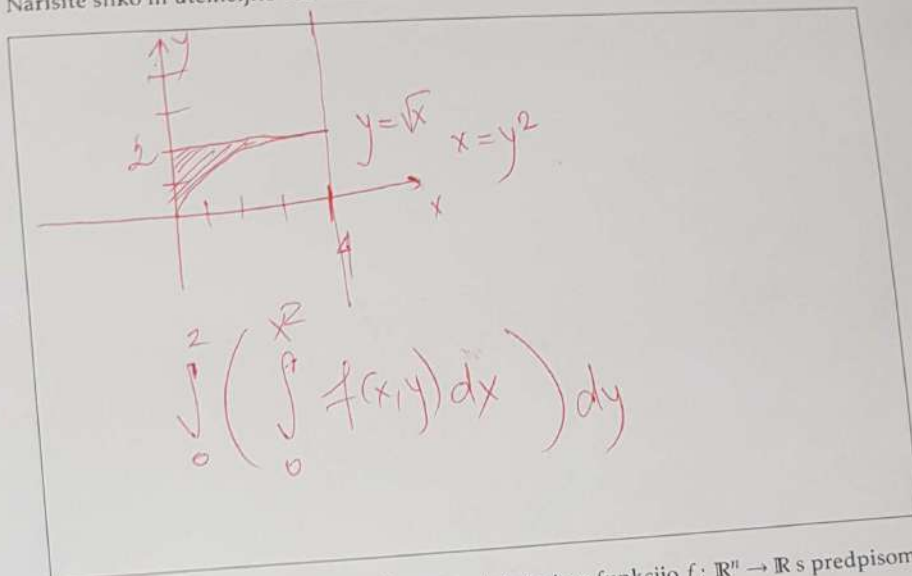
	$A = USV^T$	$B = USU^T$
sled		16
lastne vrednosti		0, 1, 3, 3, 9
X_1 najboljša aproksimacija ranga 1	$U \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V^T$ $g U^{(3)} V^{(3)T}$	$U \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^T$ $g U^{(3)} U^{(3)T}$

↑
↑
tretji stolpec
U ali V

4. (15 točk) Zamenjajte vrstni red integracije v dvojnem integralu

$$\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy \right) dx.$$

Narišite sliko in utemeljite vse korake.



5. (15 točk) Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ in definirajmo funkcijo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(\vec{x}) = \|\vec{b} - A\vec{x}\|^2.$$

Izračunajte Hessejevo matriko funkcije f .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} &= 2(\vec{b} - A\vec{x})^T (-A) \\ \frac{\partial^2 f}{(\partial \vec{x})^2} &= 2 \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(A^T (\vec{b} - A\vec{x}) \right) = \\ &= -2A^T A \end{aligned}$$

6. (15 točk) Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje za naslednji problem

$$\text{minimizirajte}_{x,y,z} \quad xz + 2y^2 + e^z$$

$$\text{pri pogojih} \quad x^2 - z^2 \geq 4$$

$$x + y + z = 1$$

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xz + 2y^2 + e^z - \lambda(x + y + z - 1) - \mu(4 - x^2 + z^2)$$

$$L_x = z - \lambda + 2\mu x = 0$$

$$L_y = 4y - \lambda = 0$$

$$L_z = e^z + x - \lambda - 2\mu z = 0$$

$$\text{compl. sl.} \quad \mu(4 - x^2 + z^2) = 0$$

$$\begin{aligned} \mu &\leq 0 \\ x^2 - z^2 &\geq 4 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. (15 točk) Naj bo